4. 数学期望的应用（求期望的问题题分为以下几类）

(1) 随机变量函数的期望（定义3，4）

(2) 先建立分布列再求期望（实际应用问题）

(3)建立“获利函数”，求“平均获利”。

(4) 利用性质$\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right)$求期望。

(1) 随机变量函数的期望（定义3，4）

$$P(X=k)=p_k,\ k=1,2\dots$$

$$EX=\sum_{k=1}^{+\infty}kp_k\quad Eg(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}g(k)p_k$$

例1. 设$X\sim P(5)$，求 $E(3^X)$与$E\left(\frac{1}{X+1}\right)$

解：$X\sim P(5)$ $E(3^X)=\sum_{k=0}^{+\infty}3^k\frac{5^k}{k!}e^{-5}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{15^k}{k!}e^{-5}=e^{15}e^{-5}=e^{10}$

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)\frac{5^k}{k!}e^{-5}=\left(\frac{5^0}{1!}+\frac{5^1}{2!}+\cdots\right)e^{-5}=\left(1+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\cdots-1\right)\frac{1}{5}e^{-5}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{5^k}{k!}-1\right)\frac{e^{-5}}{5}=\left(e^5-1\right)\frac{e^{-5}}{5}=\frac{1}{5}\left(1-e^{-5}\right)$$

$$(1)\ X \sim B(n,0.1) \quad P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,\cdots n.$$

$$E\left(3^X\right)=\sum_{k=0}^{n} 3^k C_n^k p^k q^{1-k}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (3p)^k q^{1-k} \quad =(3p+q)^n$$

$$=(3p+1-p)^n=(2p+1)^n=1.2^n$$

$$(2)\ X\sim B(n,p), Y\sim P(\lambda), X\text{与}Y\text{独立求}E\left(\frac{3^X}{Y+1}\right)$$

$$E\left(\frac{3^X}{Y+1}\right)=E3^X E\left(\frac{1}{Y+1}\right)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (3p)^k q^{n-k} \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

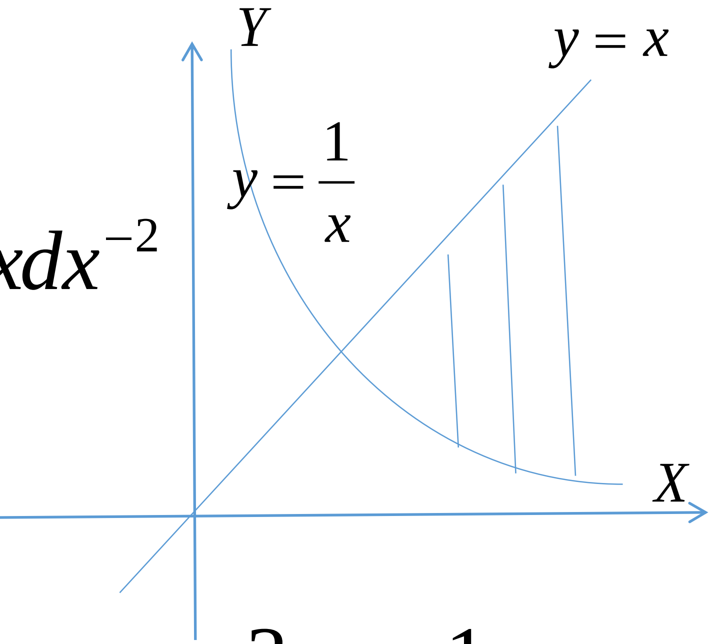
$$=(2p+1)^n \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)$$

例3.(X,Y)密度函数，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x\\ o, & 其它\end{cases}$ 求：$E(Y),E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$.

解：$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dydx=\int_1^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}y\dfrac{3}{2x^3y^2}dydx$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{3}{2x^3}\left(\ln x-\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^{+\infty}\frac{3}{x^3}\ln x dx=-\int_1^{+\infty}\frac{3}{2}\ln x dx^{-2}$$

$$=-\frac{3}{2}x^{-2}\ln x\Big|_1^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}x^{-2}d\ln x=\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}x^{-3}dx=\frac{3}{4}$$



$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_1^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{xy}\frac{3}{2x^3y^2}dydx=\int_1^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dydx=\int_1^{+\infty}\frac{3}{2x^4}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y^3}dydx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{3}{4x^4}\left(x^2-x^{-2}\right)dx=\int_1^{+\infty}\frac{3}{4x^2}-\frac{3}{4x^6}dx=\frac{3}{5}$$

