§3 静电场中的导体

静电场　　场量　　$\vec{E}$　　U

基本性质方程

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$$

本节讨论：导体带电和它周围的电场的关系，即介绍静电场的一般规律在有导体存在时的具体应用。本节只限于讨论各向同性的均匀的金属导体在电场中的情况。

一、 导体的静电平衡

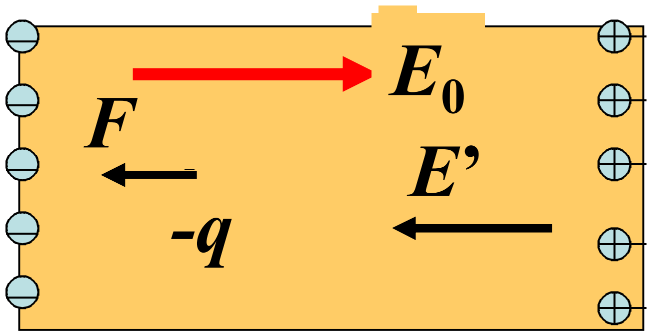
（一）. 导体的静电平衡条件

1、电场对导体内带电粒子的影响

导体内部有两种带电粒子：
- 正离子：组成晶格点阵
- 自由电子：可自由移动

无外场时：正负电荷分布均匀，导体不显电性；

有外场时：



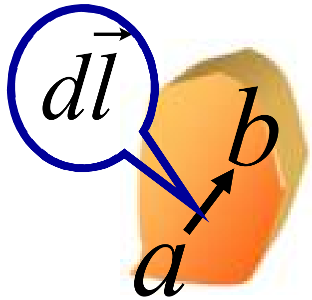
$$\boxed{\vec{E}_0 + \vec{E}' = 0}$$

此时电子的定向运动消失称为静电平衡

2、静电平衡条件

静电平衡状态：当导体内部的电场$\vec{E}=0$时，此时导体达到静平衡状态：即导体内部和表面都无自由电荷的定向移动的状态。

导体处于静电平衡的条件：



$$\vec{E}_{内}=0 \qquad \vec{E}_{表面}\perp 表面$$

导体静电平衡时，导体各点电势相等，即导体是等势体，表面是等势面。这是静电平衡条件的另一种说法。

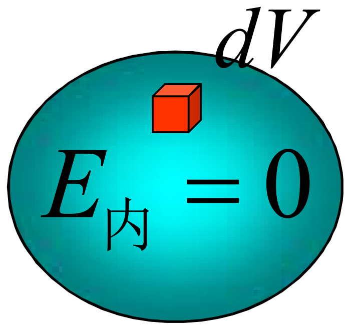
证：在导体上任取两点a和b

$$U_a-U_b=\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \qquad \boxed{U_a=U_b}$$

当导体达到静电平衡时，导体内部和导体表面都无自由电荷的定向移动，那么电荷在导体内和导体表面是怎样分布的？

（二）. 静电平衡时导体上电荷的分布

由导体的静电平衡条件和静电场的基本性质，可以得出导体上的电荷分布。



1. 导体体内处处不带电，电荷只能分布在导体的外表面

证明1）：一实心导体

在导体内任取体积元 **dV**

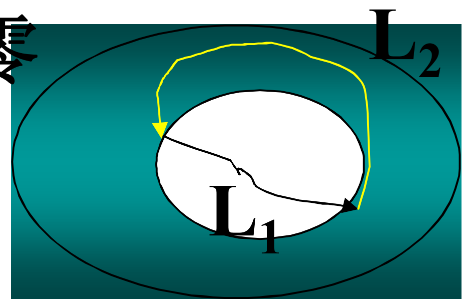
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{由高斯定理}} \sum_i q_i = \int_V \rho \, dV = 0$$

$\because$ 体积元任取 $\longrightarrow$ $\rho = 0$

导体内的净电荷处处为零(即导体内没有净电荷)，电荷只分布在导体的外表面

证明2）：一空腔导体

高斯定理可证明空腔内表面的净电荷为零



两种可能：
- 空腔内表面带等量异号电荷
- 空腔内表面不带电荷

对第一种：则必有电力线从正电荷通向负电荷。

做一闭合路径L，使L_1沿电力线，L_2沿导体内部，则：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

