二. 假设检验

1.基本概念

2.假设检验的基本步骤

3.正态总体参数的假设检验

4.比例参数的假设检验

统计工作的基本步骤

1.收集资料：$(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

2.统计分析：对数据整理和分析

3.统计推断：

（1）参数估计：i）点估计：确定未知参数θ的估计量

ii）区间估计：确定（左，右）区间

$$\theta\begin{cases}\mu \\ \sigma^2 \\ \mu_1-\mu_2 \\ \sigma_1^2/\sigma_2^2 \\ p\end{cases}$$

（2）假设检验：i）推断两个总体均数是否一致 $(\mu_1\text{与}\mu_2\text{是否一致})$

正态总体 θ

ii）推断两个总体方差是否一致 $(\sigma_1^2\text{与}\sigma_2^2\text{是否一致})$

iii）推断一个总体均数有无变化 $(\mu\text{与}\mu_0\text{是否一致})$

v）推断一个总体方差有无变化 $(\sigma^2\text{与}\sigma_0^2\text{是否一致})$

vi）推断一个总体率p有无变化 $(p\text{与}p_0\text{是否一致})$

例1.某电视机厂生产的电视机寿命值 $X \sim N(7.5,1)$（单位：年），为了提高产品寿命，刚刚完成了技术革新，现从新产品中随机抽取25台，测得平均寿命值为 $\overline{x}=8$ 。试问革新是否成功?

老产品寿命分布：$X \sim N(7.5,1)$， 设新产品寿命分布：$Y \sim N(\mu,1)$

i) 新品中抽25台,测得样本均数为8，则统计认为 $\overline{x}=8$ 非小概率事件。

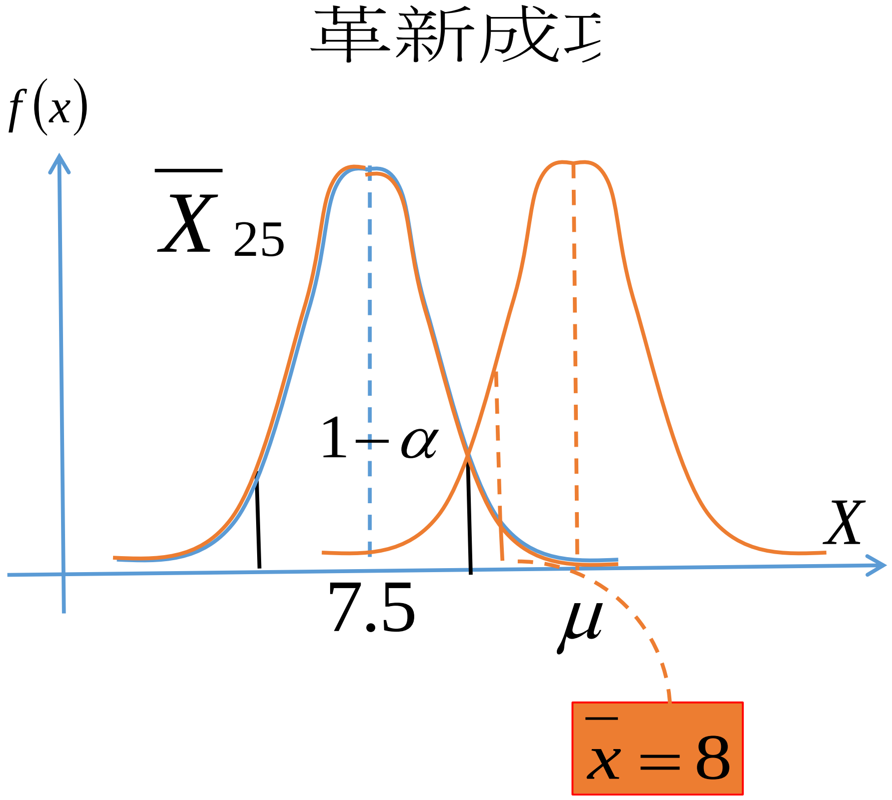
ii) 假设革新不成功，则产品无变化,*Y*与*X*同分布：$\overline{X}_{25} \sim N(7.5,1/25)$

