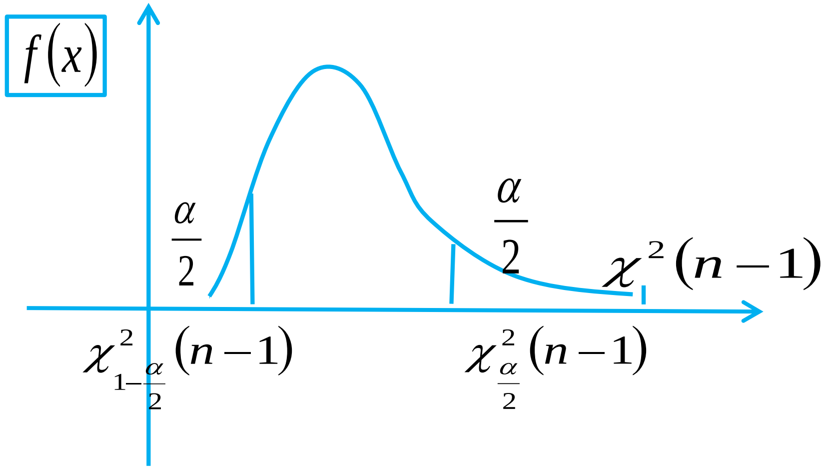
(2)一个总体σ^2的χ^2检验

$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ $\overset{\sigma^2=\sigma_0^2\,?}{\longleftrightarrow}$ $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ S^2

（革新前后，某地区和全国，某年和历年，部分和全体等的方差比较）

建立假设：$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ （问有无差别，有无不同等，做双侧检验）

$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$



检验统计量：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域：$\left(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$

结论：计算统计量的值，落入拒绝域拒绝 H_0，反之 接受 H_0。

例4. 设某车间生产的滚珠直径 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，先从某日生产的滚珠中抽取**9**个，测得样本方差为 $s^2 = 0.25^2$ ，在显著性水平**0.05**下可否认为总体方差 $\sigma^2 = 0.36^2$ ？ $\left(\chi^2_{0.025}(8) = 17.535, \chi^2_{0.975}(8) = 2.18\right)$

解： $H_0: \sigma^2 = 0.36^2$ ，$H_1: \sigma^2 \neq 0.36^2$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(9-1)0.25^2}{0.36^2} = 3.858$$

拒绝域：$\left(0, \chi^2_{0.975}(8) = 2.18\right) \cup \left(\chi^2_{0.025}(8) = 17.535, +\infty\right)$ $\quad 2.18 < 3.858 < 17.535$

可以认为总体方差$\sigma^2 = 0.36^2$.

单侧检验：

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ （大概率事件作为H_0，H_0必含有等号）

$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$ （一般问是否高于，是否优于等，问题作为H_1）

此问法表示有证据$\sigma^2<\sigma_0^2$不会发生

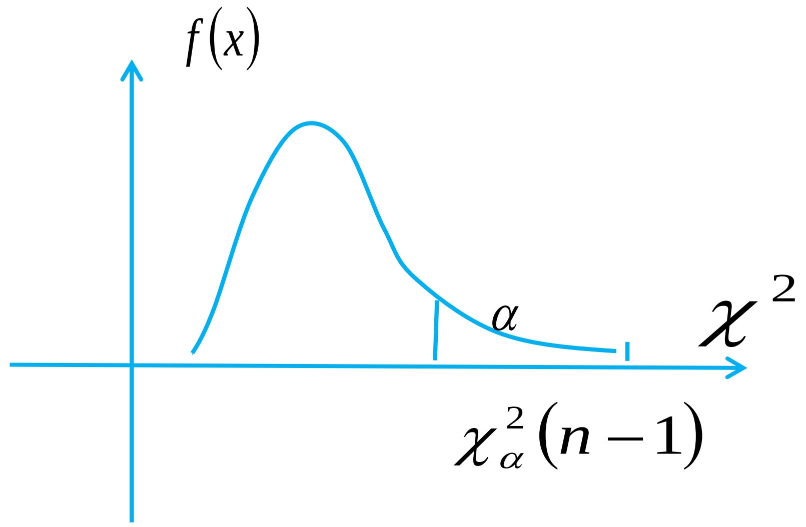
$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$

