§3-2 自感、互感；磁场的能量

§3-2-1 自感、互感

§3-2-2 磁场的能量

§3-2-1 自感应、互感应

一、自感

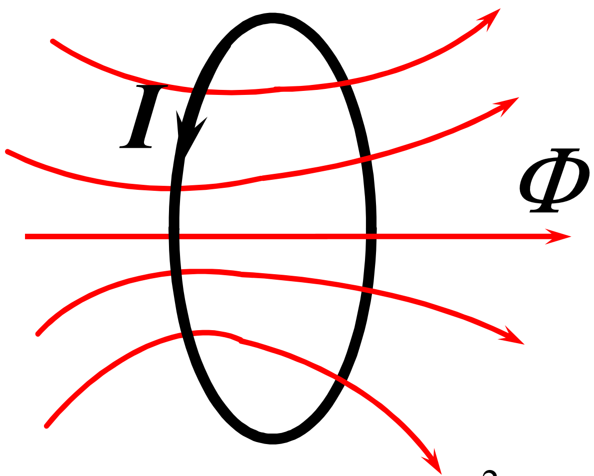
1. 自感现象

由于回路自身电流、回路的形状、或回路周围的磁介质等发生变化时，穿过该回路自身的磁通量随之改变，从而在回路中产生感应电动势的现象。

$$\Psi \propto B \propto I$$

$$\underline{\Psi} = LI$$

磁通链数



L——自感系数，单位：亨利（H）

2. 自感系数

$$\boxed{\Psi = LI}$$ L ——自感系数

如果回路周围不存在铁磁质，自感***L***是一个与电流***I***无关，仅由回路的匝数、几何形状和大小以及周围介质的磁导率决定的物理量

3. 自感电动势

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$ —自感电动势遵从法拉第定律

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

若自感系数***L***是一不变的常量

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$ (**L**是一不变的常量)

讨论

1.若: $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} < 0$　　则：$\varepsilon_L > 0$, ε_L与I方向相同

若: $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} > 0$　　则：$\varepsilon_L < 0$, ε_L与I方向相反

