

狭义相对论内容总结

一、基本要求

1. 理解并掌握爱因斯坦狭义相对论的两个基本假设。
2. 理解洛伦兹坐标变换。
3. 知道狭义相对论时空观：同时性的相对性、长度收缩效应和时间膨胀效应。
4. 了解牛顿力学中的时空观和狭义相对论中的时空观以及二者的差异。
5. 理解狭义相对论中质量和速度的关系、质量和能量的关系，并会用以分析、计算相关的简单问题。

二、基本内容

1. 狭义相对论的两条基本假设

(1) 爱因斯坦相对性原理：

在一切惯性系中物理规律形式均相同。

(2) 光速不变原理：

在任何惯性系中，光在真空中的速率都相等。

真空中的光速率与光源的运动状态无关。

2. 洛伦兹变换

正变换	{	$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$	{	逆变换	$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$
		$y' = y$			$y = y'$
		$z' = z$			$z = z'$
		$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$			$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$

一维洛伦兹速度变换式

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}}{1 - \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}}{c^2}}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{u}}{c^2}}$$

3. 相对论时空观

同时性的相对性 在一个惯性系的同时发生的两个事件，在另一个相对它运动的惯性系中不一定是同时发生的。

“同时性”的相对性是针对沿运动方向上，不同空间坐标的两个事件而言的，不是对任意事件而言。

垂直于相对运动方向上发生的两个事件的同时性是绝对的

由因果律联系的两事件的时序不会颠倒。

时间膨胀效应（时间延缓效应）

在 S 系中测得发生在同一地点的两个事件之间的时间间隔 Δt ，在 相对其运动的 S' 系中的观测者看来，这两个事件为异地事件，它们之间的时间间隔 $\Delta t'$ 总是比 Δt 要大。二者关系为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Δt 为原时， $\Delta t'$ 为测时，要能区分开。

在不同惯性系中测量给定两事件之间的时间间隔，测得的结果以原时最短。

长度收缩效应

沿物体长度方向相对物体运动的参考系中观测者测得的物体的长度 l ，较相对物体静止的参考系中观测者测得的同一物体的原长度 l_0 要短。二者关系为

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

区分开原长和测长

在不同惯性系中测量同一物体长度，以原长为最长。

在与物体的相对运动速度垂直的方向上测量的物体长度不变

4. 相对论质量 ——质速关系

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

m_0 ——物体的静止质量。 m ——相对论质量

v 是物体相对于某一参考系的速率。

5. 相对论动量

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

6. 力

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} \right]$$

7. 相对论动能 $E_k = mc^2 - m_0c^2$

8. 相对论能量

总能量——质能关系方程 $E = mc^2$

静止能量: $E_0 = m_0c^2$

物体质量改变，能量必发生变化，反之亦然。

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

9. 相对论能量守恒和质量守恒

$$\sum_i E_i = \sum_i (m_i c^2) = \text{常量}$$

$$\sum_i m_i = \text{常量}$$

10. 相对论动量能量关系

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

三、问题讨论

1、根据爱因斯坦的时空观，讨论：

(1) 在一惯性系中观测，两个事件同时不同地发生，
则在其他惯性系中观测，
这两个事件是否可能同时发生？是否可能同地发生？

(2) 在一惯性系中观测，两个事件同地不同时发生，
则在其他惯性系中观测，
这两个事件是否可能同地发生？是否可能同时发生？

(3) 在一惯性系中观测，两个事件同时同地发生，
则在其他惯性系中观测，
这两个事件是否可能同时发生？是否可能同地发生？

答：爱因斯坦相对时空观的数学表述为洛伦兹变换

$$\begin{cases} x' = \gamma(u)(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(u)\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{cases}$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{u}{c}$$

(1) 在 S 系中观测，两个事件同时不同地发生，即

$$A(x_1, t_1), B(x_2, t_2) \quad t_1 = t_2, x_1 \neq x_2$$

在 S' 系中观测，事件 $A(x'_1, t'_1), B(x'_2, t'_2)$

则

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ t'_1 = \gamma(u)(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x'_2 = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \\ t'_2 = \gamma(u)(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$

$$t'_1 \neq t'_2 \quad x'_1 \neq x'_2$$

即：在一惯性系中观测，两个事件同时沿运动方向不同地发生，则在其他惯性系中观测，这两个事件不可能同时发生，也不可能同地发生。

对于一个惯性系同时、不同地发生的两件事，在另一个惯性系测量也可能是同时发生的，只要沿运动方向的位置坐标相同。

如：在 S 系中同时发生两个事件

$$A(x'_1 = x', y'_1 = y', t'_1 = t')$$

$$B(x'_2 = x', y'_2 = -y', t'_2 = t')$$

$$t_1 = t_2$$

$$t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1) = \gamma(t' + \frac{u}{c^2} x')$$

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2) = \gamma(t' + \frac{u}{c^2} x')$$

(2) 在 S 系中观测, 两个事件同地不同时发生, 即

$$A(x_1, t_1), B(x_2, t_2) \quad \boxed{x_1 = x_2, t_1 \neq t_2}$$

在 S' 系中观测, 事件 $A(x'_1, t'_1), B(x'_2, t'_2)$

则

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ t'_1 = \gamma(u)(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x'_2 = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \\ t'_2 = \gamma(u)(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$

$$\boxed{x'_1 \neq x'_2 \quad t'_1 \neq t'_2}$$

即: 在一惯性系中观测, 两个事件同地不同时发生,
则在其他惯性系中观测, 这两个事件不可能同地发生,
也不可能同时发生。

(3) 在 S 系中观测, 两个事件同地同时发生, 即

$$A(x_1, t_1), B(x_2, t_2) \quad \boxed{x_1 = x_2, t_1 = t_2}$$

在 S' 系中观测, 事件 $A(x'_1, t'_1), B(x'_2, t'_2)$

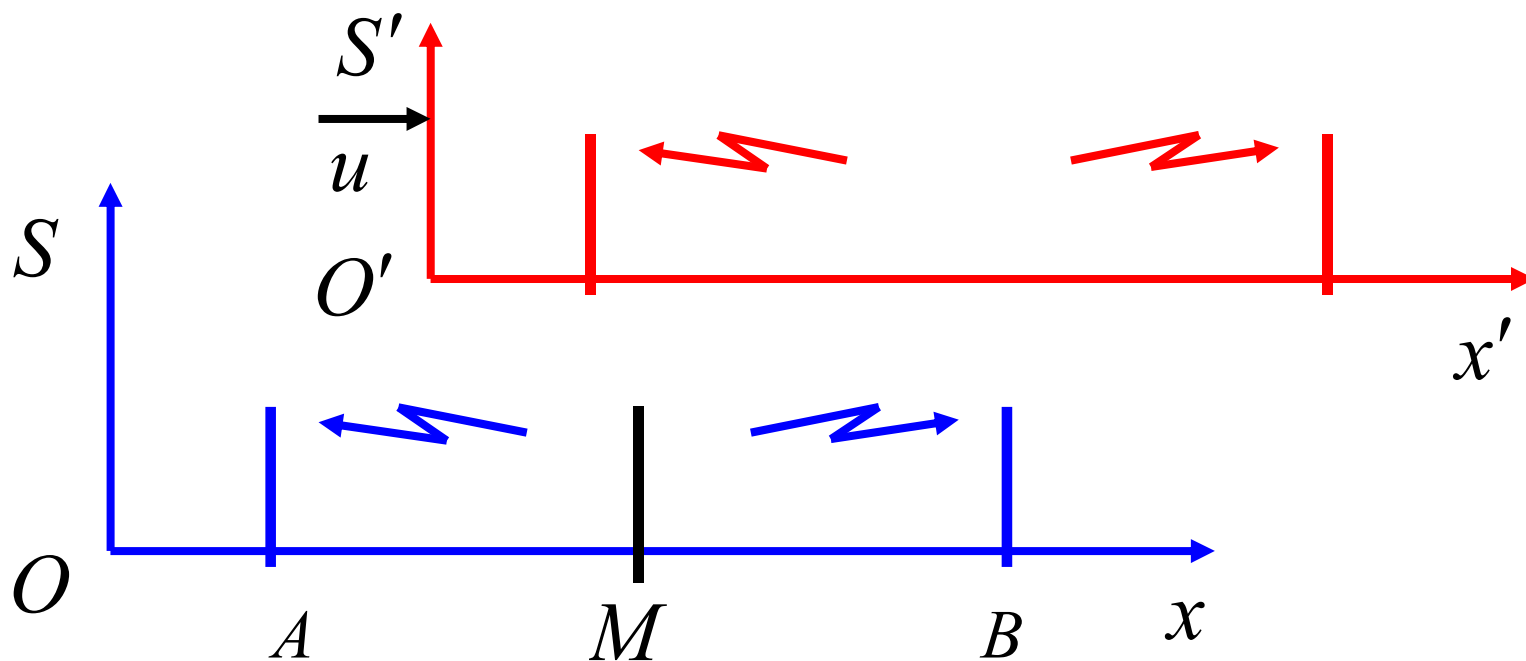
则

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ t'_1 = \gamma(u)(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x'_2 = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \\ t'_2 = \gamma(u)(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$

