信息论

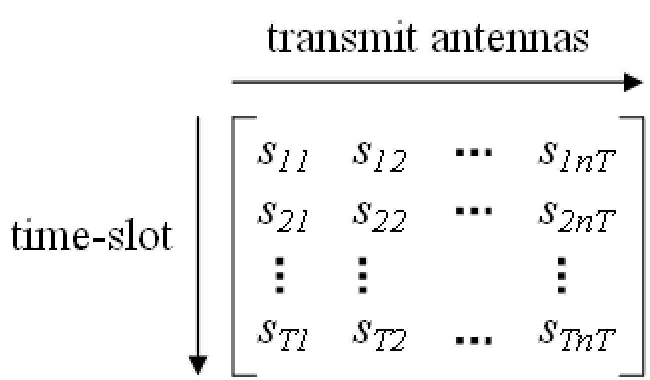
信号传输与处理的理论基础

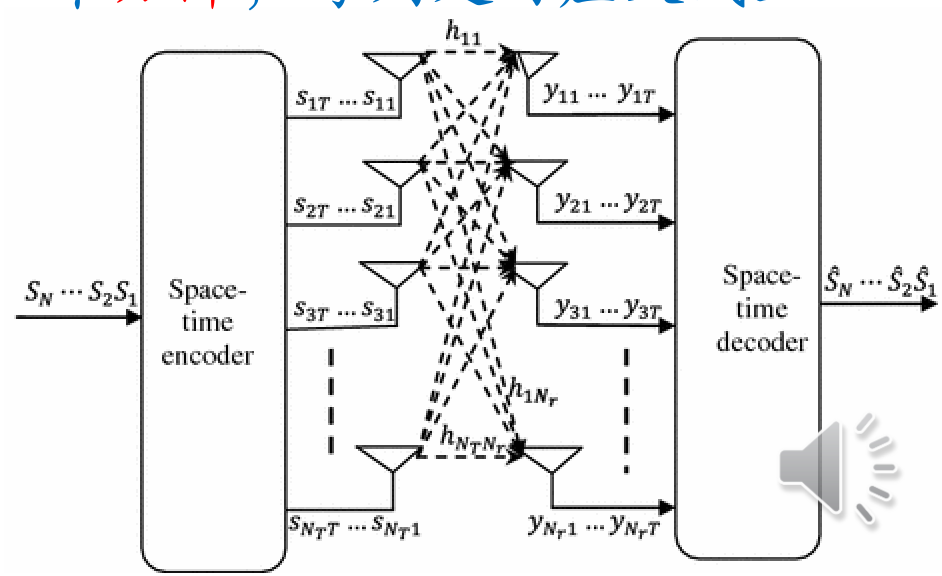
MIMO通信基础：

线性时空码ML平均译码差错概率的普适上界

MIMO时空编码(1)

* 时空编码基本概念
*
* (1) 通常的信道编码是在时间维上插入冗余结构以提升可靠性。
* (2) 时空编码是利用MIMO通信的固有的多信道特性，
* 在时间-空间维度上同时构造冗余结构，以提升传输可靠性，
* 同时具有更高的传输效率。
* (3) 时空编码的**码字**可以看做一个**矩阵**，每列是对应天线上
* 发送的一维码字。

