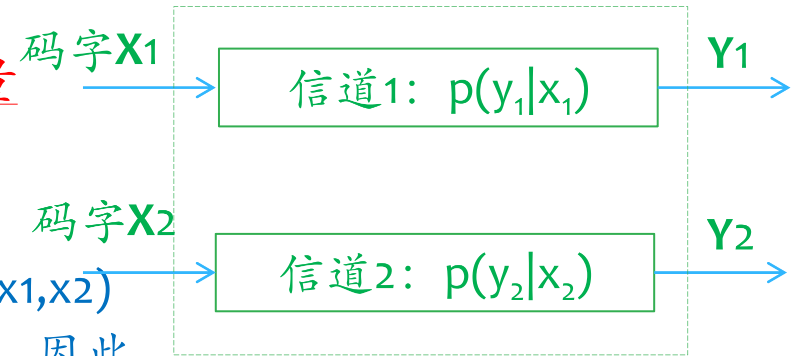
信息论

信号传输与处理的理论基础

第七章习题选解

习题选解

- 7.1、7.5、7.7、7.11、7.15(a)(b)(c)、7.18(a)(b)(C)、7.20、7.25、7.28、7.34(a)。
- 习题7.1 对接收分组实施后处理，能否提升互信息量？
- 答案：否。提示：应用数据处理不等式
- 习题7.5 两个信道的并行组合的总容量



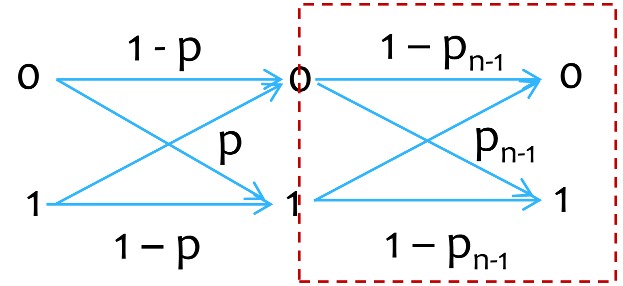
- 对并行组合的两个信道，联合的比特(x1,x2)
- 经信道传输后生成联合的接受比特(y1,y2)，因此
- 联合的码字(X1,X2)经信道传输后生成联合的接受
- 分组(Y1,Y2)。
- 并行信道的转移概率 $P((y1,y2)|(x1,x2)) = P(y1|x1)P(y2|x2)$，因此（请完成
- 计算）互信息量 $I((x1,x2); (y1,y2)) = I(x1; y1) + I(x1;y2)$，进而（请证明）有结论
- $C = C1 + C2$
- 推广：任意N个信道的并行组合的总容量 $C = C1 + C2+ \ldots + C_N$。

习题选解

* 习题7.7 串联BSC信道的Shannon容量

$$X_0 \to \boxed{\mathrm{BSC}} \to _1 \to \cdots \to X_{n-1} \to \boxed{\mathrm{BSC}} \to _n$$

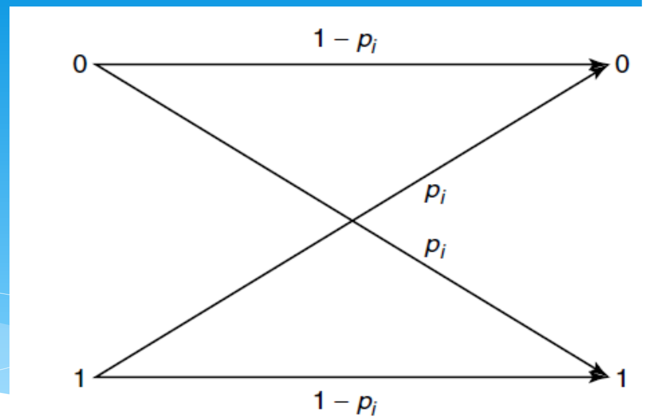
* 一组n个差错概率为p的BSC信道依次串联组合，得到一个等效的BSC信道，
* 计算该信道的容量C(n).
* 求解概要 $C(n) = 1 - H(p_n)$, p_n = 串联组合信道的等效差错概率，因此问题归结为计算pn。
* 对组合信道做递归分解，有方程（为什么？）
* $p_n = P[\text{输出}0|\text{输入}1] = (1-p)p_{n-1} + p(1-p_{n-1})$
* 完成递归计算（请完成）得



$$p_n = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2p)^n).$$

习题选解

* 习题7.11　时变离散无记忆信道
*
* x_j表示jT时刻的传输比特，y_j表示相应的接收
* 比特，转移概率$P(y_j|x_j)$随j变化（时变信道）
* 且$y_1,\ldots,y_n$两两概率独立，于是：
* $P(y_1,\ldots,y_n|x_1,\ldots,x_n) = P(y_1|x_1)\ldots p(y_n|x_n)$
* 第一步：计算互信息量$I(y_1,\ldots,y_n;\ x_1,\ldots,x_n)$



$$\begin{aligned} I(X^n;Y^n) &= H(Y^n) - H(Y^n|X^n) \\ &= H(Y^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|Y_1,\ldots,Y_{i-1},X^n) \\ &= H(Y^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i), \end{aligned}$$