$$\boxed{x'_1 = x'_2 \quad t'_1 = t'_2}$$

即: 在一惯性系中观测, 两个事件同地同时发生,
则在其他惯性系中观测, 这两个事件一定同地发生,
也一定同时发生。

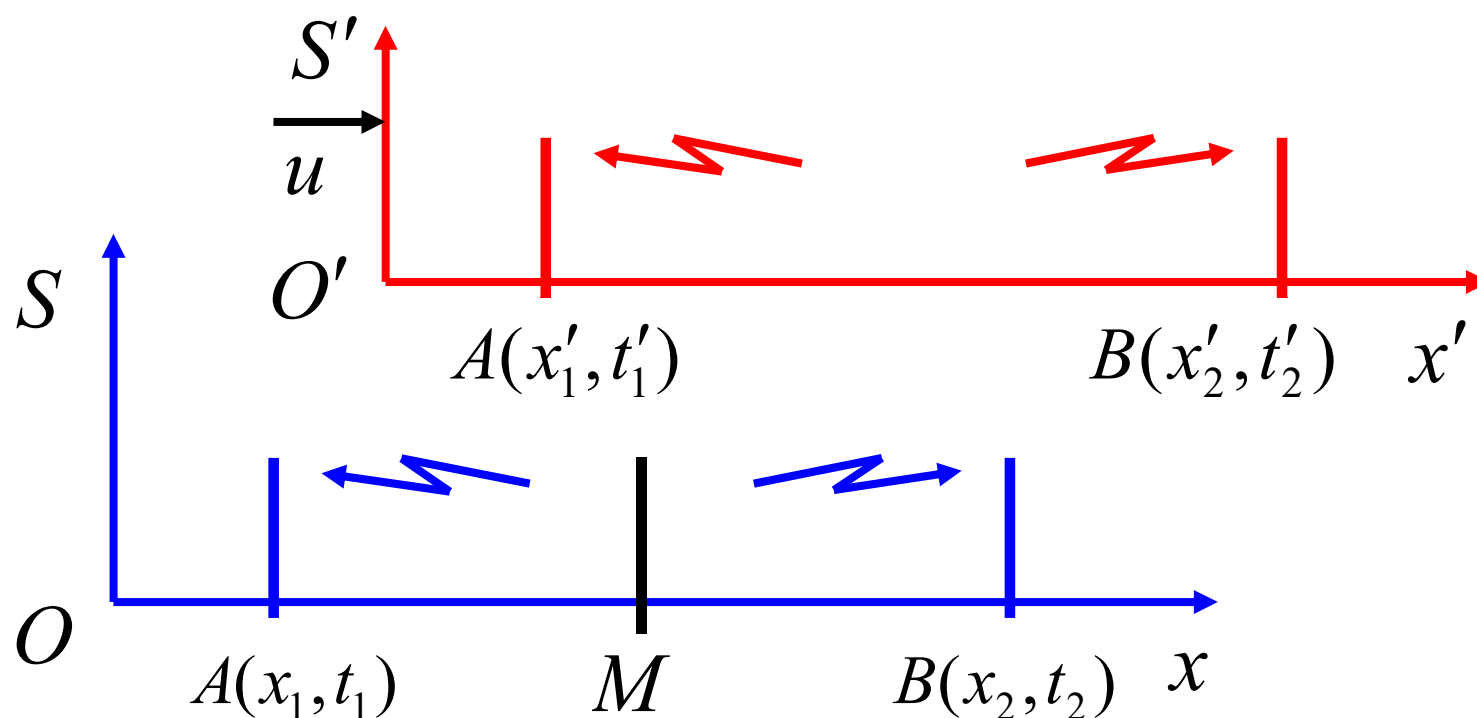
2、在地面上**M**点固定一光源，
在离光源等距的两点**A**和**B**固定有两个光接收器。
今使光源发出一闪光，在地面参考系中观测，
两个接收器是否同时接收到两个光信号？



在沿**A B**方向高速运行的火车 S' 参考系中观测，
哪个接收器先接收到光信号。

设在地面坐标系 S 中,

A 、 B 接收到信号的事件为 $A(x_1, t_1), B(x_2, t_2)$;

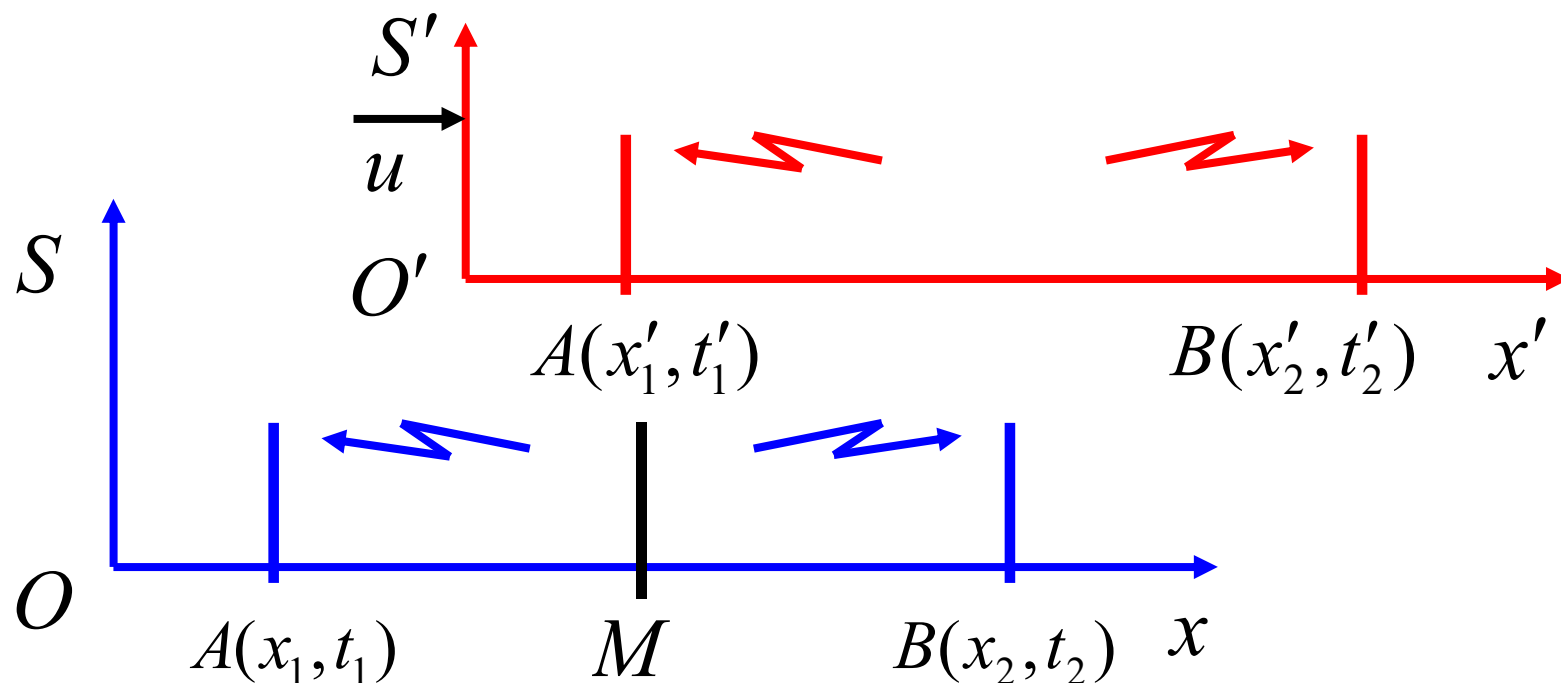


高速运行的火车参考系 S' 中,

A 、 B 接收到信号的事件为 $A(x'_1, t'_1), B(x'_2, t'_2)$ 18

在 S 系中，事件 A 、 B 的发生是静止的，
而且 M 是 AB 的中点，两个事件必定同时发生。

注意： 不同地点（ $t_1 = t_2$ ， $x_1 < x_2$ ）。



由于 A 、 B 是在 S 系中不同地点同时发生的两件事，
根据同时性的相对性，
在 S' 系中必定是不同同时发生的。

根据洛伦兹变换

$$\begin{cases} t'_1 = \gamma(u)(t_1 - \frac{u}{c^2} x_1) \\ t'_2 = \gamma(u)(t_2 - \frac{u}{c^2} x_2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \underline{x_2 > x_1} \\ \underline{t_2 - t_1 = 0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \underline{t'_2 - t'_1} &= \gamma(u)(t_2 - \frac{u}{c^2} x_2) - \gamma(u)(t_1 - \frac{u}{c^2} x_1) \\ &= -\gamma(u) \frac{u}{c^2} (x_2 - x_1) < \underline{0} \end{aligned}$$

所以，在 S' 系中观测，事件 B 先于事件 A 发生，
即在 S' 系中观测，接收器 B 先接收到光信号。

3、 一观察者为测量相对自己运动的物体的长度而测量物体两端坐标，对该观察者而言，测量两端坐标这两个事件的最低要求是什么？如果他实施了正确测量，他测得的物体沿运动方向的长度是长于还是短于该物体沿该方向的静止长度。

答：通过测量运动物体两端坐标的办法来测量物体的长度，必须**同时测量**两端坐标；根据“长度收缩”原理，运动物体的长度要短于该物体沿该方向的静止长度。

4、如果我们说，在一个惯性系中测得某两个事件的时间间隔是它的固有时间，这就意味着，在该惯性系中观测，这两个事件发生在同一地点；若在其他惯性系中观测，它们是发生在同一地点吗？
时间间隔是长于还是短于固有时间？

答：设两个事件在 S 系中发生在同一空间地点，

即 $A(x, t_1)$ 、 $B(x, t_2)$ ，

在 S' 系中，这两个事件是

发生在 $A(x'_1, t'_1)$ 、 $B(x'_2, t'_2)$ 。

由于两个事件在 S 系中是静止的，
所以，两个事件的时间坐标之差就是固有时间

$$\underline{\Delta t = t_2 - t_1 > 0}$$

根据洛伦兹变换

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ x'_2 = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \end{cases} \quad \underline{x_1 = x_2} \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \underline{x'_2 - x'_1} &= \gamma(u)(x_2 - ut_2) - \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ &= -\gamma(u)u(t_2 - t_1) \underline{\neq 0} \end{aligned}$$

可见，在 S' 系中观测，这两件事发生在不同地点。

根据时间膨胀原理，固有时间最短，
在其他惯性系中测量同样的两件事的时间间隔
都比固有时间长。

$$\text{洛伦兹变换} \begin{cases} t'_1 = \gamma(u)(t_1 - \frac{u}{c^2} x_1) \\ t'_2 = \gamma(u)(t_2 - \frac{u}{c^2} x_2) \end{cases} \quad \underline{x_2 = x_1}$$

在 S' 系中观测，这两件事发生的时间间隔为

$$\underline{\Delta t' = t_2 - t'_1 = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} > \Delta t = t_2 - t_1}$$

5、如果 A 、 B 是在 S' 系中互为因果关系的两个事件（ A 是 B 的原因，先于 B 发生）。问：是否能找到一个惯性系，在该系中测得 B 先于 A 发生，出现时间顺序颠倒的现象？

