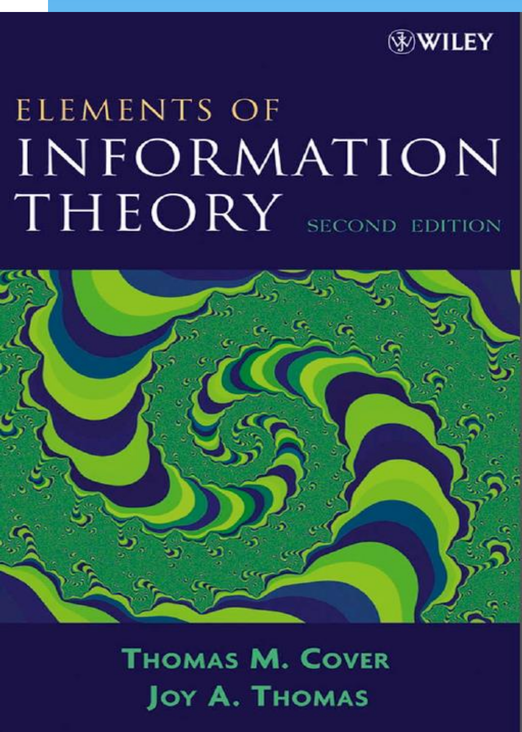
信息论

信号传输与处理的理论基础

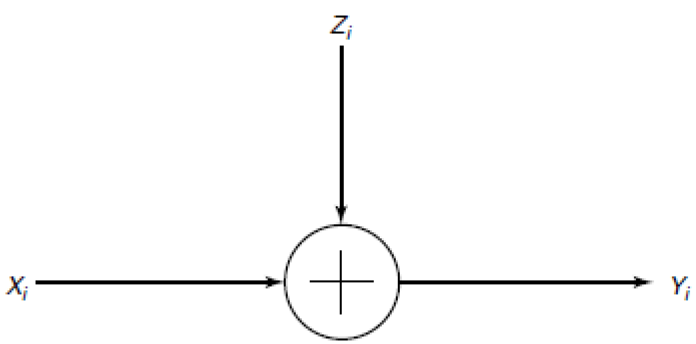
Gauss信道 - 习题



Gauss信道模型和基本性质

* 简要的概念回顾

* 基本Gauss信道是这样一个线性传输系统，具有以下特征：
* (1) Y = X + Z；X、Y是发送和接收信号。
* (2) 噪声Z是Gauss随机变量，其概率密度 $p(z) = \frac{1}{(2\pi N)^{1/2}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2N}}$



*

Gauss信道容量公式

* 简要的公式回顾
* 有限功率P的Gauss信道的容量（定义）$C = \max_{f(x): E X^2 \le P} I(X;Y).$
* Gauss信道容量的计算公式
* $$C(P) = (\frac{1}{2})\log(1+\frac{P}{N})$$
*
* Gauss信道容量公式的推广：
* Y = HX + Z；H是信道的传输增益系数，这时有
* $$\boxed{C(P, H) = (\frac{1}{2})\log(1+|H|^2\frac{P}{N})}$$

有限带宽Gauss信道容量公式

- **简要的概念回顾** 有限带宽Gauss信道是这样一个线性传输系统：
- (1) $Y(t) = h(t)*X(t) + Z(t) = \int_0^{+\infty} d\tau h(\tau)X(t-\tau) + Z(t)$；
- t表示时间，X、Y是发送和接收信号。
- (2) 信道的响应函数h(t)具有有限带宽2W，即信道的幅频特性
- $$H(\omega) = 0,\ |\omega|>W$$
- (3) 噪声Z(t)是Gauss随机变量，其概率密度
- $$p[Z(t)=z] = \frac{1}{(2\pi N)^{1/2}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2N}}$$

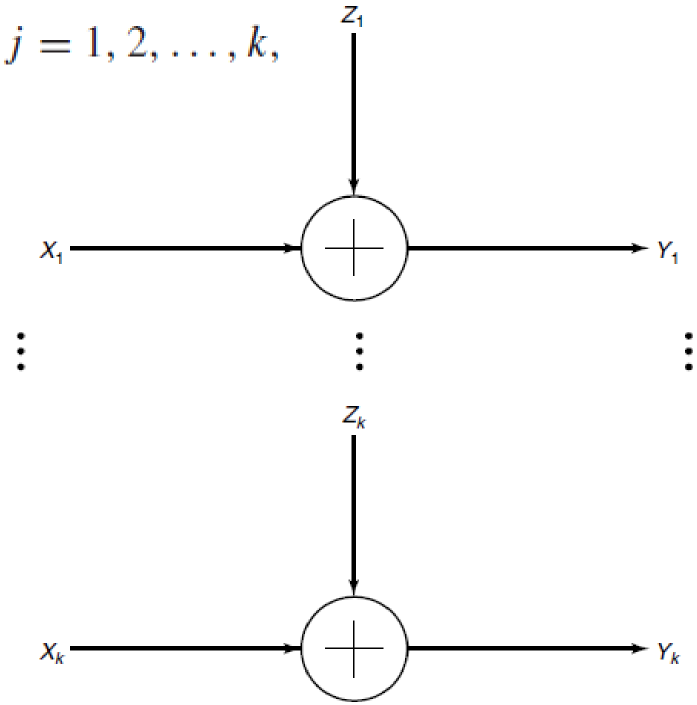
(4) Z(t)是白噪声过程，即任何不同时刻的$Z(t_1)$和$Z(t_2)$概率独立。