例4. 从区间[0,1]上任取n个点，求最大点与最小点之间距离的数学期望。

解：设从区间$[0,1]$上任取一点，取值为X，$\boxed{X \sim U[0,1]}$，任取n个点，

n个点构成n维变量$(X_1, X_2, \ldots X_n)$，　$X_i \sim U[0,1]\ i = 1,2\cdots n$

设最大值点$Z = \max(X_1, X_2, \ldots X_n)$，　最小值点$Y = \min(X_1, X_2, \ldots X_n)$

$$E(Z-Y) = E(Z) - E(Y) \quad f_X(x) = 1\ (0 \le x \le 1)\ F_X(x) = x\ (0 \le x \le 1)$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\{\max(X_1, X_2 \ldots X_n) \le z\} = P(X_1 \le z, X_2 \le z \ldots X_n \le z)$$

$$= \{P(X \le z)\}^n = \{F_X(z)\}^n = z^n$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} nz^{n-1} & 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^1 z n z^{n-1} dz = \int_0^1 n z^n dz = \frac{n}{n+1}$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{\min(X_1,X_2\dots X_n)\le y\}$$

$$=1-P(X_1>y,X_2>y\dots X_n>y)=1-\{P(X>y)\}^n$$

$$=1-\{1-P(X\le y)\}^n=1-\{1-F_X(y)\}^n=1-\{1-y\}^n$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} n(1-y)^{n-1} & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(Y)=\int_0^1 yn(1-y)^{n-1}dy=\int_0^1 yn(1-y)^{n-1}dy \underset{dy=-dt}{\overset{t=1-y}{=}} -\int_1^0 (1-t)nt^{n-1}dt$$

$$=\int_0^1 nt^{n-1}-nt^n dt=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

$$E(Z-Y)=E(Z)-E(Y)=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$$

（2）先建立分布列再求期望（实际应用问题）

例5. 设某自动生产线加工的零件，内径 $X \sim N(\mu,1)$ (单位：mm) .内径小于10或者大于12为不合格产品，其余为合格产品。销售合格品获利，生产不合格品亏损。已知利润 T(元)与内径 X 间有如下关系：

$$T = \begin{cases} -1, & X < 10 \\ 20, & 10 \le X \le 12 \\ -5, & X > 12 \end{cases}$$

问平均内径取何值时，销售一个零件的平均利润最大。

解：随机变量 T 的分布列为

$$T \sim \begin{pmatrix} -5 & -1 & 20 \\ P(X>12) & P(X<10) & P(10 \le X \le 12) \end{pmatrix}$$

$$P(X>12)=1-\Phi\left(\frac{12-\mu}{1}\right)$$

$$P(X<10)=\Phi(10-\mu) \qquad P(10 \le X \le 12)=\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)$$

$$E(T)=-5\{1-\Phi(12-\mu)\}-\Phi(10-\mu)+20\{\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)\}$$

$$=-5+25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)$$

求导数求极大值

$$E(T)'=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu)$$

$$=-25\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}+21\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}=0; \qquad e^{\frac{(12-\mu)^2}{2}-\frac{(10-\mu)^2}{2}}=\frac{25}{21}$$

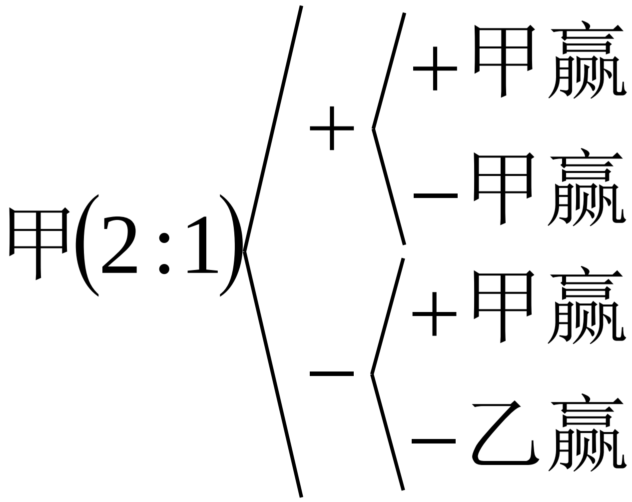
得：$\mu=10.9$

$$X \sim N(\mu,1)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$$

例6. 甲乙两人进行某种比赛，胜率各占1/2,两人各出a元，约好先胜3局者得2a元，现已比赛3局，甲赢2局，乙赢1局，比赛终止，问两人如何分2a元合理。

解：各自拿回a元；甲2a/3元均不合理。将结果甲:乙=2:1延续设想到最终结果，用X表示假设比赛进行到最后甲分得钱的分布列



$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 2a \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}a$$

