§7.5 电容及电容器

电容是表征导体储电能力的物理量

一. 孤立导体的电容

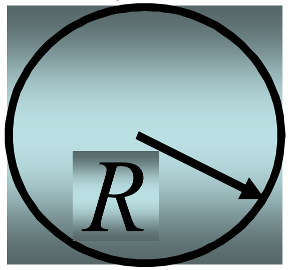
孤立导体所带的电荷 Q 与其电势 U 的比值是一个不变值

$$C \equiv \frac{Q}{U}$$

SI 单位:法拉 F $\mu F, pF$

导体的电容只与导体的尺寸、形状等几何因素和介质有关，与带电量多少无关　　固有的容电本领

例 求真空中孤立导体球的电容(如图)



解：设球带电为 Q 导体球电势

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

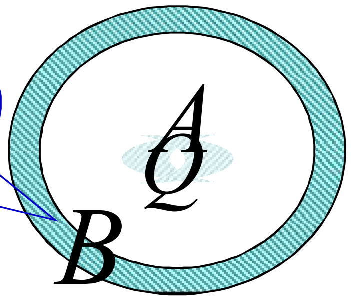
导体球电容

$$C = \frac{Q}{U} \boxed{= 4\pi\varepsilon_0 R}$$

问题 欲得到 $1F$ 的电容 孤立导体球的半径 R？

由孤立导体球电容公式知

$$R=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9 m\approx10^3 R_B$$



二.导体组的电容

由静电屏蔽--导体壳内部的场只由腔内的电量 Q

和几何条件及介质决定 **(相当于孤立)**

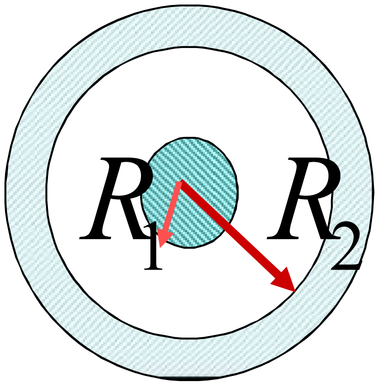
定义 $\boxed{C=\dfrac{Q}{\Delta U}}$ ΔU 球壳与腔内带电体电势差

电容的计算

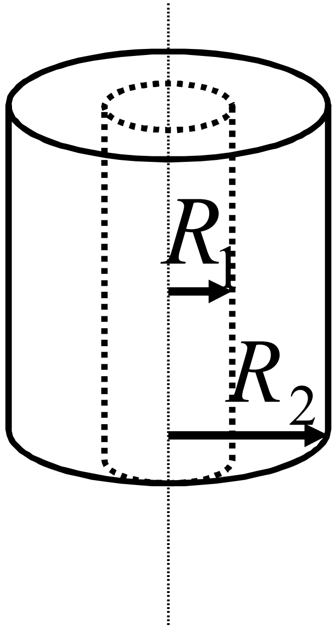
设 $Q \longrightarrow \vec{E} \longrightarrow \Delta U_{AB} \longrightarrow C=\dfrac{Q}{\Delta U}$

