§3-1 法拉第电磁感应定律；动生电动势、感生电动势

3-1-1 法拉第电磁感应定律

3-1-2 动生电动势、感生电动势

电 流 $\overset{\text{产 生}}{\rightleftarrows}$ 磁 场

?

电磁感应

1831年法拉第

$\downarrow$ 实验

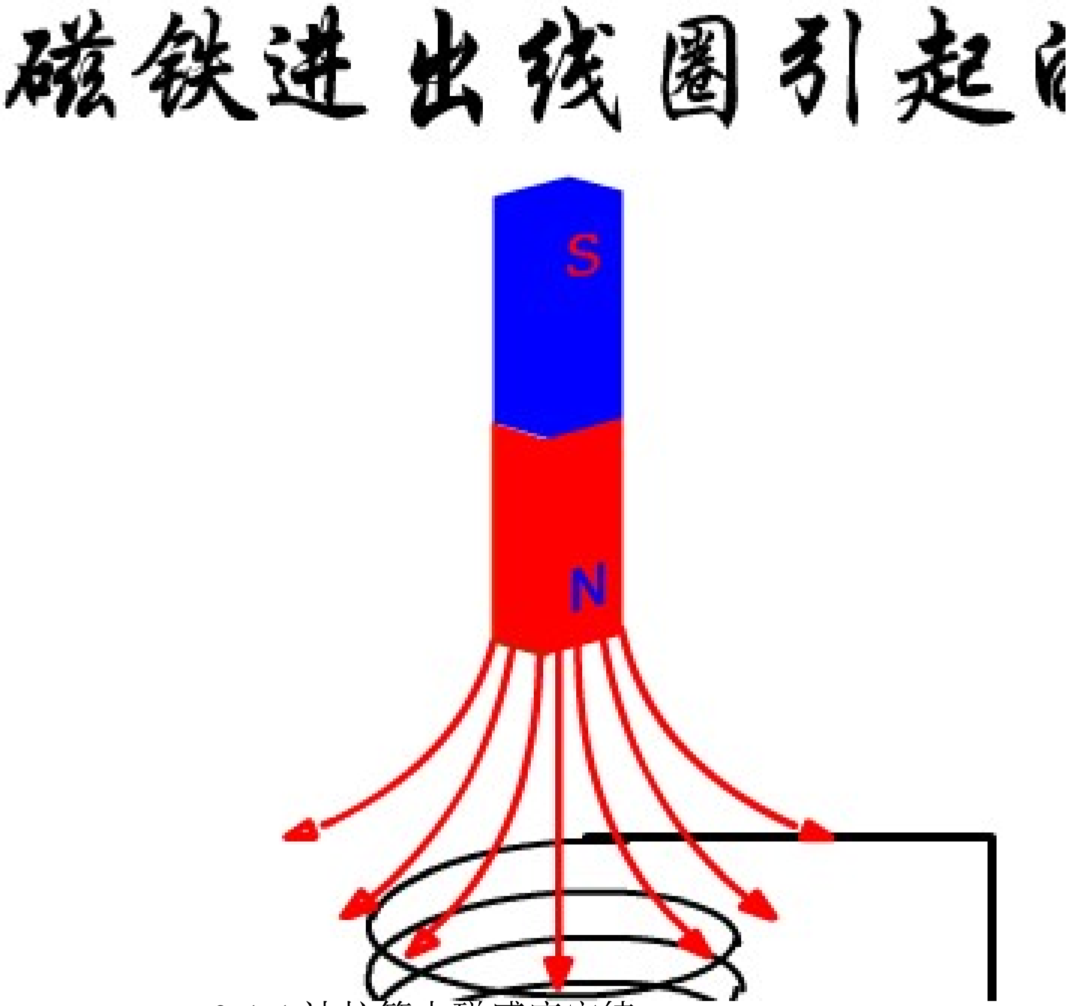
闭合回路 Φ_m 变化

$\downarrow$ 产生

感应电流

§3-1-1 法拉第电磁感应定律

一. 电磁感应现象



法拉第得出产生感应电流的五种情况

1.变化着的电流　　2.变化着的磁场

3. 运动中的恒定电流　　4.运动着的磁铁

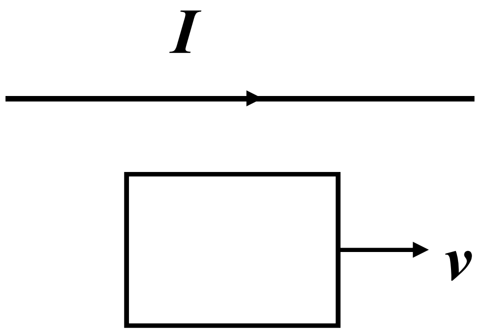
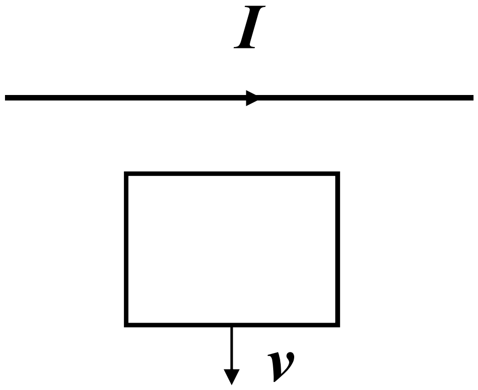
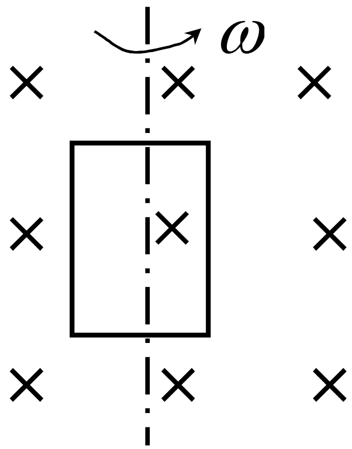
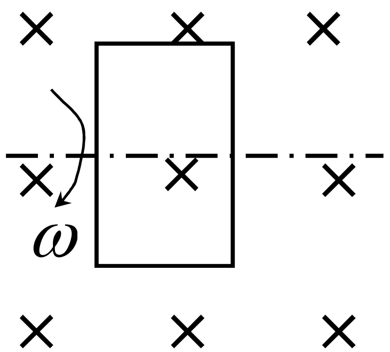
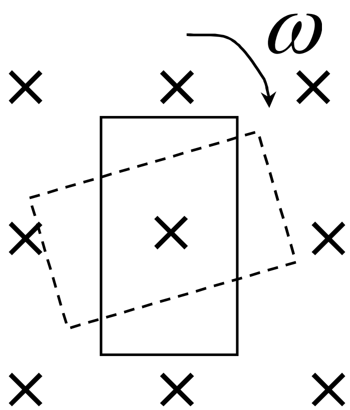
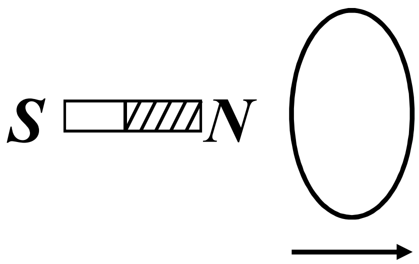
5.在磁场中运动的导体