【子问题1：为什么？】

* 进而

$$\begin{aligned} I(X^n;Y^n) &= H(Y^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} H(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}(1-h(p_i)), \end{aligned}$$

【子问题2：为什么？】

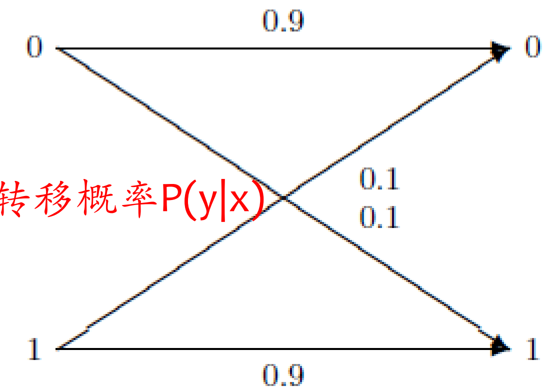
第二步：

$\text{Max}_{\ p(xn)}\ I(X^n;Y^n) = \Sigma_j(1-h(p_j))$

【子问题3：以上最大值在什么样的分布$p(x^n)$上达到？】

【子问题4：定义平均容量 $C=\frac{1}{n}\text{Max}_{\ p(xn)}\ I(X^n;Y^n)$，如果所有的$p_j$相同，这时C的结果是什么？】

习题选解



转移概率P(y|x)

- 习题7.15 （所有的对数取为$\log_2$）
- 设BSC信道的转移概率和联合概率如表所示:
- (a)计算H(X), H(Y), H(X,Y), I(X;Y)
- 【答案】H(X)=1, H(Y)=1, H(X,Y)=1+H(p)=1.46, p=0.1, I(X;Y)=0.53.

$X\backslash Y$	0	1
0	0.45	0.05
1	0.05	0.45

联合概率P(x,y)

- (b) $X_1,\ldots,X_n$是两两独立的、同分布二进制随机变量的序列,
- $P[X_j = 0] = P[X_j = 1] = 0.5$, ε=0.2，这时哪些分组$(x_1,\ldots,x_n)$属于X的典型集合$A_X(n, \varepsilon)$? 哪些分组$(y_1,\ldots,y_n)$属于Y的典型集合$A_Y(n, \varepsilon)$?
- 【答案】以X-序列为例，根据定义检验，全部分组属于$A_X(n, \varepsilon)$。
- (c) 设以上的$Y_j = X_j + e_j$，$P[e_j=1]=p=0.1$，于是有:
- 证明：(X^n,Y^n)属于联合典型集合，等价于
- X^n属于X的典型集合且$Z^n=Y^n+X^n$属于Z的典型集。

$$
\begin{aligned}
p(x^n, y^n) &= p(x^n)p(y^n|x^n) \\
&= p(x^n)p(z^n|x^n) \\
&= p(x^n)p(z^n) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-p)^{n-k}p^k
\end{aligned}
$$

- 【提示：关键是证明联合典型集合关于$\log P(X^n,Y^n)$的不等式
- 等价于 $\left|1-\frac{k}{n}\log p-\frac{n-k}{n}\log(1-p)-H(X,Y)\right|<\varepsilon$, 进而等价于 $\left|-\frac{k}{n}\log p-\frac{n-k}{n}\log(1-p)-H(p)\right|<\epsilon$
- 后者正是Z^n属于典型集合的条件】

习题选解

* 习题7.18 计算以下信道容量（所有的对数取为$\log_2$）
*
* (a) 三进制数字信道X, Y∈{0,1,2}，转移概率 $p(y|x)=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$
* 【答案：C= 0. 你能推广该结果吗？】
* (b) 三进制数字信道X, Y∈{0,1,2}，转移概率 $p(y|x)=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$
* 【答案：C= 0.58】
* (c) 四进制数字信道X, Y∈{0,1,2,3}，转移概率 $p(y|x)=\begin{bmatrix}p & 1-p & 0 & 0\\ 1-p & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & q & 1-q\\ 0 & 0 & 1-q & q\end{bmatrix}$
* 【答案： $C=\log\left(2^{1-H(p)}+2^{1-H(q)}\right)$ 该题依赖于7.28，选做。】

习题选解

* 习题7.20 设随机变量Y_1和Y_2以X为条件概率独立且同分布，
* 即 $P[Y_1=y|X] = P[Y_1=y|X]$
* $P[Y_1,Y_2|X] = P[Y_1|X]P[Y_2|X]$
* (a) 证明 $I(X;Y_1,Y_2) = 2I(X;Y_1) - I(Y_1,Y_2).$
* 概要：

$$
\begin{aligned}
I(X;Y_1,Y_2) &= H(Y_1,Y_2) - H(Y_1,Y_2|X) \\
&= H(Y_1) + H(Y_2) - I(Y_1;Y_2) - H(Y_1|X) - H(Y_2|X) && \text{【为什么？】} \\
&= I(X;Y_1) + I(X;Y_2) - I(Y_1;Y_2) && \text{【为什么？】} \\
&= 2I(X;Y_1) - I(Y_1;Y_2) && \text{【为什么？】}
\end{aligned}
$$

