# 第7章 参数的点估计及其优良性

一. 矩估计

二. 极大似然估计

三.估计量的优良性和评选标准

参数$\mu$：抽样$(X_1, X_2 \cdots X_n)$，$(7.8,8.5,\cdots 7.9)$为一组观察值，

构造 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，　$\overline{x} = 8.05$，　$\overline{X} \xrightarrow{P} EX$

8.05称为$\mu$的点估计值，$\overline{X}$称为点估计量，记为$\hat{\mu} = \overline{X}$

**点估计：** **设总体 $X$ 的分布函数 $F(x,\theta)$ 形式已知，其中含有未知参数 $\theta$。**

**从总体中抽取样本$(X_1, X_2 \cdots X_n)$，$(x_1, x_2, \ldots x_n)$为样本观察值。**

1.矩法
2.极大似然法

**构造统计量** $g(X_1, X_2, \ldots X_n)$ **作为 $\theta$ 的估计量。 记为：**

$\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \ldots X_n)$，$\hat{\theta} = g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ **是 $\theta$ 的估计值。**

**(只需估计总体分布中未知参数，我们所关注的特征值均为未知参数的函数)**

# 一．矩法

矩估计的定义和求法

例如：$X \sim U(a,b)$, 抽样$(X_1, X_2, \ldots X_n)$.由大数定律$\overline{X} \xrightarrow{P} EX$

$$A_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad A_1 \xrightarrow{P} EX \qquad EX = \frac{a+b}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad A_2 \xrightarrow{P} EX^2 \qquad EX^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

只要$n$足够大,可令$\begin{cases} A_1 = EX \\ A_2 = EX^2 \end{cases}$ 有$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{2} \\ A_2 = \dfrac{\hat{a}^2+\hat{a}\hat{b}+\hat{b}^2}{3} \end{cases}$ 解得$\begin{cases} \hat{a} = \overline{X} - \sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \\ \hat{b} = \overline{X} + \sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \end{cases}$

设总体$X^2$期望为$EX^2$ 抽样$\left(X_1^2, X_2^2 \cdots X_n^2\right)$ (辛钦大数定律)

构造样本均数$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = A_2$, 由大数定律$A_2 \xrightarrow{P} EX^2$.

**定义：** 设总体$X$的分布函数$F(x,\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_t)$，$(X_1,X_2\cdots X_n)$是样本，

构造前$t$阶样本矩($t$个参数) $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$， $k=1,2\cdots t$

求出前$t$阶总体矩($EX^k$存在是未知参数的函数)

$$\begin{cases}A_1\\A_2\\\cdots\\A_t\end{cases}\xrightarrow[\text{(由大数定律)}]{P}\begin{cases}EX=\mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_t)\\EX^2=\mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_t)\\\cdots\\EX^t=\mu_t(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_t)\end{cases}$$

总体$X$，期望$EX$，抽样$(X_1,X_2\cdots X_n)$ 样本均数$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则

$$A_1\xrightarrow{P}EX$$

总体$X^k$，期望$EX^k$，抽样$(X_1^k,X_2^k\cdots X_n^k)$样本均数$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$，则

$$A_k\xrightarrow{P}EX^k$$

令 $A_k = EX^k$，得 $\begin{cases} A = \mu_1\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots \hat{\theta}_t\right) \\ A_2 = \mu_2\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots \hat{\theta}_t\right) \\ \cdots \\ A_t = \mu_t\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots \hat{\theta}_t\right) \end{cases}$ 从中解出 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots \hat{\theta}_t$

一般的分布，若只有两个参数，可令 $\begin{cases} A_1 = EX \\ A_2 = EX^2 \end{cases}$，

$$B_2 \xrightarrow{p} DX$$

或者 $\begin{cases} \overline{X} = EX \\ B_2 = DX \end{cases}$， 因为 $DX = E(X - E(X))^2 = EX^2 - (EX)^2$

而 $B_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = A_2 - A_1^2$

例1. $X \sim B(1, p)$，求$p$的矩估计。令$\overline{X} = EX$，得 $\hat{p} = \overline{X}$。

例2. $X \sim B(n, p)$，求$p$的矩估计。$\begin{cases} EX = np \\ DX = np(1-p) \end{cases}$

抽样$(X_1, X_2 \cdots X_m)$，构造$\overline{X}_m$，　$B_2$

令$\begin{cases} \overline{X}_m = EX \\ B_2 = DX \end{cases}$　得$\begin{cases} \overline{X}_m = \hat{n}\hat{p} \\ B_2 = \hat{n}\hat{p}(1-\hat{p}) \end{cases}$

解出$\hat{p} = \dfrac{\overline{X}_m - B_2}{\overline{X}_m}$，$\hat{n} = \dfrac{\overline{X}_m^2}{\overline{X}_m - B_2}$

$B_2 = A_2 - A_1^2$

或令$\begin{cases} \overline{X}_m = EX \\ A_2 = EX^2 \end{cases}$

$EX^2 = DX + (EX)^2$

得$\begin{cases} \overline{X}_m = \hat{n}\hat{p} \\ A_2 = \hat{n}\hat{p}(1-\hat{p}) + (\hat{n}\hat{p})^2 \end{cases}$

例3. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$ 抽样$(1,2,1)$，求$\theta$的矩估计。

解：$EX = \theta^2 + 2 \times 2\theta(1-\theta) + 3(1-\theta)^2 = 3 - 2\theta$

令$\overline{X} = EX$，得 $\overline{X} = 3 - 2\hat{\theta}$，解得 $\hat{\theta} = \dfrac{3-\overline{X}}{2}$，

而 $\overline{X} = \dfrac{1+2+1}{3} = \dfrac{4}{3}$，

得$\hat{\theta}$的估计值为:$\hat{\theta} = \dfrac{3-\overline{X}}{2} = \dfrac{3-4/3}{2} = \dfrac{5}{6}$

例4. $f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求$\theta$的矩估计。令$\overline{X}=EX$

解：$EX=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，$\hat{\theta}=\dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$

例5.设总体$X$，期望$EX$，方差$DX$　$(X_1,X_2,\ldots X_n)$为样本，

求期望和方差的矩估计。

解：构造$A_1$，$A_2$，令$\begin{cases}A_1=EX\\ A_2=EX^2\end{cases}$，$A_1=\overline{X}$，得$\begin{cases}E\widehat{X}=\overline{X}\\ D\widehat{X}=A_2-A_1^2=B_2\end{cases}$

或构造$B_2$，令$\begin{cases}E\widehat{X}=\overline{X}\\ D\widehat{X}=B_2\end{cases}$，

关于矩估计的几个问题：

1. 大样本精确，小样本不可用。

2. 令$A_k = EX^k$ 或者 $B_k = E\left(X - E\left(X\right)\right)^k$ 阶数要相同。

3. 使用前 $K$ 阶矩，如果有前 $K$ 阶矩为零，顺延。

4. 矩估计缺点：必须总体矩存在，且浪费了分布的信息。