答：不可能。

设 A 、 B 在 S 系中的时空坐标分别为

$$A(x_1, t_1), B(x_2, t_2)$$

在 S' 系中的时空坐标分别为。

$$A(x'_1, t'_1) \quad B(x'_2, t'_2)$$

洛伦兹变换

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \gamma(u)(t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1) \\ t_2 = \gamma(u)(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \underline{t'_2 > t'_1} \\ \underline{x'_2 \neq x'_1} \end{array} \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \underline{t_2 - t_1} &= \gamma(u)(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2) - \gamma(u)(t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1) \\ &= \gamma(u)[\underline{(t'_2 - t'_1)} + \frac{u}{c^2} \underline{(x'_2 - x'_1)}] \end{aligned}$$

可见，在 $t'_2 > t'_1$ 的条件下，可能出现两种情况

$$\underline{t_2 - t_1 = \gamma(u)[\underline{(t'_2 - t'_1)} + \frac{u}{c^2} \underline{(x'_2 - x'_1)}]} \quad \underline{t'_2 > t'_1}$$

(1) 如果 $x'_2 > x'_1$, 则必有 $t_2 > t_1$,

即只要在 S' 系中测得 A 先于 B 发生,

在 S 系中测得也是 A 先于 B 发生。

(2) 如果 $x'_2 < x'_1$, 则从数学上有可能 $t_2 < t_1$ 。

但这只是数学上的, 在物理上是不可能的。

如果物理上事件 A 是事件 B 原因，
则 x'_1 处的影响必以某种物质运动方式，

$$x'_2 < x'_1$$

以速度 $v_s = -\frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1}$ 传递到处 x'_2 ，则

$$\begin{aligned} \underline{t_2 - t_1} &= \gamma(u) \left[(t_2 - t'_1) - \frac{uv_s}{c^2} (t'_2 - t'_1) \right] \\ &= \underline{\gamma(u)(t'_2 - t'_1) \left(1 - \frac{uv_s}{c^2} \right)} \end{aligned}$$

根据狭义相对论的理论： $u < c$ $v_s < c$ 

$$\underline{1 - \frac{uv_s}{c^2} > 0} \quad \text{只要 } t'_2 > t'_1, \text{ 必有 } t_2 > t_1$$

由此得出结论：

互为因果关系的两事件，
在任何惯性系中都不会出现时序颠倒的情况。

这也说明，不会因为相对论效应，
而改变客观事件的因果规律。

或者说狭义相对论是自洽的。

甚至可以说，只有在狭义相对论下，
客观物质世界的因果关系才不会颠倒，
狭义相对论是反映客观规律的正确理论。

五、解题指导

例1. 两个惯性系 S 、 S' 沿 x 轴相对运动，

当两坐标原点 O 、 O' 重合时计时开始。

若在 S 系中测得某两个事件的时空坐标分别为

$$t_1 = 1 \times 10^{-4} \text{ s} \quad x_1 = 6 \times 10^4 \text{ m}$$

$$t_2 = 2 \times 10^{-4} \text{ s} \quad x_2 = 12 \times 10^4 \text{ m}$$

而在 S' 系中测得两个事件同时发生，试问：

(1) S' 系相对 S 系的速度如何？

(2) S' 系中测得这两个事件的空间间隔是多少？

解题分析：

由于两个惯性系是相对运动的，
在两个坐标系中测得的同一事件的时空坐标不同。
它们之间的关系由洛伦兹变换联系在一起。

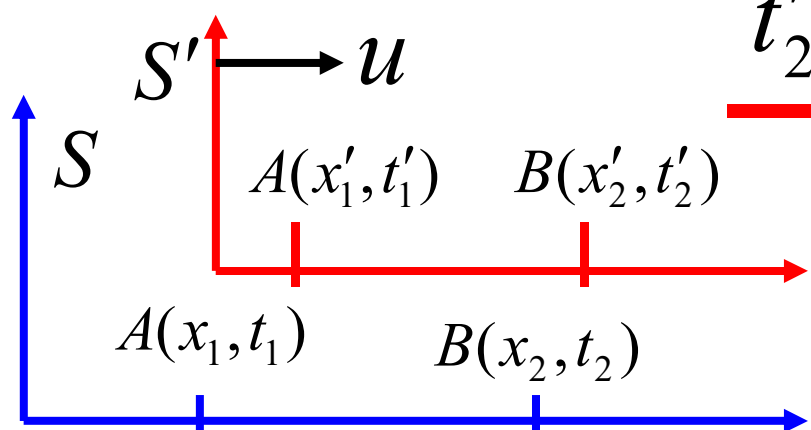
两个事件在某坐标系中的时间的间隔，
就是这两个事件在该坐标系中的时间坐标之差；

两个事件在某坐标系中的空间的间隔，
就是这两个事件在该坐标系中的空间坐标之差。

(1) S' 系相对 S 系的速度如何?

解: (1) 设 S' 系相对 S 系的速度为 u ,

在 S' 系中测得两个事件的时间坐标分别为

$$\begin{cases} t'_1 = \gamma(u)(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1) \\ t'_2 = \gamma(u)(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$


$t'_2 = t'_1$

$$t_2 - \frac{u}{c^2}x_2 = t_1 - \frac{u}{c^2}x_1$$

$$\underline{u = \frac{c^2(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} = 1.5 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

这说明 S' 系沿 S 系
 x 轴正方向运动。

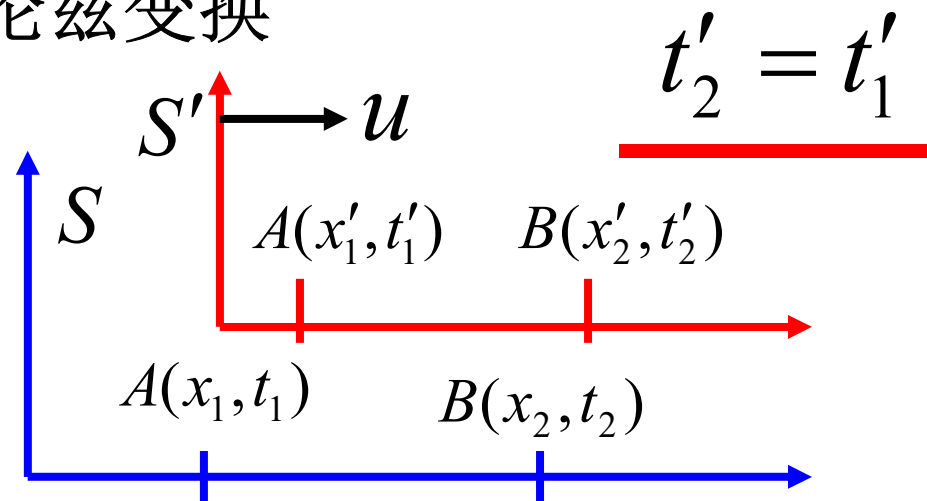
(2) S' 系中测得这两个事件的空间间隔是多少？

设 S' 系中测得这两个事件的空间坐标分别为

$$x'_1 \quad x'_2$$

由洛伦兹变换

$$\begin{cases} x_1 = \gamma(u)(x'_1 + ut'_1) \\ x_2 = \gamma(u)(x'_2 + ut'_2) \end{cases}$$



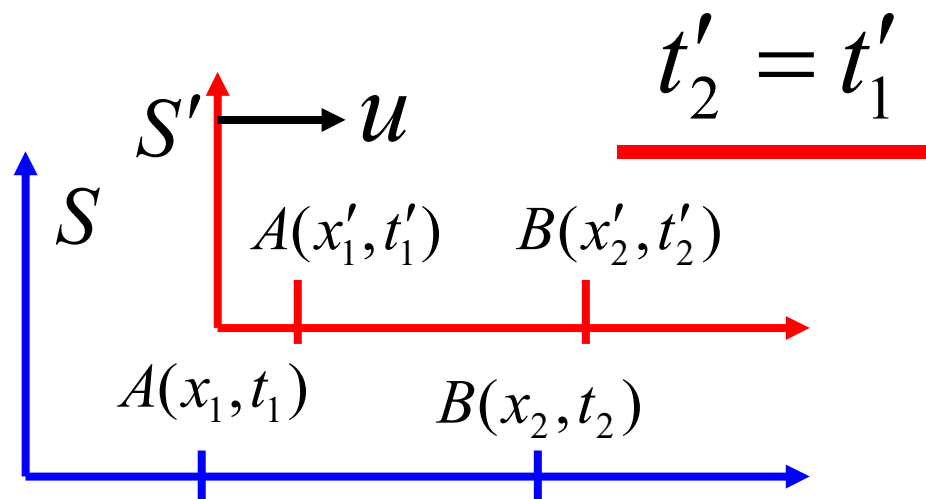
得到 S' 系中测得这两个事件的空间间隔

$$\underline{x'_2 - x'_1} = \frac{x_2 - x_1}{\gamma(u)} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 - \beta^2}$$

$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} = \underline{5.2 \times 10^4 \text{ m}}$$

讨论:

- (1) 两个事件在 S 系和 S' 系中都不是发生在同一地点
因此两个事件在 S 系和 S' 系中的
时间坐标之差都不是原时（固有时间）



(2) 这两个事件在 S 系中的发生是静止的，
(注意：若在 S 系中测得某两个事件的时空坐标)