产生电磁感应现象的条件：

穿过回路的磁通量发生变化。若要产生感应电流，还要求回路必须是闭合的。

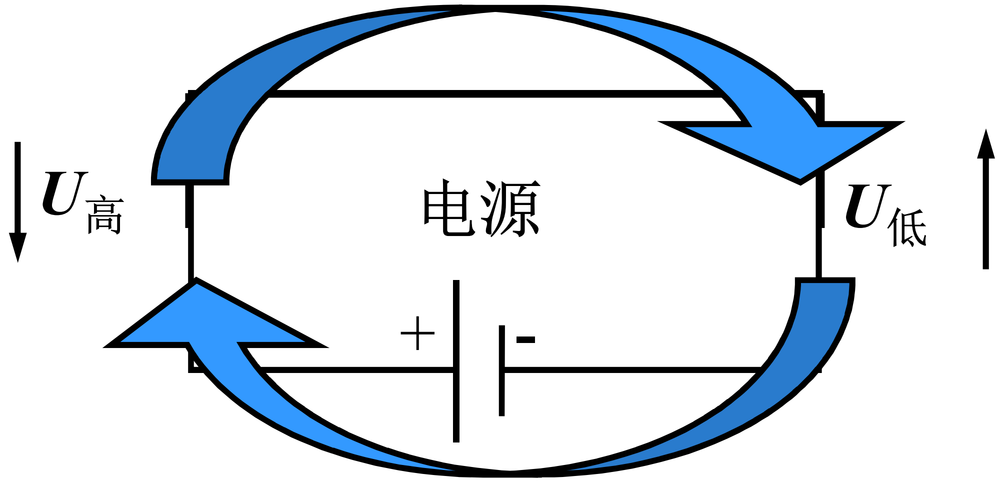
感应电流与原电流本身无关，而是与原电流的变化有关。

从本质上讲，电磁感应现象是使导体或导体回路内部产生了非静电性电场，从而产生感应电动势，感应电流只是回路中存在感应电动势的一种外在表现。


I
v

I
v

ω

ω

ω

S
N

电动势

恒定电流必须由导体两端的稳定电势差维持



靠非静电力把正电荷不断从低电势处运到高电势处。

电动势定义

定义1：把单位正电荷从电源的负极通过内电路移到正极，非静电力所作的功——电源电动势 $\mathscr{E}$ 。

定义2：作用在单位正电荷上的非静电力——非静电性场的场强$\boldsymbol{E}_k$ 。

$$\mathscr{E} = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

当整个回路中都有非静电力时

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

二、法拉第电磁感应定律

导体回路中产生的感应电动势的大小，与穿过导体回路的磁通量对时间的变化率成正比。

$$\mathcal{E}_i = -k\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$$

感应电动势的方向

楞次定律

感应电动势大小

$$\mathcal{E}_i = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}\right|$$

N 匝线圈情况：$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_i\right) = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}}$

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N$$

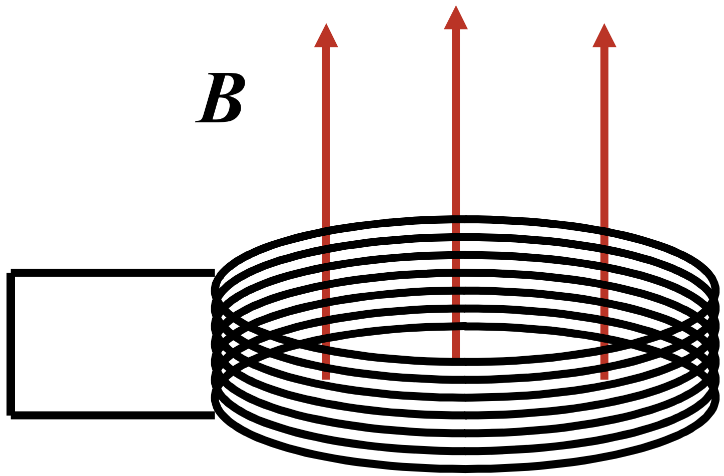
全磁通

若N 匝线圈相同：

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$$

$$\Psi = N\Phi$$

磁通链数



设回路电阻$\boldsymbol{R}$，则电流强度

感应电流 $$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{N}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$$

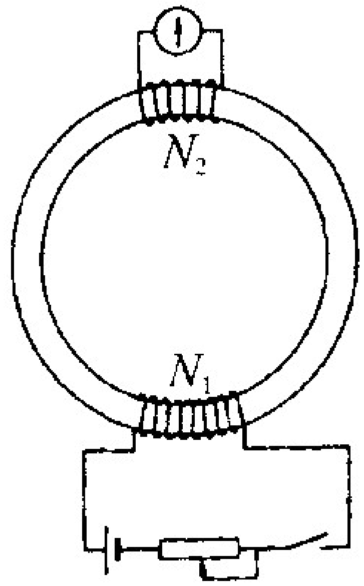
在$\boldsymbol{t_1}$到$\boldsymbol{t_2}$时间间隔内通过导线任一截面的感应电量

$$(\mathrm{d}q = I_i \mathrm{d}t)$$

$$q = \int_{t_2}^{t_2} I_i \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_{m_1}}^{\Phi_{m_2}} \mathrm{d}\Phi_m$$

$$= \frac{1}{R}(\Phi_{m_1} - \Phi_{m_2})$$

例. 一组线圈匝数N_1，与电池相连。一组线圈匝数N_2，与“冲击电流计”相连。电键合上使N_1中的电流从零增大到时I_1，冲击电流计测出通过它的电量Q。



求：铁环中的磁感应强度B_1.

已知环的横截面为S，N_2总电阻R.

解： 设环内的磁感应强度$B(t)$

一匝线圈的磁通量为 $\Phi(t) = SB(t)$

N_2回路中的电流为 $i(t) = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{N_2 S}{R}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

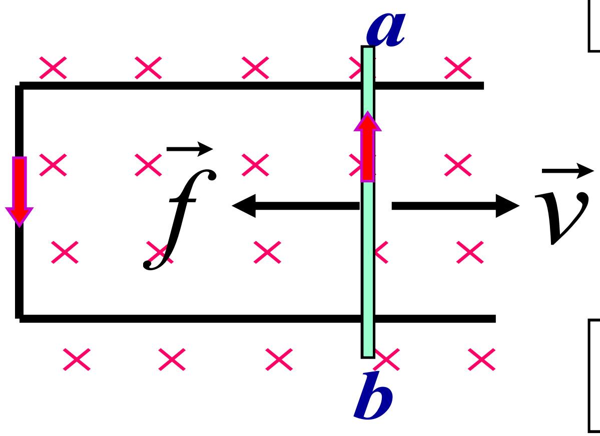
$$\boxed{B_1 = \frac{QR}{N_2 S}}$$

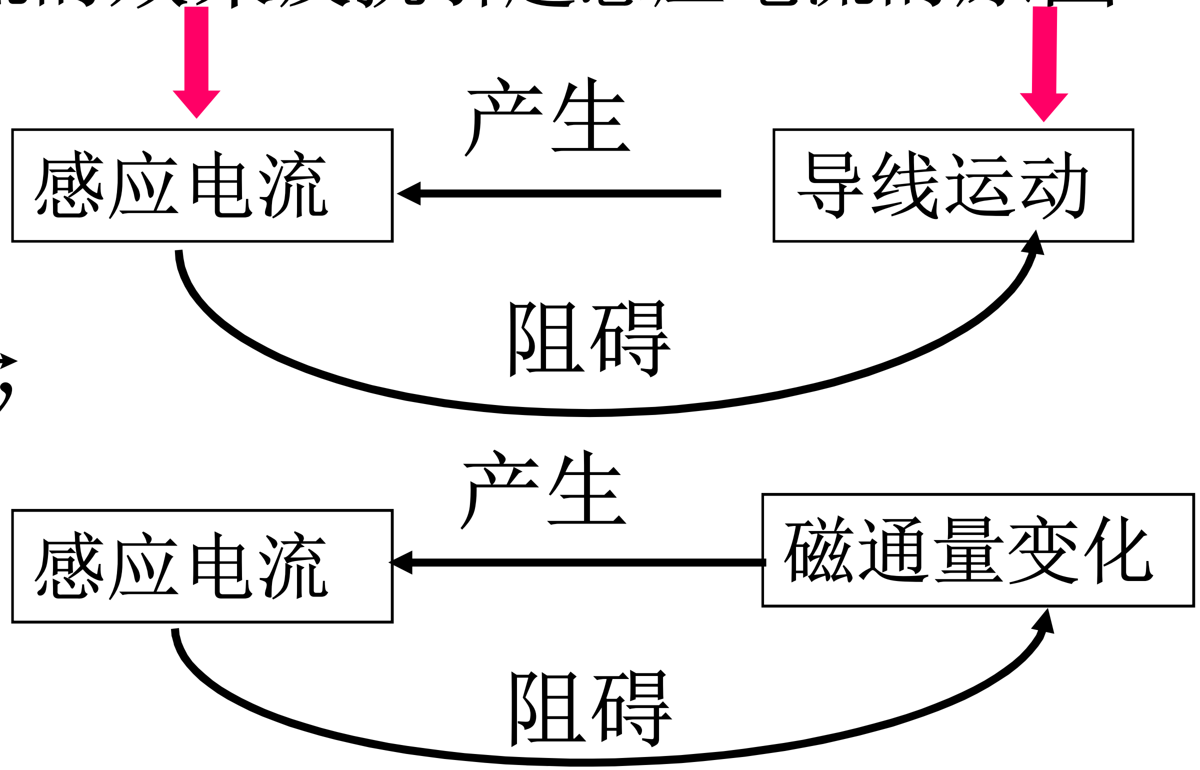
$$Q = \int_0^{t_0} i\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \frac{N_2 S}{R}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{N_2 S}{R}\int_0^{B_1}\mathrm{d}B = \frac{N_2 S B_1}{R}$$