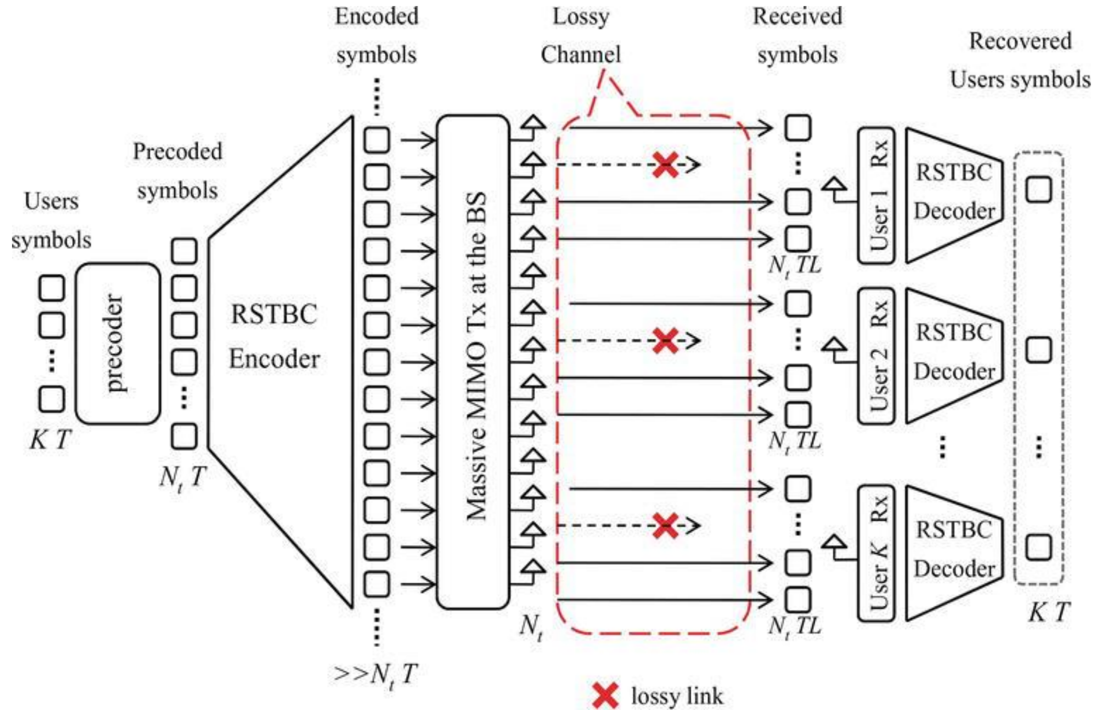




MIMO时空编码(2)

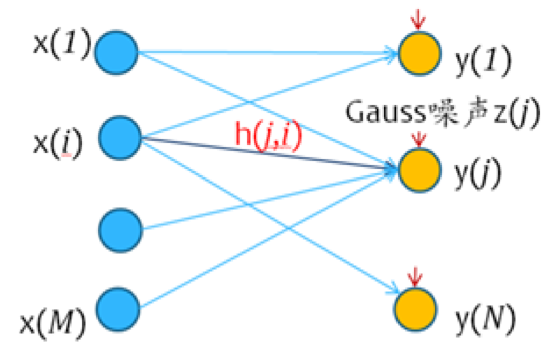
* 时空编码的固有优点

* 因为在相同的SNR条件下，MIMO信道的传输容量
* 远高于SISO容量，因此时空编码在相同的译码差错水平上所能达到的传输效率远高于SISO信道。



MIMO时空编码(3)

* 通用时空译码算法与分析



* （1）基本模型：接收天线i在时刻t的接收信号
* $$y_i(t) = \sum_{j=1}^{M} h_{ij}\sqrt{P}x_j(t) + w_i(t)$$
* $$i=1,\ldots,N,\ t=1,2,\ldots,L$$
* $x_j(t)$：发射天线j在t时刻的发送数据，矩阵$\boldsymbol{X}=[x_j(t)]$是时-空码字；
* P: 发射天线的总功率；L: 码字长度(位数)
* $w_i(t)$：接收天线i上的等效噪声，并假设具有Gauss联合e概率分布:
* $$E[w_i(t_1)w_k(t_2)] = \sigma^2\delta_{ik}\delta(t_1\text{-}t_2)$$
* （2）MIMO传输模型的等价的矢量形式
* $$\boldsymbol{y}(t) = \sqrt{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w}(t),\quad t=1,2,\ldots,L,\quad |\boldsymbol{x}(t)|_2=1$$
* 矩阵$\boldsymbol{X}=[x_j(t)]$是时-空码字, P[$\boldsymbol{y}$(t)|$\boldsymbol{x}$(t)]具有Gauss分布。

MIMO时空编码(4)