等于零

只能：$\int_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

所以空腔内表面没有电荷分布

导体静电平衡时，导体内无电荷，内表面无电荷，从而只能分布在导体外表面。

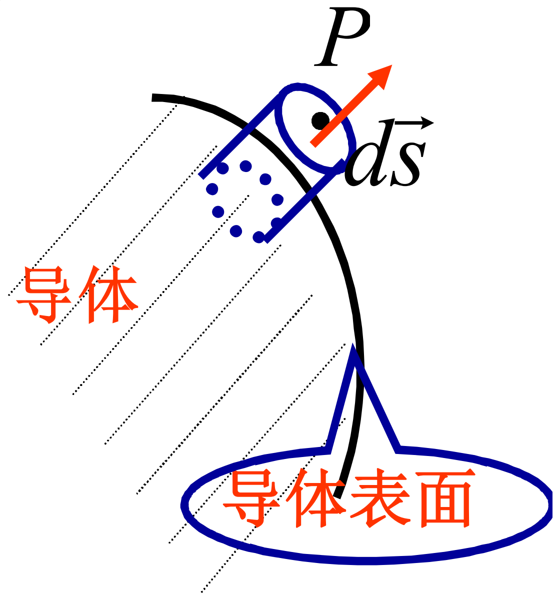
既然导体静电平衡时电荷只能分布在导体的外表面，那么，在导体外表面电荷时怎样分布的？

2. 导体表面电荷

设导体表面电荷面密度为 $\sigma(x, y, z)$

相应的电场强度为 $\vec{E}_{表}(x, y, z)$

设P是导体外紧靠导体表面的一点，取一柱形高斯面，一底面过P点



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{底面}\vec{E}_{表}\cdot d\vec{S} + \int_{侧面}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E_{表}\,dS = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

$\hat{n}$ ：外法线方向

3. 孤立带电导体表面电荷分布

一般情况较复杂；孤立的带电导体，电荷分布由实验测定。分布：

在表面凸出的尖锐部分(曲率是正值且较大)电荷面密度较大，

在比较平坦部分(曲率较小)电荷面密度较小，

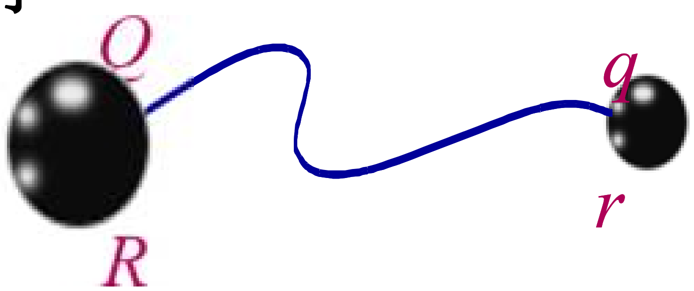
在表面凹进部分带电面密度最小，

尖端放电

孤立导体

即：曲率大的地方电荷面密度大

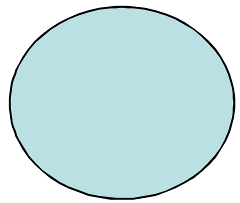
例



$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$\frac{Q}{R}=\frac{q}{r} \quad 或 \quad \frac{\sigma_R}{\sigma_r}=\frac{r}{R}$$