三、典型的电容器

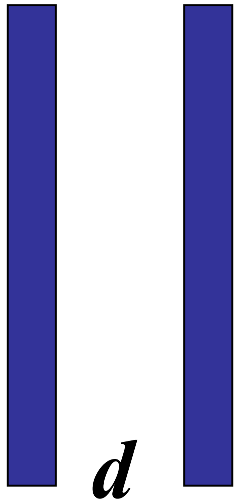
球形



柱形



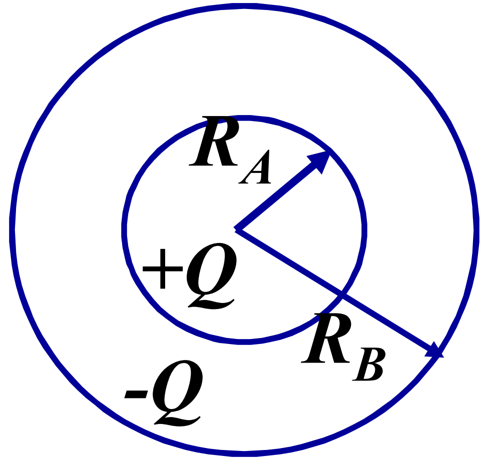
平行板



例1 求球形电容器的电容

解：

设内、外球壳带电量分别为$+Q$和$-Q$



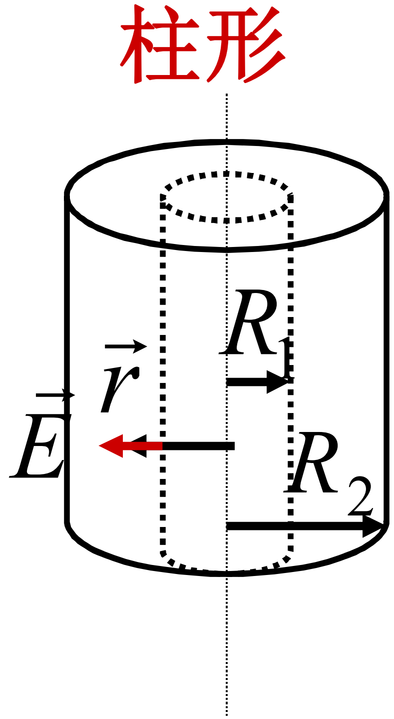
则两球壳间的电场为：$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

两球壳间的电势差为：

$$\Delta U=\int_{R_A}^{R_B}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_A}^{R_B}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

球形电容器的电容为：$$\boxed{C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A}}$$

例2 求柱形电容器单位长度的电容



解： 设单位长度带电量为 λ

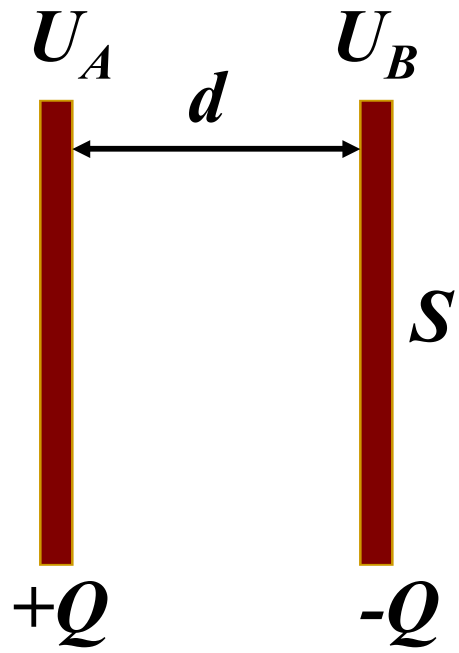
$$R_1 < r < R_2 \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

柱形电容器单位长度的电容为：

$$\boxed{C = \frac{\lambda}{\Delta U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}}$$

例3 平行板电容器的电容



解：令两板带电量分别为$+Q$和$-Q$

则两板间的场强为：

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{S\varepsilon_0}$$

两板间的电势差为：

$$\Delta U=\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{S\varepsilon_0}\cdot d=\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

电容为：

$$\boxed{C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

四. 有介质时的电容器的电容

$$\boxed{C = C_0 \varepsilon_r}$$

自由电荷 $Q_0 \rightarrow E_0 \rightarrow \Delta U_0 \rightarrow C_0 = \dfrac{Q_0}{\Delta U_0}$

有介质时 $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} \rightarrow \Delta U = \dfrac{\Delta U_0}{\varepsilon_r} \rightarrow C = \dfrac{Q_0}{\Delta U}$

