一个相关的结论（只需了解）

1. $X\sim N(0,1), Y=X^2$, 称$X^2\sim\chi^2(1)$分布，密度函数为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

2. 现有$X_1,X_2,\ldots X_n$相互独立，且所有的$X_i\sim N(0,1)$, 则

$$Z=X_1^2+X_2^2,\ldots+X_n^2\sim\chi^2(n),$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}z^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$\chi^2(n)$分布具有可加性。

2. $\chi^2(n)$分布

（1）定义：$X \sim N(0,1)$, 则称 $X^2 \sim \chi^2(1)$自由度为1的卡方分布。

$X_1, X_2 \cdots X_n$独立同分布，$X_i \sim N(0,1), i=1,2\cdots n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

(2)性质：i)可加性：两个变量$\chi^2(n)$与$\chi^2(m)$相互独立，则

$$\chi^2(n)+\chi^2(m) \sim \chi^2(m+n)$$

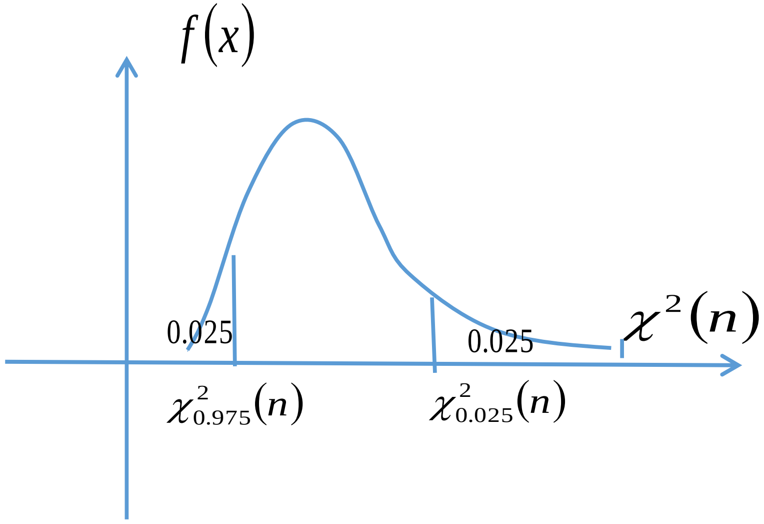
ii)若$X \sim \chi^2(n)$,则 $E\{\chi^2(n)\}=n$， $D\{\chi^2(n)\}=2n$。

证明：ii) $E\left(\chi^2(n)\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=nEX_i^2=n$

$$D\{\chi^2(n)\}=D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}DX_i^2=n\left(EX^4-\left(EX^2\right)^2\right)$$

$$EX^4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=3$$

$$D\{\chi^2(n)\}=n\left(EX^4-\left(EX^2\right)^2\right)=2n$$



（3）分位点：（以α=0.05维离）

1）双侧分位点：$\chi^2_{0.975}(n)$　$\chi^2_{0.025}(n)$　$\left(0,\chi^2_{0.975}(n)\right)\cup\left(\chi^2_{0.025}(n),+\infty\right)$

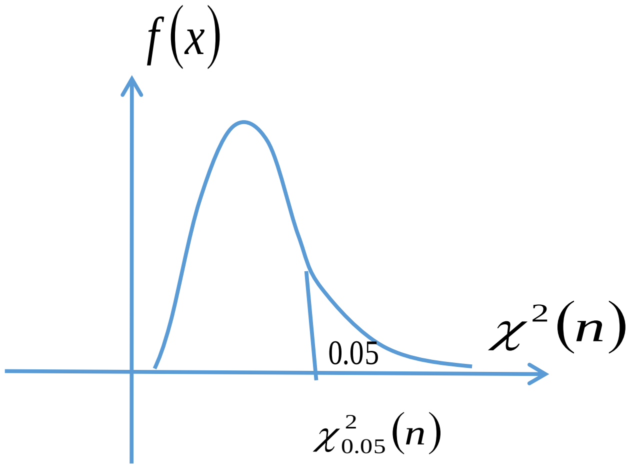
非小概率事件区间：$\left(\chi^2_{0.975}(n),\chi^2_{0.025}(n)\right)$　　小概率事件区间：