三、楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场来阻止或补偿引起感应电流的磁通量的变化。

感应电流的效果反抗引起感应电流的原因



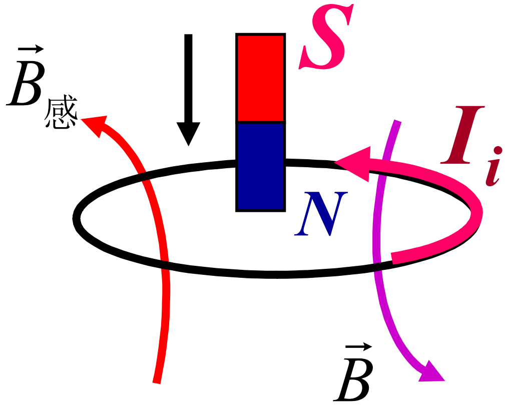


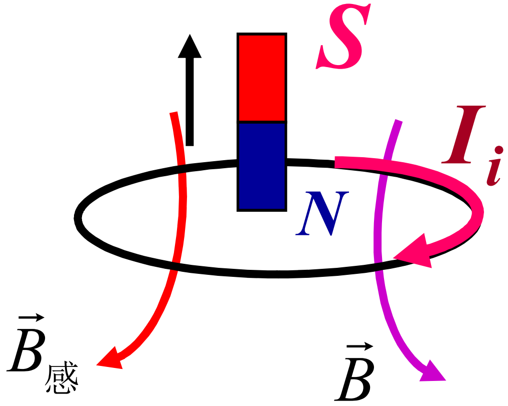
判断感应电流的方向：

1、判明穿过闭合回路内原磁场的方向；

2、根据原磁通量的变化 $\Delta\Phi_m$，按照楞次定律的要求确定感应电流的磁场的方向；

3、按右手法则由感应电流磁场的方向来确定感应电流的方向。





$\Phi_m \uparrow$ $\quad \vec{B}_{感}$与$\vec{B}$反向

$\Phi_m \downarrow$ $\quad \vec{B}_{感}$与$\vec{B}$同向

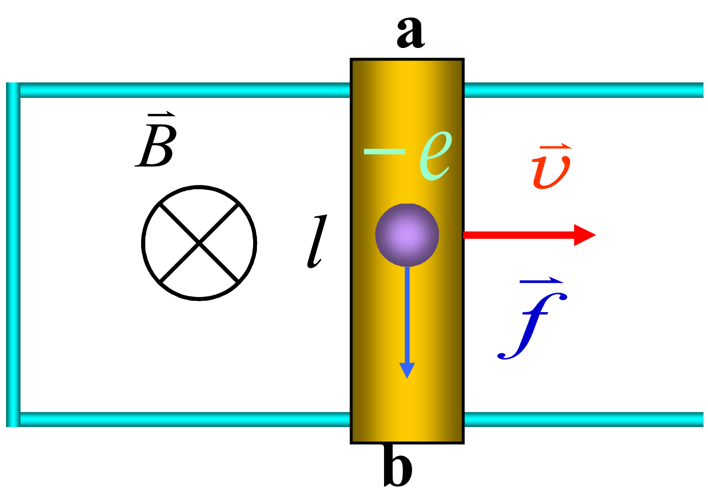
§3-1-2 动生电动势、感生电动势

两种不同机制

相对于实验室参照系，若磁场不变，而导体回路运动（切割磁感应线）— 动生电动势

相对于实验室参照系，若导体回路静止，磁场随时间变化—感生电动势

一. 动生电动势



$$\mathcal{E}_i = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = Blv$$

电子受洛伦兹力 $\vec{f} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$ —— 非静电力 $\vec{F}_K$

它驱使电子沿导线由***a***向***b***移动。

使***b*** 端出现过剩负电荷，***a*** 端出现过剩正电荷 。

动生电动势的公式

非静电力 $\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$

定义 $\vec{E}_k$ 为非静电场强 $\vec{E}_k = \dfrac{\vec{F}_m}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$

由电动势定义 $\mathcal{E}_i = \int_-^+ \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

运动导线***ab***产生的动生电动势为

$$\mathcal{E}_i = \int_-^+ \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

磁场中的运动导线成为电源，非静电力是洛伦兹力

一般情况

导线是曲线，磁场为非均匀场。

导线上各线元 $\mathrm{d}\vec{l}$ 上的速度 $\vec{v}$ 、$\vec{B}$ 各不相同

$\mathrm{d}\vec{l}$ 上的动生电动势

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

整个导线***L***上的动生电动势

$$\mathcal{E}_i = \int \mathrm{d}\varepsilon_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 计算动生电动势
  - 分类
    - 均匀磁场
      - 平动
      - 转动
    - 非均匀磁场
  - 方法
    - $\mathcal{E}_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$
    - $\mathcal{E}_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

均匀磁场　平动

例　已知: $\vec{v}, \vec{B}, \alpha, L$ 求: $\mathcal{E}$

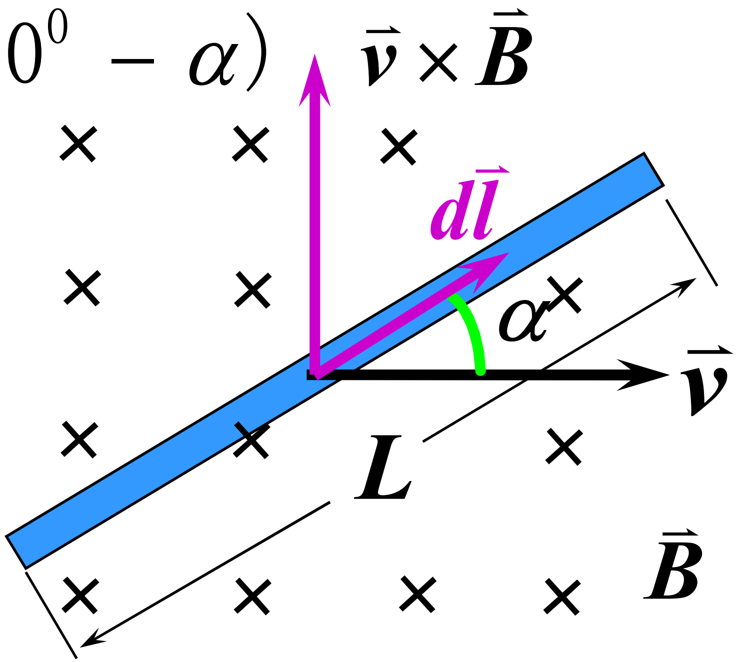
解: $\mathrm{d}\,\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$$= vB \sin 90^0 \mathrm{d}l \cos(90^0 - \alpha)$$

$$= Bv \sin\alpha \,\mathrm{d}l$$

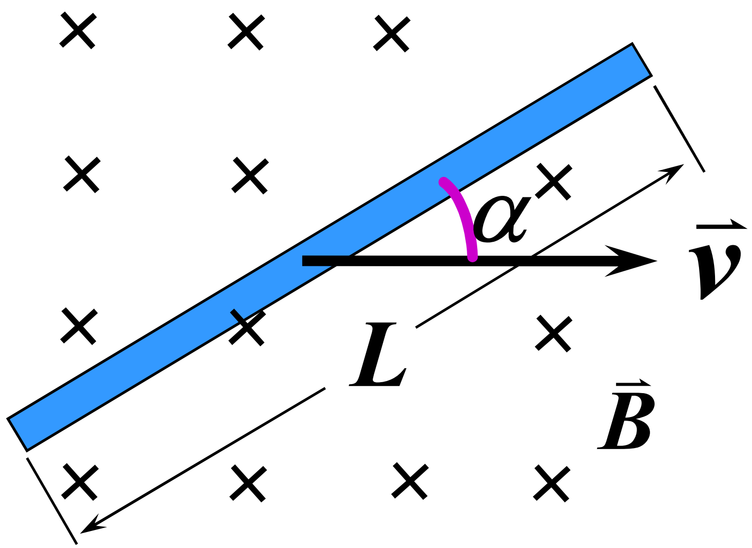
$$\varepsilon = \int_0^L Bv \sin\alpha \,\mathrm{d}l$$