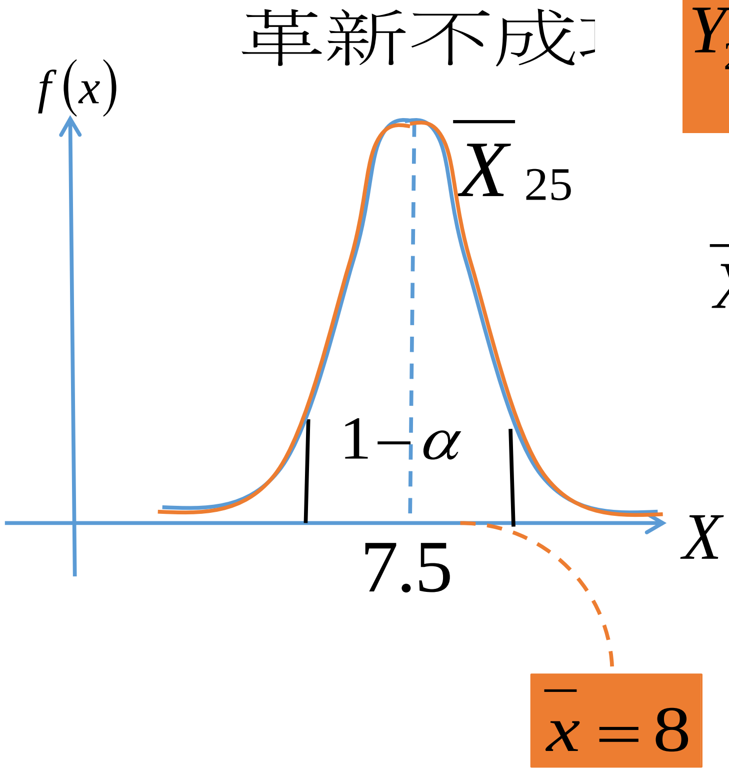
iii) 在ii)假设条件下计算 $\overline{x}=8$ 在分布中所处的位置：

