第四章 随机变量的数字特征

复　习

关注产品寿命值　（随机现象）

比较两厂寿命均值　（存在-未知）

估计两厂寿命均值（然后比较）

随机抽取**n**个产品测寿命值

（9.3,…8.1）

（9.3...8.1）是一个样本点

合理？

$\left(\bar{x} = \ldots = 7.9\right)$

（甲厂寿命均值在7.9年左右）

概率统计研究：寻求理论支持

第一章：确定研究对象（随机试验）

第二章：建立随机变量

电视机寿命值

总体寿命值

$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

独立重复n次

第三章：二维随机变量（推广**n**维）

1. $\left(X_1, X_2 \cdots X_n\right)$联合分布

1. 样本的分布

2. 二维随机变量函数

2. 样本均数分布

$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$

第四章：数字特征　总体均值即μ

一. 数学期望

二. 方差

三.协方差和相关系数

一. 数学期望

1.数学期望的定义

2.数学期望的性质

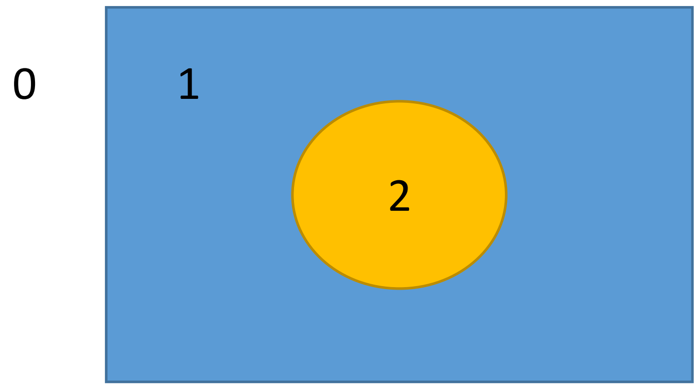
3.常用分布的期望

4.数学期望的应用举例

随机变量X，分布函数 $F(x)$，定义 X 的平均值。

例如，甲乙两人进行射击比赛，争夺奥运会资格。比赛规则如下：
中靶得1分，击中靶心得2分，飞靶得0分。

用 X，Y 分别表示甲，乙两人的的得分情况，显然应该比较 两人的平均分，得分高者入选。现进行100次射击



甲100次射击得分结果：

X	0	1	2
n_a	1	1	98

$$\bar{x}=\frac{0\times1+1\times1+2\times98}{100}=1.97$$

X 取值以频率做权加权平均

X	0	1	2
$\frac{n_a}{n}$	0.1	0.1	0.98

$$\bar{x}=0\times0.1+1\times0.1+2\times0.98$$
$$=1.97$$ （样本均数，变量）

X 取值以概率做权加权平均

X	0	1	2
p_i	p_0	p_1	p_2

$$\bar{x}=0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2$$

（客观存在的常数）

数学期望

乙100次射击得分结果：

Y	0	1	2
n_a	2	0	98

$$\bar{y}=1.96$$

Y	0	1	2
$\frac{n_a}{n}$	0.2	0	0.98

$$\bar{y}=0\times0.2+1\times0+2\times0.98=1.96$$

Y	0	1	2
p_j'	p_0'	p_1'	p_2'

$$\bar{y}=0\times p_0'+1\times p_1'+2\times p_2'$$

1.定义: (1) 设离散型随机变量X的分布列为 $P(X=x_i)=p_i\ \ i=1,2\ldots,$

若级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i p_i$绝对收敛，则称$EX=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i p_i$ 为X的数学期望(期望)。

若$EX=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|p$不收敛，则称$X$期望不存在或无穷大。

(数学期望即平均值–常数)

