信息论

信号传输与处理的理论基础

一些基础知识的复习与延伸

基础知识的复习与延伸

* 内容要点
* （1）信号分析与处理
*   Fourier分析、信号与频谱等
* （2）线性代数
*   矩阵运算、特殊矩阵的性质等
* （3）随机过程
*   随机过程的功率谱、通信干扰及噪声特性等

基础知识的复习与延伸：
信号分析与处理（1）

- 通信领域中的信号：时间的函数f(t)
- 更现实的信号模型：有限带宽、有限功率的信号
- $f(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-W}^{W} d\omega F(\omega) \exp(-i\,\omega t)$
- 且 $\int_{-W}^{W} d\omega |F(\omega)|^2$有限
- 或等价地 $\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2$有限
- 基本概念：F(ω)是时域信号f(t)的频谱，即Fourier变换。
- 基本性质：$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = \int_{-W}^{W} d\omega |F(\omega)|^2$

基础知识的复习与延伸：信号分析与处理（2）

* Fourier变换的基本性质

逆变换公式 $f(t) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-W}^{W} d\omega F(\omega)\exp(-i\,\omega t)$

正变换公式 $F(\omega) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)\exp(+i\,\omega t)$

注： f(t) 为实数函数， F(ω) 是复值函数，有幅度和相位

信号	频谱
$A_1f_1(t)+A_2f_2(t)$	$A_1F_1(\omega)+A_2F_2(\omega)$
$df(t)/dt$	$-i\omega F(\omega)$
$itf(t)$	$dF(\omega)/d\omega$
$\int_{-\infty}^{\infty} ds f_1(s)f_2(t-s)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
实值信号	共轭对称的复数信号 $F(-\omega)=F^*(\omega)$

基础知识的复习与延伸：信号分析与处理（3）

* 计算Fourier变换的例子：Gauss波形的谱

· $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}$

· 频谱 $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\, f(t)\, e^{i\omega t}=\frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2+i\omega t}$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{-t^2/2\sigma^2-\mu t/\sigma^2+i\omega t-\mu^2/2\sigma^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\mu^2/2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{\underbrace{-t^2/2\sigma^2+(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})t}}$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(t^2-2\sigma^2(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})t+\sigma^4(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})^2\right)+\frac{\sigma^2}{2}(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})^2$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(t-\sigma^2(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})\right)^2-\frac{\sigma^2}{2}(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})^2$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\mu^2/2\sigma^2+\frac{\sigma^2}{2}(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\sigma^2(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2}))^2}$$

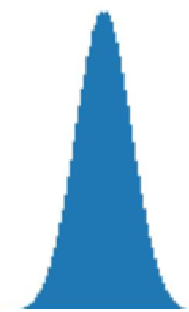
$$t\to t+\sigma^2(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\mu^2/2\sigma^2+\frac{\sigma^2}{2}(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{-t^2/2\sigma^2}}_{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\mu^2/2\sigma^2+\frac{\sigma^2}{2}(i\omega-\frac{\mu}{\sigma^2})^2}$$

特别地，若$\mu=0$，则 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-t^2/2\sigma^2}$，谱 $F(\omega)=\frac{e^{-\omega^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$

f(t): 波形宽度 ~ σ



F(ω): 波形宽度 ~ 1/σ

* 时域波形的宽度和频谱的宽度成反比

基础知识的复习与延伸：信号分析与处理（4）

* Fourier变换的应用：信号传输的数学模型
* 线性定常系统是这样的信号处理系统，即存在某个特定的信号h(t)完全表征该系统的传输特性，每个信号f(t) 经过该系统后，其输出信号的频谱成为F(ω)H(ω)，即：

输出信号 $f_O(t) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-W}^{W} d\omega H(\omega)F(\omega)\exp(-i\,\omega t)$

其中 $H(\omega) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dt h(t)\exp(+i\,\omega t)$是h(t)的频谱，即该系统的固有特征频谱。

等价的描述：$f_O(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s)h(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, h(s)f(t-s)$

传输模型的应用实例：

滤波器、通信发射/接收机、通信信道、存储介质…

基础知识的复习与延伸：信号分析与处理（5）

* 在当代先进网络中，实际信号、信道和各种处理环节的复杂性表现在哪里?
* （1）信号不完全是确定性的，而是混有噪声的随机信号;
* （2）信道不完全具有确定性，即固有特性不是定常的，而是随时间不断变化，即前面的传输模型本质上是
* $$f_O(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-W}^{W} d\omega H(t, \omega) F(\omega) \exp(-i\,\omega t)$$
* $H(t, \omega)$是随时间变化的函数，$F(\omega)$则有一定的随机特性。
* （3）某些信道具有非线性特性，这时上述理论模型不再适用。

基础知识的复习与延伸：信号分析与处理（6）

* 离散Fourier变换(DFT: Discrete Fourier Transformation)
* DFT是有限长度序列的离散谱
* 序列$x=(x_0, x_1,\ldots,x_{N-1})$的离散谱是一个序列$X=(X_0, X_1,\ldots,X_{N-1})$，
  其中每项 $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, e^{-2\pi i n k/N}$
* DFT最重要的运算性质：
* 逆运算 $x_n = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\, e^{+2\pi i n k/N}$
* 若序列x和y的离散谱分别是序列X和Y，则z=x#y的离散谱是Z，其中每项 $z_n = \sum_{l=0}^{N-1} x_l\, y_{(n-l) mod N}$