2. ***L***的存在总是阻碍电流的变化，所以自感电动势是反抗电流的变化,而不是反抗电流本身。

L越大回路中电流越难改变。

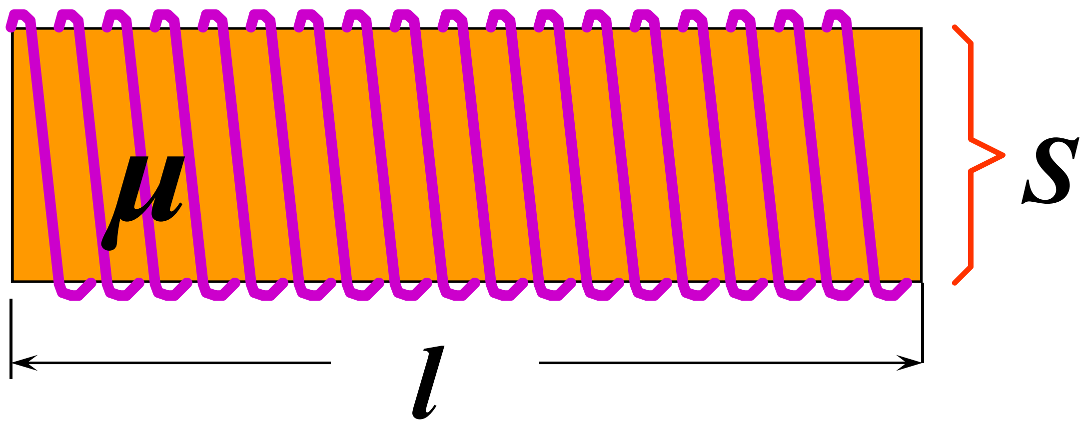
***L*的物理意义**：自感具有使回路电流保持不变的性质

—— 电磁惯性

L一般是由实验来测定的，但在少数简单情形可由计算获得

例1 试计算长直螺线管的自感。

已知：匝数N,横截面积S,长度l ,磁导率μ



自感的计算步骤：

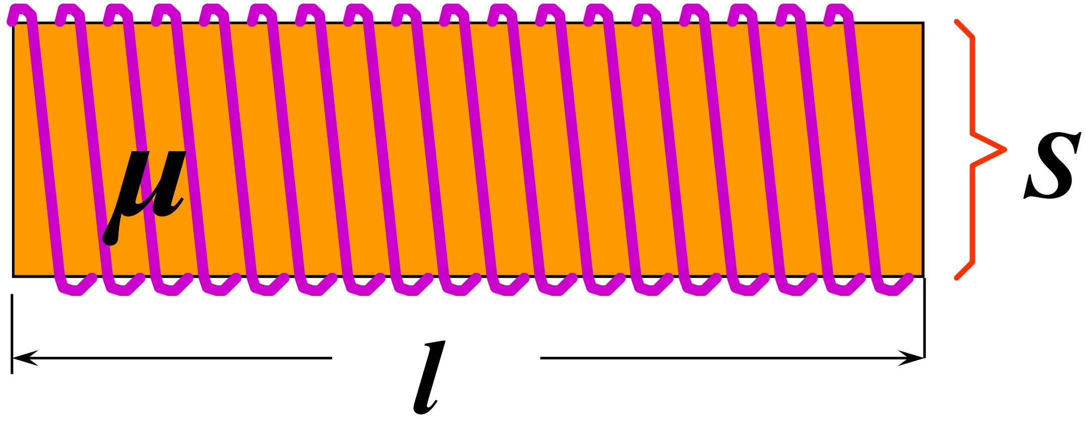
$$\left(\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I\right) \qquad \Psi = N\Phi_m = N\iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\longrightarrow (\vec{H}) \xrightarrow{\vec{B}=\mu\vec{H}} \vec{B} \longrightarrow \Psi \xrightarrow{\Psi = LI} L$$

$$(\vec{H}) \longrightarrow \vec{B} \longrightarrow \Psi \longrightarrow L$$

$$H = nI = \frac{N}{l} I$$

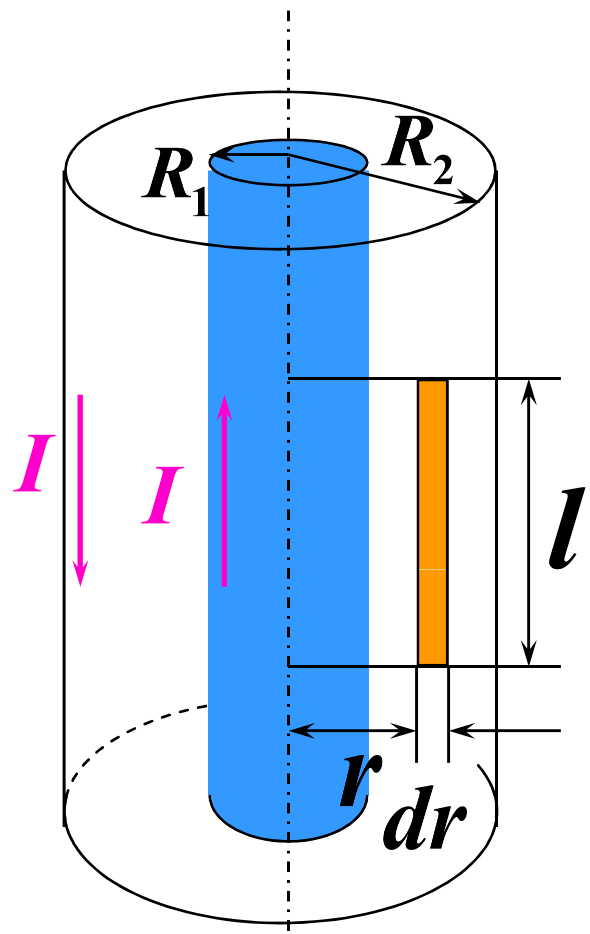
$$B = \mu H = \frac{\mu N}{l} I$$



$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = BS = \frac{\mu NIS}{l}$$

$$\Psi = N\Phi_m = \frac{\mu N^2 IS}{l} \qquad L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu N^2}{l^2} lS = \mu n^2 V$$

例2 求一无限长同轴传输线（两个同轴圆柱面）单位长度的自感. 已知：R_1 、R_2



$$H = \frac{I}{2\pi r} \qquad B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$\mathrm{d}\Phi_m = B \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu I l}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

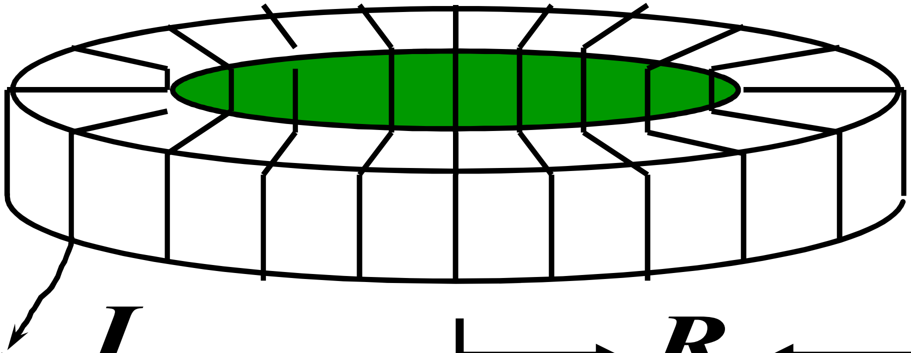
$$\Phi_m = \frac{\mu I l}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$L = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