如果 $\bar{x}=8$ 落在非小概率区间则假设大概率成立（革新不成功）；

否则若落在小概率区间,则假设错误(革新成功)。

（类似反证法，又不全相同）





$$\overline{Y}_{25} \sim N\left(7.5, \frac{1}{25}\right)$$

$$\overline{X}_{25} \sim N\left(7.5, \frac{1}{25}\right)$$

假设革新不成功，新老产品 X 与 Y 分布相同

$$Y \sim N(\mu,1)\text{ 与 }X\text{ 同分布}$$

原假设：$H_0: \mu = 7.5$

$$\overline{X}_{25} \sim N\left(7.5, \frac{1}{25}\right)$$

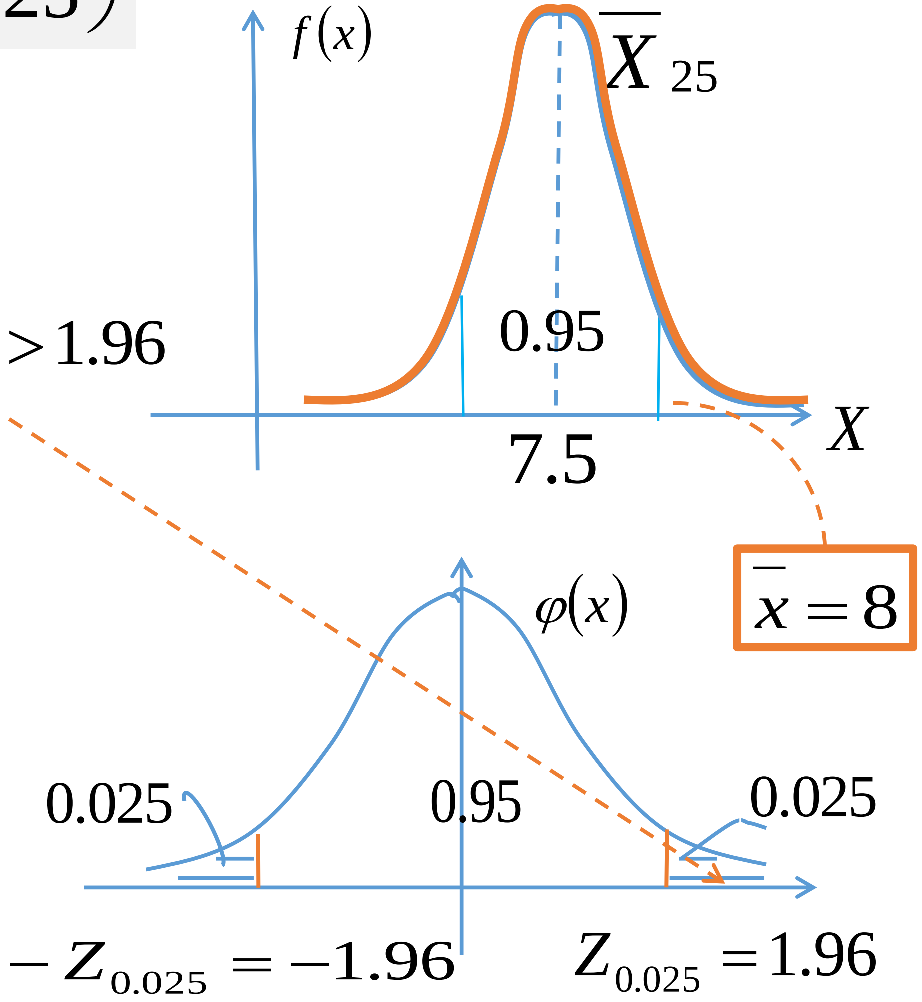
备择假设：$H_1: \mu \neq 7.5$

检验统计量：$Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{8-7.5}{1/\sqrt{25}} = \boxed{2.5} > 1.96$

拒绝域：$(-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$

(即 $\overline{X}$ 分布的小概率事件)

结论：拒绝原假设，可以认为革新是成功的



建立假设

原假设： $H_0 : \mu = 7.5$

备择假设： $H_1 : \mu \neq 7.5$

检验统计量： $$Z = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

拒绝域： $(-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$ (即$\overline{X}$分布的小概率事件)

结论：

例2，某医生在四川某高原地区工作期间，发现当地居民脉搏数明显偏高，于是随机抽取当地正常人16人，测得脉搏数平均值为84次/分。若已知中国人平均脉搏数$X \sim N(74, 6^2)$，且医学上有理论证明，高原地区脉搏数因高原反应高于平原地区，问此地是否符合高原地区的特点，脉搏数高于全国标准？

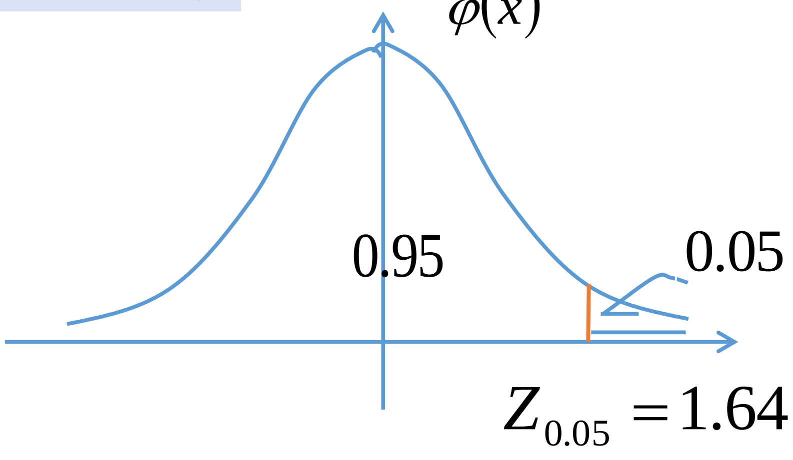
$\left(\text{医学已经证明高原地区脉搏数不会低于平原,此地}\mu<74\text{不会发生}\right)$

