高等数学2016级下学期期末试卷

A卷

一、填空题 (每题6分,共30分)1、$(x-1)+2(y-2)+(z-1)=0$或$x+2y+z=6$，$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{x-1}{1}$；2、$(2,3,1),-\frac{2}{3}$；

3、$f_1'\bullet e^x\bullet\sin y$，$f_1'\bullet e^x\bullet\cos y+e^x\bullet\sin y(f_{11}''\bullet e^x\bullet\cos y+f_{12}'')$；

4、$S(1)=\frac{3}{2}$，$S(100)=1$；5、$2,\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$。

二、单项选择题 (每题4分,共20分)1、B；2、D；3、C；4、B；5、A。

三、（工科）求微分方程$y''-y'-2y=(1-2x)e^x$的通解。

解：特征方程$r^2-r-2=0$，特征根$r_1=-1,r_2=2$。

齐次方程通解$Y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$，（4分）

特解形式$y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x$。（7分）

将 $y^*(x)$代入原方程并整理得：$-2ax+a-2b=1-2x,\begin{cases}-2a=-2\\a-2b=1\end{cases},a=1,b=0$，

所以$y^*(x)=xe^x$，$\therefore$通解$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+xe^{2x}$。（10分）

三、（高数）求过Z轴且与平面$2x+y+3z=0$垂直的平面方程。

解：由题意，所求平面过原点$O(0,0,0)$，且法向量$\vec{n}$垂直于向量$(0,0,1)$，同理法向量$\vec{n}$垂直于向量$(2,1,3)$，故：

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i},\vec{j},\vec{k}\\0,0,1\\2,1,3\end{vmatrix}=(-1,2,0)$$（7分）

故点法式平面方程：$x-2y=0$。（10分）

三、（**微积分**）求二重积分$\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$，其中 D 由$x=1,y=1$和$x^2+y^2=1(x,y\geq 0)$围成的区域。

解: 设$D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq 1,x,y\geq 0\right\}$，(2分)

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\iint_{D+D_1}(x^2+y^2)dxdy-\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 (x^2+y^2)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3dr$$ (8 分)

$$=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{8}$$ （10 分）

四、用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法求函数 $f(x,y)=x^2+4xy+y^2$ 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值。

解：令 $L(x,y,\lambda)=x^2+4xy+y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$ 。

由 $\begin{cases}L_x=2x+4y+2\lambda x=0\\L_y=4x+2y+2\lambda y=0\\L_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}$，得 （5 分）

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\\y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\begin{cases}x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\\y_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\begin{cases}x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\y_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\begin{cases}x_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\y_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=3$，最大值；

$f(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=-1$，最小值。 （10 分）

五、将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数，并求收敛域。

解： $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},-1<x<1$ （2 分）

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n})dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

（8 分）

左端点 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$，由莱布尼兹判别法收敛。

收敛域 $[-1,1)$ 。

由于 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，所以：

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\qquad [-1,1)\ 。$$（10 分）

六、求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum\ :z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，取下侧。

解：补有向曲面 $\sum_1\ ：z=z(x,y)=1\qquad (x^2+y^2\le 1)$，取上侧。（2 分）

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$，（5 分）

其中 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z:x^2+y^2\le(\sqrt{z})^2}dxdy=\int_0^1\pi z^2\,\mathrm{d}z=\pi\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^1=\frac{\pi}{3}$，

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}(x^2+y^3)dxdy$，

由对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}y^3dxdy=0$，

由轮换对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{4}$，

故 $I=\frac{\pi}{12}$。（10 分）

七、计算曲线积分 $\int\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为从点 $A(1,1)$ 沿直线到点 $B(-1,0)$，再沿曲线 $y=x^2-1$ 到点 $C(1,0)$。

解：$P=\frac{-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，（2 分）

积分与路径无关，自选路径。令点 $D(-1,1)$，选从点 $A(1,1)$ 沿水平线到点 $D(-1,1)$ 后，沿铅直线到点 $B(-1,0)$，再沿下半单位圆到点 $C(1,0)$。（4 分）