孤立带电导体球



$$\boxed{\sigma=C}$$

二、有导体存在时静电场场量的计算

基于三个原则： 1. 静电平衡的条件

$$\boxed{E_{内} = 0} \qquad \boxed{or\ U = c}$$

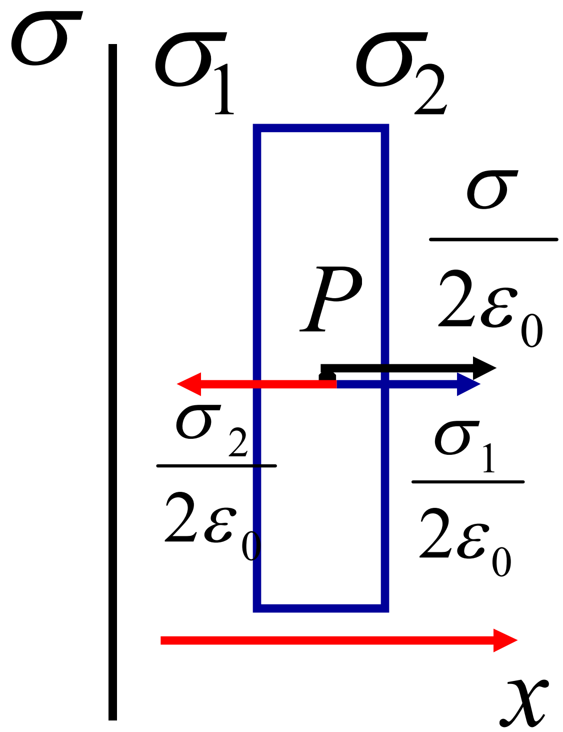
2. 基本性质方程

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$$

3. 电荷守恒定律 $\boxed{\sum_i Q_i = const.}$

例1 无限大的带电平面 σ的场中平行放置一无限大金属平板

求：金属板两面电荷面密度



解：设金属板面电荷密度 σ_1，σ_2

由对称性和电量守恒

$$\sigma_1 = -\sigma_2$$

导体体内任一点P场强为零

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\boxed{\sigma_1 = -\frac{1}{2}\sigma}$$

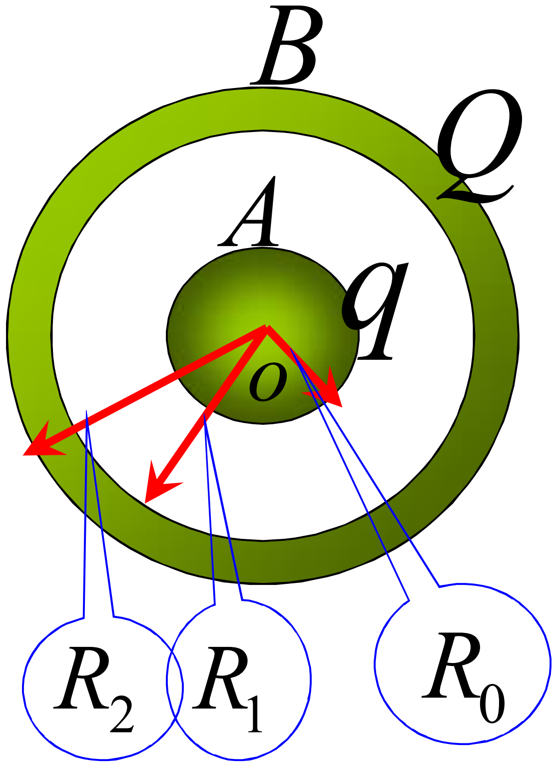
$$\boxed{\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma}$$