$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$

$$\left(\begin{array}{c} P\left(\sigma^2<\sigma_0^2\right)=1-\alpha \\ P\left(\sigma^2>\sigma_0^2\right)=\alpha \end{array}\right)$$

此问法表示不关心$\sigma^2<\sigma_0^2$发生与否

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\begin{cases} >\chi_\alpha^2(\mathrm{n-1})\text{拒绝}\mathrm{H}_0 \\ <\chi_\alpha^2(\mathrm{n-1})\text{接收}\mathrm{H}_0 \end{cases}$$



分位点$\chi_\alpha^2(n-1)$，方向与H_1相同。

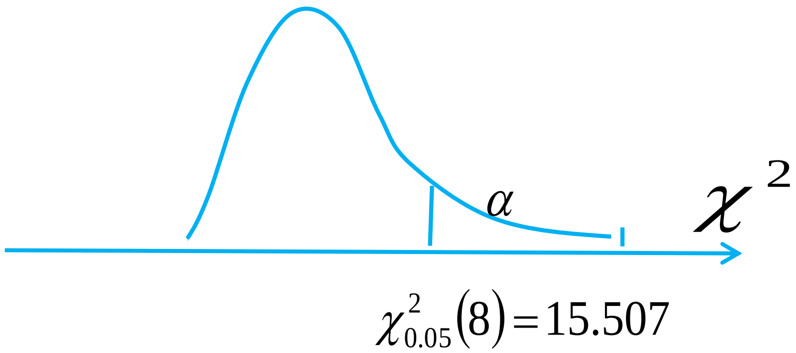
（单侧检验$\sigma^2<\sigma_0^2$检验与此类似）

例5. 设某车间生产的滚珠直径 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，方差小于0.36^2为合格品。从出厂的一批滚珠中抽取9个，测得样本方差为 0.4^2，在显著性水平$\alpha=0.05$下检验这批产品是否合格？

解： $H_0 : \sigma^2 \le 0.36^2 ; H_1 : \sigma^2 > 0.36^2$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(9-1)0.4^2}{0.36^2} = 9.87$$

拒绝域：$(0, \chi^2_{0.95}(8) = 2.733)$



(3)两个总体方差的F检验

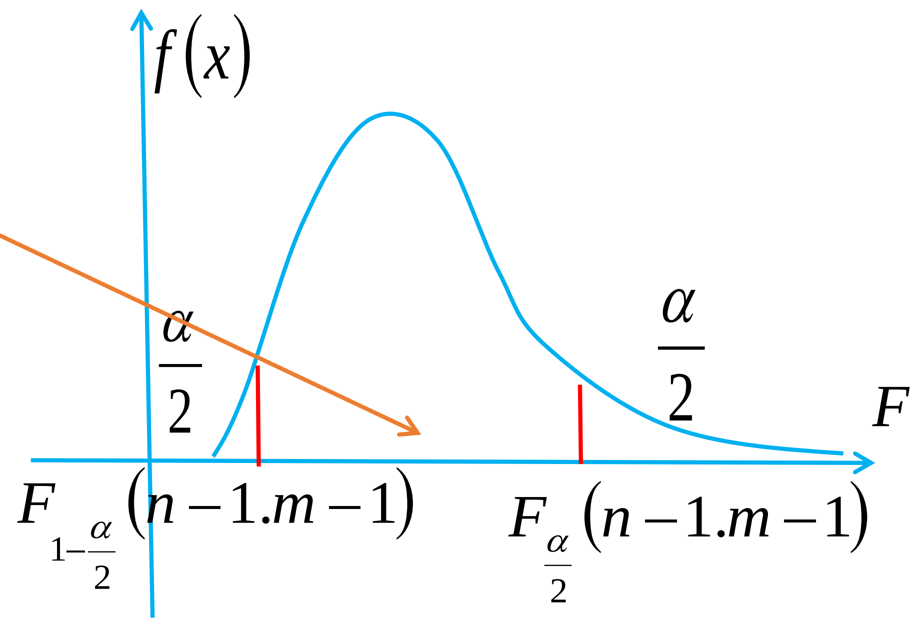
$X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ $\xleftrightarrow{\sigma_1^2=\sigma_2^2\,?}$ $Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ S_1^2, S_2^2

建立假设： $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\Rightarrow$ $S_1^2\approx S_2^2$ $\Rightarrow$ S_1^2/S_2^2 不太大也不太小

$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

检验统计量： $F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

拒绝域： $\left(0, F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1.m-1)\right)\cup\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1.m-1), +\infty\right)$



结论：计算统计量的值，落入拒绝域拒绝H_0,反之，接受H_0.