所以这两个事件的空间坐标之差 $(x_2 - x_1)$
可以看作“原长”；

这两个事件在 S' 系中虽然是运动的，

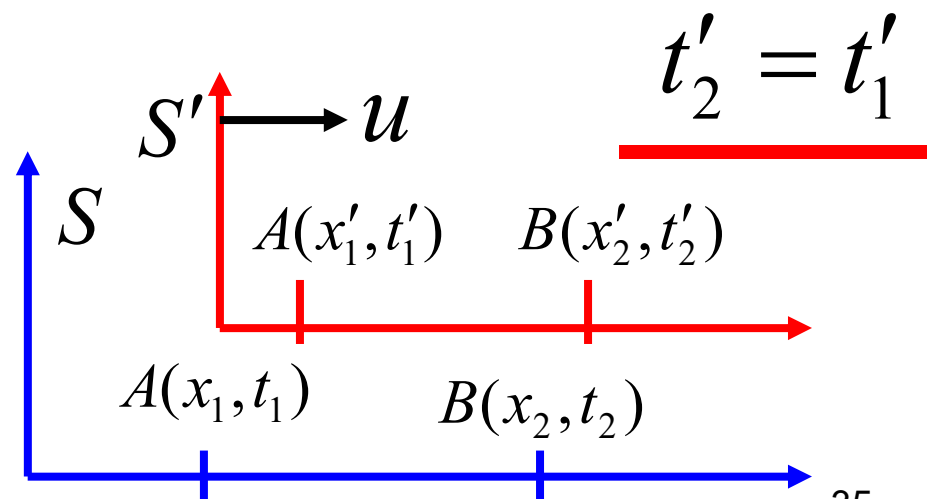
但在 S' 系中这两个事件是同时发生的，

因此在 S' 系中这两个事件的空间坐标之差 $(x'_2 - x'_1)$
可以看作测长。

可以应用长度收缩的概念

$$x'_2 - x'_1 =$$

$$(x_2 - x_1)\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

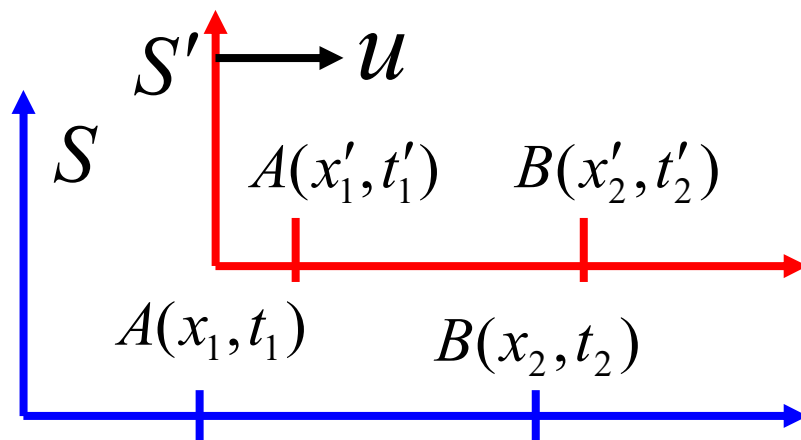


(3) 在 S' 系中同时发生 ($t'_1 = t'_2$) 的
两个事件 $(x'_1, t'_1), (x'_2, t'_2)$,

由于发生的地点不同 ($x'_1 \neq x'_2$) ,

在另一个惯性系 S 系中不是同时发生的 ($t_1 \neq t_2$) 。

这就是“同时性的相对性”。



$$\underline{t'_2 = t'_1}$$

例2 在惯性系 S 系中，测得某两个事件发生在同一地点，时间间隔为4 s. 在另一个惯性系 S' 系中，测得这两个事件发生的时间间隔为6s. 求:在 S' 系中，这两个事件的空间间隔.

解题分析:

在同一地点先后发生两个事件的时间间隔为固有时间

所以在 S 系中测得的 $\Delta t = 4\text{s}$ 是固有时间。

在另一个惯性系 S' 系中，

这两个事件不可能发生在同一地点，

测得这两个事件发生的时间间隔 $\Delta t' = 6\text{s}$ ，

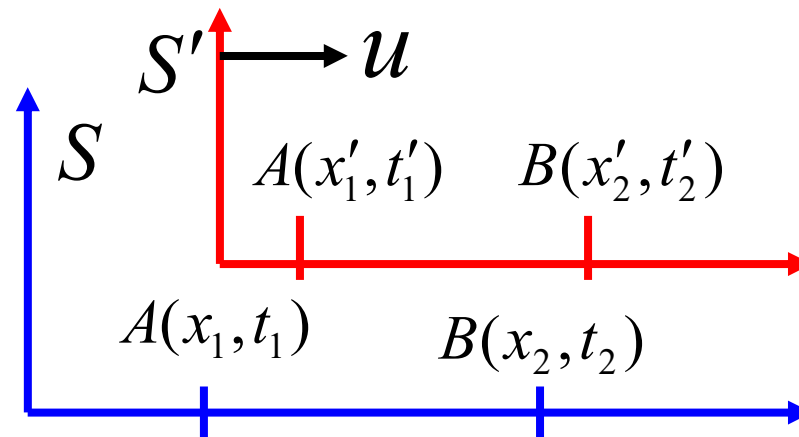
是由于相对论时间膨胀效应的结果。

解：由相对论时间膨胀效应

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$6 = \frac{4}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$u = \frac{\sqrt{5}}{3}c = 0.745c$$

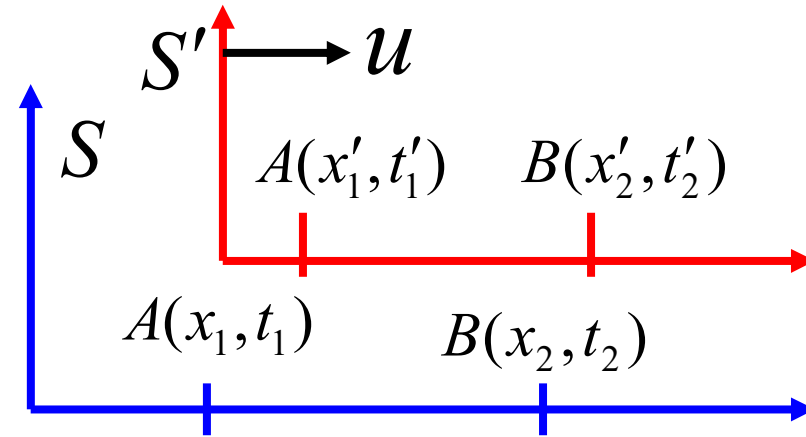


根据洛伦兹变换，

在 S' 系中，测得这两个事件的空间坐标为

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ x'_2 = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \end{cases}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0$$



所以在 S' 系中，这两个事件的空间间隔为

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = \gamma(u)(x_2 - ut_2) - \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ &= \gamma(u)(x_2 - x_1) - u\gamma(u)(t_2 - t_1) = -u\gamma(u)\Delta t \end{aligned}$$

$$= -\frac{u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -1.34 \times 10^9 \text{ m}$$

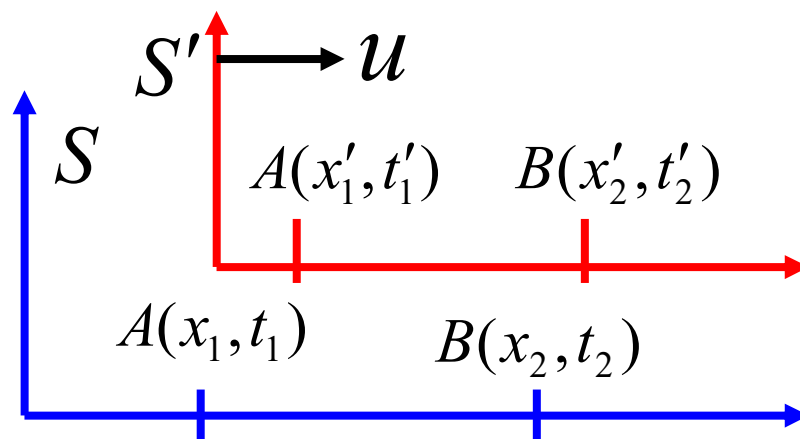
讨论：

由于在 S' 系中，

两个事件的空间坐标不是同时测量的，

$\Delta x'$ 不是测长，

无法应用长度收缩的概念。



例3 一静止长度为 l_0 的火箭，以速率 u 相对地飞行，
现自其尾端发射一个光信号。

试根据洛伦兹变换计算：在地面系中观测，

光信号自火箭尾端到前端所经历的位移、时间、速度

分析：设光信号自火箭尾端发射为“事件1”，

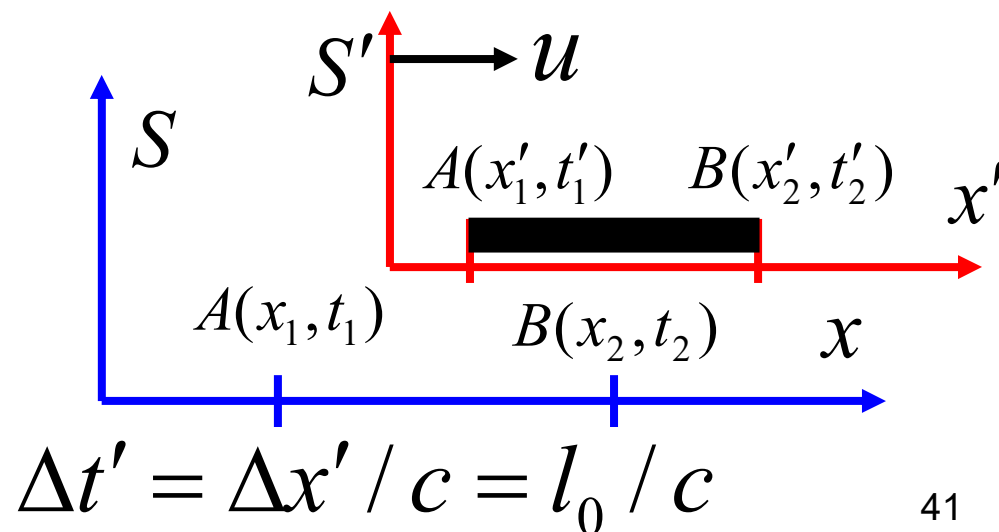
光信号到达火箭前端为“事件2”。

在火箭系（ S' ）中，测量火箭的长度 $\Delta x' = l_0$ 是原长，

光信号是以 c 传送的，

所以，在 S' 系中，

光信号自火箭尾端到
前端所经历的时间为



解： 根据洛伦兹变换，在地面系（ S ）中，

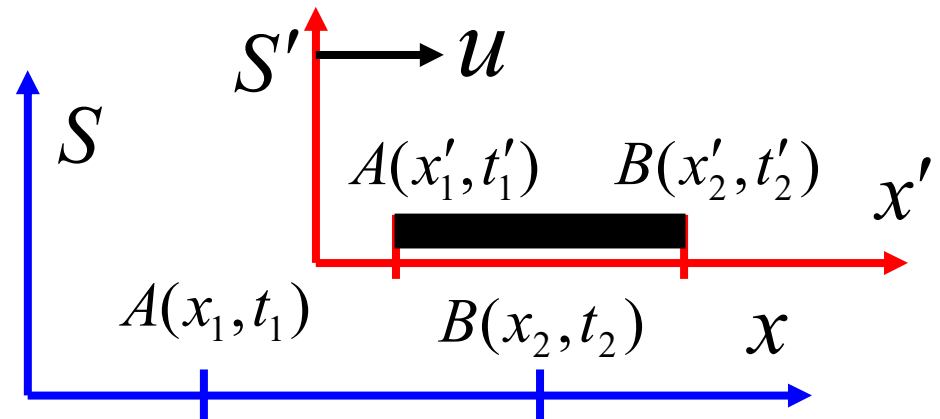
测得的光信号自火箭尾端到前端所经历的位移为

$$\underline{\Delta x} = x_2 - x_1 = \gamma(u)(x'_2 + ut'_2) - \gamma(u)(x'_1 + ut'_1)$$