$$= \frac{Q_0}{\Delta U_0} \varepsilon_r$$

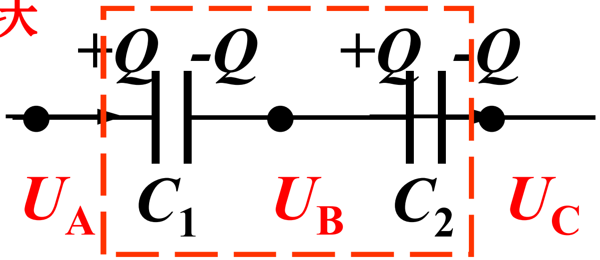
$$= C_0 \varepsilon_r$$

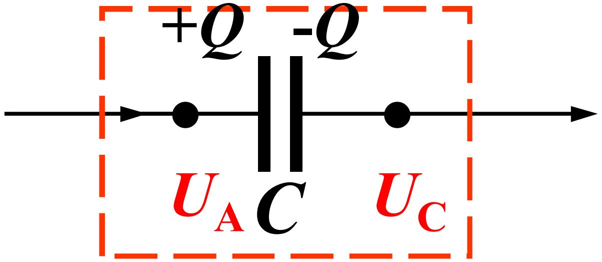
$\boxed{\varepsilon_r = \dfrac{C}{C_0}}$ 电容率

五、电容器的串联与并联

1、串联

等效电容





$$U_A - U_B = \frac{Q}{C_1}$$

$$U_B - U_C = \frac{Q}{C_2}$$

$$U_A - U_C = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

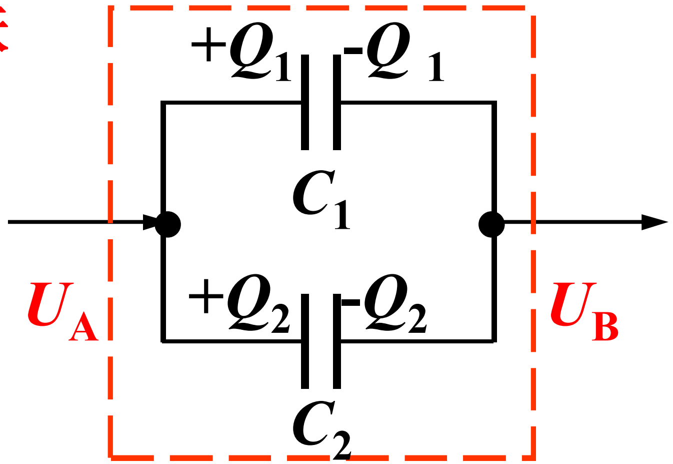
$$C = \frac{Q}{U_A - U_C}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

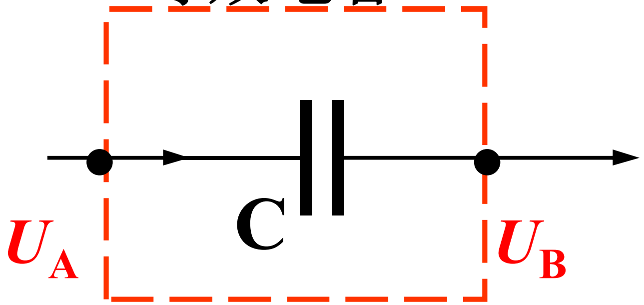
一般n 个电容器串联的等效电容为

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}}$$

2、并联



等效电容



$$C = \frac{Q}{U_A - U_B}$$

$$Q_1 = C_1(U_A - U_B)$$

$$Q_2 = C_2(U_A - U_B)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)(U_A - U_B)$$

$$C = C_1 + C_2$$

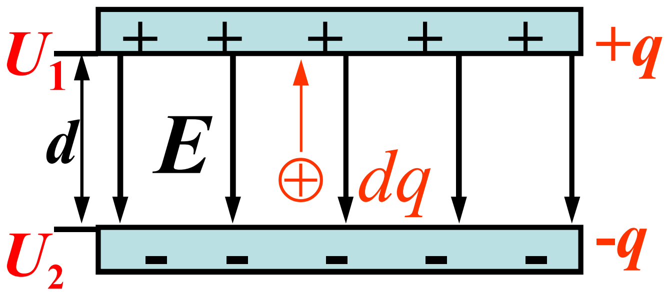
一般n 个电容器并联的等效电容为

$$\boxed{C = \sum_{i}^{n} C_i}$$

§ 7.6　静电场的能量

一、电容器中的静电能

电容器充电＝外力不断地把电荷元dq从负极板搬运到正极板。



＝电场力作负功

$$\mathrm{d}A = (U_1 - U_2)\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