例6. 甲乙两个铸造厂生产同一种铸件，假定两厂的铸件重量都服从正态分布，先从两厂的铸件中各抽取若干，分别测重量如下：

甲厂：**93.3,92.1,94.7,90.,1，95.6,90.0,94.7**

乙厂：**95.6,94.4,96.2,95.8,95.1,96.3**

取显著性水平$\alpha=0.05$，检验两厂铸件重量的方差是否存在显著性差异？

$$n_1 = 7,\ \ n_2 = 6,\ \ s_1^2 = 5.1357,\ \ s_2^2 = 0.323 \quad \left(F_{0.025}(5,6) = 5.99，F_{0.025}(6,5) = 6.977\right)$$

解：$H_0:\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

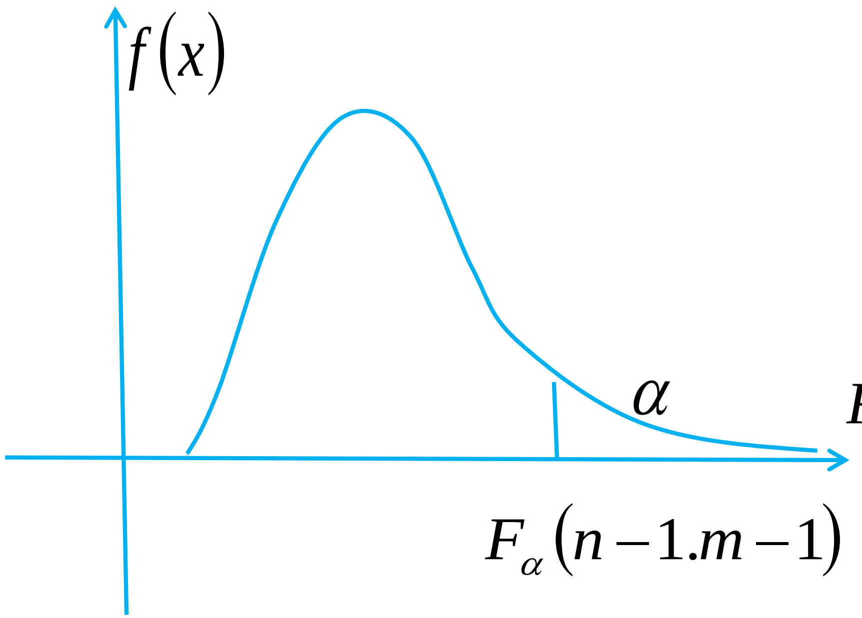
$$F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{5.1357}{0.323} = 15.9 > 6.977$$

拒绝H_0，两厂方差有显著差异。

单侧检验:

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ （问I厂方差是否高于II厂）

$H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$



$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ （能否确定问I厂方差不高于II厂）

$H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$ （等号永远在H_0）

$$\begin{pmatrix} P(\sigma_1^2\le\sigma_2^2)=1-\alpha \\ P(\sigma_1^2>\sigma_2^2)=\alpha \end{pmatrix}$$

$$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=S_1^2/S_2^2\begin{cases} >F_\alpha(n-1,m-1) & \text{拒绝}H_0 \\ <F_\alpha(n-1,m-1) & \text{接收}H_0 \end{cases}$$

例7. 甲，乙两机器生产的金属部件质量分别服从 $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ ，$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ 分布，现分别抽取容量 $n_1=60,\ n_2=40$ 的样本，测得部件质量的样本方差分别为 $s_1^2=15.46,\ s_2^2=9.66$ 。设两样本相互独立，其中 μ_1,σ_1^2 μ_1,σ_1^2 均未知，试在**0.05**的显著性水平下检验如下假设： $\left(F_{0.05}(59,39)=1.6471\right)$