- 常数增益Gauss信道上每单位时间的传输容量
-
- $$C_W = W\log\left(1+|H|^2\frac{P}{N_0 W}\right)$$

总功率有限的并行Gauss信道的容量

* 并行Gauss信道的容量

$$Y_j = X_j + Z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$



* 考虑右图中的并行Gauss信道模型，所有
* 发送信号X_j接受总功率约束

$$E \sum_{j=1}^{k} X_j^2 \le P.$$

* 各信道上的噪声Z_1、…,Z_k概率独立，且为
* Gauss噪声：

$$Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j)$$

* 问题：确定该信道的容量。

$$C = \max_{f(x_1, x_2, \ldots, x_k): \sum E X_i^2 \le P} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$$

$$= \max_{f(x1,\ldots,xk):\ P1+\ldots+Pk \le P} \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right)$$

有限带宽/彩色高斯信道的容量

* (1) $y(t) = h(t)*x(t) + Z(t) = \int_0^{+\infty} d\tau h(\tau)x(t-\tau) + z(t)$;
* 等价的频域模型
* $$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) + Z(\omega)$$
* t表示时间, ω 表示频率, X、Y是发送和接收信号。
* (2) 信道具有有限带宽2W:
* $$H(\omega) = 0,\ |\omega|>W$$
* (3) 噪声Z(t)是Gauss随机变量并具有功率谱密度$N_0(\omega)$
* 1

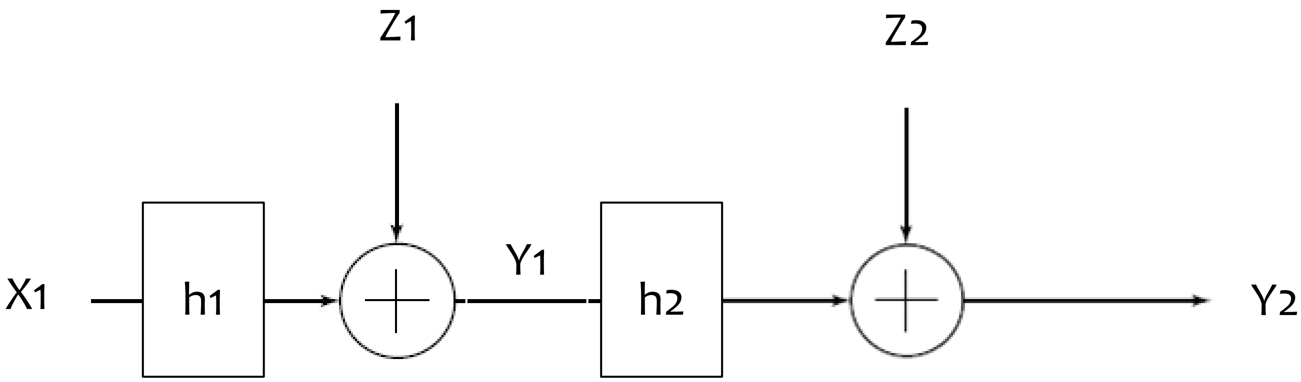
参考公式

$$C = W\log(1+|H|^2\frac{P}{N_0 W})$$

* 总功率有限的彩色Gauss信道上每单位时间的总容量
* $$C = \max \int_{-W}^{W} d\omega \log(1+|H(\omega)|^2\frac{P(\omega)}{N_0(\omega)}) \quad \text{s.t.} \int_{-W}^{W} d\omega P(\omega) \leqq P,\ \ P(\omega)\geq 0$$

第九章习题

* 补充的习题及教程习题 9.1~9.9、9.11~9.12。
* 习题1+ 根据Gauss信道容量公式，写出以下信道的总容量。
* Z_j 为相互独立的Gauss噪声$N(0, N_j)$, h_j是信道增益，输入信号总功率最大为P。



