总　结

1.期望的定义

$$P(X=x_i)=p_i\ i=1,2\ldots,\quad EX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i\qquad E(Y)=E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$$

$$f(x)\qquad EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\qquad EY=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}\qquad Z=g(X,Y),\qquad EZ=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$f(x,y),\qquad EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy.$$

2.方差的定义 $D(X)=E(X-E(X))^2=EX^2-(EX)^2$

3.期望与方差的性质:

(1) $Ec = c,$

(2) $E(cX) = cEX.$

(3) $E(aX+b) = aE(X)+b$

(4) $E(X \pm Y) = EX \pm EY$

$E(\overline{X}) = EX$

(5) $E(XY) = E(X)E(Y).$ $(X与Y独立)$

(1) $D(c)=0, c为常数。$

(2) $D(cx) = c^2 D(x)$

(3) $D(ax+b) = a^2 D(x)$

$$D(X \pm Y) = \begin{cases} DX + DY & X与Y独立 \\ DX + DY \pm 2Cov(X,Y) \end{cases}$$

$$D(\overline{X}_n) = \frac{D(X)}{n}$$

4.常用分布的期望与方差：

(1) $X \sim B(1,p)$

$E(X)=p \quad D(X)=p(1-p)$

(2) $X \sim B(n,p) \quad E(X)=np$

$D(X)=np(1-p)$

(3) $X \sim P(\lambda) \quad E(X)=\lambda \quad D(X)=\lambda$

(4) $X \sim G(p) \quad E(X)=1/p$

$D(X)=q/p^2$

(5) $X \sim U(a,b) \quad E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

$D(X)=(b-a)^2/12$

(6) $X \sim e(\lambda) \quad E(X)=\dfrac{1}{\lambda} \quad D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

(7) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu \quad D(X)=\sigma^2$

5.协方差相关系数定义：

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)=EXY-EXEY$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

性质：

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$$

若X与Y独立 则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0.$

$$\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$$

$$\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X,b)=0$$

$$\mathrm{Cov}(aX+b,Y)=a\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X_1\pm X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)\pm\mathrm{Cov}(X_2,Y)$$

$$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$|\rho_{XY}|\le 1.\qquad |\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow Y=aX+b$$

其他数字特征

1. 矩：**k** 阶原点矩 EX^k，**k** 阶中心矩 $E\left(X-EX\right)^k$

例1. $X \sim N\left(0,1\right)$，求EX^k

解：$EX^k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0 \quad \left(k\text{为奇数}\right)$ 　当k为偶数，

$$EX^4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{+\infty}x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}d\frac{x^2}{2}$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^3\frac{2}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}}=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}x^2\frac{6}{\sqrt{2\pi}}dx=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}x\frac{6}{\sqrt{2\pi}}d\frac{x^2}{2}$$

$$=-\int_0^{+\infty}x\frac{6}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}}=3\times 2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx=3\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx=3$$

2. 协方差矩阵（一种表示方法）

$$
\begin{array}{c|cc}
 & X_1 & X_2 \\
\hline
\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} DX_1 & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & DX_2 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
DX_1 & (1\,2) & (1\,3) & (1\,4) & \cdots & (1,n) \\
 & DX_2 & (2,3) & (2,4) & \cdots & (2,n) \\
 & & DX_3 & (3,4) & \cdots & (3,n) \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \cdots & (n-1,n) \\
 & & & & & DX_n
\end{pmatrix}
$$

$$\Sigma = \left(\sigma_{ij}\right)_{n\times n}$$

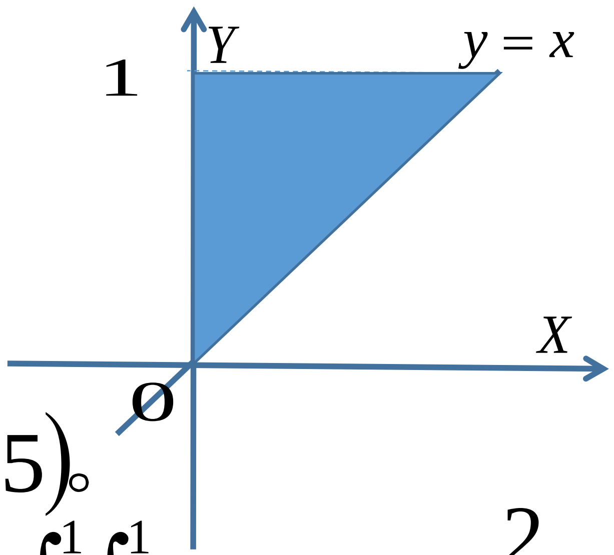
$$
\begin{array}{c|cc}
 & X_1 & X_2 \\
\hline
\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} DX_1 & (1\,2) \\ (2\,1) & DX_2 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2Cov(X_1,X_2)$$

$$=D(X_1)+D(X_2)+Cov(X_1,X_2)+Cov(X_2,X_1)$$

$$\boxed{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} DX_i+2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n} DX_i+\sum_{i\ne j} Cov(X_i,X_j)}$$