例1. $X\sim B(1,0.5)$

X	0	1
p	0.5	0.5

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1\text{-}k}\quad k=0,1$$

$$P\left(\sum\ k\right)\times 0.5^k(1-0.5)^{1\text{-}k}\quad k=0,1$$

$$E(X)=0\times0.5+1\times0.5=0.5$$

$$E(X)=0\times0.5^0(1-0.5)^{1-0}+1\times0.5^1(1-0.5)^{1-1}=0.5$$

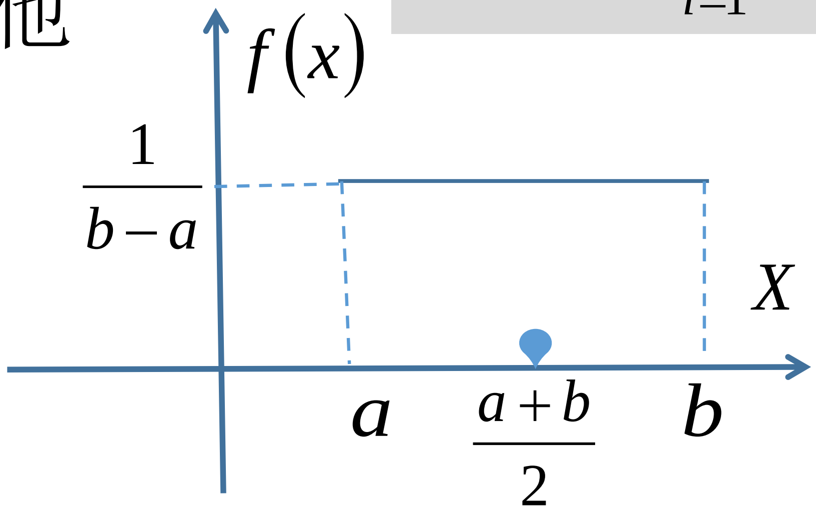
(2) 设随机变量X的密度函数为$f(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$绝对收敛，则称$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$为$X$的数学期望。若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$不收敛则称$X$期望不存在或无穷大。

例2. $X \sim U(a,\ b)$，$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{a+b}{2}$$



(3) 设Y是随机变量X的函数，$Y=g(X)$（$g(X)$是连续函数）

i) X为离散型随机变量，分布列为$P(X=x_i)=p_i\ i=1,2\cdots$，

若级级$\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$绝对收敛则称$E(Y)=E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$

为随机变量Y的数学期望。　$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2p_i$　　$E|X|=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i$

X	1	2
p	0.3	0.7

$Y=X^2$

Y	1	4
p	0.3	0.7

$EY=E(X^2)=1^2\times0.3+2^2\times0.7=3.1$　　$\cancel{EY=1\times0.3+4\times0.7=3.1}$

ⅱ) X为连续性随机变量，密度函数为$f(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

绝对收敛，则称Y的期望存在，$EY=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \qquad E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx$$

例：$X \sim U(-1,1), f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & -1<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ $E(X)=\int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}dx=\frac{-1+1}{2}=0$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1} x^2\frac{1}{2}dx=\frac{1}{3} \qquad E(|X|)=\int_{-1}^{1}|x|\frac{1}{2}dx=-\int_{-1}^{0} x\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{1} x\frac{1}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}$$

(4) 设Z是随机变量X,Y的函数， $Z=g(X,Y)$ (g是连续函数)

i) (X,Y)为二维离散型随机变量， 分布列为$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$

$i,j=1,2\cdots$，若$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|g(x_i,y_j)|p_{ij}<\infty$ 则$Z=g(X,Y)$的期望存在。

且 $EZ=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$。

例2. 设(X,Y)的联合分布列为，试求：

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\bullet}$
-1	$1/9$	$2/9$	0	$1/3$
2	$3/9$	$1/9$	$2/9$	$2/3$
$p_{\bullet j}$	$4/9$	$3/9$	$2/9$	1

$E(X),E(X^2),E(Y)$ $E(Y^2)E(XY)E(X+3)^Y$

解：$E(X)=-1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=1$; $E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{2}{3}=3$

解：$E(Y)=1\times\frac{3}{9}+2\times\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\bullet}$
-1	$1/9$	$2/9$	0	$1/3$
2	$3/9$	$1/9$	$2/9$	$2/3$
$p_{\bullet j}$	$4/9$	$3/9$	$2/9$	1

$$E(Y^2)=1^2\times\frac{3}{9}+2^2\times\frac{2}{9}=\frac{11}{9}$$

$$E(XY)=-1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{1}{9}+4\times\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$$