$$= \gamma(u)\Delta x' + u\gamma(u)\Delta t'$$

$$= \frac{l_0 + ul_0/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

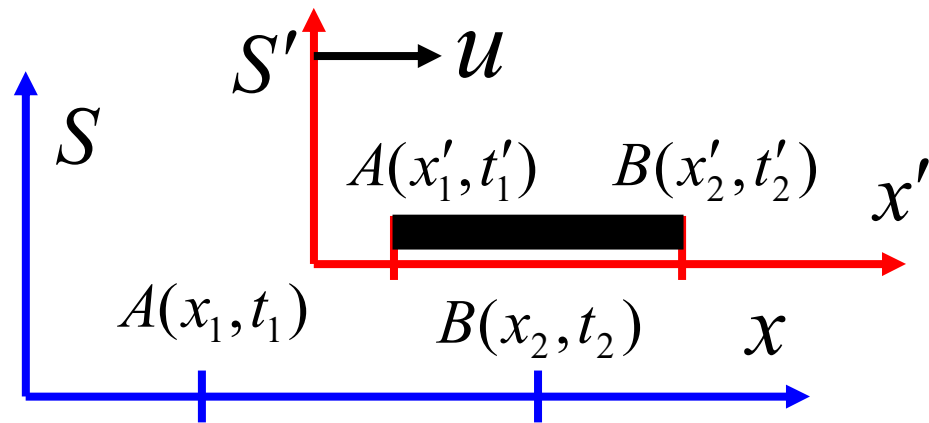
$$= l_0 \sqrt{(1 + \frac{u}{c}) / (1 - \frac{u}{c})}$$



在地面系 (S) 中,

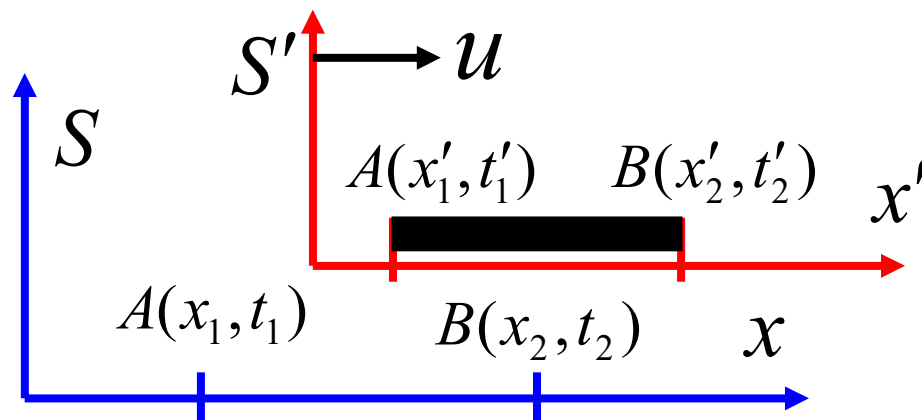
测得的光信号自火箭尾端到前端所经历的时间为

$$\begin{aligned}\underline{\Delta t} &= t_2 - t_1 = \gamma(u)(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2) - \gamma(u)(t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1) \\&= \gamma(u)\Delta t' + \frac{u}{c^2} \gamma(u)\Delta x' \\&= \frac{\frac{l_0}{c} + \frac{u}{c^2} l_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\&= \underline{\frac{l_0}{c} \sqrt{(1 + \frac{u}{c}) / (1 - \frac{u}{c})}}\end{aligned}$$



在地面系中观测，光信号自火箭尾端到前端的速度为

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c$$



讨论：

(1) 光信号在火箭系和地面系中的传递速率都为 c

这完全满足“光速不变原理”。

(2) 在火箭系 (S') 中，

光信号自火箭尾端发射的“事件1”，
和光信号到达火箭前端的“事件2”
不是发生在同一地点，

因此， $\Delta t' = \Delta x' / c = l_0 / c$ 不是原时。

$$\Delta x = l_0 \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

$$\Delta t = \frac{l_0}{c} \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

例4 在地球—月球系中测得地—月距离为 $3.844 \times 10^8 \text{m}$

一火箭以的速率 $0.8c$ 沿着从地球到月球的方向飞行，
先经过地球，后经过月球。

问：在地球—月球系和火箭系中观测，火箭由地球
飞向月球各需多少时间？

分析：

在火箭看来，

火箭与地球相遇和火箭与月球相遇这两件事
是在同一地点发生的，

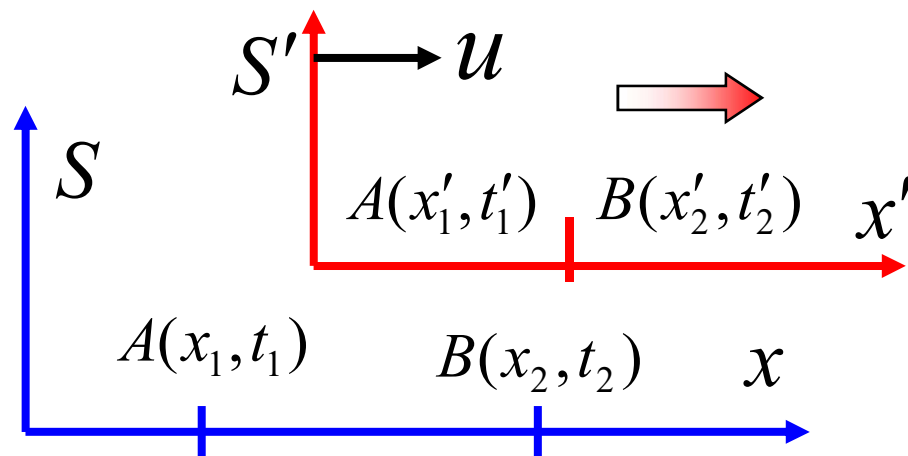
这两件事的时间间隔是原时。

可以用时间膨胀效应求解。

解： 设地一月系为 S 系，

火箭与地球相遇为 “事件1”： (x_1, t_1)

火箭与月球相遇为 “事件2”： (x_2, t_2)



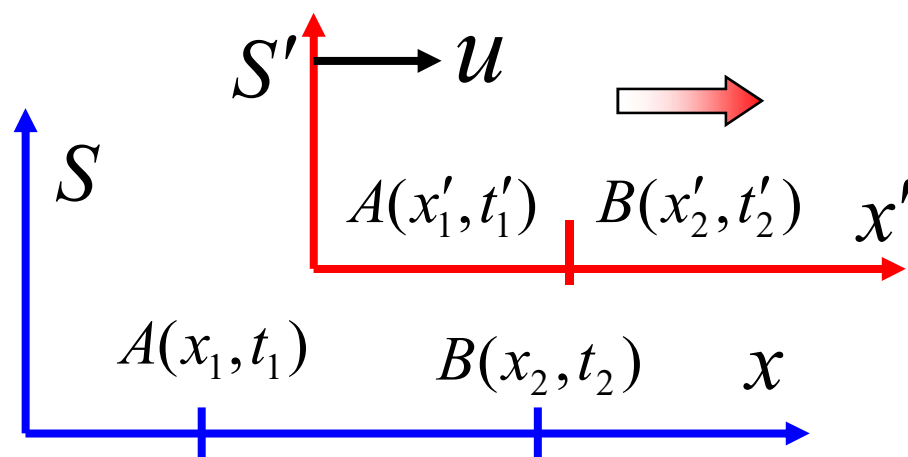
设火箭系为 S' 系，

火箭与地球相遇为 “事件1”： (x'_1, t'_1)

火箭与月球相遇为 “事件2”： (x'_2, t'_2)

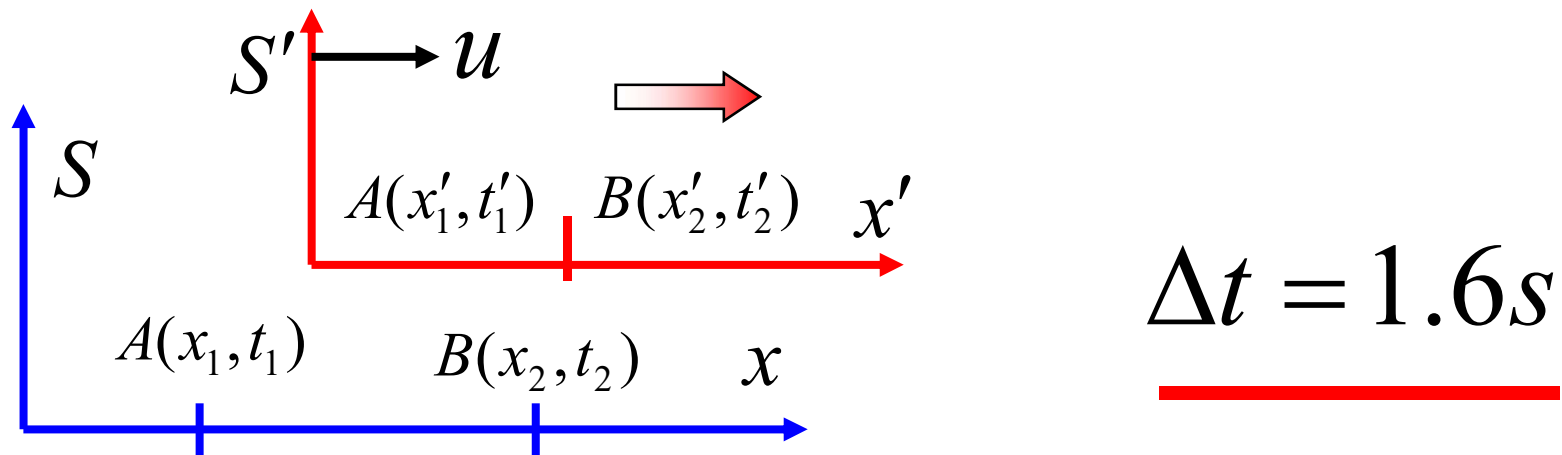
在 S 系中，两个事件发生的空间间隔为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$$