例3. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为:



$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y,0<y<1;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求：$E(X),E(Y),D(X),D(Y),Cov(X,Y),D(2X-Y+5)$。

解：$E(X)=\int_0^1\int_x^1 2x\,dy\,dx=\int_0^1 2x-2x^2dx=\dfrac{1}{3}$；　$E(Y)=\int_0^1\int_x^1 2y\,dy\,dx=\dfrac{2}{3}$

$E(X^2)=\int_0^1\int_x^1 2x^2dy\,dx=\int_0^1 2x^2-2x^3dx=\dfrac{1}{2}$；　$E(Y^2)=\int_0^1\int_x^1 2y^2dy\,dx=\dfrac{3}{4}$

$D(X)=EX^2-(EX)^2=1/2-(1/3)^2=7/18$　$D(Y)=EY^2-(EY)^2=\dfrac{11}{36}$

$E(XY)=\int_0^1\int_x^1 2xy\,dy\,dx=\int_0^1 x-x^3dx=\dfrac{1}{4}$；　$Cov(X,Y)=EXY-EXEY$

$=1/36$

$D(2X-Y+5)=4D(X)+D(Y)-4Cov(X,Y)=7/4$

例4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2, & -1<x<1\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$ $\quad Y=X^2$

求：$(1).E(X), D(X), \mathrm{Cov}(X,Y).$

$(2).X$与Y是否独立，是否~~相关~~？

X与Y不相关

解：$(1)\ E(X)=\int_{-1}^{1}x\dfrac{3}{2}x^2dx=0$； $\quad E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2\dfrac{3}{2}x^2dx=\dfrac{3}{5}$；

$D(X)=E(X^2)=\dfrac{3}{5}$； $\quad (2)\ \mathrm{Cov}(X,X^2)=E(X^3)-E(X)E(X^2)=0$

反证法：假设X与Y独立 $\Rightarrow$ X^2与Y也独立， $\Rightarrow$ X^2与Y不相关 $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X^2,Y)=0$

而$E(X^4)=\int_{-1}^{1}x^4\dfrac{3}{2}x^2dx=\dfrac{3}{7}$；

$\mathrm{Cov}(X^2,Y)=\mathrm{Cov}(X^2,X^2)=E(X^4)-E(X^2)E(X^2)\neq 0$ $\Rightarrow$ 矛盾 $\Rightarrow$ 则X与Y不独立

例5. 设$(X,Y)\sim N(1,1,4,9,0.5)$，试求下列问题：

(1) $Cov(X,Y), E(XY), Cov(X,2X-3Y), D(X-2Y)$.

(2) 求k使得$W=(X+kY)$与$V=(X-Y)$独立。

(3) 求(W,V)的分布密度。

(4) 求$Z=X-3$的分布。

求:(1) $Cov(X,Y)$, $E(XY)$, $Cov(X,2X-3Y)$, $D(X-2Y)$.

解:(1) $(X,Y)\sim N(1,1,4,9,0.5)$, $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=\rho\sigma_1\sigma_2$

$=0.5\times 2\times 3=3$

$E(XY)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)=3+1=4$

$Cov(X,2X-3Y)=2D(X)-3Cov(X,Y)=2\times 4-3\times 3=-1$

$D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)-4Cov(X,Y)=4+4\times 9-4\times 3=28$