例2 金属球A与金属球壳B同心放置

已知：球A半径为 R_0 带电为 q

金属壳B内外半径分别为 R_1，R_2

带电为 Q



求:1)电量分布

2)球A和壳B的电势

U_A U_B

分析：

1) 导体带电在表面

1　球A的电量q只可能在球的表面

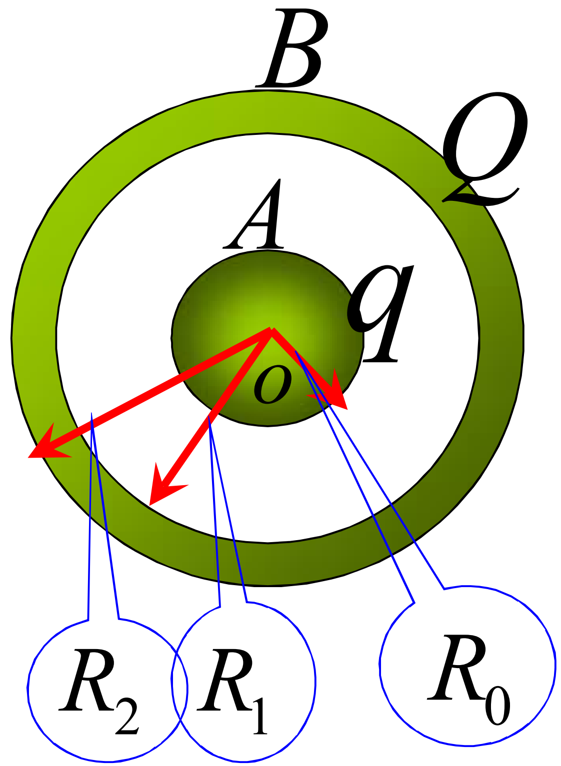
2　壳B有两个表面

电量Q只能分布在外表面

3　由于A　B同心放置

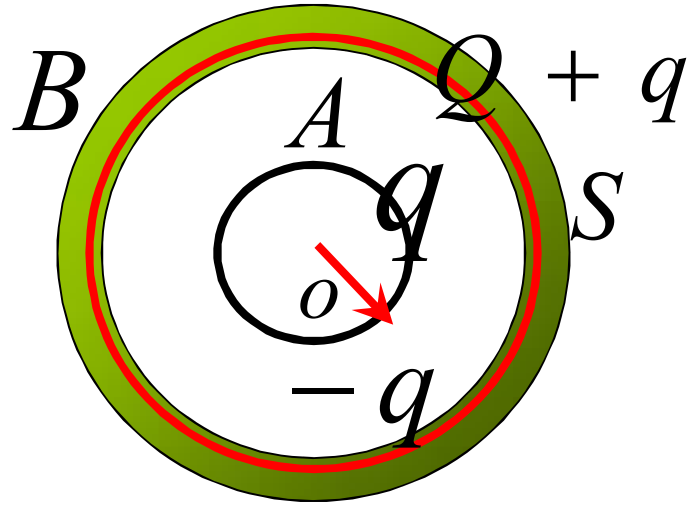
仍维持球对称

$\therefore$电量在表面均匀分布



壳B上电量的分布：

在B内紧贴内表面作高斯面 S



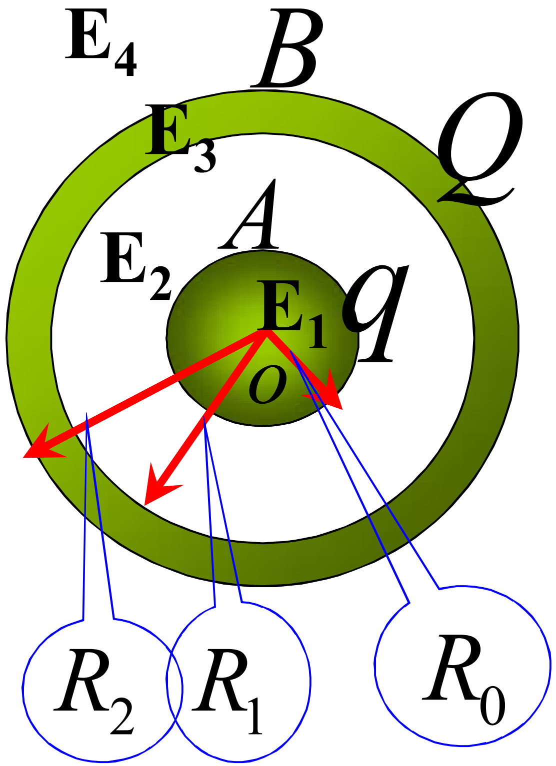
面S的电通量 $\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0}$

高斯定理 $\longrightarrow$ $\sum_i q_i = 0 \longrightarrow Q_{B内} = -q$

电荷守恒定律 $\longrightarrow$ $Q_{B外} = Q + q$

由电荷分布可求得电场的分布为：

$$\begin{cases} E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_0 < r < R_1 \\ E_4 = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \\ E_1 = E_3 = 0 & r \text{ 等于其它} \end{cases}$$



球A的电势为：

$$U_A = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^{R_0} \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \int_{R_0}^{R_1} \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_3\cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_4\cdot d\vec{l}$$

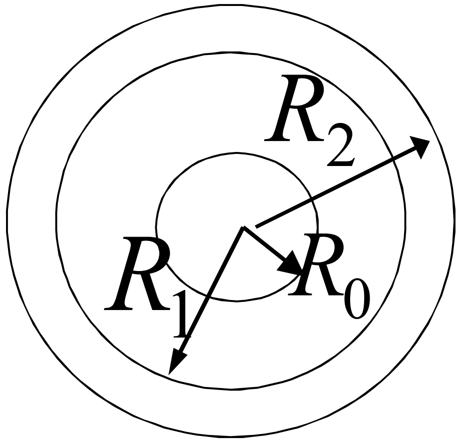
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