求解概要

第一步：写出子信道的输入输出关系 $Y_1 = h_1X_1+Z_1$, $Y_2 = h_2Y_1+Z_2$

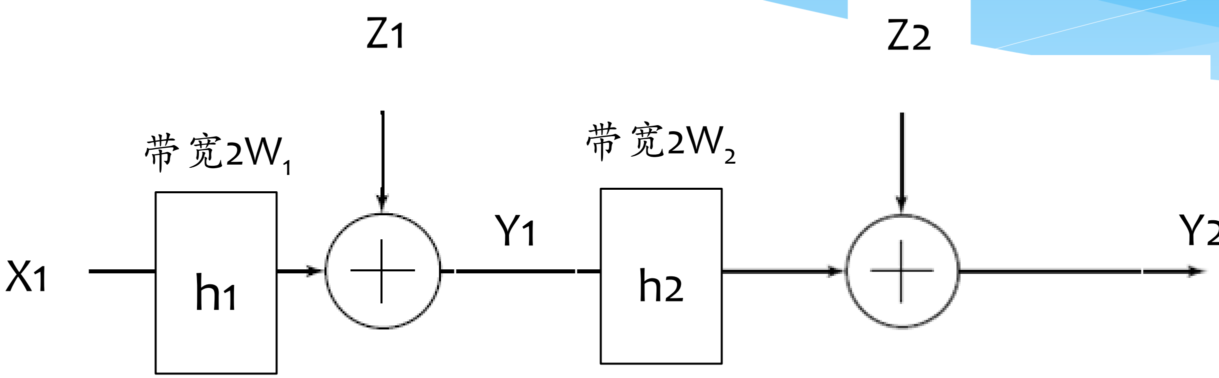
第二步：导出复合信道的输入-输出关系 $Y_2 = h_2h_1X_1+ h_2Z_1+Z_2$

第三步：运用基本容量公式得到【请完成计算，注意复合信道的等效噪声及其功率是什么？】

$$C = (1/2)\log(1+|h_2h_1|^2\frac{P}{(h_2{}^2N_1+N_2)})$$

第九章习题

- 习题2+ 根据有限带宽Gauss信道容量公式，写出以下信道的单位时间总容量。
- Z_j 均为Gauss噪声$N(0, N_j)$，h_j是恒定的信道增益，输入信号总功率最大为P。



求解概要

第一步：写出子信道的输入输出关系 $Y_1 = h_1X_1+Z_1$，$Y_2 = h_2Y_1+Z_2$

第二步：导出复合信道的输入-输出关系 $Y_2 = h_2h_1X_1+ h_2Z_1+Z_2$

第三步：复合信道单位时间的总容量【为什么？】

$$C = W\log\left(1+|h_2h_1|^2\frac{P}{(h_2{}^2N_{10}+N_{20})W}\right)$$

$W= min(W_1,W_2)$， N_{10},N_{20}是子信道的噪声功率密度。

第九章习题

* 补充的习题及教程习题9.1~9.9、9.11~9.12。

* 习题3+ 根据Gauss信道容量公式，写出以下信道的总容量。
* Z_j 为相互独立的Gauss噪声$N(0, N_j)$, h_j是信道增益，输入信号总功率最大为P。

求解概要

第一步：写出子信道的输入输出关系

$Y_1 = h_1X+Z_1$, $Y_2 = h_2X+Z_2$

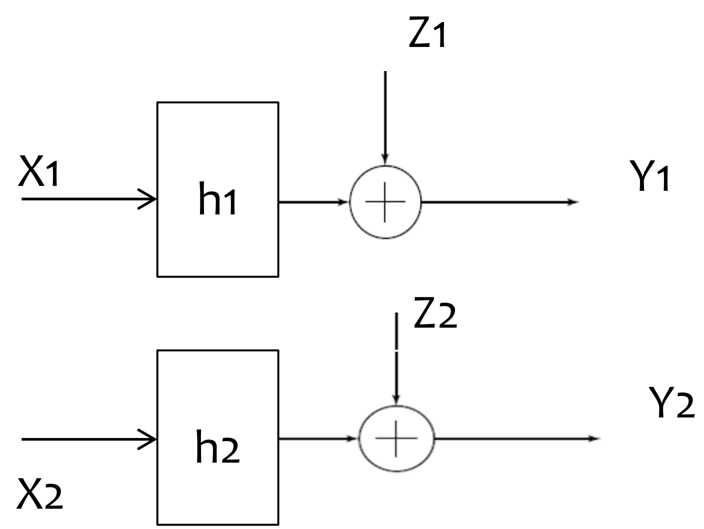
第二步：设每个子信道上的功率是P1和P2，则

$C_1 = (1/2)\log(1+|h_1|^2\frac{P_1}{N_1})$, $C_2 = (1/2)\log(1+|h_2|^2\frac{P_2}{N_2})$

第三步：求解优化问题

$C = max\ \ C_1+C_2 \quad s.t.\ P_1+P_2=P,\ P_1\geq 0;\ P_2\geq 0$

【习题：给出完整的计算】



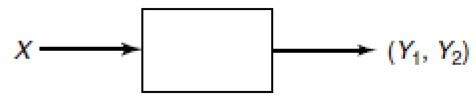
第九章习题

* 教程第9章习题

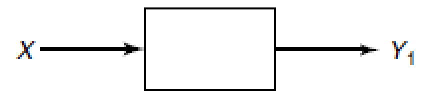
9.1 *Channel with two independent looks at Y.* Let Y_1 and Y_2 be conditionally independent and conditionally identically distributed given X.