$$= BvL \sin\alpha$$

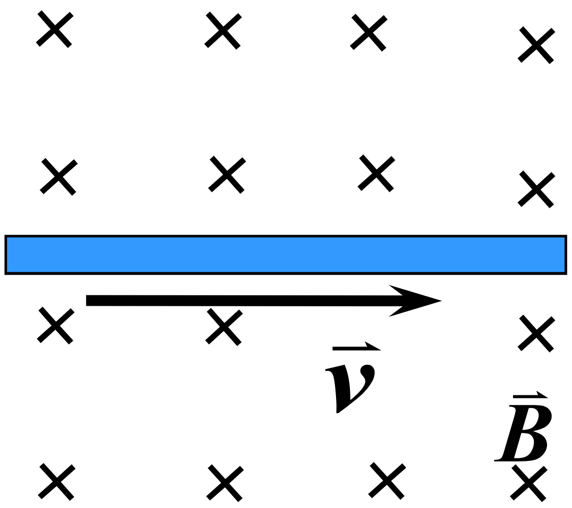


典型结论

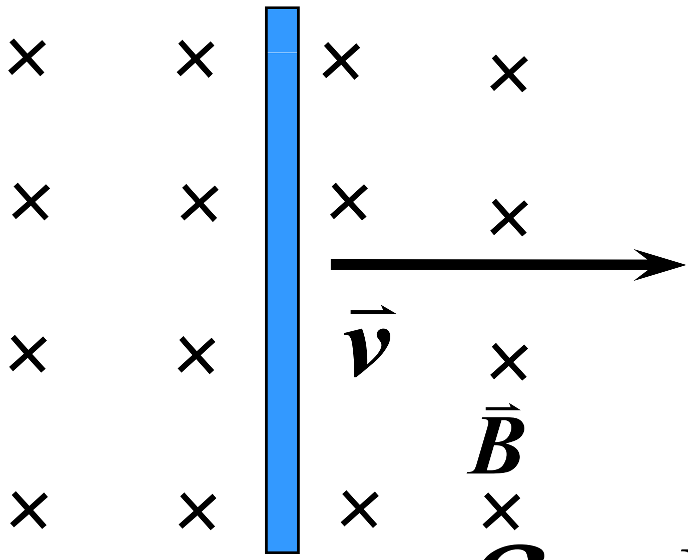
$$\mathcal{E} = BvL\sin\alpha$$



特例

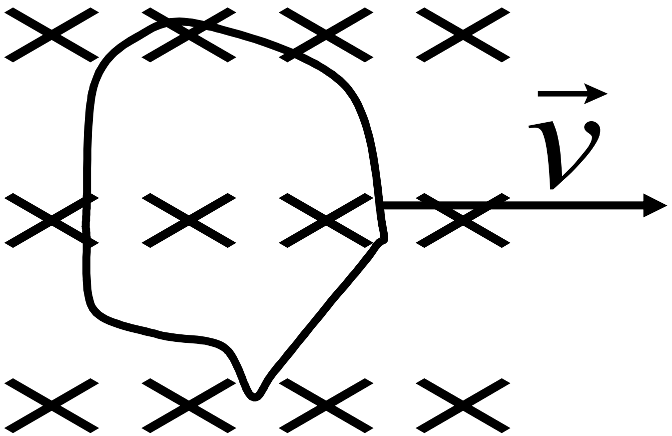


$$\mathcal{E} = 0$$



$$\mathcal{E} = BvL$$

均匀磁场　　闭合线圈平动

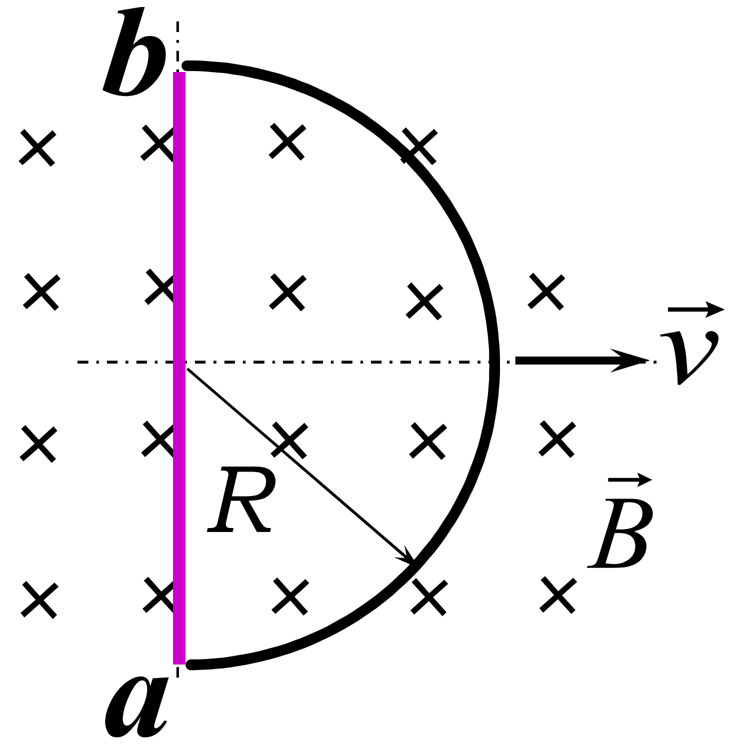


$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

例　有一半圆形金属导线在匀强磁场中作切割磁感应线运动。已知：$\vec{v}$, $\vec{B}$, R.

求：动生电动势。

解：方法一



作辅助线，形成闭合回路

$$\mathcal{E}_i = 0$$

$$\varepsilon_{半圆} = \varepsilon_{\overline{ab}} = 2RBv$$

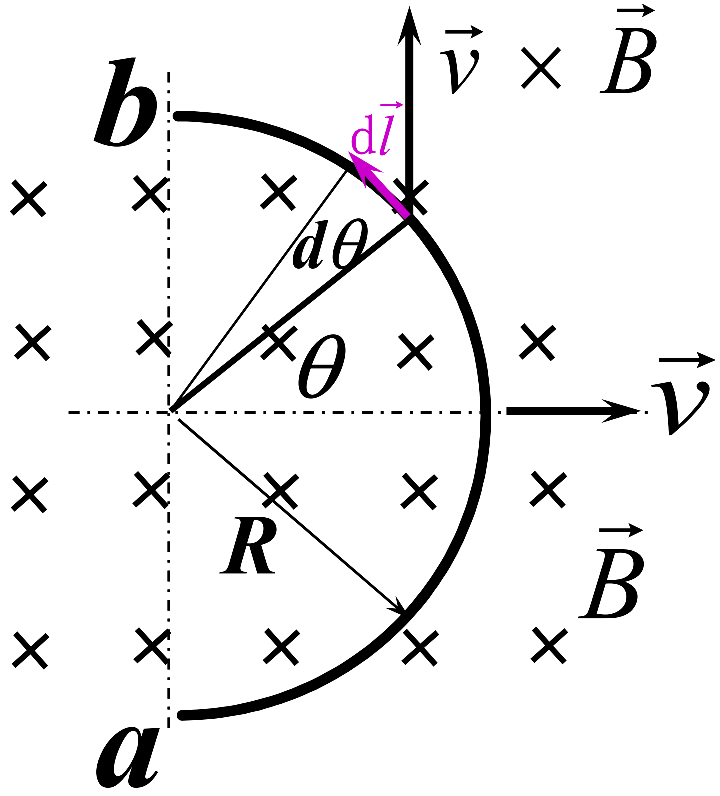
方向：$a \rightarrow b$

例　有一半圆形金属导线在匀强磁场中作切割磁感应线运动。已知：$\vec{v}, \vec{B}, R.$

求：动生电动势。

解：方法二

$$dl = Rd\theta$$



$$\begin{aligned} d\varepsilon &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= vB \sin 90^0 dl \cos\theta \end{aligned}$$

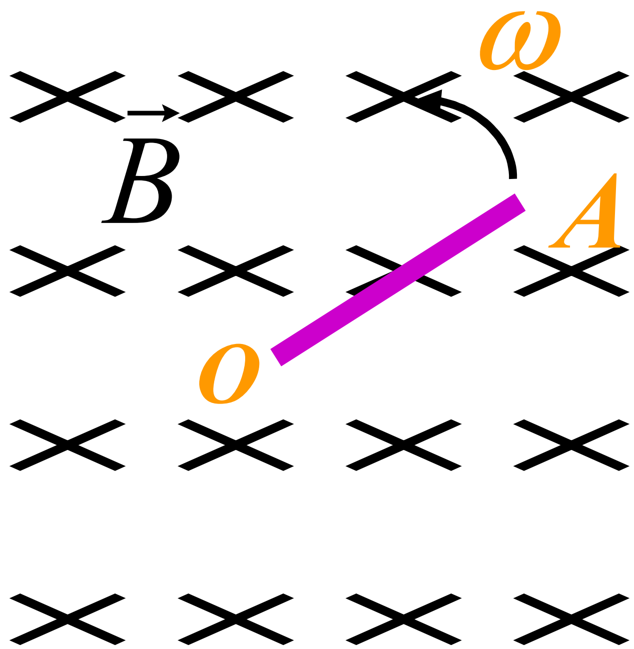
$$\begin{aligned} \varepsilon &= vBR\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \\ &= vB2R \end{aligned}$$