球B的电势为:

$$E_4=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U_B=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R_2}\vec{E}_3\cdot d\vec{l}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_4\cdot d\vec{l}$$

$$=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



等效:在真空中三个均匀带电的球面

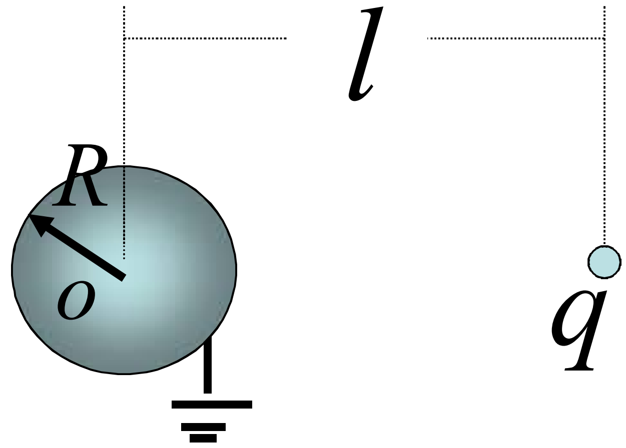
利用叠加原理

$$\boxed{U_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}$$

$$\boxed{U_B=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}$$

例3 接地导体球附近有一点电荷, 如图所示。

求: 导体上感应电荷的电量



解: 接地 即 $U = 0$

设: 感应电量为 Q

由导体是个等势体

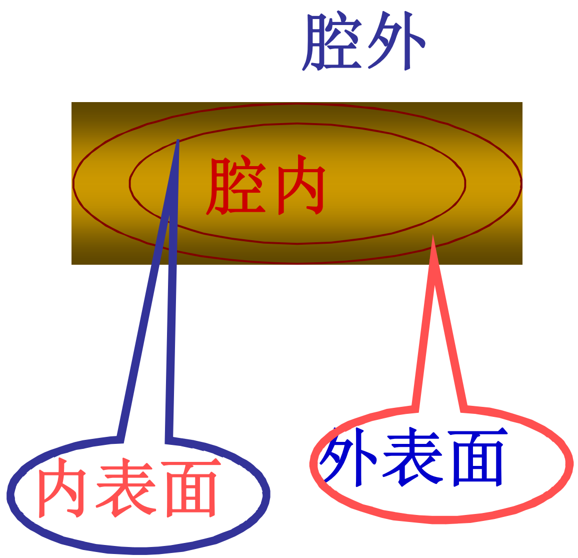
O点的电势为**0** 则

$$\boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0}$$

$$\boxed{Q = -\frac{R}{l}q}$$

三、导体壳与静电屏蔽

静电平衡时导体内总的场强为零这一规律在技术上用来作静电屏蔽。



导体壳的几何结构

几个说法： 1 腔内、腔外

2 内表面、外表面

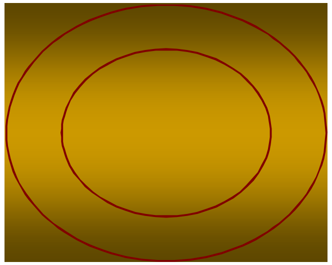
讨论的问题是：

1)腔内、外表面电荷分布特征

2)腔内、腔外空间电场特征

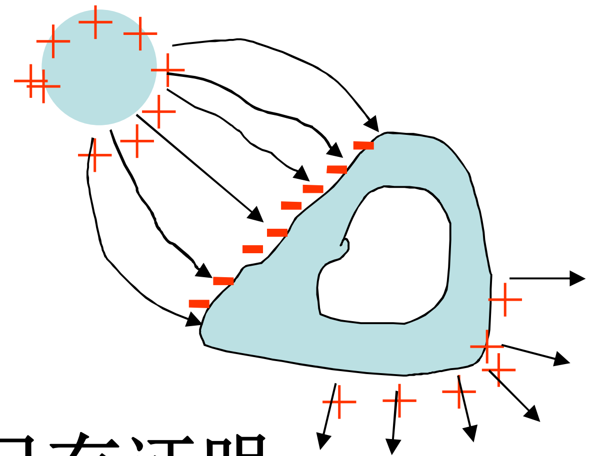
3）它们之间的关系？

（一）. 腔内无带电体



1 内表面处处没有电荷

2 腔内无电场　　　即 $\boxed{E_{\text{腔内}} = 0}$



或说，腔内电势处处相等。　前面已有证明

注意:

未提及的问题 $\left\{ \begin{array}{l} \text{1) 导体壳是否带电?} \\ \text{2) 腔外是否有带电体?} \end{array} \right.$