2）单侧分位点：

单侧上限分位点（过高异常）：$\chi^2_{0.05}(n)$

非小概率事件区间：$\left(0, \chi^2_{0.05}(n)\right)$

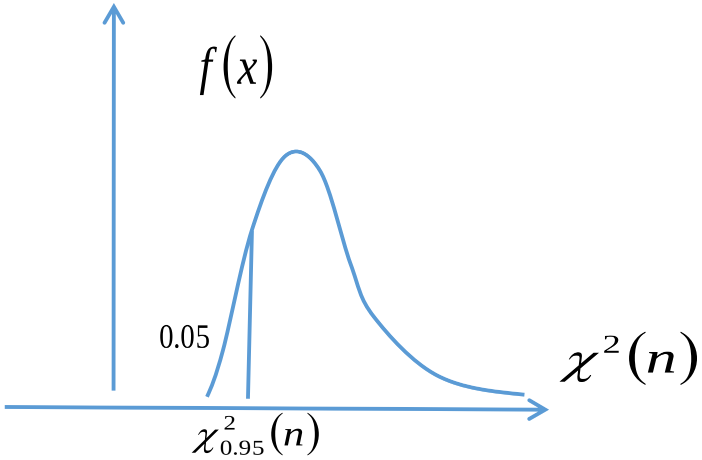
小概率事件区间：$\left(\chi^2_{0.05}(n), +\infty\right)$



单侧下限分位点（过低异常）：$\chi^2_{0.95}(n)$

非小概率事件区间：$\left(\chi^2_{0.95}(n), +\infty\right)$

小概率事件区间：$\left(0, \chi^2_{0.95}(n)\right)$



例2.（1）当α=0.01，求 $X \sim \chi^2(15)$ **双侧分位点。**

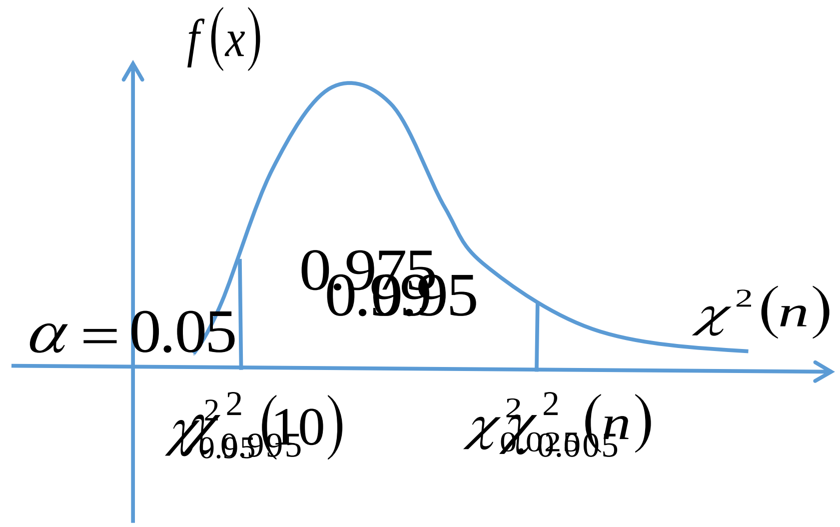
（2）当α=0.05，求 $X \sim \chi^2(10)$ **单侧下限分位点。**