单位长度的自感为：$L_o = \dfrac{L}{l} = \dfrac{\mu}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

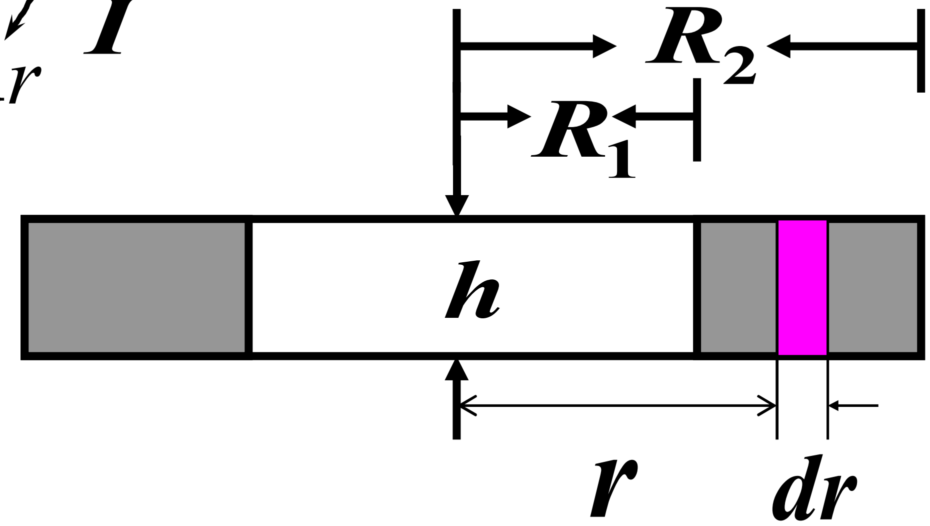
若中间的圆柱面换为同轴圆柱体呢？

例3求一空气环形螺线管的自感。已知： R_1、R_2、h、N



$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_m = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}h\mathrm{d}r$$



$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

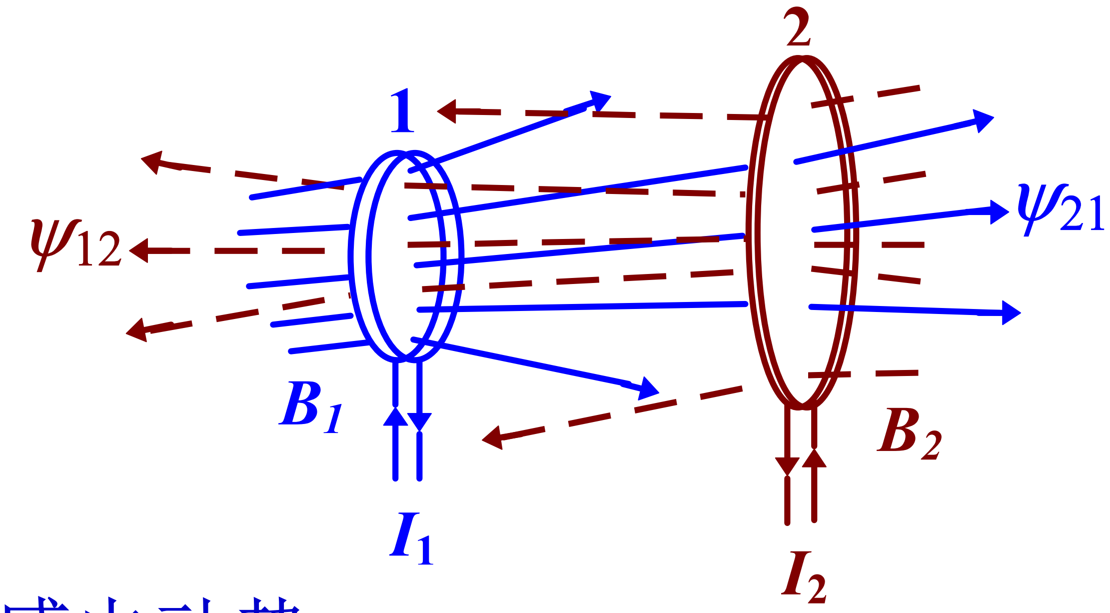
$$= \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln(\frac{R_2}{R_1})$$

$$\Psi = N\Phi_m = \frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi}\ln(\frac{R_2}{R_1})$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln(\frac{R_2}{R_1})$$