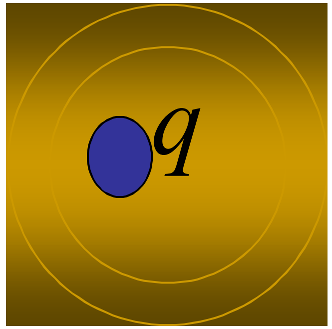
说明:腔内的场与腔外(包括壳的外表面)的电量及分布无关

结论: 在腔内 $\boxed{\vec{E}_{\substack{\text{壳外表面} \\ \text{电量}}} + \vec{E}_{\substack{\text{壳外} \\ \text{带电体}}} = 0}$

即空心的金属导体会使其腔内的物体不受其任何外场的影响

（二）. 腔内有带电体

1 电量分布 $\boxed{Q_{\substack{\text{腔内}\\\text{表面}}} = -q}$ 用高斯定理可证



2 腔内的电场 1) 与电量 q 有关；

2) 与腔内带电体、几何因素、介质有关。

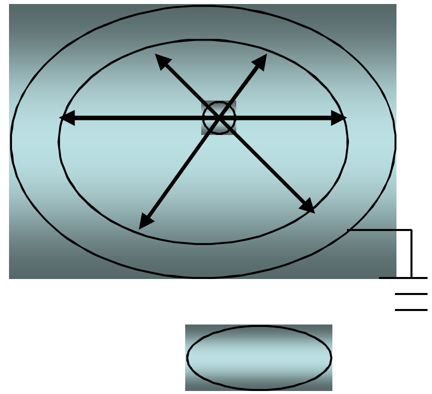
未提及的问题 **1)壳是否带电? 2)腔外是否有带电体?**

结论：腔内的场只与腔内带电体及腔内的几何因素、介质有关

或说 在腔内 $\boxed{\vec{E}_{\substack{\text{壳外表面}\\\text{电量}}} + \vec{E}_{\substack{\text{壳外}\\\text{带电体}}} = 0}$

思考：腔外电荷发生变化，如：改变了位置；改变了大小等，腔内电场将会怎样？

（三）. 静电屏蔽的装置---接地导体壳



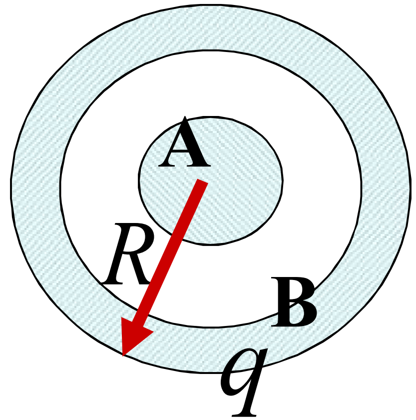
静电屏蔽：

腔内、腔外的场互不影响

腔内场 只与内部带电量及内部几何条件及介质有关

腔外场 只由外部带电量和外部几何条件及介质决定

#例4、 导体 A和B 同心放置 如图



欲求壳**B**的电势

只需知壳外表面的带电量

和球壳**B**的外半径

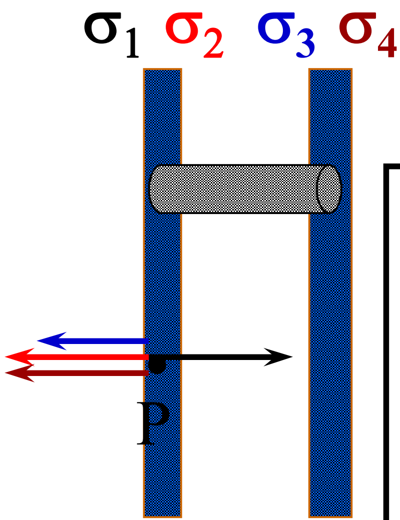
则 $$U_B = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

例5 两块面积均为S的金属平板靠近平行放置，一块带电Q，另一块不带电，忽略边缘效应。☆

求：（1）金属板的电荷分布；（2）空间电场分布；（3）右板接地，再求电荷、电场分布。

$$\sigma' = \frac{Q}{S}$$

解:设金属板面电荷密度 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4



由电荷守恒定律

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma' \cdots\cdots\cdots (1) \\ \sigma_3 + \sigma_4 = 0 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i$$