极板上电荷从0 ~Q，外力作功

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

根据能量守恒定律，外力作功

A=电容器中储存的静电能W

$$U \equiv U_1 - U_2$$

$$CU = Q$$

$$\boxed{W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}}$$

二、电场能量和能量密度

各向同性介质

$$W_e = \frac{QU}{2}$$

$$U = Ed$$

$$Q = \sigma S$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$Sd = V$$

$$\boxed{W_e = \frac{\varepsilon}{2} E^2 V}$$

$$w_e = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

$$\boxed{w_e = \frac{\varepsilon E^2}{2}}$$

能量密度

真空中

$$w_{e0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

$$\because \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r > \varepsilon_0 \xrightarrow{\text{电场强度相同}} \therefore w_e > w_{e0}$$

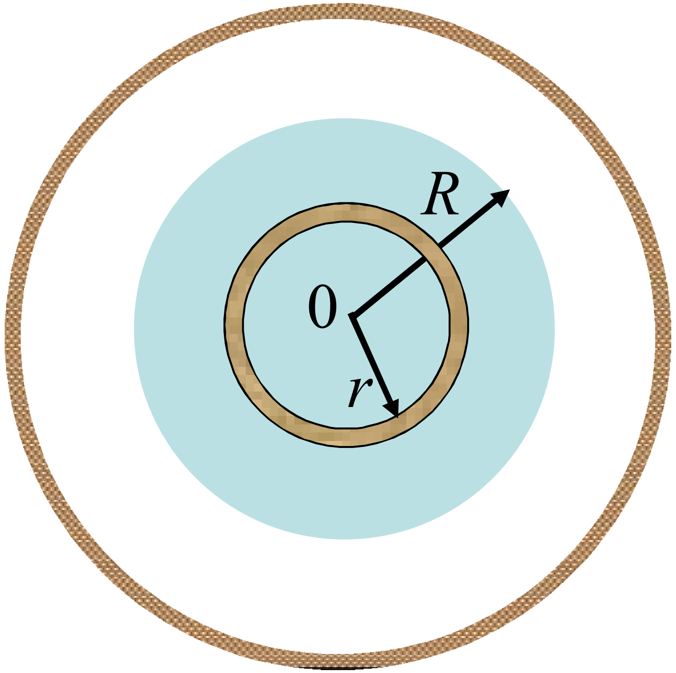
介质极化过程也吸收并储存了能量。

具有普遍意义，不只对均匀电场成立，表示任意电场的能量密度。 电场储存有能量

任意场中存储的能量为 $\boxed{W_e = \int_V w_e dV}$

例1：一均匀带电球体，半径为R，带电量为q。求带电球体的静电能。(不考虑球体的极化）

解、场强分布



$$E_1 = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad (r \le R)$$

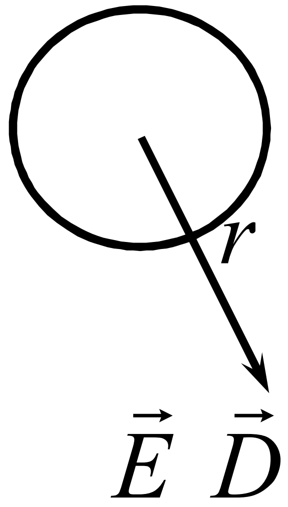
$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r \ge R)$$

$$W = \int w_e dV = \int_{r<R} w_1 \mathrm{d}V + \int_{r>R} w_2 \mathrm{d}V$$

$$= \int_0^R \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \boxed{= \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}}$$

例 2 导体球的电场能(相当于球面）



$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad \boxed{D = \frac{Q}{4\pi r^2}}$$

$$w_{eo} = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} = \frac{1}{2} E \cdot D$$

$$W_e = \int_{\left(\substack{all\ space \\ of\ field}\right)} w_e dV = \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr$$