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\ ，H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

解：
$$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{15.46}{9.66}=1.6004<1.6471$$

接受H_0，在0.05的显著性水平下认为原假设成立。

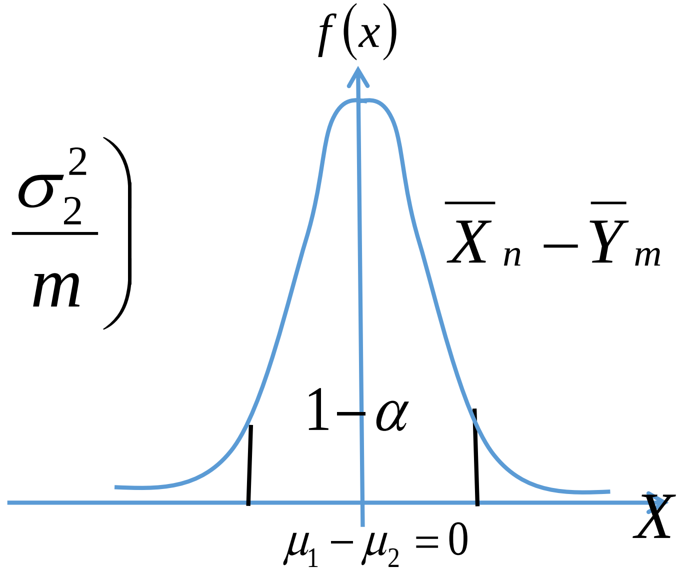
(4).两总体均数差的Z检验

$X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \xleftrightarrow{\mu_1 = \mu_2\,?} Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ $\quad \overline{X}, \overline{Y}$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \overline{X} - \overline{Y} \approx 0$$

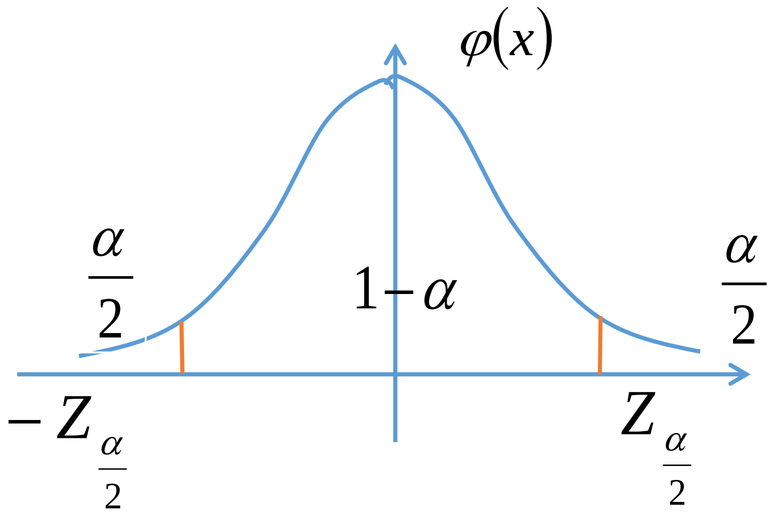
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$



$$Z = \left| \frac{\left(\overline{X}_n - \overline{Y}_m\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \right|$$

$$= \left| \frac{\left(\overline{X}_n - \overline{Y}_m\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \right| \begin{cases} > Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ 拒绝绝}_0 \\ < Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ 接收} H_0 \end{cases}$$



例**8.** 有甲乙两种品种的作物，分别各用**10**块地试验，根据收集到的数据得到平均产量 $\overline{x}=30.97$ 和 $\overline{y}=21.97$ 。已知这两种作物的产量分别服从 $N(\mu_1,27)$ ，$N(\mu_2,12)$ 的正态分布，问在**0.05**的显著性水平下，这两种作物的平均产量是否有显著差异？ $Z_{0.025}=1.96$

解：
$$H_0:\mu_1=\mu_2$$
$$H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

$$Z=\left|\frac{\left(\overline{X}_n-\overline{Y}_m\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\right|=\left|\frac{\left(\overline{X}_n-\overline{Y}_m\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\right|$$

$$=\left|\frac{30.97-21.97}{\sqrt{\frac{27}{10}+\frac{12}{10}}}\right|=4.5573>1.96$$