* 通用时空译码算法与分析

（2）MIMO传输模型的矢量形式

* $\boldsymbol{y}(t) = \sqrt{P}\boldsymbol{Hx}(t) + \boldsymbol{w}(t)$， $t=1,2,\ldots,L$， $|\boldsymbol{x}(t)|_2=1$
* 矩阵$\boldsymbol{X}=[x_j(t)]$是时-空码字, $P[\boldsymbol{y}(t)|\boldsymbol{x}(t)]$具有Gauss分布，具有以下参数:
* $E[\boldsymbol{y}(t)|\boldsymbol{x}(t)] = \sqrt{P}\boldsymbol{Hx}(t)$
* $E[\boldsymbol{y}(t_1)\boldsymbol{y}(t_2)^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{x}(1),\ldots,\boldsymbol{x}(L)] = P\boldsymbol{Hx}(t_1)\boldsymbol{x}(t_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \sigma^2 I_N\delta(t_1-t_2)$
* 因此$\boldsymbol{y}(t)|\boldsymbol{x}(t)$的协方差矩阵
* $cov[\boldsymbol{y}(t_1)\boldsymbol{y}(t_2)^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{x}(1),\ldots,\boldsymbol{x}(L)] = \sigma^2 I_N\delta(t_1-t_2)$
* 进而有概率密度 $P[\boldsymbol{y}(1),\ldots,\boldsymbol{y}(L)|\boldsymbol{x}(1),\ldots,\boldsymbol{x}(L)]$
* = 常数 $exp[-(1/2\sigma^2)\sum_{t=1}^{L}\left(\boldsymbol{y}(t)-\sqrt{P}\boldsymbol{Hx}(t)\right)^T(\boldsymbol{y}(t)-\sqrt{P}\boldsymbol{Hx}(t))]$
* = 常数 $exp[-(1/2\sigma^2)tr\{(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})^T(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})\}]$
* $\boldsymbol{Y}$是以$\boldsymbol{y}(1),\ldots,\boldsymbol{y}(L)$为列向量的$N\times L$矩阵;
* $\boldsymbol{X}$是以$\boldsymbol{x}(1),\ldots,\boldsymbol{x}(L)$为列向量的$M\times L$矩阵，即前面的码字矩阵。
* [习题]验证以上所有表达式。

MIMO时空编码(5)

* 通用时空译码算法与分析

* (3) 时空译码问题
* 给定以矩阵$\boldsymbol{Y}$表达的接收样本，求时空码字$\boldsymbol{X}$(列向量$\boldsymbol{x}(1),\ldots,\boldsymbol{x}(L)$)的
* 极大似然估值 $\hat{\boldsymbol{X}} = Arg\ max_{\boldsymbol{X}\in\text{时空码字集合}\Omega} P[\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}]$
* $= Arg\ max_{\boldsymbol{X}\in\text{时空码集}\Omega}\ exp[-(1/2\sigma^2)tr\{(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})\}]$
* $= Arg\ min_{\boldsymbol{X}\in\text{时空码集}\Omega}\ tr\{(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})\}$

【习题】若$\boldsymbol{X}$是连续变量，则上述ML估值问题有解 $\hat{\boldsymbol{X}} = P^{-1/2}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$.

因为码字具有离散结构，因此时空译码问题

$$\hat{\boldsymbol{X}} = Arg\ min_{\boldsymbol{X}\in\text{时空码集}\Omega}\ tr\{(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})\}$$

并不能简单采用连续型优化算法，而是需要针对码字集合Ω的特殊代数结构(取决于编码方案)设计求目标函数$tr\{(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\sqrt{P}\boldsymbol{HX})\}$极小的高效搜索算法。

注：另一途径是将每个码字作为一种模式，采用模式分类的高效智能算法完成译码。

MIMO时空编码(6)

* 通用时空译码算法与分析
* 以下分析适合于任何线性时空编码方案。
* (4) 时空译码差错分析
* ML译码 $\hat{X} = Arg\ min_{X \in 时空码集\Omega}\ tr\{(Y-HX)(Y-HX)^T\}$的平均差错概率
* $P_e = \sum_{X\in\Omega} P_X P[\hat{X} \neq X \mid X]$
* $= |\Omega|^{-1}\sum_{X\in\Omega} P[$存在码字$X^* \neq X$: $tr\{(Y-\sqrt{P}HX)(Y-\sqrt{P}HX)^T\}$
* $> tr\{(Y-\sqrt{P}HX^*)(Y-\sqrt{P}HX^*)^T\} \mid X]$
* 注意在发送码字为X的条件下，$(Y-\sqrt{P}HX)(Y-\sqrt{P}HX)^T = WW^T$，
* W=以$w(1),\ldots,w(L)$为列向量的Gauss噪声矩阵，且这时
* $Y-\sqrt{P}HX^* = \sqrt{P}H(X-X^*)+W$，$X-X^*$是非零码字
* 因此 $P_e = |\Omega|^{-1}\sum_{X\in\Omega} P[$存在码字$U \neq O$: $tr\{HUU^TH^T + HUW^T + WU^TH^T\} < 0 \mid X]$
* $= P[$存在码字$U \neq O$: $tr\{PHUU^TH^T + \sqrt{P}HUW^T + \sqrt{P}WU^TH^T\} < 0\ ]$