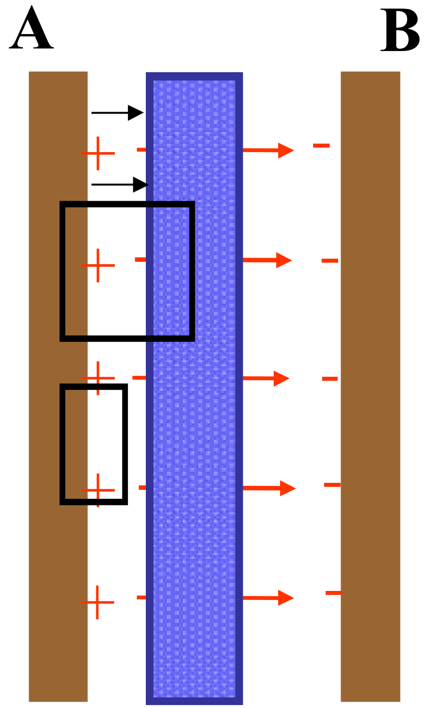
$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

例3、空气平板电容器，极板面积为S，间距为d，今以厚度为d'的铜板平行地插入电容器内。

1、计算插入铜板后的电容器电容

2、铜板位置对结果是否有影响？

3、充电到电势差为 U 后断开电源，抽出铜板作功多少？



解：1、铜板插入前的电容 $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

设极板带电为 $\pm q$

铜板内 $E = 0$ 　　外 $E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$

$$U_A - U_B = E_0 d_1 + E_0 d_2 = E_0(d - d') = \frac{q(d - d')}{\varepsilon_0 S}$$

$$C' = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d'}$$

$$C' > C$$

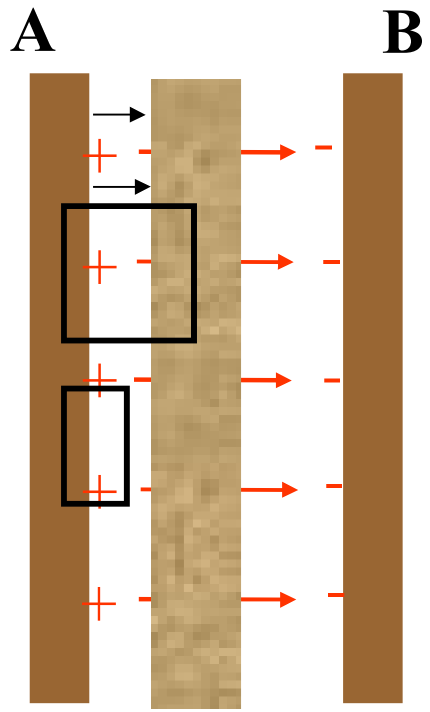
或者 $\dfrac{1}{C'} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$

3、充电到电势差为U后断开电源，抽出铜板作功多少？

电容器充电到电势差为U时，极板带电量为 $Q = C'U$

储能 → $W' = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C'}$ $\qquad W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

切断电源抽出铜板电容器所储能量为



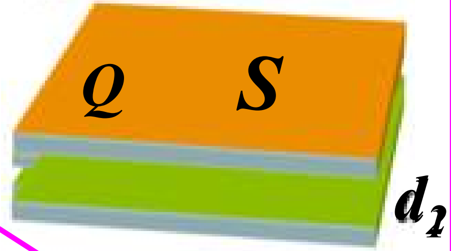
$$A = W - W' = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'}\right) = \frac{Q^2}{2}\frac{d'}{\varepsilon_0 s}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 s}{d-d'}\right)^2 U^2 \frac{d'}{\varepsilon_0 s} = \frac{\varepsilon_0 s U^2 d'}{2\left(d-d'\right)^2}$$