甲分得 $3a/2$ 元，乙分得 $a/2$比较较合。

(3)建立“获利函数”，求“平均获利”。$Q(Y,x)=\begin{cases}\boxed{mx} & Y\ge x\\ \boxed{ym-(x-y)n} & Y<x\end{cases}$

例7. 经市场调研，某产品市场销售量$Y\sim e(1/\theta)$，售出一件产品获利 **m** 元，积压一件损失 **n** 元，试确定产量 **x** 使得平均获利最大。

解：$Y\sim e\left(\dfrac{1}{\theta}\right), f(y)=\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}\ (y>0)$，　设获利函数为$Q(Y,x)$

$$E\{Q(Y,x)\}=E\{Q(Y)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}Q(y)f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}Q(y)f_Y(y)dy$$

$$=\int_0^{+\infty}Q(y)\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}dy$$

$$=\int_0^{x}\{ym-(x-y)n\}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}dy+\int_x^{+\infty}mx\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}dy$$

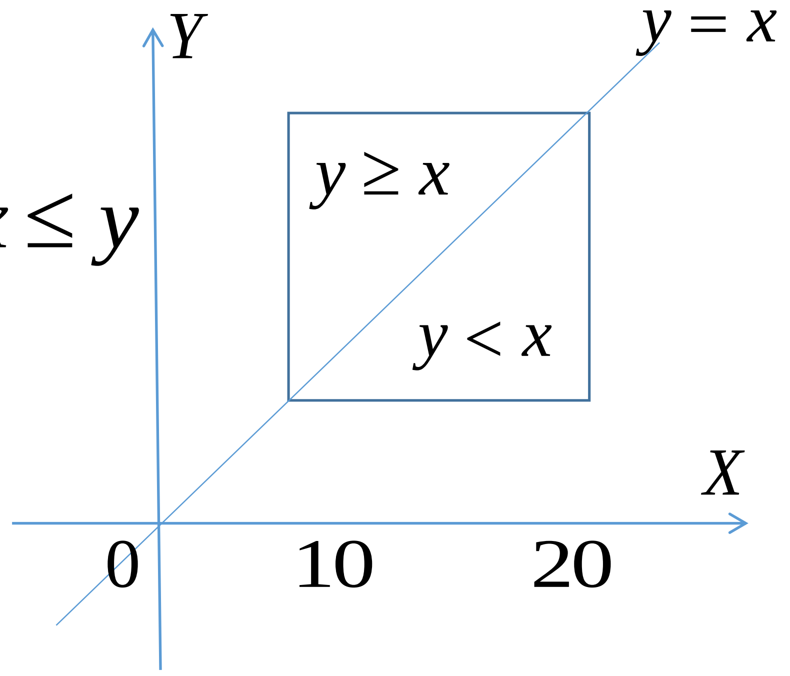
$$=(m+n)\theta-(m+n)\theta e^{-\frac{x}{\theta}}-nx$$

$$\frac{dE\{Q(Y,x)\}}{dx}=0$$

$$x=\theta\ln\left(\frac{n+m}{n}\right)$$

例8. 供电公司在某指定时间段的供电量 $X \sim U[10,20]$（万kwh），而用户的需求量 $Y \sim U[10,20]$，设公司每供1kwh获利0.1元，若需求量超过供电量，则公司可从电网上取得附加电量来补充，每供电1kwh获利0.05元，求这段时间公司的平均获利。

$$\text{解:获利函数} Q(X,Y)=\begin{cases} 0.1y & x>y \\ 0.1x+(y-x)0.05 & x\le y \end{cases}$$



$$E\{Q(X,Y)\}=\int_{10}^{20}\int_{10}^{20}Q(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{10}^{20}\int_{x}^{20}(0.1x+(y-x)0.05)\frac{1}{100}dydx$$

$$+\int_{10}^{20}\int_{10}^{x}0.1y\frac{1}{100}dydx \quad =0.75+0.67=1.42(\text{万元})$$

(4) 利用性质 $\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \right)$ 求期望。

例9. 将n个球随机放入N个盒子中，假设每个球落入各个盒子的可能性相同，求有球盒子数的数学期望。

解：设 X 表示有球盒子数，则 X 取值为1,2...N, 但 $P(X=k)$ 无法求出，

$$\text{令} X_i = \begin{cases} 1 & \text{第}i\text{个盒子有球} \\ 0 & \text{第}i\text{个盒子无球} \end{cases} \quad i = 1,2\cdots N, \text{则} X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$P(X_i = 0) = (1 - 1/N)^n, \quad P(X_i = 1) = 1 - (1 - 1/N)^n; \quad E(X_i) = P(X_i = 1)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = NE(X_i) = N\left\{1 - (1 - 1/N)^n\right\}$$