所以，在 S 系中，两个事件发生的时间间隔为

$$\underline{\Delta t} = \frac{\Delta x}{u} = \frac{x_2 - x_1}{u} = \frac{3.844 \times 10^8 \text{ m}}{0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = \underline{1.6 \text{ s}}$$



在 S' 系中，两个事件是在同一地点发生的，

所以，两个事件的时间间隔 $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ 是原时。

在 S 系中，

两个事件的时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 是测时。

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - u^2/c^2} = 1.6 \text{ s} \times \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.96 \text{ s}$$

讨论：也可以用洛伦兹变换和长度收缩效应求解。

(1) 用洛伦兹变换求解

$$\underline{\Delta t'} = t'_2 - t'_1$$

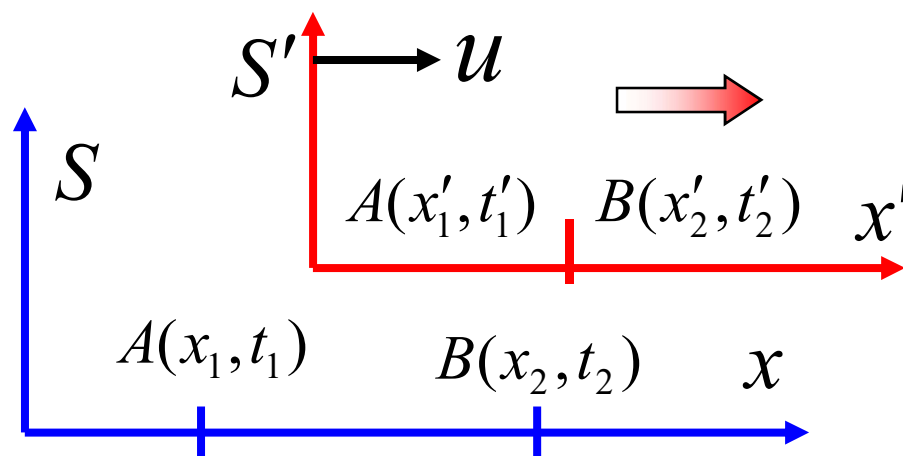
$$= \frac{t_2 - \frac{u}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{t_1 - \frac{u}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$= \frac{\Delta t - u\Delta x / c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$= \frac{1.6s - \frac{0.8}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \times 3.844 \times 10^8 \text{ m}}{\sqrt{1 - 0.8^2}}$$

$$\underline{\Delta t = 1.6s}$$

$$\underline{\Delta x = 3.844 \times 10^8 \text{ m}}$$

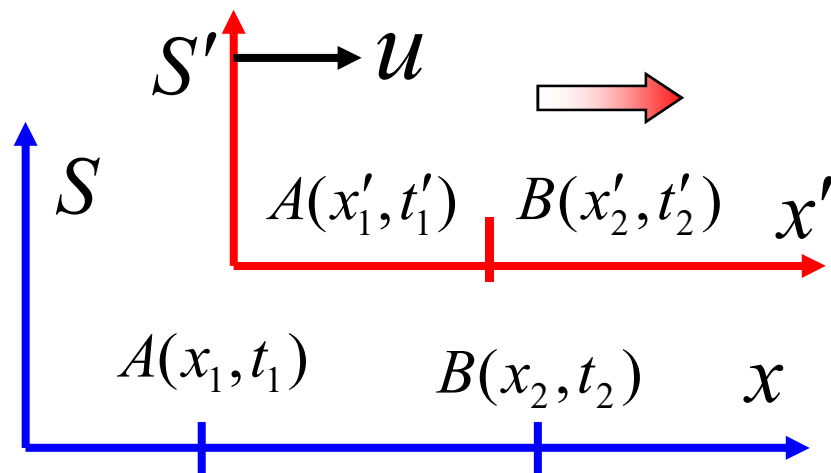


$$\underline{= 0.96 \text{ s}}$$

(2) 用长度收缩效应求解

在 S 系中，地球和月球是“静止的”，

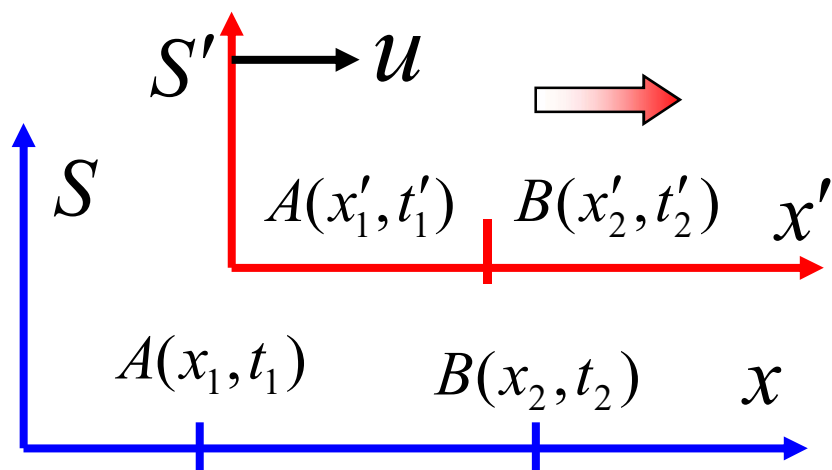
它们之间的距离是原长 $l_0 = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$



而在 S' 系中，地球和月球是“运动的”，

它们之间的距离是测长 l'

$$l' = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$



$$\underline{l' = l_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

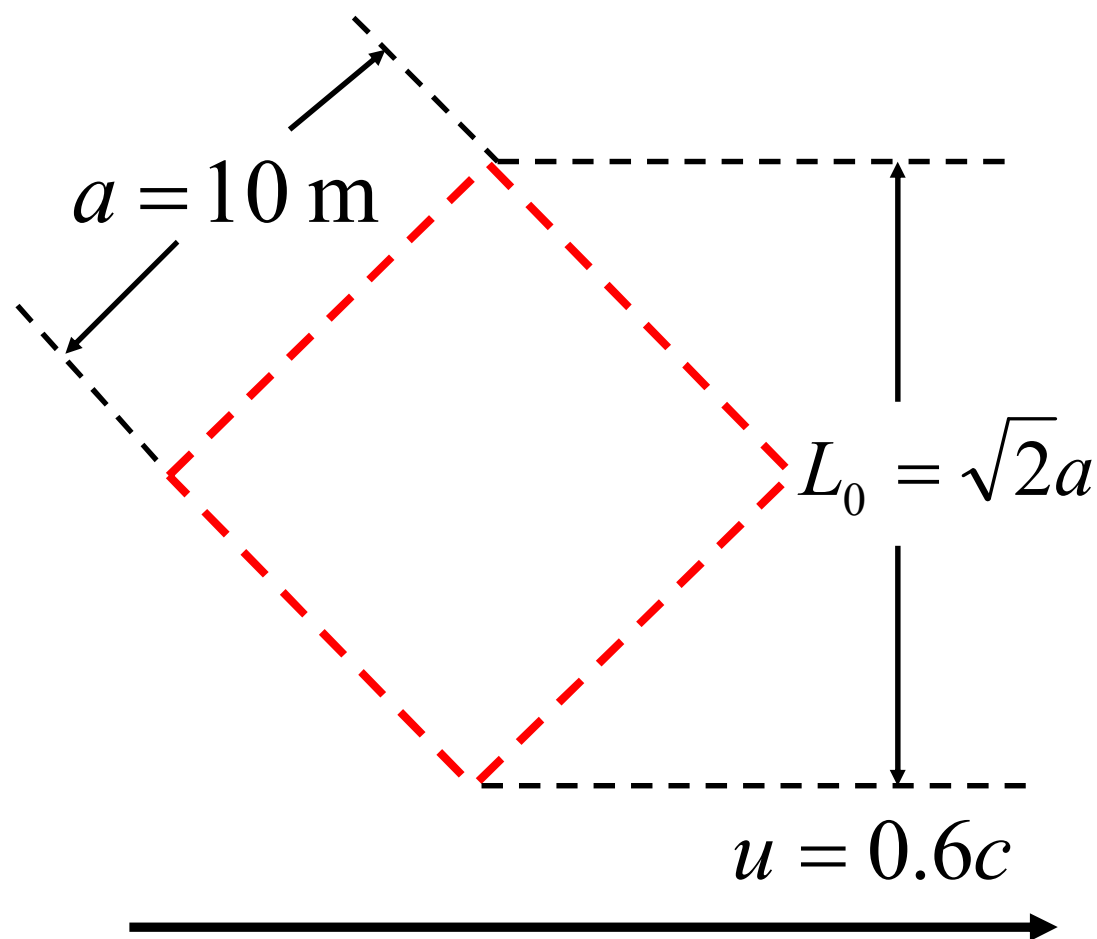
在 S' 系中，地球和月球运动速度也是 $u=0.8c$ ，

所以， S' 系（火箭）测得的时间间隔为

$$\underline{\Delta t'} = \frac{l'}{u} = \frac{l_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2}}{0.8c} = \underline{0.96 \text{ s}}$$