XY	0	1	2
-1	0	-1	-2
2	0	2	4

$$E(X+3)^Y=\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+5\times\frac{1}{9}+5^2\times\frac{2}{9}$$

$$=7$$

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	2^0	2^1	2^2
2	5^0	5	5^2

ⅱ)(X,Y)是连续性随机变量，联合密度为 $f(x,y)$， $Z=g(X,Y)$

若$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x,y)|f(x,y)dxdy<\infty$,则称随机变量Z的期望存在，

为$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{g(x,y)}f(x,y)dxdy$.

特别的， $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$; $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$

例：已知(X,Y)的联合密度为$f(x,y)$，求$E(X),E(Y)$.

解1. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 2. $\boxed{Z=X}$ $E(Z)=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$;

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy;$$

期望的定义：

1.**X**的分布列 $P(X=x_i)=p_i\ i=1,2\ldots,$ $EX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$

$Y=g(X),$ $E(Y)=E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$

2.*X*的密度函数$f(x)$ $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$Y=g(X),$ $EY=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$。 $Z=g(X,Y)$

3.(***X,Y***)的分布列 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$ $EZ=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$。

4.(***X,Y***)的分布密度***f(x,y)*** $EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy.$

2. 数学期望的性质

$$E\{E(X)\}=E(X)$$

(1) $Ec=c$,其中c为常数。

(2) $E(cX)=cEX.$

(3) $E(aX+b)=aE(X)+b$

(4) $E(X\pm Y)=EX\pm EY$

3)证:$Y=aX+b$, $P(X=x_i)=p_i\ i=1,2\cdots$

$$E(Y)=E(aX+b)=\sum_{i=1}^{+\infty}(ax_i+b)p_i$$

$$=\sum_{i=1}^{+\infty}ax_ip_i+\sum_{i=1}^{+\infty}bp_i=a\sum_{i=1}^{+\infty}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{+\infty}p_i$$

$$=aE(X)+b$$

4)证:已知$f(x,y)$

$$E(X\pm Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x\pm y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy\pm\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxd=EX\pm EY$$

一般的，$X_1, X_2, \ldots X_n$是 n 个随机变量，有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} EX_i\,; \qquad E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i$$

$$\left(\text{总体}X,\text{抽样}\left(X_1, X_2, \ldots X_n\right),\ \text{构造}\overline{X},\text{则}E\left(\overline{X}\right) = E(X)\right)$$

(5) 当X与Y独立时，有 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

证：已知$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(xy) f(x, y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_X(x) f_Y(y)\,dxdy$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy\right) = E(X)E(Y)$$

期望的性质：

(1) $Ec = c$,

(2) $E(cX) = cEX$.

(3) $E(aX+b) = aE(X)+b$

(4) $E(X \pm Y) = EX \pm EY$

(5) $E(XY) = E(X)E(Y)$. $(X$与Y独立$)$

总体X，抽样$(X_1, X_2, \ldots X_n)$,

$X_i, i = 1,2\ldots n$ 相互独立，

与总体同分布。

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = EX$$

3. 常用分布的数学期望

(1) $\boxed{X \sim B(1,p) \quad E(X)=p}$

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

(2) $\boxed{X \sim B(n,p)\ E(X)=np}$

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad k=0,1,2\ldots n$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} \cancel{k}\frac{n!}{\cancel{k}!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!\,p}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\boxed{\sum_{k-1=0}^{n-1}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}}$$

$$=(p+q)^{n-1}np=np$$

(2)证：$X=\sum_{k=1}^{n}X_k\,;X_k\sim B(1,p),k=0,1\cdots n$

$$E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}EX_k \quad =nEX_k=np$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(k^2-k+k\right) C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} + \boxed{\sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}}$$