$$\vec{E}_{侧} \perp d\vec{s}$$

$$E_{内} = 0$$

$$0 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \cdots (4)$$

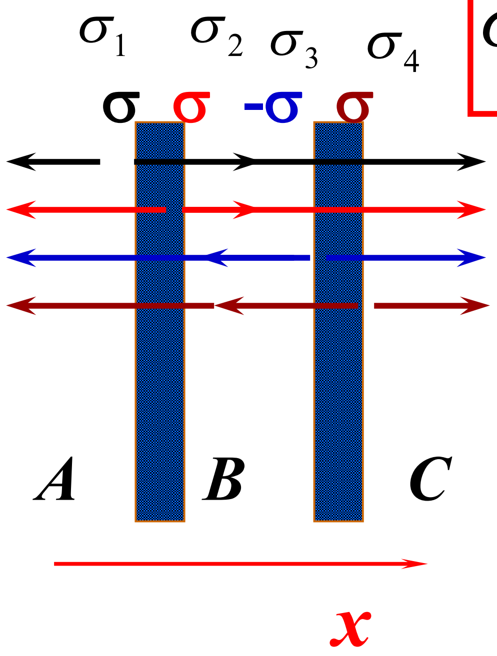
$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \qquad E_4 = \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

方向？

（2）空间电场分布　金属板表面 相当于4 块大带电平面



$$\boxed{\sigma_1=\sigma_2=\sigma_4=\frac{Q}{2S}=\sigma}$$

$$\boxed{\sigma_3=-\frac{Q}{2S}=-\sigma}$$

$$E_A=-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

☆

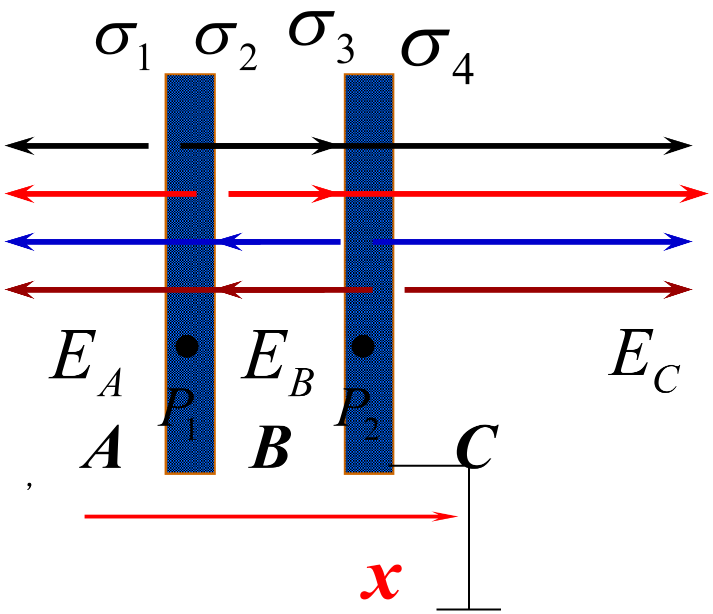
$$=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=-2\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}}$$

$$E_B=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

$$E_C=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

（3）右板接地



右板接地: $\sigma_4 = 0$

$E_{p_1} = 0 \quad \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0$

$E_{p_2} = 0 \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$

电荷守恒: $\sigma_1 + \sigma_2 = \dfrac{Q}{S}$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q}{S}$$

$$E_A = E_C = 0 \qquad E_B = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