$\overline{X}_{16} \sim N\left(74, \frac{6^2}{16}\right)$

$$H_0: \mu = 74$$

$$H_1: \mu > 74$$

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{84-74}{6/\sqrt{16}} = 6.6 > 1.64$$



可以认为此地符合高原地区特点，脉搏数高于全国平均。

1.基本概念

(1)建立假设 原假设 $H_0: \theta = \theta_0$（无差异，无变化，等号必在 H_0）

备择假设 $H_1: \theta \neq \theta_0$（原假设的对立事件）

i）双侧检验 $H_0: \theta = \theta_0$ $(\alpha$放双边$)$

$H_1: \theta \neq \theta_0$ （没有把握到底 $\theta > \theta_0$还是$\theta < \theta_0$）

ii）单侧检验 $H_0: \theta = \theta_0$ $(\alpha$放左边$)$

$H_1: \theta < \theta_0$ （有充分的理由认为 $\theta > \theta_0$一定不发生）

或 $H_0: \theta = \theta_0$ $(\alpha$放右边$)$

$H_1: \theta > \theta_0$ （有充分的理由认为 $\theta < \theta_0$ 一定不发生）

单侧检验也可以如下方式表示：

$$\begin{pmatrix} H_0:\theta=\theta_0 \\ H_1:\theta>\theta_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_0:\theta\le\theta_0 \\ H_1:\theta>\theta_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} H_0:\theta=\theta_0 \\ H_1:\theta<\theta_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_0:\theta\ge\theta_0 \\ H_1:\theta<\theta_0 \end{pmatrix}$$

有证据标明$\theta<\theta_0$不会发生　　$\theta<\theta_0$无所谓

(2)判断的准则：$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为总体X 的一个样本，构造相应的统计量 $g(X_1,X_2,\cdots X_n)$，将$g(X_1,X_2,\cdots X_n)$的样本空间分成两部分

拒绝域：（小概率事件区域）样本点落入拒绝域拒绝 H_0，接受H_1

"接收域"：（非小概率事件区域-置信区间）若样本点没落入拒绝域，则只能接收 H_0。

(3)判断的基本原理:

