工科数学分析基础 2

2016 年 6 月 24 日

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1. 曲面$x^2+2y^2+3z=9$在点$(1,1,2)$处的切平面方程是 $\underline{2(x-1)+4(y-1)+3(z-2)=0}$ （或$\underline{2x+4y+3z=12}$），法线方程是 $\underline{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{x-2}{3}}$ 。

2. 曲面$x^2+2y^2+3z^2=6$在点$P_0(1,1,1)$处指向外侧的单位法向量$\vec{n}=$ $\underline{(\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}})}$ ，函数$u(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$在点P_0沿方向$\vec{n}$的方向导数$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{P_0}=$ $\underline{2\sqrt{14}}$ 。

3. 函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$在点$x=1$处的幂级数为 $\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^n}{2^{n+1}}}$ ，收敛域为 $\underline{|x-1|<2}$ 。

4. 设函数$f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 1-x, \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$的 Fourier 级数是：$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$， $x\in(-\infty,+\infty)$，其和函数是$S(x)$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx \quad (n=1,2,\cdots)$，则$S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$ $\underline{-\dfrac{3}{8}}$， $S(9)=$ $\underline{0}$

5. 二次积分$I=\int_0^1 dy\int_y^1\cos x^2 dx=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\sin 1}$ ； $I=\oint_L(x^2+\sin y+\sqrt{x^2+y^2})ds=$ $\underline{2\pi a^2+\pi a^3}$ ，其中L为圆周$x^2+y^2=a^2$。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1． 微分方程组$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases}$的通解为（ A ）

(A) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7x} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-2x}$； (B) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{7x} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-2x}$；

(C) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{7x} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-2x}$； (D) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7x} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-2x}$。

2．设$z = f(xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2))$，其中$f$具有二阶连续偏导数，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$（ **A** ）

（**A**）$xy(f_{11}'' - f_{22}'') + f_1' + (x^2 - y^2) f_{12}''$；（**B**）$xy(f_{11}'' + f_{22}'') + f_1' + (x^2 - y^2) f_{12}''$；

（**C**）$xy(f_{11}'' + f_{22}'') + f_1' + (x^2 + y^2) f_{12}''$；（**D**）$xy(f_{11}'' - f_{22}'') + f_1' + (x^2 + y^2) f_{12}''$。

3．向量场$\vec{A}(x, y, z) = (2x + y, 2x - y, y - z)$（ **B** ）

(A) 既是无源场又是无旋场； (B) 是无源场但不是无旋场；

(C) 是无旋场但不是无源场； (D) 既不是无源场又不是无旋场。

4．均匀锥面$\sum : z^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1$的质心坐标是$(0, 0, \bar{z})$，则$\bar{z} =$（ **C** ）

（**A**）$\frac{1}{3}$ （**B**）$\frac{1}{2}$ （**C**）$\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

5．设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$条件收敛，其中$u_n > 0, n = 1, 2, \cdots,$以下命题中正确的是（ **D** ）

（**A**）$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 收敛 ，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 发散；（**B**）$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 发散 ，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 收敛；

（**C**）$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 均收敛； （**D**）$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 均发散。

三.（**10** 分）求微分方程 $y''-5y'+6y=e^{2x}$ 的通解。

解：特征方程 $r^2-5r+6=0$，特征根 $r_1=2,r_2=3$

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ （**4** 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=Axe^{2x}$ （**7** 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得： $A=-1$，所以 $y^*(x)=-xe^{2x}$，

∴通解 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-xe^{2x}$ 。 （10 分）

三、（微积分）求二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x,x^2+y^2\le 2x\right\}$ 。

解： $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\bullet rdr$ **(**4 分）

$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\frac{8}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{10}{9}\sqrt{2}$ （10 分）

四、（10 分）已知幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n^2-n)x^n$，求:1、收敛域；2、和函数。

解： 1、**收敛半径**$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{(n+1)^2-(n+1)}=1$，

$x=-1$时，级数为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n^2-n)$，发散； $x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n^2-n)$，发散。

所以收敛域为$(-1,1)$。 （4 分）

2、令$S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n^2-n)x^n=x^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2\bullet S_1(x)$，其中$S_1(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$，

$\int_0^x S_1(x)dx=\int_0^x(\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2})dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_0^x n(n-1)x^{n-2}dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}$，

$\int_0^x(\int_0^x S_1(x)dx)dx=\int_0^x(\sum\limits_{n=2}^{\infty}nx^{n-1})dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}$，

所以 $S_1(x)=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2}{(1-x)^3}$，

从而 $S(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$。 （10 分）

五、（**10** 分）**求曲面积分** $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(xy^2+2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\sum$ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，取下侧。

解：将曲面方程$x^2+y^2+z^2=1$**代入化简得**

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy^2+2xy)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,\qquad \text{（2 分）}$$

补有向曲面$\sum_1$ ： $z=z(x,y)=0\qquad (x^2+y^2\le 1)$，取上侧。

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+x+2y)\mathrm{d}V$，（**5** 分）

由对称性，得$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}2y\mathrm{d}V=0$，

$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{dr}=\frac{2\pi}{5}$，

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}(xy^2+2xy)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}ydxdy$，

由对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}ydxdy=0$，故$I=\frac{2\pi}{5}$。（**10** 分）

六、（**10** 分）计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{a^2x^2+b^2y^2}(a,b>0,a\neq b)$，其中 L 是以点 $(1,1)$ 为中心，$R(R>\sqrt{2})$ 为半径的圆周，取逆时针方向。

解： $P=\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}, Q=\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}, \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{b^2y^2-a^2x^2}{(a^2x^2+b^2y^2)^2}$ ，（**2** 分）

取充分小的正数 ε，补有向曲线 C： $a^2x^2+b^2y^2=\varepsilon^2$，取顺时针方向。由格林公式，

$I+\oint_C \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{a^2x^2+b^2y^2}=\iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$， （**5** 分）

所以 $I=\oint_{C^-} \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{a^2x^2+b^2y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C^-} x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{a^2x^2+b^2y^2\le\varepsilon^2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\bullet\pi\bullet\frac{\varepsilon}{a}\bullet\frac{\varepsilon}{b}=\frac{2\pi}{ab}$ 。 （**10** 分）

七、（**10** 分）求函数 $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2+3y^2$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值。

解：在 $x^2+y^2<1$ 内部，由 $\begin{cases} f_x=3x^2+6x=0 \\ f_y=3y^2+6y=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}$， $f(0,0)=0$ 。

在 $x^2+y^2=1$ 时， $L(x,y,\lambda)=x^3+y^3+3x^2+3y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$ 。

由 $\begin{cases} L_x=3x^2+6x+2\lambda x=0 \\ L_y=3y^2+6y+2\lambda y=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$，得 （**5** 分）

$\begin{cases} x_2=0 \\ y_2=1 \end{cases}, \begin{cases} x_3=0 \\ y_3=-1 \end{cases}, \begin{cases} x_4=1 \\ y_4=0 \end{cases}, \begin{cases} x_5=-1 \\ y_5=0 \end{cases}, \begin{cases} x_6=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_6=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \begin{cases} x_7=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_7=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$f(0,\ 1)=f(1,\ 0)=4$, $f(0,-1)=f(-1,\ 0)=2$,

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3+\frac{1}{\sqrt{2}},\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3-\frac{1}{\sqrt{2}}$

所以最大值为 **4**。 （**10** 分）