二. 互感

1、互感现象



因两个载流线圈中电流变化而在对方线圈中激起感应电动势的现象

2. 互感系数与互感电动势

1) 互感系数(M)

若两回路几何形状、尺寸及相对位置不变，周围无铁磁性物质。实验指出：

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1 \qquad \Psi_{12} = M_{12} I_2$$

$\boldsymbol{M_{21}}$和 M_{12}叫做线圈的互感系数

实验和理论都可以证明：

$$\boldsymbol{M_{12} = M_{21} = M} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

周围没有铁磁性物质，互感系数和两线圈的几何形状、尺寸、匝数，它们的相对位置，以及周围介质的磁导率有关，与电流无关。

2）互感电动势：

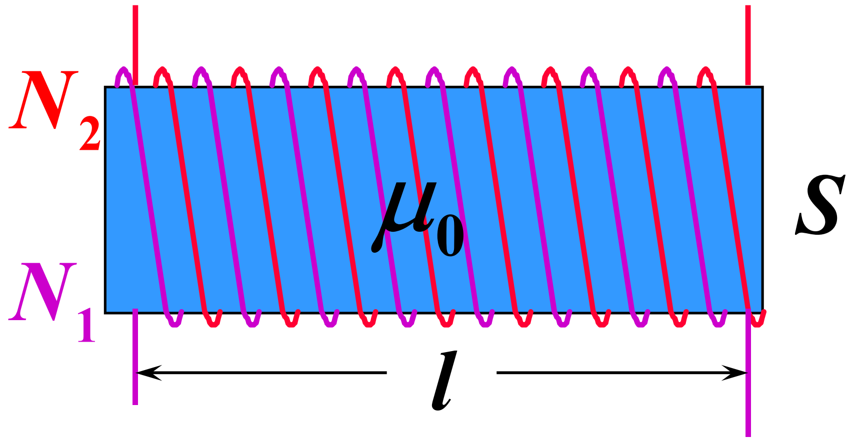
若回路周围不存在铁磁质且两线圈结构、相对位置及其周围介质分布不变时(***M***为常数）

$$\varepsilon_{12} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_{12}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \quad \varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

M一般是由实验来测定的，但在少数简单情形可由计算获得

例4 有两个直长螺线管，它们绕在同一个圆柱面上。

已知：μ_0、N_1、N_2、l、S 求：互感系数



$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l} I_2$$

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = B_2 S = \mu_0 \frac{N_2}{l} I_2 S$$

$$\psi_{12} = N_1 \Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_2 S}{l}$$

$$M = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l^2} lS = \mu_0 n_1 n_2 V$$

$$M = \mu_0 n_1 n_2 V$$

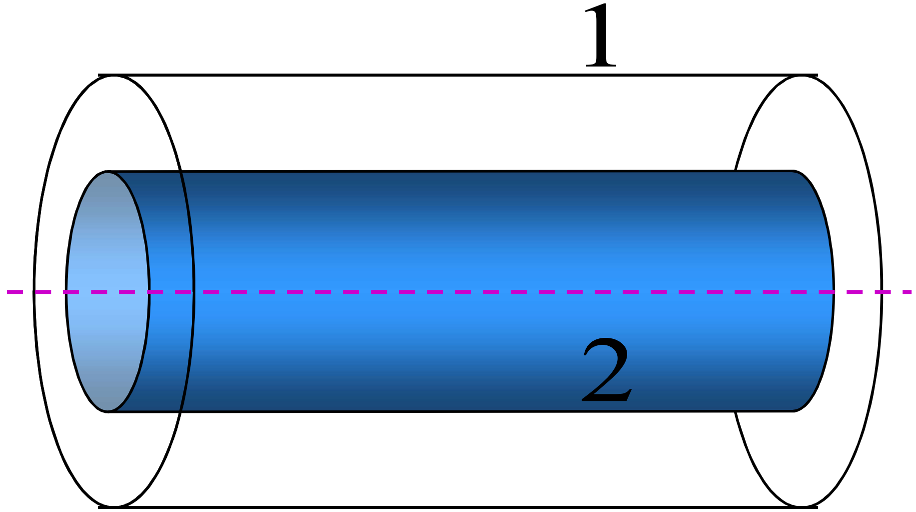
$$\because \quad L_1 = \mu_0 n_1^2 V$$

$$L_2 = \mu_0 n_2^2 V$$

$$\therefore M = \sqrt{L_1 L_2}$$

例5 计算共轴的两个长直螺线管之间的互感系数

设两个螺线管的半径、长度、匝数为$R_1, R_2, l_1, l_2, N_1, N_2$



$$l_1 = l_2 = l, R_1 > R_2$$

$$I_1 \Longrightarrow B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

$$\Psi_{21} = N_2 B_1 \pi R_2^{\,2}$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^{\,2} I_1$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^{\,2}$$