外力做功转换为电场能量

如果插入的是介质平板，情况如何？

例4 面积为S，带电量为$\pm Q$ 的平行平板。忽略边缘效应，问：将两板从相距d_1 拉到 d_2 外力需要作多少功？



无限大带电板

解：

d_1 和 d_2 电场强度相等

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{S\varepsilon_o}$$

面电荷密度不变

☆

电势差

$$U_1 = E_1 d_1 = \frac{Q}{S\varepsilon_o} d_1$$

$$U_2 = E_2 d_2 = \frac{Q}{S\varepsilon_o} d_2$$

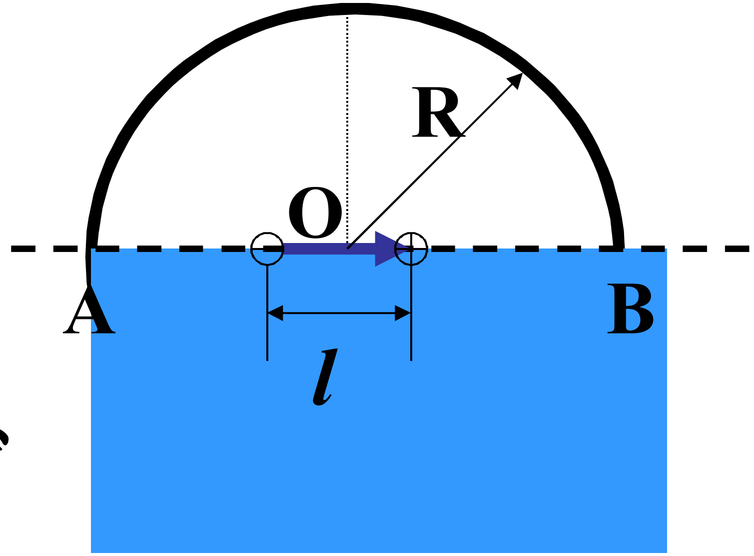
电场能量

$$W_{e1} = \frac{1}{2} U_1 Q = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0} d_1$$

$$W_{e2} = \frac{1}{2} U_2 Q = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0} d_2$$

外力作功=
电场能量增量 $A = \Delta W = W_{e2} - W_{e1} = \dfrac{Q^2 (d_2 - d_1)}{2\varepsilon_o S}$

例5 如图所示，在电矩为 P 的电偶极子的电场中，将一电量为 q_0 的点电荷从 A 点沿半径为 R 的圆弧(圆心与电偶极子中心重合，$R>>l$ ）移到 B 点，求此过程中电场力所所做的功。



解： 电偶极子产生的电场是保守力场

$q_0 \; A \rightarrow B$ 与路径无关

$A = q_0(U_A - U_B)$ 电势能减少

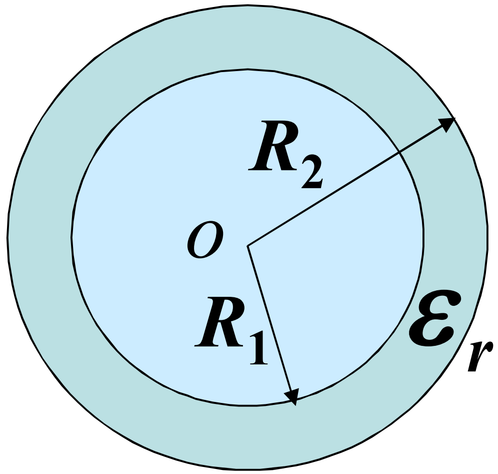
$$U_A = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(R-\frac{l}{2})} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R+\frac{l}{2})} \approx -\frac{P(ql)}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad R>>l$$

$$U_B \approx \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\therefore A = -\frac{q_0 P}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

例 6．一球形电容器，内球壳半径为R_1，外球壳半径为R_2，两球壳间充满了相对介电常数为ε_r 的各向同性的均匀电介质。设两球壳间电势差为U_1.

求：1) 电容器的电容； 2) 电容器储存的能量



解： 内外球壳带电为 $\pm Q$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r} \qquad R_1 \le r \le R_2$$

$$U_1 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}$$

1) $$C = \frac{Q}{U_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

2) $$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2 U_1^2}{R_2 - R_1}$$

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2 U_1}{R_2 - R_1}$$

2) $$W=\int w_e dV=\int \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2(\vec{E}\cdot\vec{D})dV$$