其中：$\int\limits_{AE}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\underline{\underline{\begin{cases}y=1\\x=x\end{cases}}}\int_1^{-1}\frac{-dx}{1+x^2}=-\arctan x\Big|_1^{-1}=\frac{\pi}{2}$，

$\int\limits_{EB}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\underline{\underline{\begin{cases}x=-1\\y=y\end{cases}}}\int_1^0\frac{-dy}{1+y^2}=-\arctan y\Big|_1^0=\frac{\pi}{4}$，

$$\int_{BC}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\underline{\underline{\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}}}\int_{-\pi}^{0}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=\pi\text{。}$$

所以，$\int_{L}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{7\pi}{4}$。（10 分）

B 卷

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1、 $f_1'\bullet e^x\bullet\sin y$， $f_1'\bullet e^x\bullet\cos y+e^x\bullet\sin y(f_{11}''\bullet e^x\bullet\cos y+f_{12}'')$；

2、$(x-1)+2(y-2)+(z-1)=0$ 或 $x+2y+z=6$， $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{x-1}{1}$；

3、$(2,3,1),-\frac{2}{3}$； 4、$2,\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$； 5、 $S(1)=\frac{3}{2}$， $S(100)=1$。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)1、C ；2、B；3、D；4、A；5、B。

三、（工科）求微分方程 $y''+y'-2y=(2x+1)e^{-x}$ 的通解。

解：特征方程 $r^2+r-2=0$，特征根 $r_1=1,r_2=-2$。

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}$ ，（4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x$。（7 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$-2ax-a-2b=2x+1,\begin{cases}-2a=2\\ -a-2b=1\end{cases},a=-1,b=0$，

所以 $y^*(x)=-xe^x$，∴通解 $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}-xe^x$。（10 分）

三、（高数）求过 X 轴且与平面 $2x+y+3z=0$ 垂直的平面方程。

解：由题意，所求平面过原点 $O(0,0,0)$，且法向量 $\vec{n}$ 垂直于向量 $(1,0,0)$，同理法向量 $\vec{n}$ 垂直于向量 $(2,1,3)$，故：

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i},\vec{j},\vec{k}\\ 1,0,0\\ 2,1,3\end{vmatrix}=(0,-3,1)$$（7 分）

故点法式平面方程：$3y-z=0$。（10 分）

三、（微积分）求二重积分 $\iint_D(y^2+x^2)dxdy$，其中 D 由 $x=1,y=1$ 和

$x^2+y^2=1(x,y\ge 0)$围成的区域。

解: 设$D_1=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x,y\ge 0\right\}$， （2 分）

$$\iint_D (y^2+x^2)dxdy=\iint_{D+D_1}(y^2+x^2)dxdy-\iint_{D_1}(y^2+x^2)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 (y^2+x^2)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3dr$$ （8 分）

$$=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{8}$$ （10 分）

四、用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法求函数$f(x,y)=x^2-4xy+y^2$在单位圆$x^2+y^2=1$上的最大值和最小值。

解：令$L(x,y,\lambda)=x^2-4xy+y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$。

由$\begin{cases}L_x=2x-4y+2\lambda x=0\\ L_y=-4x+2y+2\lambda y=0\\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}$，得 （5 分）

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\begin{cases}x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\begin{cases}x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\begin{cases}x_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=-1$，最小值；

$f(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=3$，最大值。 （10 分）

五、同 A 卷。

六、求曲面积分$I=\iint_\Sigma xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\sum\ :z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，取下侧。

解：补有向曲面$\sum_1\ :\ z=z(x,y)=1\quad (x^2+y^2\le 1)$，取上侧。 （2 分）

由高斯公式，$I+\iint_{\Sigma_1}=\iiint_\Omega z\mathrm{d}V$， （5 分）

其中$\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{D_z:x^2+y^2\le(\sqrt{z})^2}dxdy=\int_0^1\pi z^2\,\mathrm{d}z=\pi\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^1=\frac{\pi}{3}$，

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}(x^3+y^2)dxdy$，

由对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1} x^3dxdy=0$，

由轮换对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1} y^2dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{4}$，

故 $I=\frac{\pi}{12}$。（10 分）

七、同 A 卷。