（3）当α=0.025，求 $X \sim \chi^2(25)$ **单侧上限分位点。**

解：（1）当α=0.01， $\chi^2_{0.995}(15) = 4.601$ $\chi^2_{0.005}(15) = 32.801$

（2）当α=0.05， $\chi^2_{0.95}(10) = 3.94$

（3）当α=0.025， $\chi^2_{0.025}(25)$ **=40.65**

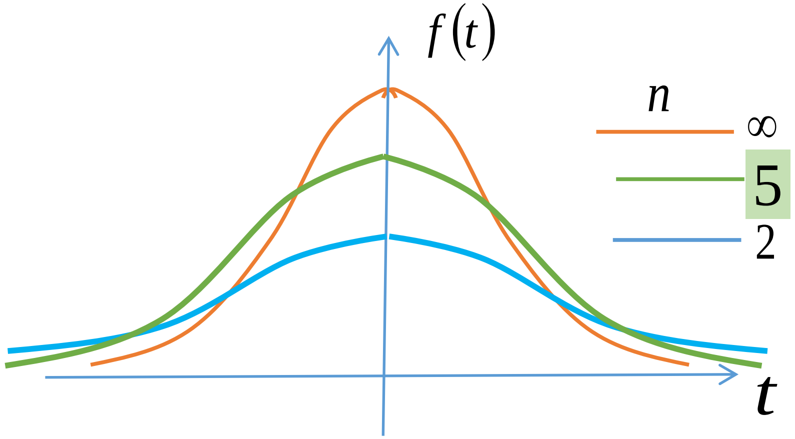


3. t分布 $\left(Student\text{分布}\right)$

（1）定义：$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ **X与Y独立，则称**

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为n的t分布，记为$t \sim t(n)$



（2）性质：i）关于Y轴对称

ⅱ) $t(n) \xrightarrow{n \to \infty} N(0,1)$

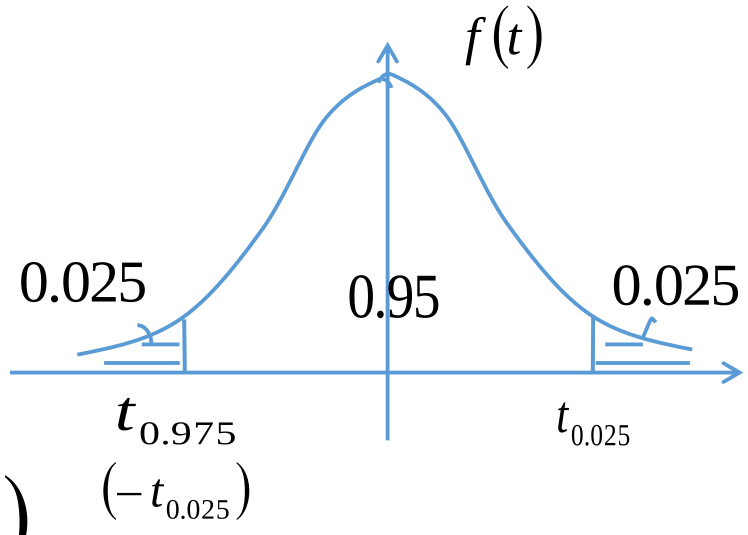
当$n > 45$时认为 $t(n) = N(0,1)$

（3）分位点：（以α=0.05维离）

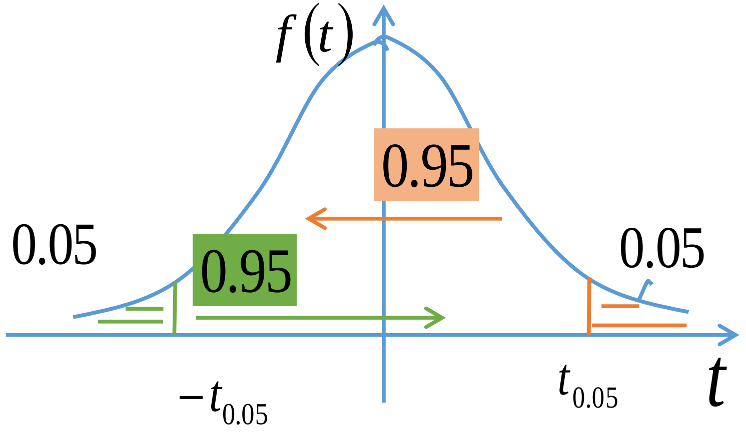
1）双侧分位点： $t_{0.975}=-t_{0.025}$及$t_{0.025}$

非小概率事件区间：$(-t_{0.025},t_{0.025})$

小概率事件区间： $(-\infty,-t_{0.025})\cup(t_{0.025},+\infty)$



2）单侧分位点：



单侧上限分位点（过高异常）： $t_{0.05}$

非小概率事件区间：$(-\infty,t_{0.05})$ 小概率事件区间：

$(t_{0.05},+\infty)$

单侧下限分位点（过低异常）：$t_{0.95}=-t_{0.05}$

非小概率事件区间： $(-t_{0.05},+\infty)$ 小概率事件区间：$(-\infty,-t_{0.05})$

例3.（1）当α=0.05，求$t \sim t(17)$双侧分位点。

（2）当α=0.01，求$t \sim t(12)$单侧上限分位点。

（3）当α=0.1，求$t \sim t(29)$单侧下限分位点。

解：（1）当α=0.05， $\pm t_{0.025}(17) = \pm 2.11$

（2）当α=0.01， $t_{0.01}(12) = 2.68$

（3）当α=0.1， $t_{0.9}(29) = -t_{0.1}(29)$

$= -1.31$