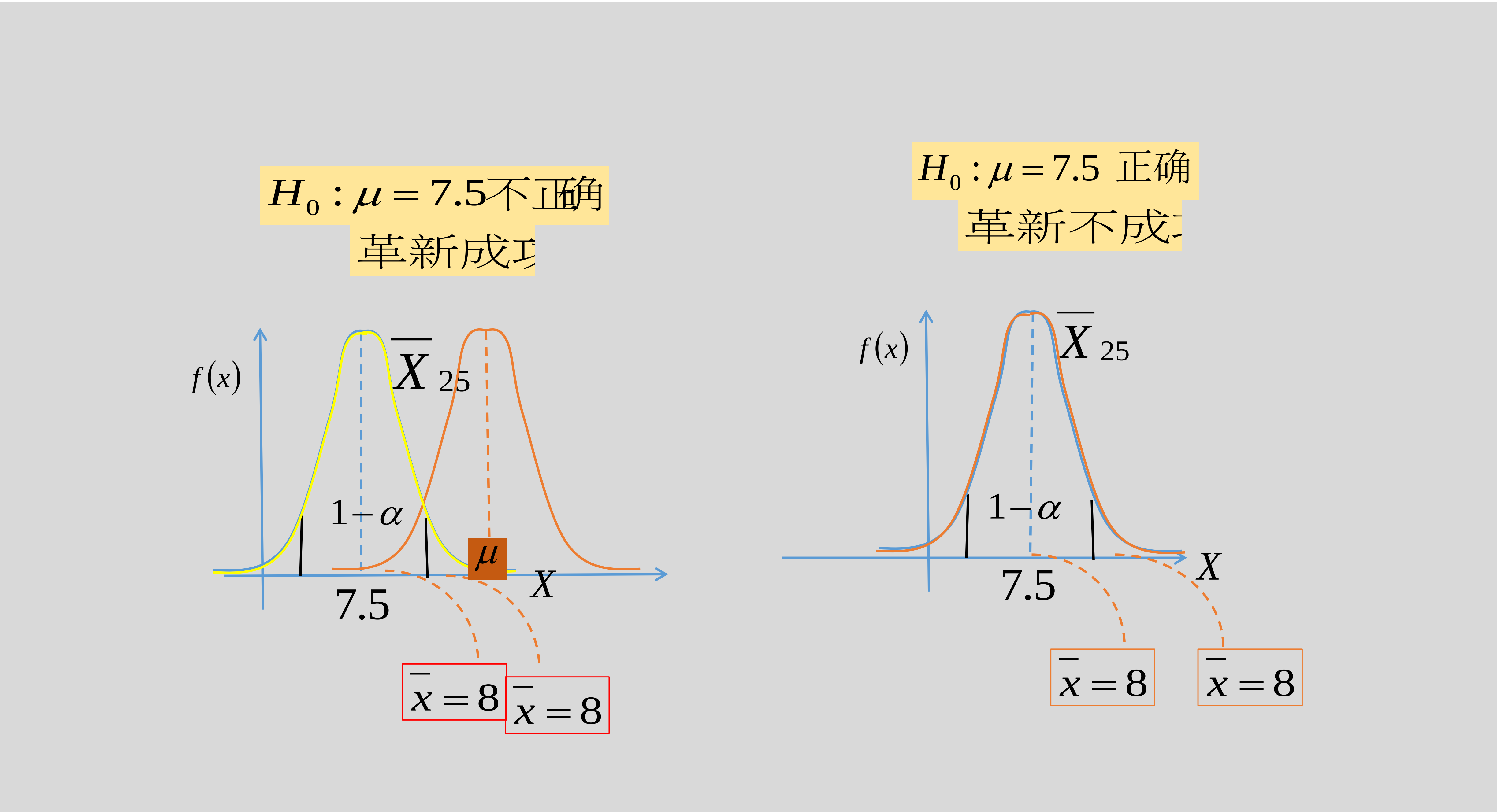
若事件A发生的概率$P(A)<a$（a为小概率事件标准），则认为在一次抽样下A不会发生。

(4)两类错误:

假设检验是依据小概率事件原理，即小概率事件在一次抽样下不会发生的原理，来对原假设进行取舍。

但事实上，小概率事件在一次抽样下还是有可能发生的。

这样我们的判断就可能出错误。



$H_0: \mu = 7.5$不正确
革新成
$f(x)$
$\overline{X}_{25}$
$1-\alpha$
μ
X
7.5
$\bar{x}=8$
$\bar{x}=8$
$H_0: \mu = 7.5$ 正确
革新不成
$f(x)$
$\overline{X}_{25}$
$1-\alpha$
X
7.5
$\bar{x}=8$
$\bar{x}=8$