  $Z_k = X_k Y_k$

DFT的数值计算： O(NlogN)复杂度快速算法

基础知识的复习与延伸：信号分析与处理（7）

* 习题：计算以下信号分$f(t)$的频谱$F(\omega)$，然后应用Fourier逆变换公式验证其正确.
* (1) 方波脉冲: $f(t)=A$, $-T<t<T$, $f(t)=0$, $|T|>t$.
* (2) 指数衰减信号：$f(t)=0$, $t<0$; $f(t)=Ae^{-t/T}$, $t>0$.
* (3) 指数震荡信号：$f(t)=0$, $t<0$; $f(t)=Ae^{-t/T}\cos(Bt)$, $t>0$.
* (4) 指数震荡信号：$f(t)=0$, $t<0$; $f(t)=Ae^{-t/T}\sin(Bt)$, $t>0$.
* (5) 高斯性震荡信号：
* $f(t)=A\exp(-t^2/2M)\cos(Bt)$
* 和 $f(t)=A\exp(-t^2/2M)\sin(Bt)$

（6）计算方波脉冲通过具有指数衰减波形所表达的固有特性的信号后的输出信号及其频谱。

基础知识的复习与延伸：
线性代数的一些重要知识（1）

- 线性代数对解决通信工程领域的大量问题，既是一个有效的建模的工具，也是一个有效的算法设计工具。

- 向量：向量即数组 $x=(x_1,\dots,x_N)$
- 向量的加减运算 $x\pm y:=(x_1\pm y_1,\dots,x_N\pm y_N)$
- 实数和向量的乘积运算 $ax:=(ax_1,\dots,ax_N)$
- 向量的标量积运算 $<x,y>:=x_1y_1+\dots+x_Ny_N$
- 向量的长度 $|x|:=(x_1^2+\dots+x_N^2)^{1/2}$

基础知识的复习与延伸：线性代数的一些重要知识（2）

* 矩阵是向量到向量的线性变换/线性运算
* 矩阵A是二维数组$[a_{ij}]$，作用于向量x上得到向量y：
* $y=Ax$　分量$y_i=\sum_j a_{ij}x_j$
* 例子：序列x的离散傅里叶变换X可以用矩阵表示为
* $X=Ux$，U的分量$u_{nk}=e^{2\pi ink/N}$
* U是正交矩阵（请验证）：
* $UU^*=U^*U=I$，U^*的分量$u_{nk}=u^*_{kn}$

基础知识的复习与延伸：线性代数的一些重要知识（3）

* 对称矩阵A
* $a_{ij}=a_{ji}$，等价地，$\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$
* 正定对称矩阵
* 对任何非零向量x成立$\langle Ax,x\rangle > 0$
* 习题：对任何矩阵M，MM^*和M^*M都是正定对称矩阵。
* 任何矩阵A都存在至少一个特征值λ和特征向量u：
* $Au = \lambda u$
* 任何n行n列对称矩阵A都存在n个实特征值$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$和n个特征向量$u_1,\ldots,u_n$满足（1）$Au_k = \lambda_k u_k$（2）$\langle u_k,u_l\rangle=0$ 若$k\neq l$，$\langle u_k,u_k\rangle=1$
* 对称矩阵的谱分解 $\boxed{A= \lambda_1 u_1 u_1^* + \ldots + \lambda_n u_n u_n^*}$

基础知识的复习与延伸：线性代数的一些重要知识（4）

* 任何矩阵M的奇异值分解
* 任何矩阵M均存在一组r个正数$\sigma_1,\ldots,\sigma_r$、r个右特征向量$u_1,\ldots,u_r$、r个左特征向量$v_1,\ldots,v_r$，满足
* （1） $Au_k = \sigma_k u_k$， $v_k^* A = \sigma_k v_k^*$
* （2）$<u_k,u_j>=0$ 若$k\neq l$，$<u_k,u_k>=1$
* $<v_k,v_j>=0$ 若$k\neq l$，$<u_k,u_k>=1$
* （3）r是矩阵M的秩，即M的像空间的维数。
* 等价的分解表示：
* $$\boxed{M = \sigma_1 v_1 u_1^* + \ldots + \sigma_r v_r u_r^*}$$
* 应用：MIMO信道的容量计算，等

基础知识的复习与延伸：
线性代数的一些重要知识（5）

* 矩阵的奇异分解的几何含义：
* （1）任何矩阵M可以视为n维空间里到该空间本身的现象变换。
* （2）空间上的任何变换都可以分解为一个转动和一组伸缩变换：
* 转动变换仅改变坐标轴的方向，但不改变长度；
* 伸缩变换仅改变长度，但不改变坐标轴的方向；
* 矩阵M的r个奇异值$\sigma_1,\ldots,\sigma_r$表达伸缩变换，r个右特征向量$u_1,\ldots,u_r$和r个左特征向量$v_1,\ldots,v_r$联合表达坐标轴的转动。

基础知识的复习与延伸：线性代数的一些重要知识（6）

* 矩阵奇异值分解的特例：
* 对称矩阵的特征值分解

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^* + \ldots + \lambda_n u_n u_n^*$$

特征值λ_1、…、λ_n表示伸缩变换，特征向量u_1、…、u_n生成坐标轴的转动变换。

* 一些常用的算法：
* 求解线性方程组 $Mx = b$的算法；
* 等价地，求M的逆矩阵的算法；
* 计算对称矩阵特征值和特征向量的算法，等。