(a) Show that $I(X; Y_1, Y_2) = 2I(X; Y_1) - I(Y_1; Y_2)$.

(b) Conclude that the capacity of the channel



is less than twice the capacity of the channel



* 习题9.1 求解概要：

* （a）

$$
\begin{aligned}
I(X;Y_1,Y_2) &= H(Y_1,Y_2) - H(Y_1,Y_2|X) \\
&= H(Y_1) + H(Y_2) - I(Y_1;Y_2) - H(Y_1|X) - H(Y_2|X) \\
&= I(X;Y_1) + I(X;Y_2) - I(Y_1;Y_2) \\
&= 2I(X;Y_1) - I(Y_1;Y_2)
\end{aligned}
$$

（第二个等号）【为什么？ 提示：Y1|X和Y2|X概率独立】

（第四个等号）【为什么？ 提示：Y1|X和Y2|X概率分布相同】

* （b）

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \max_{p(x)} I(X;Y_1,Y_2) \\
&= \max_{p(x)} 2I(X;Y_1) - I(Y_1;Y_2) \\
&\le \max_{p(x)} 2I(X;Y_1) \\
&= 2C_1.
\end{aligned}
$$

第九章习题

习题9.2

$$X \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow (Y_1, Y_2)$$

Consider the ordinary Gaussian channel with two correlated looks at X, i.e., $Y = (Y_1, Y_2)$, where

$$Y_1 = X + Z_1 \qquad (9.11)$$
$$Y_2 = X + Z_2 \qquad (9.12)$$

with a power constraint P on X, and $(Z_1, Z_2) \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, K)$, where

$$K = \begin{bmatrix} N & N\rho \\ N\rho & N \end{bmatrix}. \qquad (9.13)$$

【注】K是Z1和Z2的协方差矩阵：
$E[Z_1^2]=E[Z_2^2]=N$, $E[Z_1Z_2]=N\rho$.

求信道的容量C。

求解概要： 【注】由于噪声相关(除非ρ=0)，这里Y1和Y2并非独立，因此不同于上题的情况。

第一步：
$$\begin{aligned} C_2 &= \max I(X;Y_1,Y_2) \\ &= h(Y_1,Y_2) - h(Y_1,Y_2|X) \\ &= h(Y_1,Y_2) - h(Z_1,Z_2|X) \\ &= h(Y_1,Y_2) - h(Z_1,Z_2) \end{aligned}$$

第二步：计算噪声(Z_1,Z_2)的联合熵：

$$h(Z_1,Z_2) = \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2|K_Z| = \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2 N^2(1-\rho^2).$$

* 第三步：计算(Y_1,Y_2)的联合分布，结果是 $(Y_1,Y_2) \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} P+N & P+\rho N \\ P+\rho N & P+N \end{bmatrix}\right)$
* 进而有联合熵

$$h(Y_1,Y_2) = \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2|K_Y| = \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2(N^2(1-\rho^2) + 2PN(1-\rho)).$$

第九章习题

习题9.2（续）

* 第四步：把中间结果代入第一步的结果，得到

$$\begin{aligned} C_2 &= h(Y_1,Y_2) - h(Z_1,Z_2) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2P}{N(1+\rho)}\right) \end{aligned}$$

* 对结果的分析(-1≦ρ≦+1)：
* (1) 若ρ=1　这时 $C = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P}{N})$ = 单一信道的容量。
* 【思考：为什么？提示：ρ=1 意味着噪声完全正相关，因此这时实际上$Y_1=Y_2$.】
* (2) 若ρ=0　这时 C=(1/2)log(1+2P/N)，相当于将2P分配到单一信道上时的容量，
* 也等价于复合信道噪声功率为N/2时的信道容量。
* 【思考：为什么？提示：ρ=0 意味着噪声完全不相关 】
* (3) 若ρ= -1 这时 C=∞!
* 【思考：为什么？ ρ=-1 意味着噪声完全反相关，即$Z_1=-Z_2$（请对高斯随机变量进行
* 验证）因此$Y_1+Y_2=2X$。】

* 【习题：补全上述分析与计算的全部细节】
* 【补充的习题：验证以上每种情况都等价于信道 $X \rightarrow Y_1+Y_2$ 的容量】