【习题】验证以上全部表达式，并注意最后的表达式为什么可以不再考虑以**X**为条件。

MI

* 通用时空译码算法与
*
* (5) 时空译码差错分析(续
* ML译码的平均差错概
* $P_e = P$[存在码字$\boldsymbol{U}\neq \boldsymbol{O}$
* $\leqq \sum_{U\in\Omega\backslash O} P[tr\{P\boldsymbol{H}$
* $= \sum_{U\in\Omega\backslash O} P[tr\{P\boldsymbol{H}$

矩阵为什么可以看成向量

	矩阵 $\mathbf{A}=[A_{ij}]$	向量$\boldsymbol{a}=(a_i)$
维　数	mn	n
加法运算	$A+B=[A_{ij}+B_{ij}]$	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_i+b_i)$
标量乘法	$\eta A = [\eta A_{ij}]$	$\eta\boldsymbol{a} = [\eta a_{ij}]$
标量乘积	$tr(A^TB)=\Sigma_{ij}A_{ij}B_{ij}$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \Sigma_i a_ib_i$
标量乘积的几何含义		
	A在B上的投影长度	$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影长度
欧氏长度	$(tr(A^TA))^{1/2}=(\Sigma_{ij}A_{ij}^2)^{1/2}$	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert_2= (\Sigma_i a_i^2)^{1/2}$
p-范数	$\lVert A\rVert_p=(\Sigma_{ij}A_{ij}^p)^{1/p}$	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert_p= (\Sigma_i a_i^p)^{1/p}$

按以上观点重新解释积分$\int_R d\boldsymbol{W}$，就得到最后的表达式。

* $= \sum_{U\in\Omega\backslash O}\int_R d\boldsymbol{W}(1/2\pi\sigma^2)^{-ML}exp[-(1/2\pi\sigma^2)tr(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})]$
* 积分区域$R=\{\boldsymbol{W}: tr(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{HU}) < -(1/2\sqrt{P})tr(\boldsymbol{HUU}^T\boldsymbol{H}^T)\}$，进而化为一维积分式
* $$\boxed{P_e \leqq \sum_{U\in\Omega\backslash O}\int_{-\infty}^{-\left(\frac{P}{2\sigma^2}\right)tr(HUU^TH^T)} dw\,exp\left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)w^2\right)}$$
* 【习题】推导全部表达式。注意将$\boldsymbol{W}$看成向量且在积分式中将$\boldsymbol{HU}$看做特定特定
* 方向如z-方向的向量，就能根据几何意义得出最后的一维积分式（不必实际计算！）
* 【习题】验证积分的上限是正数，即$tr(\boldsymbol{HUU}^T\boldsymbol{H}^T) > 0$。

MIMO时空编码(8)

* 通用时空译码算法与分析
*
* (6) 时空译码差错的上界估计
* 从目前得出的基本结果
* $$P_e \leqq \sum_{U\in\Omega\backslash O}\int_{-\infty}^{-\left(\frac{P}{2\sigma^2}\right)tr(HUU^TH^T)} dw\, exp(-(\tfrac{1}{2})w^2)$$
* 出发估计P_e的上界：
* $$P_e < \sum_{U\in\Omega\backslash O} C exp(-(1/2)SNR\cdot tr(\boldsymbol{HUU}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}))$$
* 其中C是一个常数，$SNR=P/\sigma^2$，最后得到ML译码平均差错概率上界
*
* $$\boxed{P_e < C|\Omega|exp(-(1/2)SNR\cdot min_{U\in\Omega\backslash O}tr(\boldsymbol{HUU}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}))}$$
*

* 【习题】给出常数C的表达式。
* 这个上界的含义是什么？对MIMO线性时空编码有哪些指导意义？尚需继续分析。