正态分布的重要性质：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

若(X,Y)服从二维正态分布$W=(aX+bY)$, $V=(cX+dY)$

$(W,V)\sim N(EW,\ EV,\ DW,DV,\rho_{WV})$

线性变换不改变正态分布的分布形式同样适合二维

(2) 求k使得$W=(X+kY)$与$V=(X-Y)$独立。 求k使$\mathrm{Cov}(W,V)=0$

解：$Cov(W,V)=Cov(X+kY,X-Y)=D(X)-kD(Y)+(k-1)Cov(X,Y)$

$$=4-9k+3(k-1)=0,\quad k=1/6\text{时}W\text{与}V\text{独立。}$$

(3) 求(W,V)的分布密度。

$(W,V)\sim N(EW,\ EV,\ DW,DV,\ )$

$(W\text{与}V\text{不相关})\Leftrightarrow(W\text{与}V\text{独立})$

$$EW=E\left(X+\frac{1}{6}Y\right)=EX+\frac{1}{6}EY=\frac{7}{6};$$

$(X,Y)\sim N(1,1,4,9,0.5)$

$$DW=D\left(X+\frac{1}{6}Y\right)=\frac{25}{4};$$

$$EV=E(X-Y)=EX-EY=0$$

$$(W,V)\sim N\left(\frac{7}{6},0,\frac{25}{4},13\right)$$

$$DV=D(X-Y)=13$$

(4) 求$Z=X-3$的分布。 $Z=X-3\sim N(EZ,DZ)$

$(X,Y)\sim N(1,1,4,9,0.5)$,由正态分布性质， $X\sim N(1,2^2)$

$EZ=EX-3=-2, DZ=DX$, 则 $Z=X-3\sim N(-2,2^2)$

(5) 求概率$P(3X-2Y>7)$。 $3X-2Y\sim N(E(3X-2Y),D(3X-2Y))$

$E(3X-2Y)=3\times1-2\times1=1;$

$D(3X-2Y)=9\times4+4\times9-12\times0.5\times2\times3=36;$

$3X-2Y\sim N(1,6^2)$

$P(3X-2Y>7)=1-P(3X-2Y\le7)=1-\Phi\left(\frac{7-1}{6}\right)=1-\Phi(1)$

例6. $(X,Y)\sim N(1,1,4,9,0.5)$，求 $E\max(X,Y)$ 以及 $E\min(X,Y)$。

解：$\max(X,Y)=\frac{1}{2}\left(X+Y+|X-Y|\right)$

min　　　　−

令 $Z=X-Y$,

$EZ=E(X-Y)$

$=EX-EY=0$

$E\max(X,Y)=\frac{1}{2}\left(EX+EY+E|X-Y|\right)$

$DZ=DX+DY-2Cov(X,Y)=7$　　$Z=X-Y\sim N(0,7)$

$$E|X-Y|=E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{7}}e^{-\frac{z^2}{2\times 7}}dz=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{7}}e^{-\frac{z^2}{2\times 7}}dz$$

−

$$=-\sqrt{\frac{14}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{14}}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{14}{\pi}},$$

$$E\max(X,Y)=\frac{1}{2}\left(1+1+\sqrt{\frac{14}{\pi}}\right)$$

min

对二维正态来说 $\max(X,Y)$ 密度很难求

例7.将 n 个标号为 1,2....n 的球随机地装入标号为 1,2.....n 的盒中，一个盒子只能装一个球，如果第 i 个球恰好装入第 i 个盒子中，称为一个配对，求配对数的期望和方差。

解：令 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第个}i\text{盒子配对} \\ 0 & \text{第个}i\text{盒子不配对}\end{cases}$ $\quad i=1,2,\cdots n$ $\quad \begin{matrix}1/n \\ 1-1/n\end{matrix}$

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\text{表示配对数。}\quad EX_i=\frac{1}{n},\ DX_i=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$EX=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}EX_i=n\frac{1}{n}=1$$

协方差矩阵（一种表示方法）

$$
\begin{array}{ccc}
 & X_1 & X_2 \\
\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \boxed{DX_1} & \boxed{Cov(X_1, X_2)} \\ \boxed{Cov(X_2, X_1)} & \boxed{DX_2} \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
DX_1 & (1\ 2) & (1\ 3) & (1\ 4) & \cdots & (1,n) \\
 & DX_2 & (2,3) & (2,4) & \cdots & (2,n) \\
 & & DX_3 & (3,4) & \cdots & (3,n) \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \cdots & (n-1,n) \\
 & & & & & DX_n
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & X_1 & X_2 \\
\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} DX_1 & (1\ 2) \\ (2\ 1) & DX_2 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X_1 + X_2) &= D(X_1) + D(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\
&= D(X_1) + D(X_2) + Cov(X_1, X_2) + Cov(X_2, X_1)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + \sum_{i\ne j} Cov(X_i, X_j)}
$$

$$DX=D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+\sum_{i\neq j}Cov(X_i,X_j)$$

$$Cov(X_i,X_j)=EX_iX_j-EX_iEX_j=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\right)-\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

$$EX_iX_j=P(X_iX_j=1)=P\{(X_i=1)\cap(X_j=1)\}$$

$$=P(X_i=1)P(X_j=1|X_i=1)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

$$DX=nD(X_i)+2C_n^2Cov(X_i,X_j)$$

$$=n\frac{n-1}{n^2}+2C_n^2\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n-1}\right)=1$$

X_j \ X_i	0	1
0	0	0
1	0	1