$$=\sum_{k-2=0}^{n-2}\frac{p^2 n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!\left((n-2)-(k-2)\right)!}p^{k-2}q^{(n-2)-(k-2)} + np$$

$$\underset{(t=k-2)}{=} p^2 n(n-1)\sum_{t=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{t!\left((n-2)-t\right)!}p^t q^{(n-2)-t} + np$$

$$= p^2 n(n-1)(p+q)^{n-2} + np = p^2 n(n-1) + np$$

$$(3)\ \boxed{X \sim P(\lambda) \quad E(X)=\lambda}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n\,!}=e^x\right)$$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad k=0,1,2....$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}\lambda}{(k-1)!}e^{-\lambda}\underset{t=k-1}{=}\lambda\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{\lambda^t}{t\,!}e^{-\lambda}=\lambda$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}(k^2-k+k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\frac{\lambda^{k-2}}{k\,!}e^{-\lambda}+\lambda$$

$$=\lambda^2\sum_{k-2=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

(4) $\boxed{X \sim G(p) \quad E(X)=1/p}$

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1} \quad k=1,2\ldots$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}=\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}=p\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}}$$

$$\frac{(1-q)+q}{(1-q)^2}=\frac{1}{p^2}$$

设 $f(q)=\sum_{k=1}^{+\infty} q^k=\dfrac{q}{1-q}$， 则 $f'(q)=\left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^k\right)'=\left(\dfrac{q}{1-q}\right)'$

$$E(X)=p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}=p\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2p(1-p)^{k-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)q^{k-1}+\frac{1}{p}$$

设 $f(q)=\sum_{k=1}^{+\infty}q^k=\frac{q}{1-q}$，则 $f''(q)=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}q^k\right)''=\left(\frac{q}{1-q}\right)''$

有 $\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2}=2\frac{1}{p^3}$

$$E\left(X^2\right)=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)q^{k-1}+\frac{1}{p}$$

$$=pq\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2}+\frac{1}{p}\quad=pq\left(2\frac{1}{p^3}\right)+\frac{1}{p}\quad=\frac{1+q}{p^2}$$

(5) $\boxed{X \sim U(a,b) \quad E(X)=\frac{a+b}{2}}$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx=\int_a^b x \frac{1}{b-a} dx=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx=\int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

(6) $\boxed{X \sim e(\lambda) \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_{0}^{+\infty} x d e^{-\lambda x}$$

$$= -x e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_{0}^{+\infty} x^2 d e^{-\lambda x}$$

$$= -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = \int_{0}^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\frac{2}{\lambda} x e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

(7) $\boxed{X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \quad E(X)=\mu}$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx =\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\underset{dx=\sigma dt}{\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=}}\int_{-\infty}^{+\infty}(t\sigma+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt}=\mu$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}}$$

1.期望的定义

$$EX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$$

$$P(X=x_i)=p_i\ i=1,2\ldots,$$

$$Y=g(X),\quad E(Y)=E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$$

X的密度函数为$f(x)$, $$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

$$EY=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

分布列为$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$

$$EZ=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}\ 。\qquad Z=g(X,Y)$$

联合密度为*f*(*x*,*y*)

$$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy.$$

2.期望的性质

(1) $Ec = c,$

(2) $E(cX) = cEX.$

(3) $E(aX + b) = aE(X) + b$

(4) $E(X \pm Y) = EX \pm EY$

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = EX$$

(5) $E(XY) = E(X)E(Y).$ (X与Y独立)

3.常用分布的期望

(1) $\boxed{X \sim B(1, p) \quad E(X) = p}$

(2) $\boxed{X \sim B(n, p) \; E(X) = np}$

(3) $\boxed{X \sim P(\lambda) \quad E(X) = \lambda}$

(4) $\boxed{X \sim G(p) \quad E(X) = 1/p}$

(5) $\boxed{X \sim U(a, b) \quad E(X) = \frac{a+b}{2}}$

(6) $\boxed{X \sim e(\lambda) \; E(X) = \frac{1}{\lambda}}$

(7) $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad E(X) = \mu}$