方向：$a \rightarrow b$

均匀磁场　　转动

例　如图，长为L的铜棒在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，以角速度 ω 绕O轴转动。

求：棒中感应电动势的大小和方向。



解：方法一　在距O点为l处取微元$\mathrm{d}l$，方向$O \longrightarrow A$

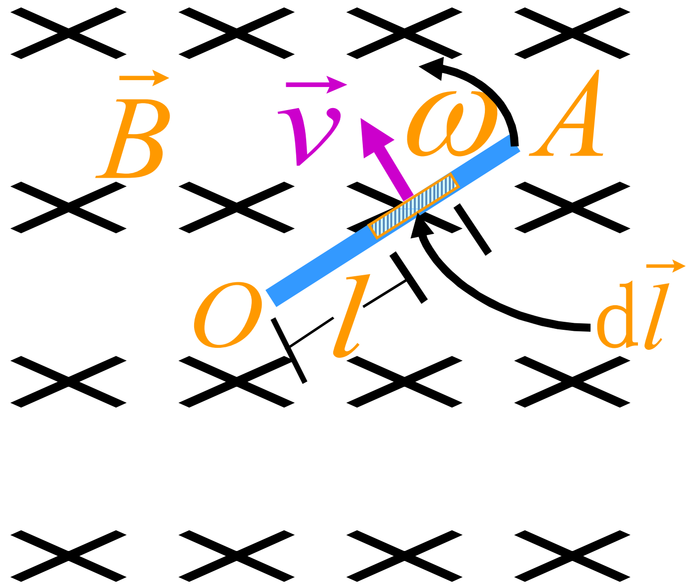
$$\mathrm{d}\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -Bv\mathrm{d}l = -Bl\omega\mathrm{d}l$$

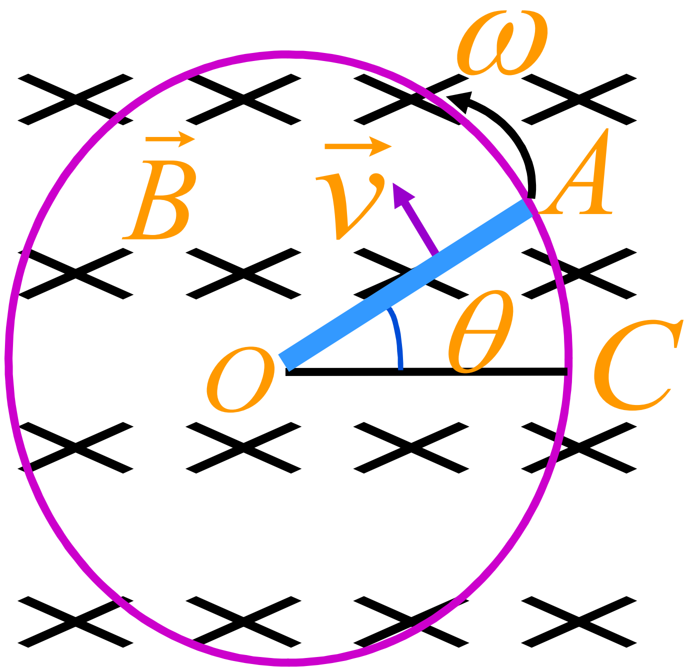
$$\varepsilon_i = \int \mathrm{d}\varepsilon_i = -\int_0^L Bl\omega\mathrm{d}l$$

$$= -\frac{1}{2}B\omega L^2$$

方向 $A \rightarrow O$



方法二　作辅助线，形成闭合回路***OACO***



$$\boldsymbol{\Phi}_m = \iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S B\mathrm{d}S$$

$$= \boldsymbol{BS_{OACO}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{B\theta L^2}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}BL^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

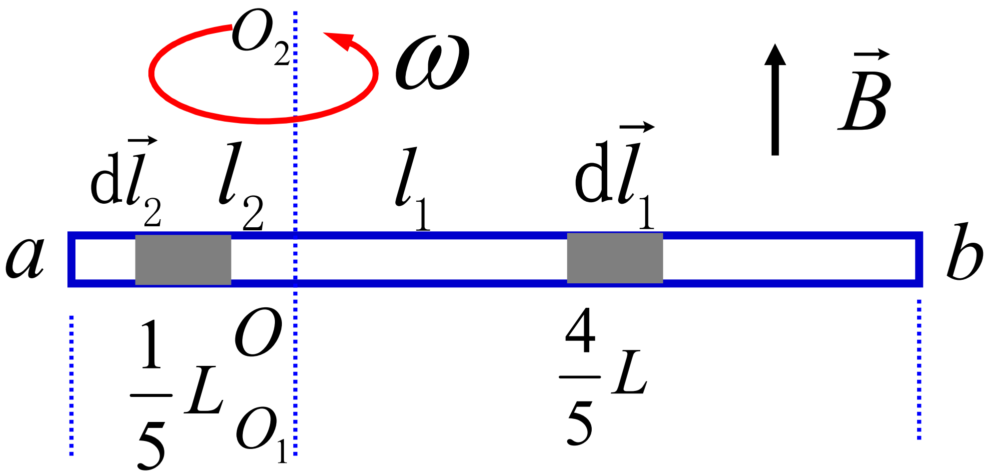
$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{B\omega L^2}$$

负号表示方向沿***AOCA***，***OC***、***CA***段没有动生电动势

问：把铜棒换成金属圆盘，中心和边缘之间的电动势是多少？

例. 金属棒***ab***绕竖直轴O_1O_2以角速度ω在水平面内旋转，地磁场在竖直方向的分量为***B***.

求：电势差U_{ab}.



解：

$$\mathrm{d}\varepsilon_{Ob} = (\vec{v}_1 \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}_1$$

$$= v_1 B \mathrm{d}l_1 = \omega l_1 B \mathrm{d}l_1$$

$$\varepsilon_{Ob} = \int \mathrm{d}\varepsilon_{Ob} = \int_0^{4L/5} \omega\, l_1 B \mathrm{d}l_1 = \frac{16}{50}\omega BL^2$$

$\mathrm{d}\varepsilon_{Oa}$?

ε_{Oa}

$$U_b - U_O = \varepsilon_{Ob} = \frac{16}{50}\omega BL^2$$

$$U_a - U_O = \varepsilon_{Oa} = \frac{1}{50}\omega BL^2$$

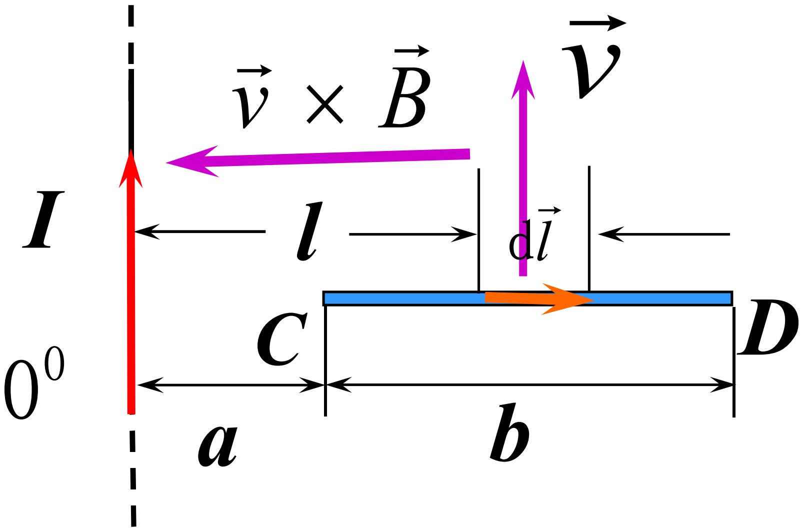
$$U_{ab} = U_a - U_b$$

$$= (U_a - U_O) - (U_b - U_O)$$

$$= -\frac{3}{10}\omega BL^2$$

非均匀磁场

例　一直导线**CD**在一无限长直电流磁场中作切割磁感应线运动。求：动生电动势。



解：方法一

$$\mathrm{d}\varepsilon = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$= v\frac{\mu_0 I}{2\pi l}\sin 90^0\,\mathrm{d}l\cos 180^0$$

$$= -\frac{\mu_0 vI}{2\pi l}\mathrm{d}l$$

方向　$D\rightarrow C$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 vI}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{\mathrm{d}l}{l} = -\frac{\mu_0 vI}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

方法二　作辅助线，形成闭合回路***CDEF***

$$\boldsymbol{\Phi}_m = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} x\,dr$$