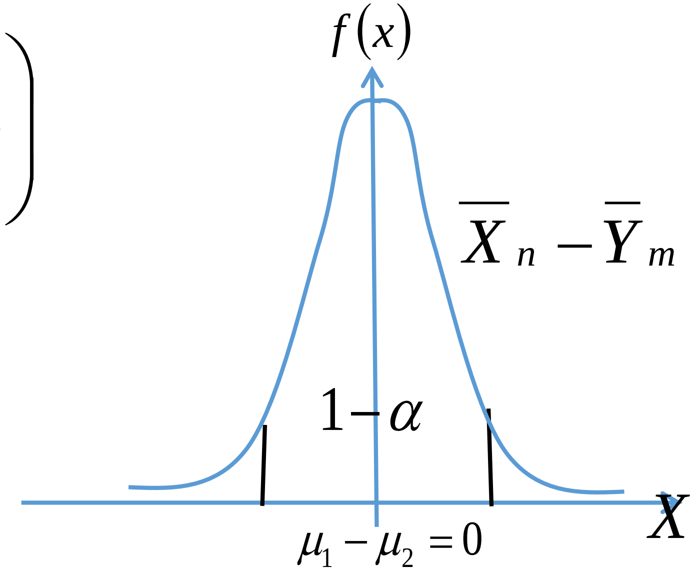
可以认为有差别。

两总体均数差的t检验 $\left(\sigma_1^2=\sigma_2^2\right)$

$$H_0:\mu_1=\mu_2$$

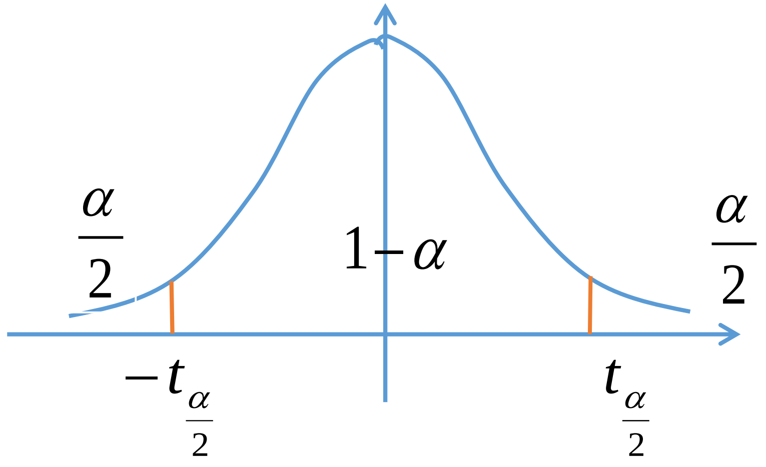
$$H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$



$$t=\frac{\left|\left(\overline{X}_n-\overline{Y}_m\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)\right|}{s_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$$

$$=\frac{\left|\left(\overline{X}_n-\overline{Y}_m\right)\right|}{s_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\begin{cases}>t_{\frac{\alpha}{2}}\text{拒绝}H_0\\<t_{\frac{\alpha}{2}}\text{接受}H_0\end{cases}$$



例**8.** 某工厂有甲乙两个分厂，公司管理层认为，甲分厂工人的生产效率高于乙分厂工人的生产效率。现从甲分厂抽取**10**名工人，生产某种工件，测得平均所用时间 $\overline{x}=20$分钟，样本标准差 $s_1=4$分钟，从乙分厂抽取**20**名工人，完成相同的工作，测得平均所用时间 $\overline{y}=25$分钟，样本标准差 $s_2=5$分钟，假设工人生产这种工件所用时间服从正态分布，且总体方差相等。在**0.01**的显著性水平下，是否可以认为公司管理层的判断是可靠的。$t_{0.01}(28)=2.47$

解：$H_0:\mu_1=\mu_2$； $H_1:\mu_1<\mu_2$

$$t=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}=\frac{(20-25)-0}{\sqrt{22.11\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)}}$$

$$s_w^2=\frac{(10-1)4^2+(20-1)5^2}{10+20-2}=22.11$$

可靠

$$=-2.75<-2.47$$