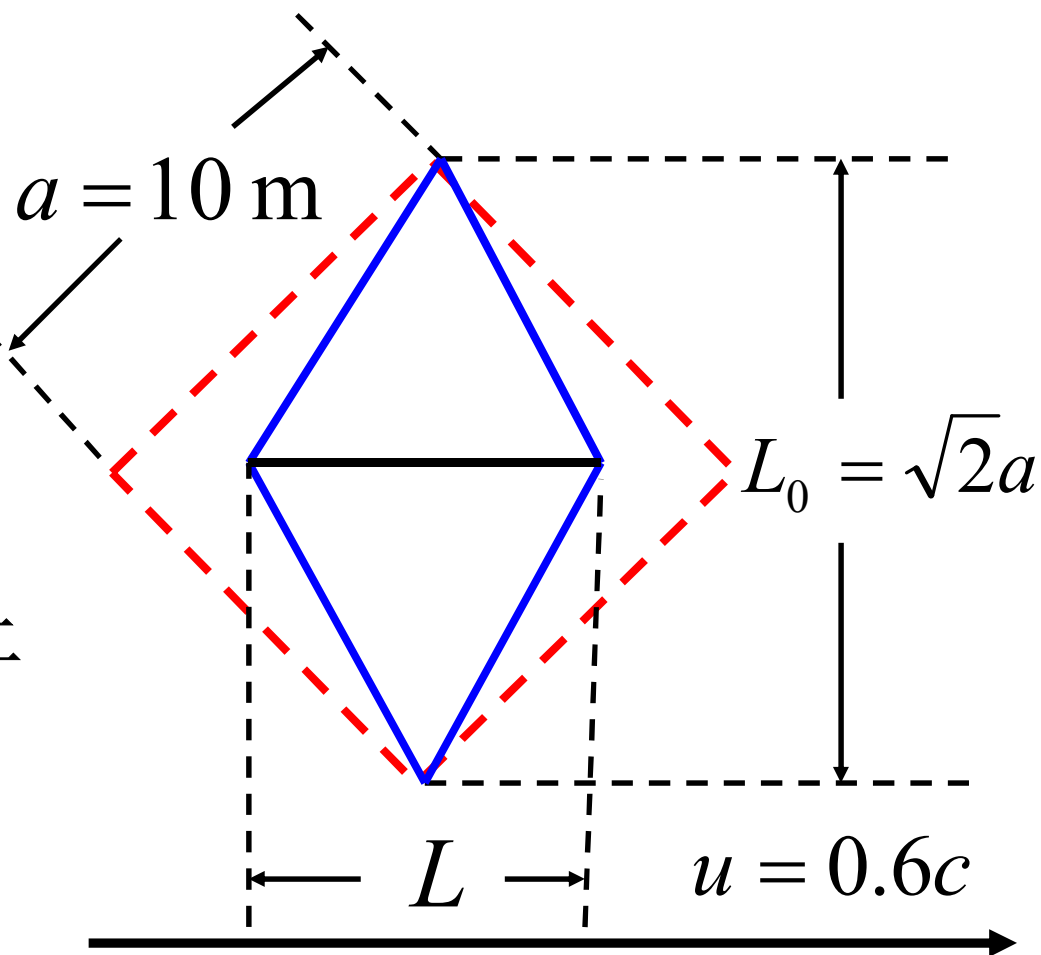
例5. 一静止面积为 $S_0=100\text{m}^2$ ，面密度为 σ_0 的正方形板，当观测者以 $u=0.6c$ 的速度沿其对角线运动时。求：

(1) 所测得图形的形状和面积； (2) 面密度之比 σ/σ_0



分析：

该“正方形”也是
沿着 其对角线相对
观测者运动的。
长度收缩只发生在
运动方向上，
在垂直于运动方向上
不发生长度收缩。
因此，观测者测得的
图形是一个菱形。



观测者测得的“质量”是“运动质量”。

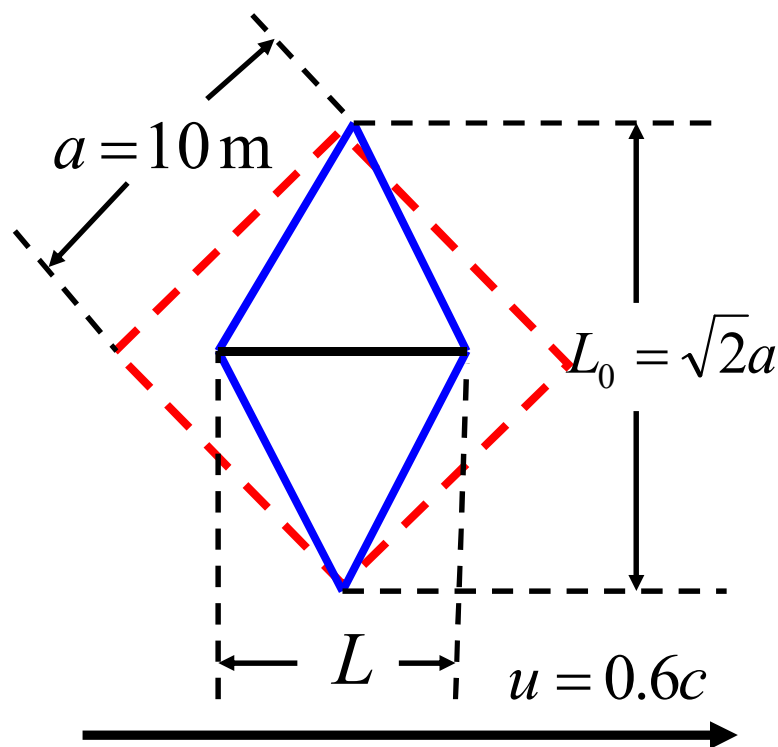
解：(1) 根据相对论长度收缩效应，
观测者测得沿运动方向平行的对角线收缩为

$$L = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} = L_0 \sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8L_0$$

垂直于运动方向的对角线仍然为 $L_0 = \sqrt{2}a$ ，

所以，观测者测得图形的
形状为菱形，面积为

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \frac{LL_0}{2} = \frac{0.8L_0^2}{2} \\ &= \frac{0.8 \times 2a^2}{2} = \underline{0.8S_0} \\ &= \underline{80 \text{ m}^2} \end{aligned}$$



(2) 板的静止质量为

$$m_0 = S_0 \sigma_0$$

$$S = 0.8 S_0 = 80 \text{ m}^2$$

板的运动质量为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{S_0 \sigma_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

所以，观测者测得的面密度为

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{S_0 \sigma_0}{S \sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{S_0}{S \sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{S_0}{0.8 S_0 \sqrt{1 - 0.6^2}} = \frac{25}{16}$$

例6 离地面 6000m 的高空大气中，产生一 π 介子，以速度 $0.998c$ 飞向地球。假定 π 介子在自身参照系中的平均寿命为 $2 \times 10^{-6}\text{s}$ ，根据相对论理论，试问：

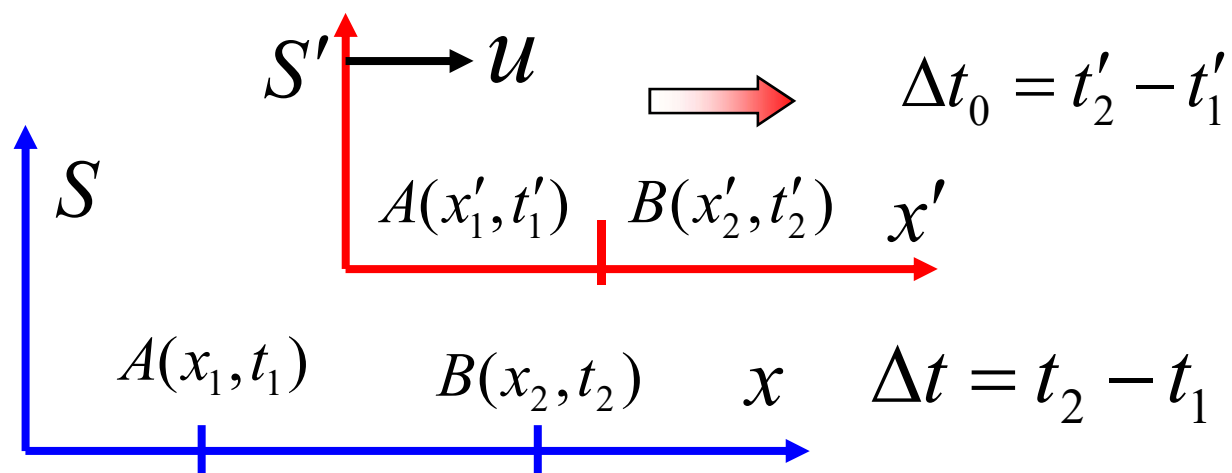
(1) 地球上的观测者判断 π 介子能否到达地球？

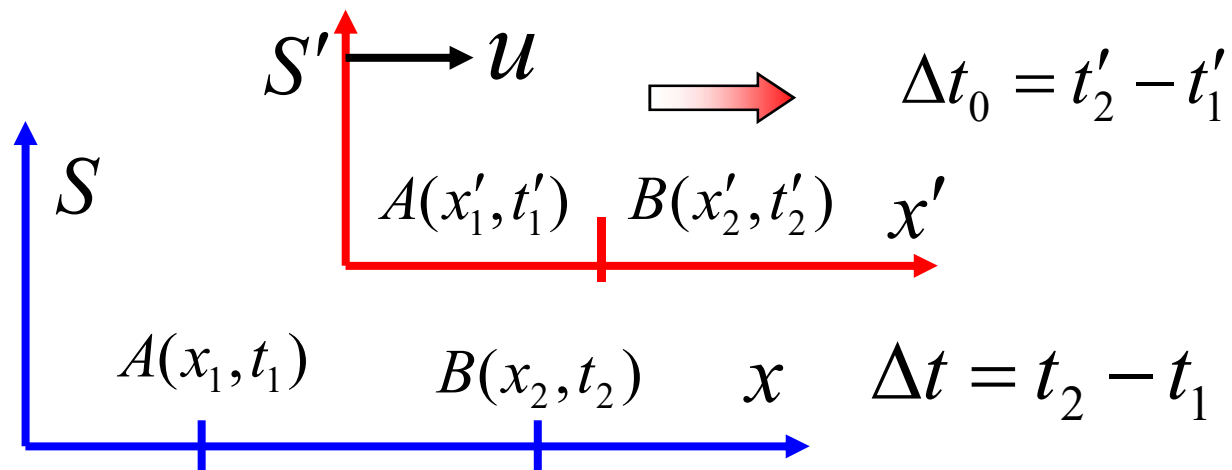
(2) 与 π 介子一起运动的参照系中观测者的判断结果又如何？

解:

(1) π 介子在自身参照系中是静止的,

因此, 在 π 介子在自身参照系中,
 π 介子的产生和消失这两个事件的时间间隔
(平均寿命) $\Delta t_0 = 2 \times 10^{-6} \text{s}$, 是固有时间。