$$I_2 \Longrightarrow B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$$

$$\Psi_{12} = N_1 B_2 \pi R_2^{\,2} \quad (\because R_1 > R_2)$$

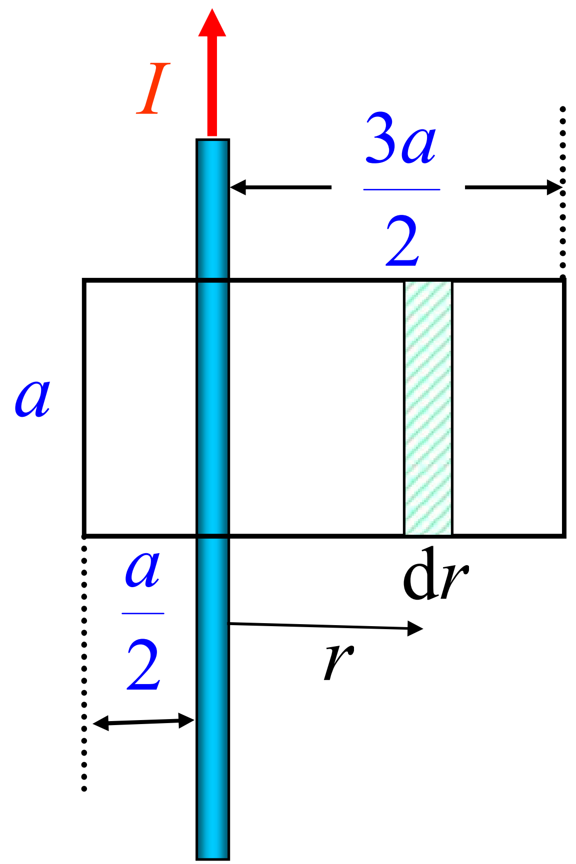
$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^{\,2}$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$\therefore M < \sqrt{L_1 L_2}$$

例6 一无限长导线通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$ 现有一矩形线框与长直导线共面。（如图所示）

求 互感系数和互感电动势



解 $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

穿过线框的磁通量

$$\Phi = \int_{a/2}^{3a/2} B a \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 3$$

互感系数 $$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3$$

互感电动势 $$\varepsilon = -M \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3 I_0 \omega \cos \omega t$$

电容器储能公式 $W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

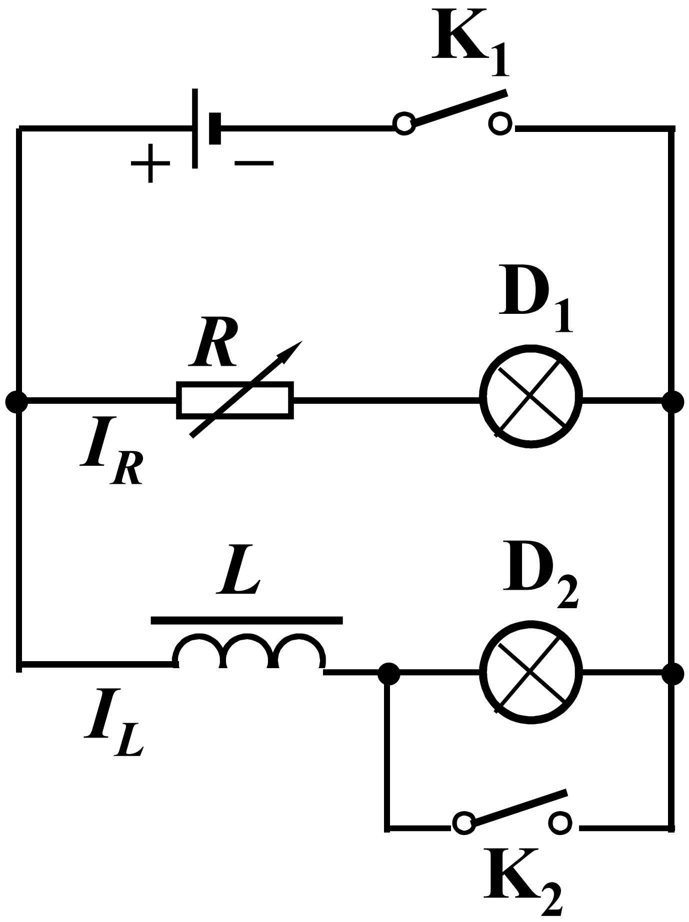
电荷系统或电场的能量分布在整个电场分布的空间里，电场能量体密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE$$