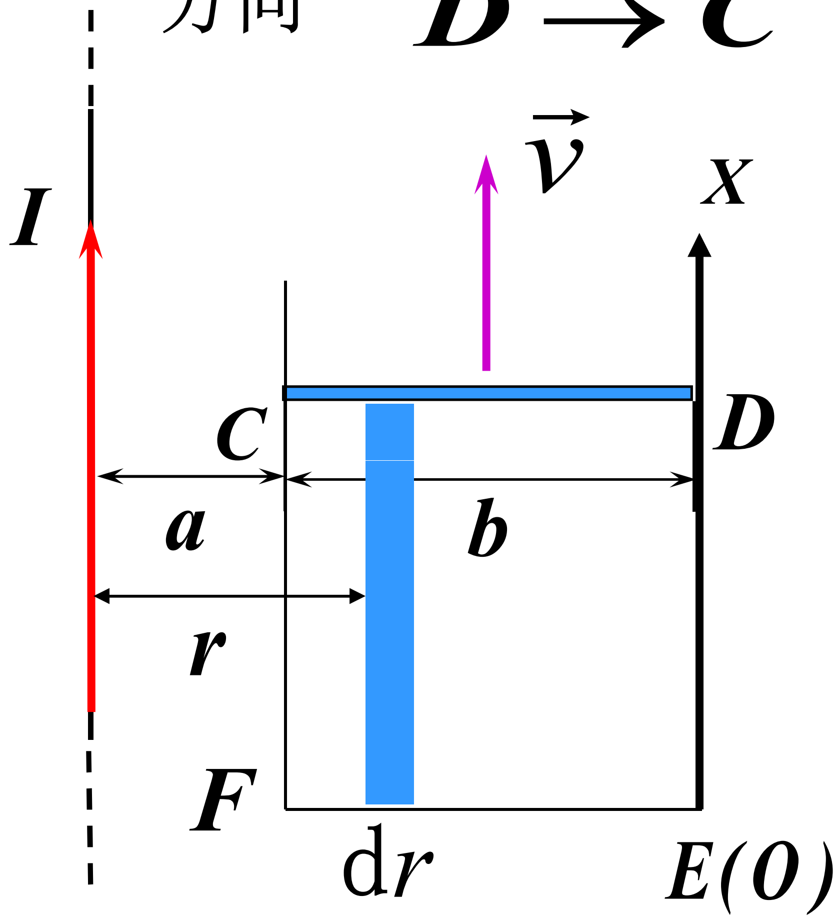
$$= \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\boldsymbol{\Phi}_m}{dt}$$

$$= -\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

方向　$D \rightarrow C$



二．感生电动势和感生电场

当磁场变化时，静止导体中也出现感应电动势

——感生电动势

电磁感应 $\begin{cases} \text{动生电动势} \xrightarrow{\text{非静电力}} \text{洛仑兹力} \\ \text{感生电动势} \xrightarrow{\text{非静电力}} \text{?} \end{cases}$

实验表明，感生电动势的产生与导体的种类和性质无关，它只取决于变化的磁场。

麦克斯韦假设：

变化的磁场在其周围空间会激发一种涡旋状的电场，称为涡旋电场或感生电场。记作 $\vec{E}_r$ 或 $\vec{E}_i$

感生电动势 $\xrightarrow{\text{非静电力}}$ 感生电场力

由电动势的定义 $\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

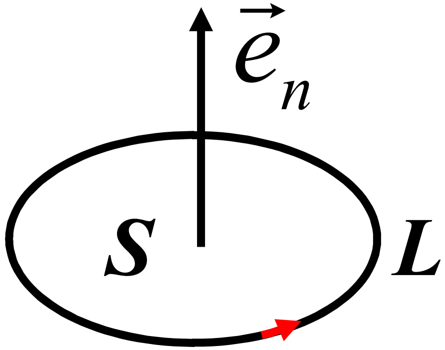
由法拉第电磁感应定律 $\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

讨论 $$\oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

1、 此式反映变化磁场和感生电场的相互关系，即感生电场是由变化的磁场产生的。

2、 **S** 是以 **L** 为边界的任一曲面。



$\vec{S}$ 的法线方向应选得与曲线 **L** 的积分方向成右手螺旋关系

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 是曲面上的任一面元上磁感应强度的变化率

不是积分回路线元上的磁感应强度的变化率

● 感生电场与变化磁场之间的关系

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

讨论

(1) 感生电场是无源有旋场

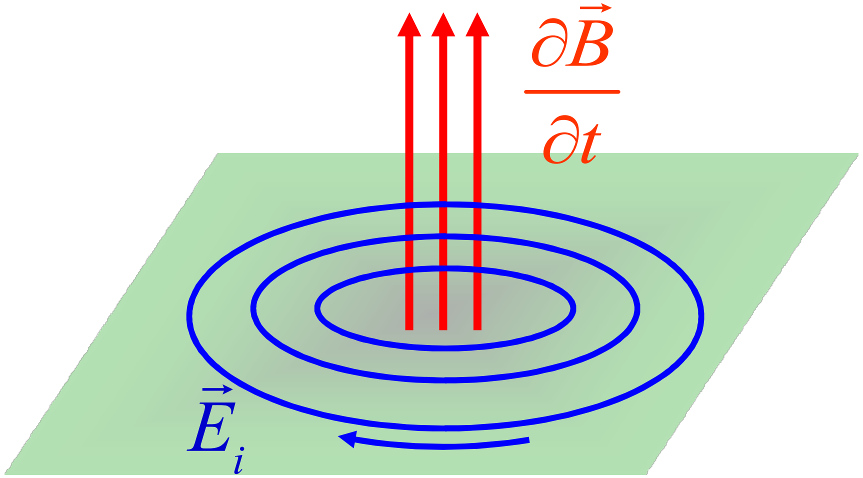
感生电场与静电场的比较

- 场源
  - 静止电荷
  - 变化的磁场（磁生电）
- 环流
  - 静电场为保守力场；是无旋场
  - 感生电场为非保守力场；是有旋场
- 通量
  - 静电场为有源场
  - 感生电场为无源场(闭合电场线)

(2) 感生电场与磁场的变化率成左螺旋关系

空间存在变化磁场 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

在空间存在感生电场 $\vec{E}_i$



(3) 当问题中既有动生、又有感生电动势，则总感应电动势为

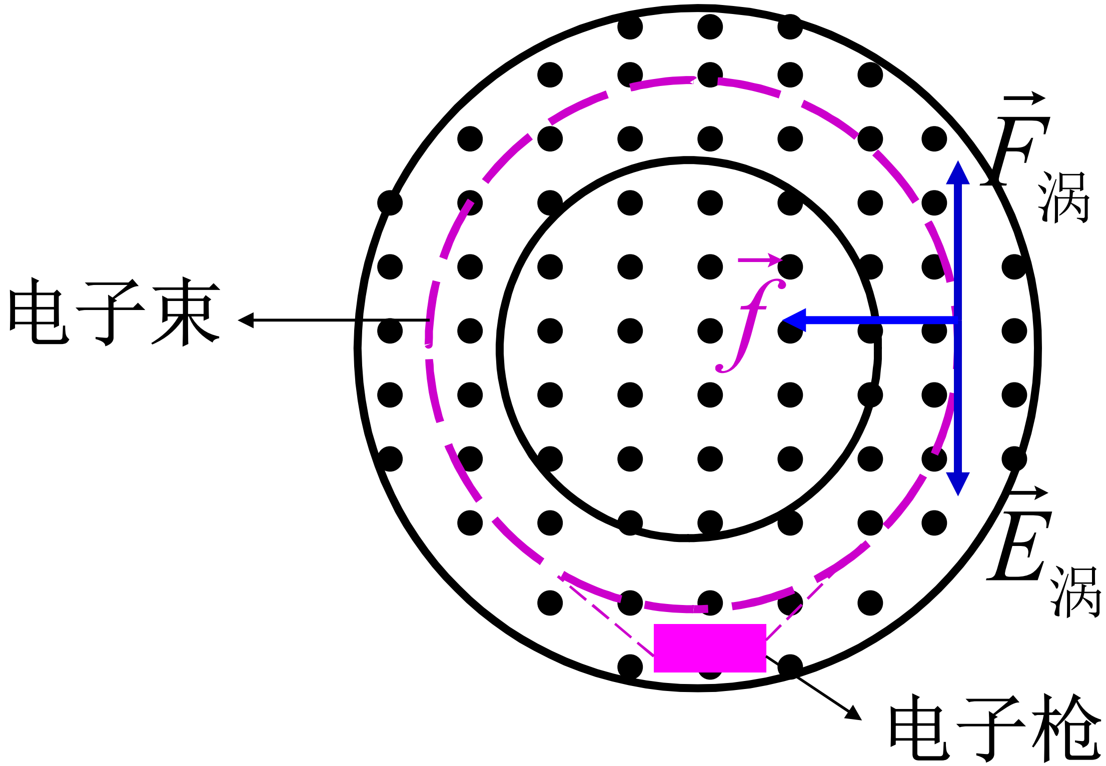
$$\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{（导体不闭合）}$$