地球上的观测者，由于时间膨胀效应，

测得 π 介子的平均寿命为

$$\underline{\Delta t} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2 \times 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1 - 0.998^2}} = \underline{31.6 \times 10^{-6} \text{ s}}$$

即地球上测得， π 介子一生可以飞行的距离为

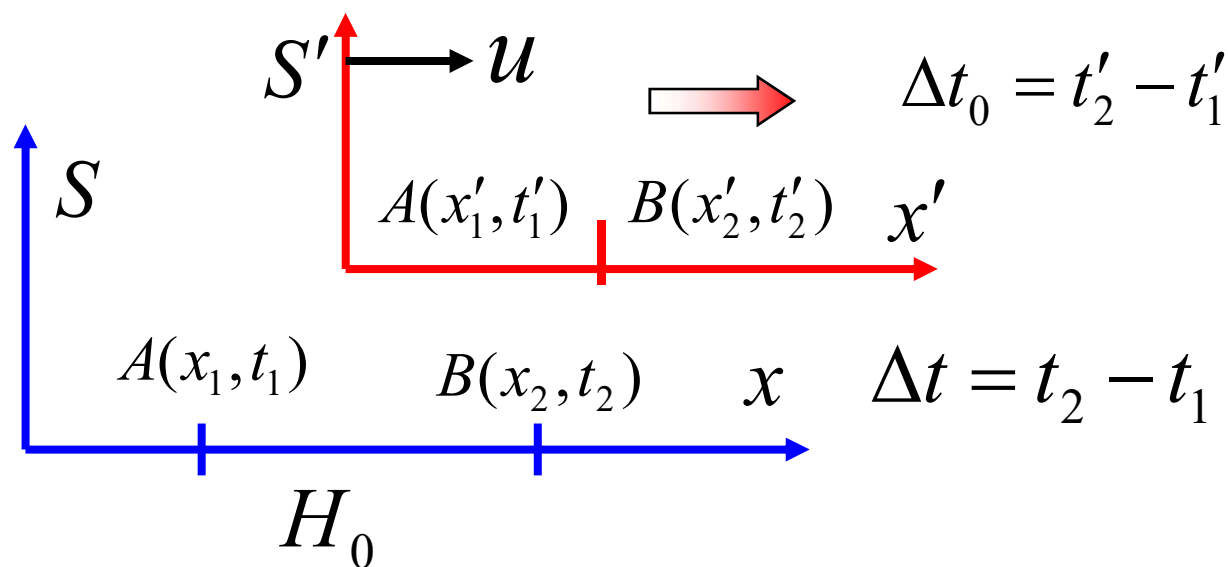
$$\underline{L} = v \underline{\Delta t} \approx \underline{9460 \text{ m}} > \underline{6000 \text{ m}}$$

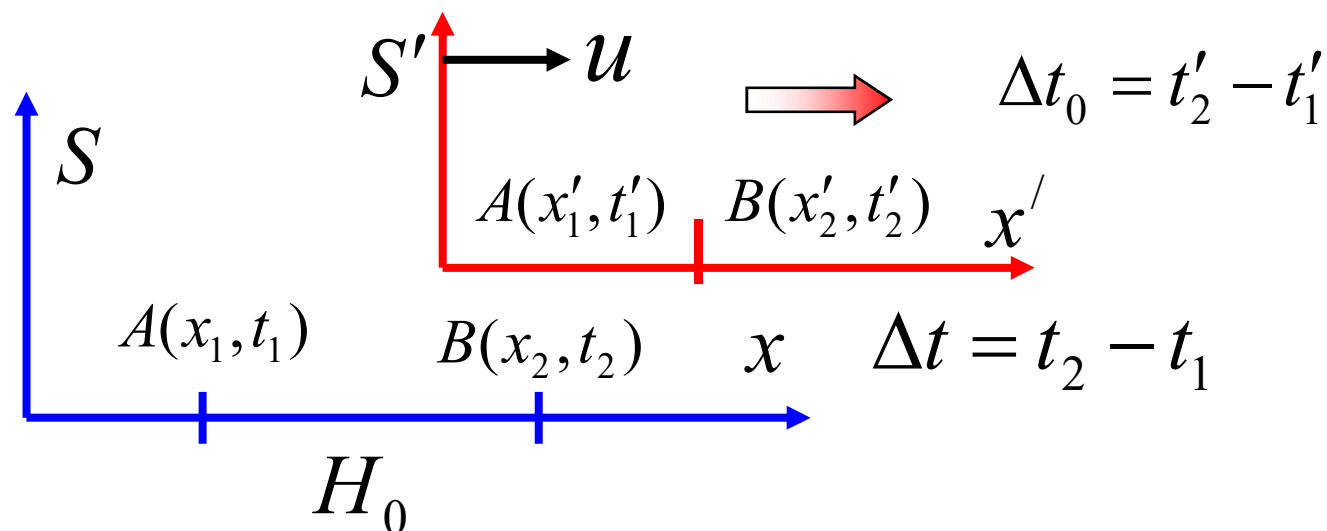
所以判断 π 介子能够到达地球。

(2) 在与 π 介子一起运动的参照系中，介子是静止的

但地球以速率 $v = 0.998c$ 接近 π 介子。

从地面到介子产生处为 $H_0 = 6000\text{m}$ 是地球上测得的





由于空间收缩效应，在与 π 介子一起运动的参照系中

这段距离应为 $\underline{H = H_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = \underline{379m}}$

在与 π 介子一起运动的系中，其一生中地球_{地球}的行程

$\underline{L_0 = v\Delta t_0 \approx \underline{599m} > \underline{379m}}$

所以判断地球能够在 π 介子消失前赶到，

即 π 介子能够到达地球。

讨论：

实际上， π 介子能够到达地球

这是客观事实，

不会因为参考系的不同而改变。

例7 把静止质量为 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 的电子
从 $v_1 = 0.6c$ 的速度加速到 $v_2 = 0.8c$,
需要的能量是多少?
这时电子的质量增加了多少?

分析:

高速运动的电子, 必须要考虑相对论效应。

高速运动的电子的动能 E_K , 是其运动能量

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

与电子的静止能量 $E_0 = m_0 c^2$ 之差。

解：

需要的能量是多少？

$$\begin{aligned}\underline{\Delta E_K} &= (E_2 - E_0) - (E_1 - E_0) = E_2 - E_1 \\&= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_2^2 / c^2}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}} \\&= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - 0.8^2}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = \frac{5}{12} m_0 c^2 \\&= \frac{5}{12} \times 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \\&\approx 3.4 \times 10^{-14} \text{ J} = 2.13 \times 10^5 \text{ eV} = \underline{0.213 \text{ MeV}}\end{aligned}$$

即需要对电子做 0.213 MeV 的功。

这时电子的质量增加了多少？

$$\begin{aligned}\underline{\Delta m} &= m_2 - m_1 \\&= \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_2^2 / c^2}} - \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}} \\&= \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0.8^2}} - \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = \frac{5}{12} m_0 \\&= \frac{5}{12} \times 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad \approx \underline{3.8 \times 10^{-31} \text{ kg}}\end{aligned}$$

讨论： 从 $v_1 = 0.6c$ 的速度加速到 $v_2 = 0.8c$,

$$\Delta E_K = 0.213 \text{ MeV}$$

如果把电子从 $v_1 = 0.4c$ 的速度加速到 $v_2 = 0.6c$,

可以计算, 需要做 0.084 MeV 的功。

可见, 电子的速度越高, 加速越困难。

尤其是在接近光速时,
加速电子需要付出巨大的能量。

实际上, 不可能将电子加速到光速。

例8

求一个质子和一个中子结合成一个氘核时放出的能量

已知它们的静止质量分别为:

质子

$$m_p = 1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

中子

$$m_n = 1.67493 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

氘核

$$m_D = 3.34359 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

分析： 核反应前后有静止质量亏损，
与静止质量亏损对应的是静止能量亏损，
也就是一次核反应所释放的能量。

解：

$$\underline{\Delta E} = (m_0 - m)c^2 = (m_p + m_n - m_D)c^2$$

$$= [(1.67262 + 1.67493) - 3.34359] \times 10^{-27} \text{ kg} \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$

$$= 0.356 \times 10^{-12} \text{ J}$$

$$= 2.23 \times 10^6 \text{ eV} = \underline{2.23 \text{ MeV}}$$

例9 太阳的辐射能来自其内部的核聚变反应。

太阳每秒钟向周围空间辐射出的能量约为

$$5 \times 10^{26} \text{ J/s}$$

由于这个原因，太阳每秒钟减少多少质量？

解： 太阳每秒钟减少多少质量为

$$\underline{\Delta m} = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{5 \times 10^{26} \text{ J/s}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = \underline{5.6 \times 10^9 \text{ kg/s}}$$

讨论:

太阳每秒钟燃烧约**5600000**吨。

太阳目前的质量约为 $2 \times 10^{30} \text{ kg}$

如果太阳质量全部燃烧，还能燃烧

$$t = \frac{2 \times 10^{30} \text{ kg}}{5.6 \times 10^9 \text{ kg / s}} \approx 3.5714 \times 10^{20} \text{ s}$$

这相当于**10000**亿年（每年约**3153600**秒）。

当然，太阳的寿命计算，不会全部燃烧。

例10 氢弹利用了聚变反应，在该反应中，
各氢原子核的中子聚变成质量较大的核
每用 1g 氢，约损失静止质量 0.006g 。

求在这种反应中释放出来的能量与
同量的氢燃烧成水时释放出来的能量的比值。

已知氢被燃烧时，

1g 氢释放 $1.3 \times 10^5 J$ 的能量

解： 每用 1g 氢释放出来的能量为

$$\begin{aligned}\underline{\Delta E_1} &= \Delta mc^2 = 0.006 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{16} \\ &= \underline{5.4 \times 10^{11} \text{ (J/g) }}\end{aligned}$$

ΔE_1 与同量的氢燃烧成水时释放出来的能量 ΔE_2 的

$$\text{比值为 } \frac{\Delta E_1}{\underline{\Delta E_2}} = \frac{5.4 \times 10^{11}}{1.3 \times 10^5} = \underline{4.15 \times 10^6}$$