任意电场的能量为

$$W_e = \int \mathrm{d}W_e = \iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V$$

§ 3-2-2 磁场的能量



实验的电路图

在K_2断开的情况下，

接通K_1： D_1 立刻亮

D_2 迟些亮

K_1和 K_2 接通的情况下，

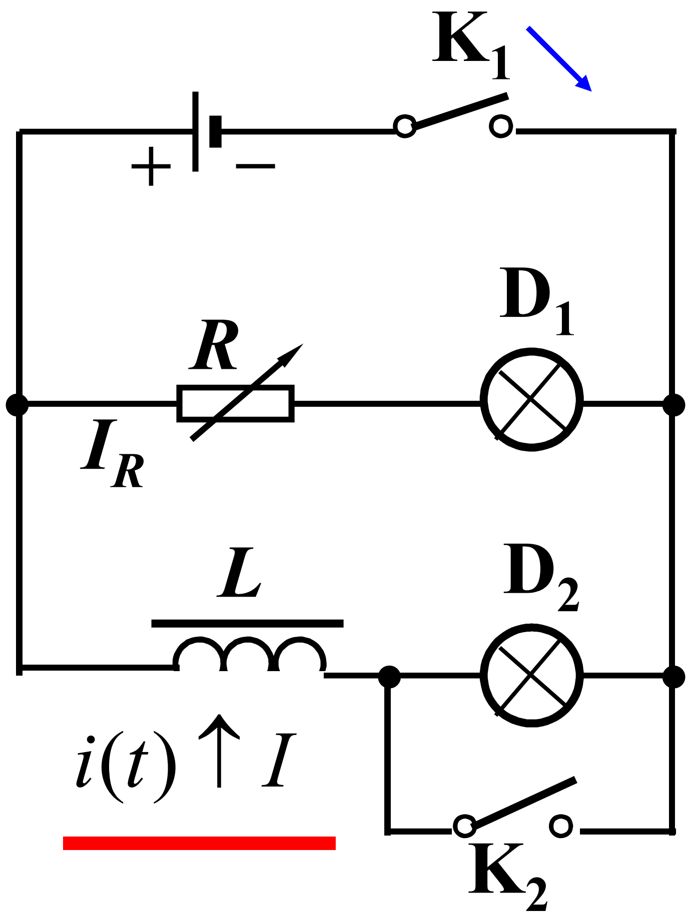
再断开K_1：D_1 闪亮后熄灭

（需要$I_L > I_R$）

—— 通电线圈中磁场具有能量

一、磁能的来源

考察在开关合上后的一段时间t内，电路中的电流由O到稳定值I的增长过程：



$i(t)\uparrow I$

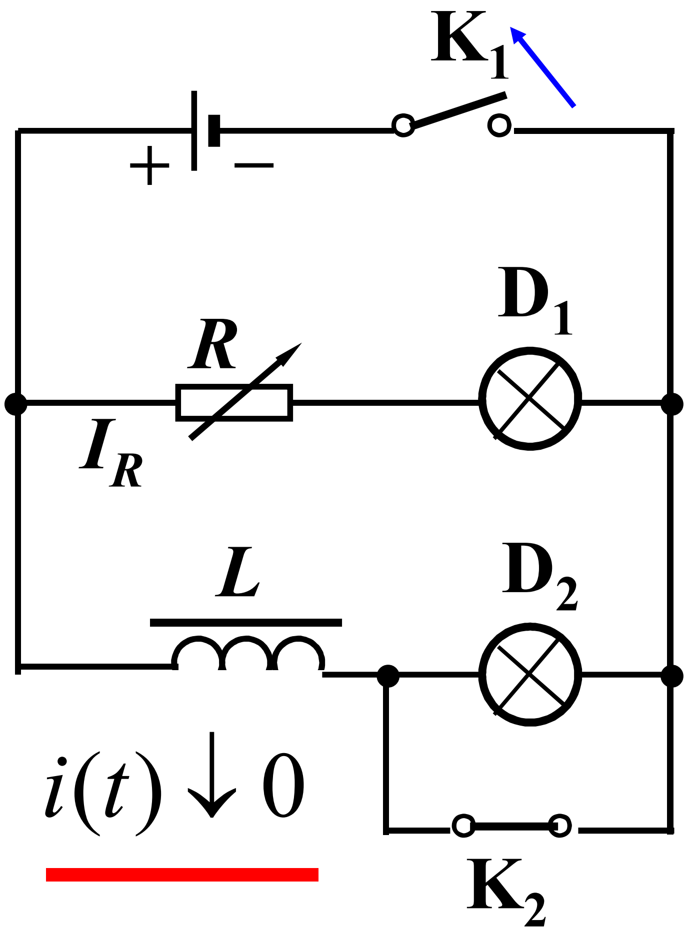
由全电路欧姆定律

$$-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\mathcal{E}=iR$$

$$\int_0^t i\varepsilon\,\mathrm{d}t=\int_0^I L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i\,\mathrm{d}t+\int_0^t iRi\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}LI^2+\int_0^t i^2R\,\mathrm{d}t$$

考察在开关断开后的一段时间t内，电路中的电流由I减小到O的过程：



由全电路欧姆定律

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR$$

$$\int_0^t i\varepsilon_L \mathrm{d}t = \int_I^0 -Li\mathrm{d}i = \int_0^t iRi\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}LI^2$$

线圈中储存的磁场能量又通过自感电动势作功释放出来转换为焦耳热

线圈中电流的磁场储存的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{——自感磁能公式}$$

与电容器储能公式比较

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \Longleftrightarrow W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