证明：无论接地与否

$$\sigma_1 = \sigma_4$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3$$

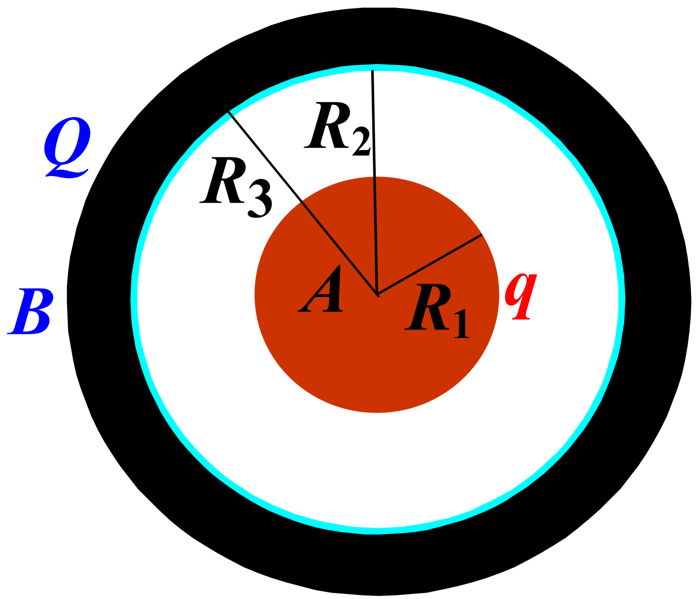
例6、带电导体球A与带电导体球壳B同心，求☆

（1）各表面电荷分布

（2）导体球A的电势U_A

（3）将B接地，各表面电荷分布。

（4）将A、B用导线连接，各表面电荷分布



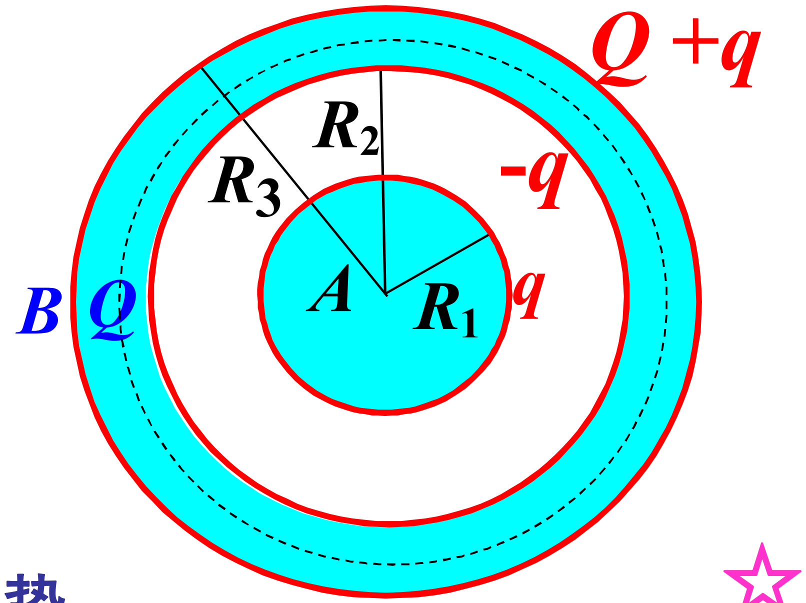
解. （1）求表面电荷

A 表面：q

B 内表面：$-q$

B 外表面：$Q+q$

高斯定理



三带电球面在球心处的电势

$$U_{OA}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$U_{OB1}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$U_{OB2}=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

（2）A的电势

电势叠加 $U_O=U_{OA}+U_{OB1}+U_{OB2}$

等势体 $U_A=U_O$

$$U_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

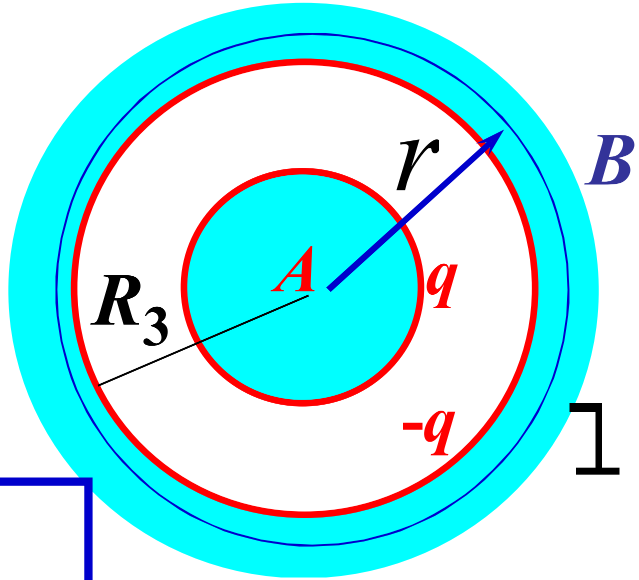
（3）B 接地，求表面电荷。

高斯定理 ☆

$$Q_{B1} = -Q_A = -q$$

电荷守恒，A 表面的电荷不变化

$$Q_A = q$$



B 外表面 Q_{B2}

接地结果：U_B=0

三个面电荷的电势

$$U_{rA} = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_{rB1} = \frac{Q_{B1}}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_{rB2} = \frac{Q_{B2}}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U_r = U_{rA} + U_{rB1} + U_{rB2} = \frac{Q_{B2}}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U_B = U_r = \frac{Q_{B2}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 0 \qquad Q_{B2} = 0$$

B 外表面：无电荷

（4）将A、B用导线连接，各表面电荷分布