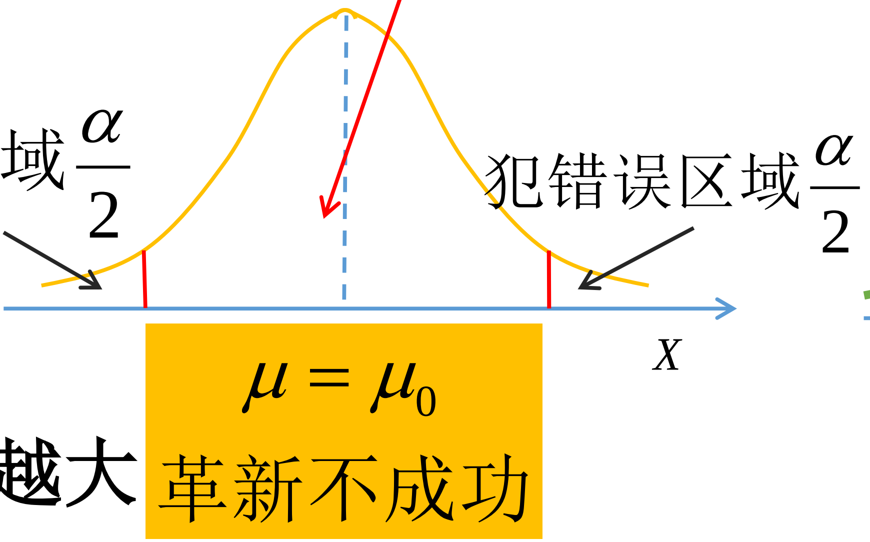
两类错误的关系：

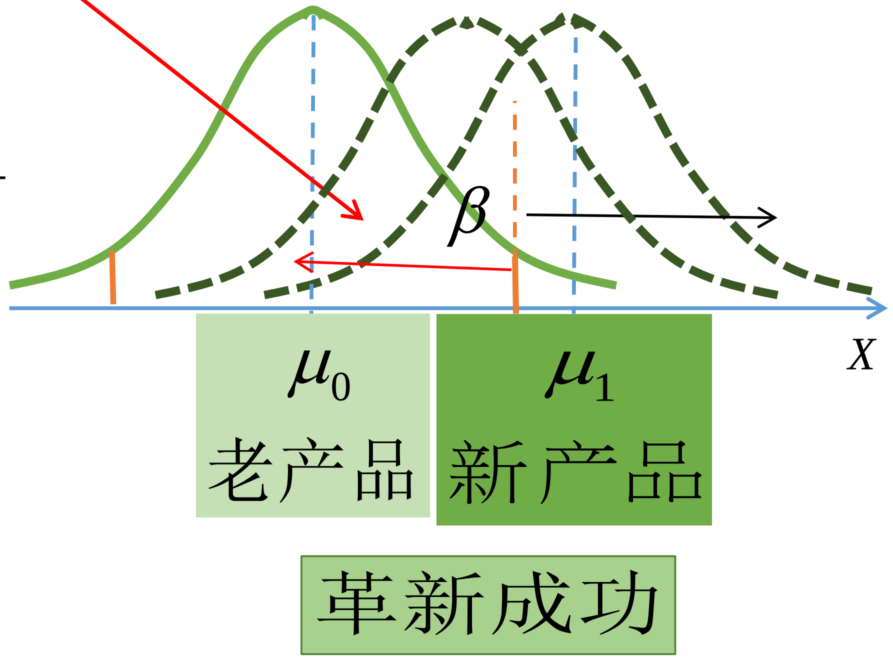
i) α取值变大，β变小

反之 α取值变小，β变大

判断结果 \ 客观事实	H_0正确	H_0不正确
拒绝H_0	第I类错误α	判断正确
接受H_0	判断正确	第II类错误β

ii) 如果增加样本容量n，则可使α，β同时下降





iii) 革新成果越不明显

犯 II 类错误的概率越大

接受H_0不是没差别，而是差别不显著

(5)显著性检验:

控制第I类错误 α的大小，不管第II类错误 β 的大小，称为显著性检验。

α称为显著性水平（显著性水平**α**和置信水平**1-α**是对偶事件）。

拒绝 H_0 差别有显著性，显著性水平为 **α**

接受H_0差别不显著

（不一定没有差别，也可能有差别，但差别不显著）

2.假设检验的基本步骤

（1）根据实际问题建立假设，常见的五个问题

$$\begin{cases} \mu\text{与}\mu_0\text{是否一致} \\ \sigma^2\text{与}\sigma_0^2\text{是否一致} \\ \mu_1\text{与}\mu_2\text{是否一致} \\ \sigma_1^2\text{与}\sigma_2^2\text{是否一致} \\ p\text{与}p_0\text{是否一致} \end{cases}$$

（2）选择统计量

$$\begin{cases} Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \\ t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \\ \chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \\ F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \end{cases}$$

$$t=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}$$

$$Z=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$$

（3）计算统计量的值。

（4）确定拒绝域（小概率事件区域，与置信区间是对偶区间）

（5）结论（不能太肯定，因为推断的结果可能会犯错误）