自感线圈也是一个储能元件，自感系数反映线圈储能的本领

二、磁场的能量（磁能的分布）

以长直螺线管为例：$L=\mu n^2 V \quad H=nI \quad B=\mu nI$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu n^2 V\left(\frac{B}{\mu n}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V=\frac{1}{2}BHV$$

磁场能量密度：单位体积中储存的磁场能量 w_m

$$w_m=\frac{W_m}{V}=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}BH$$ 适于任意磁场

任意磁场 $\quad \mathrm{d}W_m = w_m \mathrm{d}V = \frac{1}{2}BH\mathrm{d}V$

$$W_m=\iiint_V w_m \mathrm{d}V=\iiint_V \frac{1}{2}BH\mathrm{d}V$$

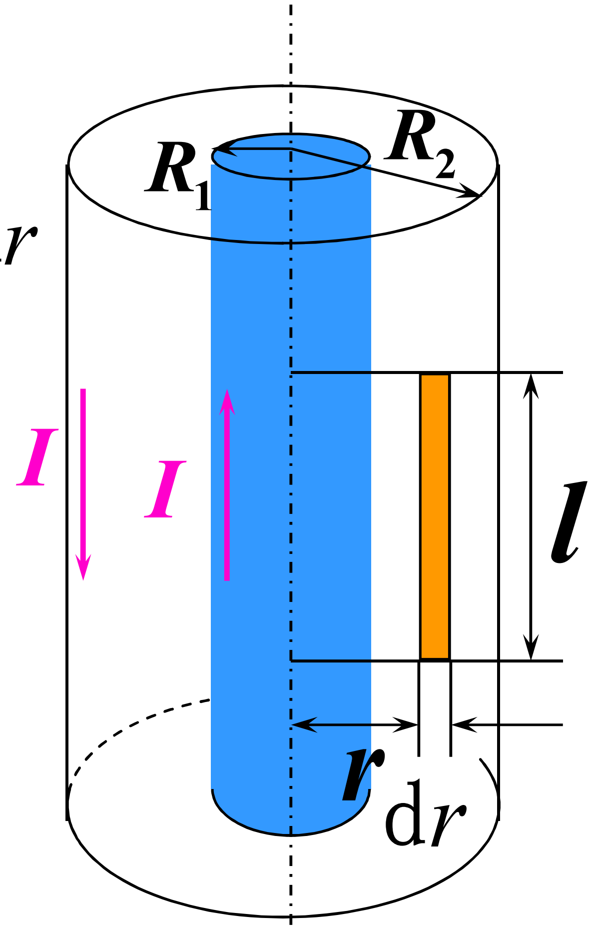
电场	比较 ⟷	磁场
各向同性	$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED$	$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}BH$
各向异性	$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$	$w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

总能量 $W_x = \iiint_V w_x \mathrm{d}V$

长直同轴电缆。已知R_1、R_2，填充介质均匀各向同性，
电流在两柱面上均匀分布。
求：（1）l 长段电缆W_m；（2.）电缆的自感系数L

解法1 $H \rightarrow w_m \rightarrow W_m \rightarrow L$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad \mathrm{d}V = 2\pi r l \mathrm{d}r$$