$$\varepsilon_i = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{（导体闭合）}$$

三、 电磁感应的应用

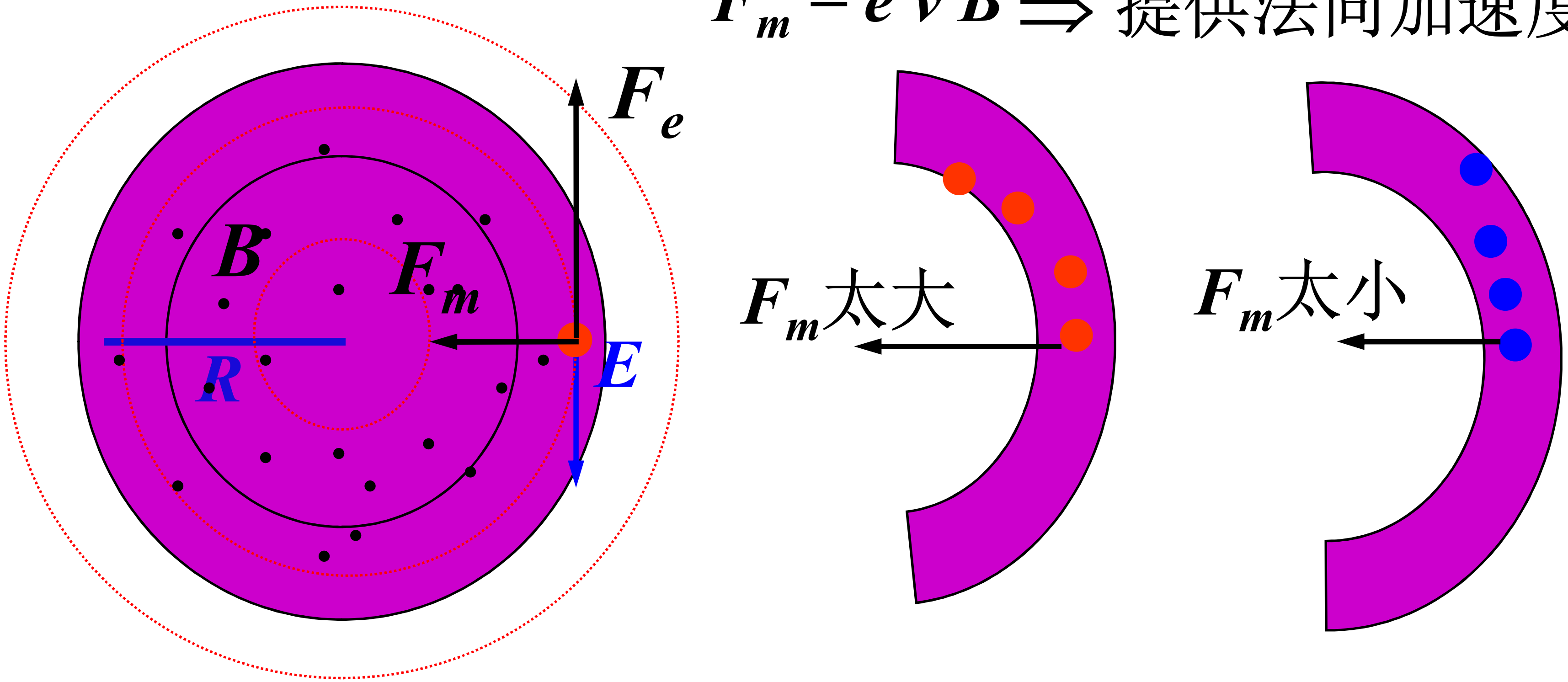
1. 电子感应加速器

利用涡旋电场对电子进行加速的一种装置



电子感应加速器 $F_e = -eE \Rightarrow$ 提供切向加速度

$F_m = evB \Rightarrow$ 提供法向加速度



保证不断加速的电子沿着半径R的轨道运动，对磁场有什么要求

?

$$\boxed{\overline{B} = 2B}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi R\, E\\ &= \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \pi R^2 \frac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\} E = \frac{R}{2}\frac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$F_e = eE = \frac{eR}{2}\frac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$\mathrm{d}t$ 时间

平均磁场增量$\mathrm{d}\overline{B}$

电子速度增量$\mathrm{d}v$

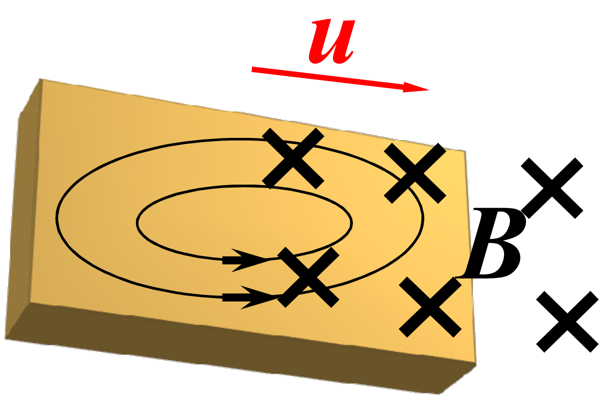
$$\left.\begin{aligned}0 &\to t\\ 0 &\to \overline{B}\\ 0 &\to v\end{aligned}\right\} \frac{eR}{2}\int_0^{\overline{B}} \mathrm{d}\overline{B} = m\int_0^{v} \mathrm{d}v$$

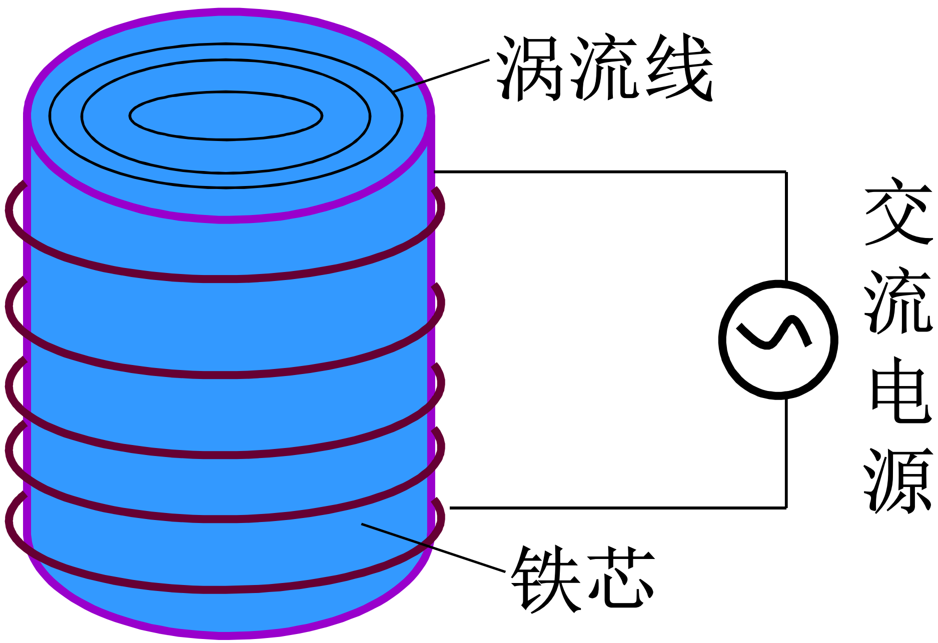
$$eR\overline{B} = 2mv \quad \longleftrightarrow \quad F_m = evB = m\frac{v^2}{R}$$