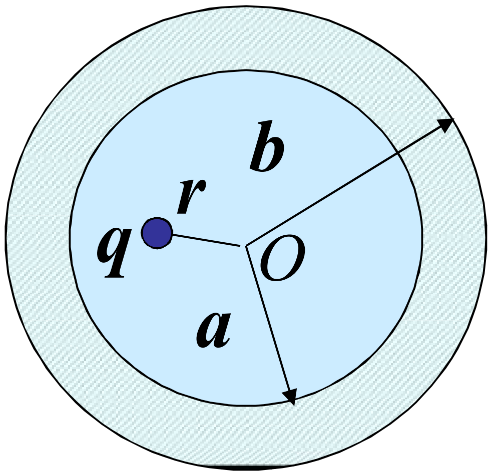
$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\right)^2\cdot 4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2 U_1^2}{R_2-R_1}$$

例7　如图所示。一内半径为a，外半径为b的金属球壳体，带有电量Q，在球壳空腔内距离球心r处有点电荷q.设无限远处为电势零点，试求：

1) 球壳内、外表面上的电荷；
2) 球心O点处，由球壳内表面上电荷产生的电势；
3) 球心O点处的总电势。



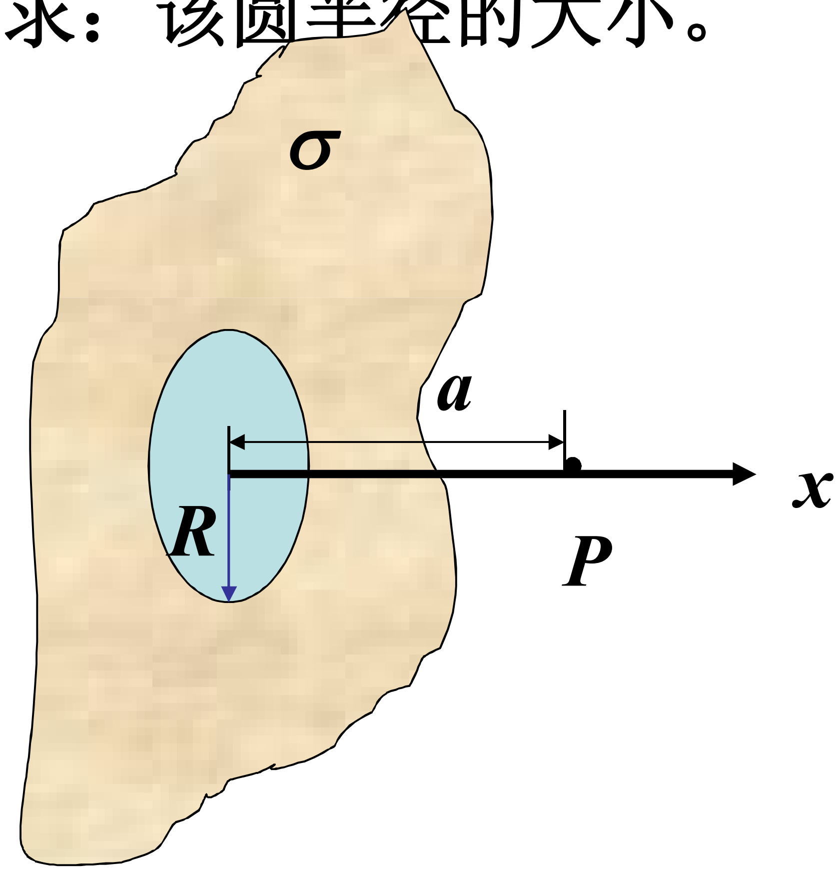
1)内表面 $-q$　　不均匀

外表面 $Q+q$　均匀

2)　$U_{-q}=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

3) $U_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b}$

例8 一电荷面密度为 σ 的“无限大”平面，在距离平面 a
米远处的一点 P 的场强大小的一半是由平面上的一个半径为 R 的圆面积范围内的电荷所产生的。
试求：该圆半径的大小。



思路： $\longrightarrow$ $\vec{E}_P = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$

盘： $E_{盘P} = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}$

$$E_{盘} = \int_0^R dE_{环}$$

$$dE_{环} = \frac{a \cdot dq}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$dq = 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma$$

$$R = \sqrt{2}a$$