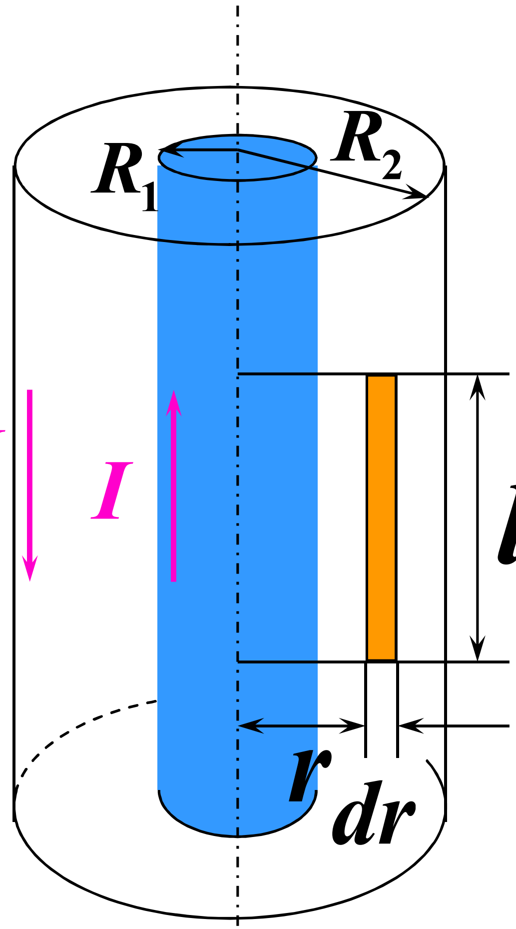
$$W_m = \iiint_V w_m \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{1}{2}\mu H^2 \mathrm{d}V$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r l \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\frac{1}{2}LI^2 = W_m = \frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln(\frac{R_2}{R_1})$$

可得同轴电缆的自感系数为 $$L = \frac{\mu l}{2\pi}\ln(\frac{R_2}{R_1})$$



解法2 $H \rightarrow B \rightarrow L \rightarrow W_m$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad B = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi r} & (R_1 \le r \le R_2) \\ 0 & （其他） \end{cases}$$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu I l}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I l}{2\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

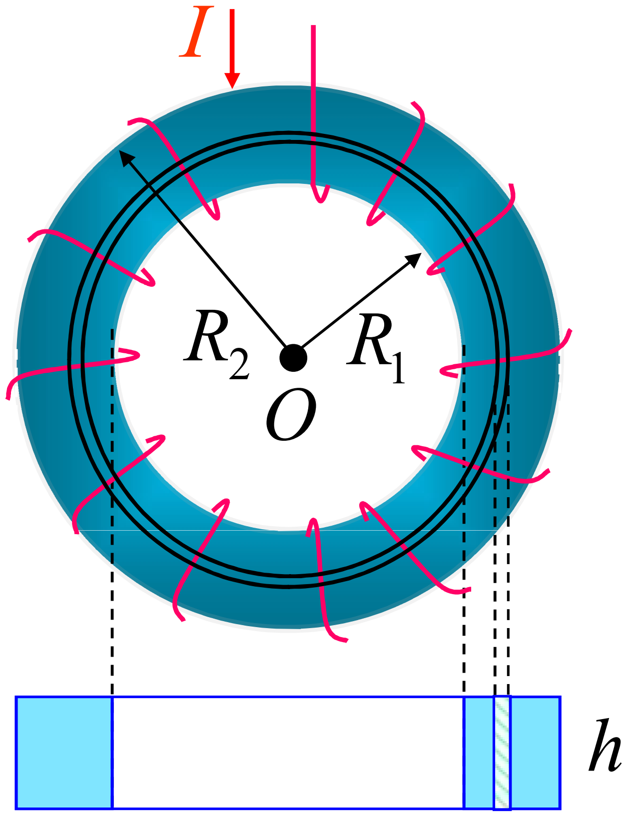
计算自感系数可归纳为三种方法

1. 静态法： $\Psi = LI$

2. 动态法： $\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

3. 能量法： $W_m = \dfrac{1}{2}LI^2$

例一由 N 匝线圈绕成的螺绕环，通有电流 I，其中充有均匀磁介质



求：　磁场能量W_m

解: 根据安培环路定理,螺绕环内

$$H=\frac{NI}{2\pi r}\qquad B=\frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}$$

$$w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$$

取体积元　　$\mathrm{d}V=2\pi rh\mathrm{d}r$

$$W_m=\iiint_V w_m\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi rh\mathrm{d}r=\frac{\mu N^2 I^2 h}{4\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$