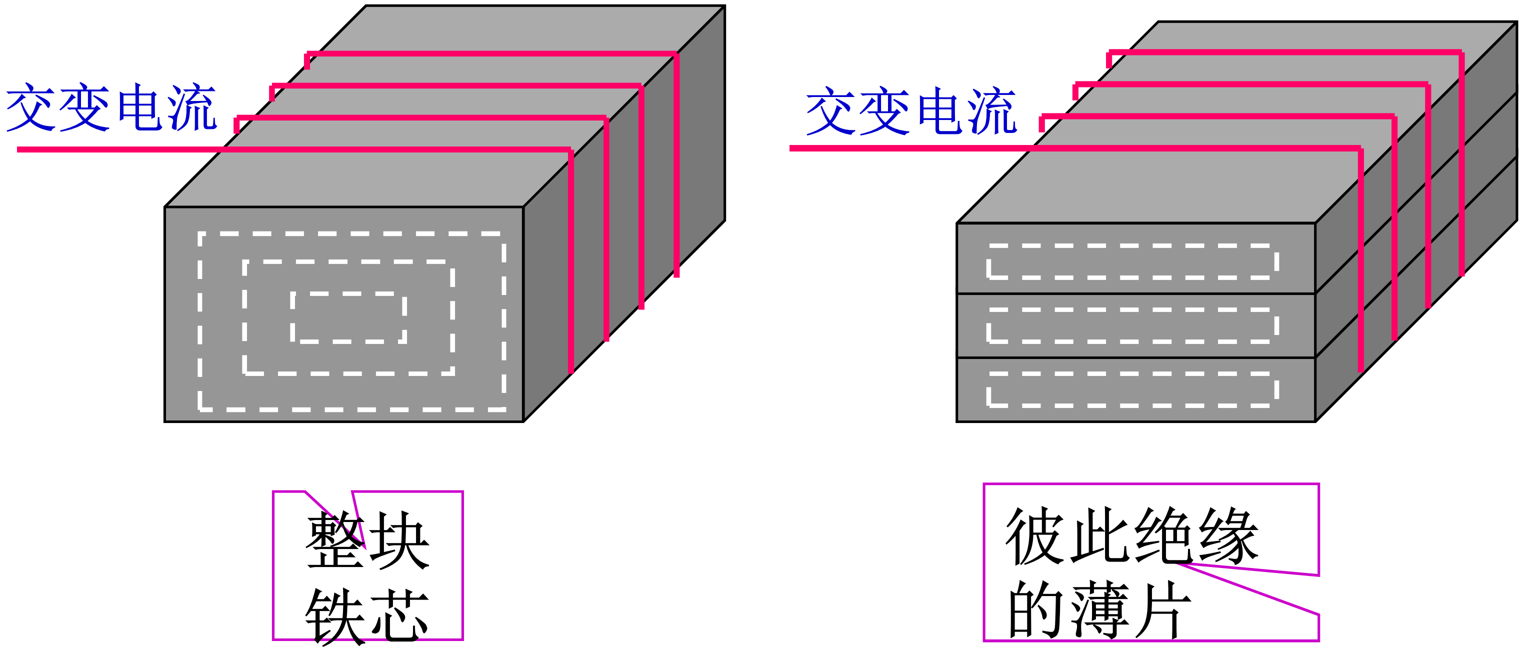
$$\boxed{\overline{B} = 2B}$$

2. 涡电流（涡流）

大块的金属在磁场中运动，或处在变化的磁场中，金属内部也要产生感应电流，这种电流在金属内部自成闭合回路，称为涡电流或涡流。



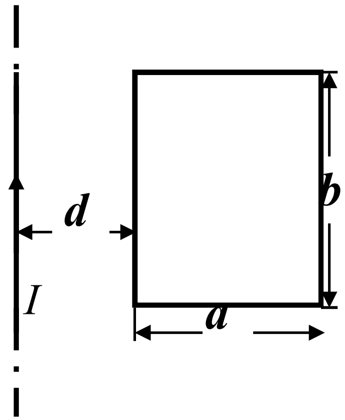




- 高频感应加热原理
- 减小电流截面，减少涡流损耗
- 电磁阻尼

例.无限长通电直导线与矩形单匝线圈共面放置，导线与线圈的长边平行。矩形线圈的边长分别为***a***和***b***，线圈到直导线的距离为***d***（如图）。导线上通有交流电 $I = I_0 \cos\omega t$

求：矩形线圈中的感应电动势。



解:在距离长直导线为***x***处，取一宽度为**d*x***的面元**d*S*=*b*d*x***，则长直导线在该点处产生的磁场的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

通过该面元处的磁通量为 $\mathrm{d}\Phi_m = B\mathrm{d}S = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x} b\mathrm{d}x$

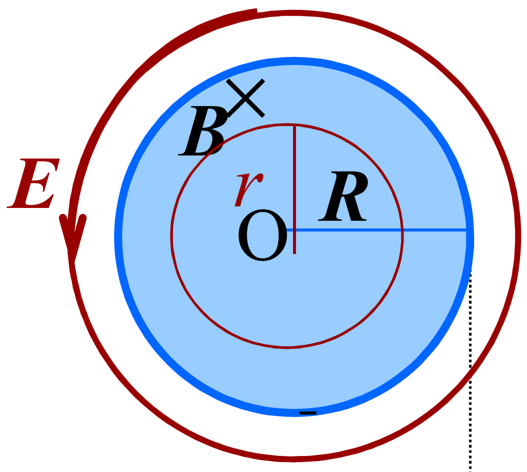
所以，长直导线在整个矩形线圈中产生的总磁通量为

$$\Phi_m = \int \mathrm{d}\Phi_m = \int B\mathrm{d}S = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\frac{d+a}{d}$$

矩形线圈中的感应电动势为 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mu_0 I_0 \omega b}{2\pi} \ln\dfrac{d+a}{d} \sin\omega t$

例题：均匀磁场被限制在半径为R的圆柱形空间 $\frac{dB}{dt} > 0$

1、求涡旋电场



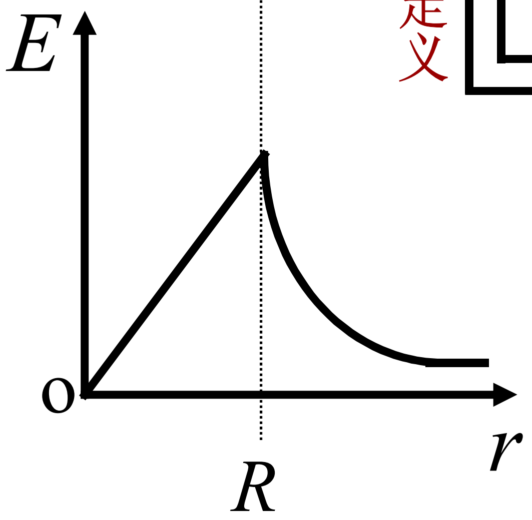
解：1、对称的磁场➔对称的涡旋电场➔电场线是一系列同心圆、方向逆时针。

半径 r 的圆周上感应电动势

$$\mathcal{E} \underset{\text{定律}}{\overset{\text{法拉第}}{=\!=\!=}} \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \begin{cases} \pi r^2 \dfrac{dB}{dt} & (r < R) \\ \pi R^2 \dfrac{dB}{dt} & (r \geq R) \end{cases}$$

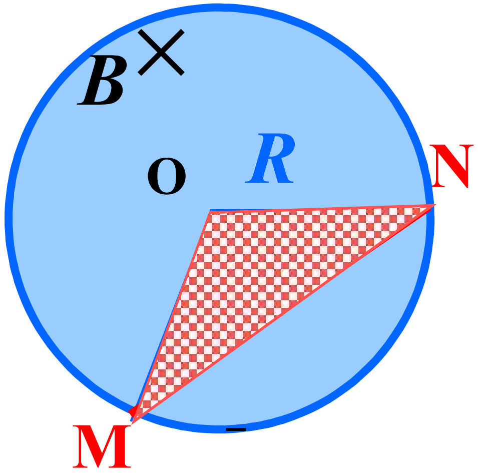
由定义

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \oint_L dr = 2\pi r E$$



$$E = \begin{cases} \dfrac{r}{2} \dfrac{dB}{dt} & (r < R) \\ \dfrac{R^2}{2r} \dfrac{dB}{dt} & (r \geq R) \end{cases}$$

2、求直导线MN两端 $\mathcal{E}_1$



电场线与半径处处正交

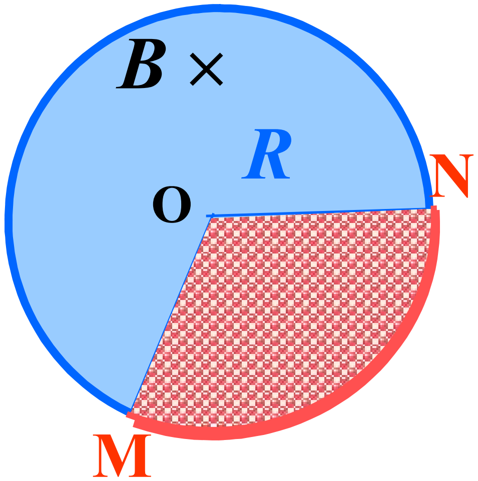
$$\mathcal{E}_{N-0} = \int_N^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\mathcal{E}_{O-M} = 0$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{N-O} + \mathcal{E}_{O-M} = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E}_1 = S_{\triangle} \frac{dB}{dt}$$

3、求弧导线MN两端 $\mathcal{E}_2$



$$\mathcal{E}_2 = S \frac{dB}{dt}$$

$$S > S_{\triangle} \Rightarrow \varepsilon_2 > \varepsilon_1$$