*
* 注：当有疑问时，请最终用熵或互信息量定义的概率表达式从头检验。
* (b) 证明信道 $X \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow (Y_1,Y_2)$ 的容量C2低于信道 $X \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow Y_1$
* 的容量C1的两倍：$C_2 \leqq 2C_1$。
* 概要：

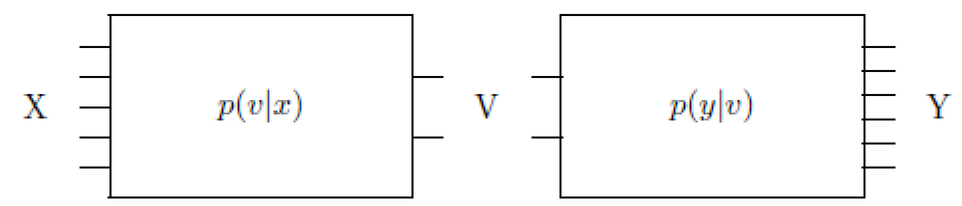
$$C_1 = \max_{p(x)} I(X;Y_1).$$

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \max_{p(x)} I(X;Y_1,Y_2) \\
&= \max_{p(x)} 2I(X;Y_1) - I(Y_1;Y_2) \\
&\leq \max_{p(x)} 2I(X;Y_1) \\
&= 2C_1.
\end{aligned}
$$

* 【请明确每一步推导论证的理由】

习题选解

* 习题7.25 信道的瓶颈



* 设图中信道的输入信号X有
* M种状态，第一个信道的输出信号V有k种状态，
* 第二个信道的输出信号Y有m种状态，证明该复合信道的总容量
* C ≦ log k
* 概要：

$$I(X;Y) \leq I(V;Y) = H(V) - H(V|Y) \leq H(V) \leq \log k.$$

【以上第一个不等式的依据是什么？第二个不等式的依据又是什么？】

【进一步的思考：该结论对网络设计的本质涵义是什么？】

习题选解

* 习题7.28
* 两个无记忆的BSC信道分别有转移概率$P_1[Y_1|X_1]$和 $P_2[Y_2|X_2]$，信道发送
* 端状态X_1、X_2和输出状态Y_1、Y_2的取值范围不相交。
* 将两个信道并行组合，发送端每次仅通过两个信道之一传输码字
* （而非同时使用两个信道），计算该复合信道的容量C。

* 求解概要：
* 设Q1、Q2分别表示状态X_1、X_2的取值范围，J1、J2分别表示状态Y_1、Y_2的取值范围，
* 注意Q1、Q2不相交，J1、J2分别也不相交。
* 第一步：设α是信道1被随机选中传输的概率，信道2被随机使用的概率是$1-\alpha$，
* 于是复合信道的转移概率（为什么？）
* $P[Y|X] = \alpha P_1[Y|X]$，若$Y\in J_1$且$X\in Q_1$；
* $=(1-\alpha)P_2[Y|X]$，若$Y\in J_2$且$X\in Q_2$；
* $= 0$；其他情况
* 第二步：根据上述转移概率计算互信息量（请完成该计算）结果是
* $I(X; Y) = H(\alpha) + \alpha I(X_1;Y_1) + (1 - \alpha) I(X_2;Y_2)$

习题选解

* 习题7.28（续）
* 两个无记忆的BSC信道分别有转移概率$P_1[Y_1|X_1]$和 $P_2[Y_2|X_2]$，信道发送
* 端状态X_1、X_2和输出状态Y_1、Y_2的取值范围不相交。
* 将两个信道并行组合，发送端每次仅通过两个信道之一传输码字
* 而非同时使用两个信道，计算该复合信道的容量C。
* 求解概要（续）：
* 第二步：根据上述转移概率计算互信息量（请完成该计算）结果是
* $I(X;Y) = H(\alpha) + \alpha\, I(X_1;Y_1) + (1-\alpha)\, I(X_2;Y_2)$
* 第三步：求$I(X;Y)$的最大值：
* 根据以上表达式有 $I(X;Y) \le H(\alpha) + \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2$
* C_1、C_2分别是信道1和2的容量，$0 \le \alpha \le 1$是本问题的待定参数，因此
* $C = max_{0\le\alpha\le1}(H(\alpha) + \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2)$
* 解出以上的极值问题（例如应用乘子算法等），得到最优值α*的表达式（请完成计算）以及目标表达式的最大值，即容量 $C = \log_e(e^{C1}+e^{C2})$（请完成计算）。

【注1】e是自然对数的底数，相应的C、C1、C2也都是基于$\log_e$的数值。若取任何其他的数为对数的底数，答案的表达式相似。

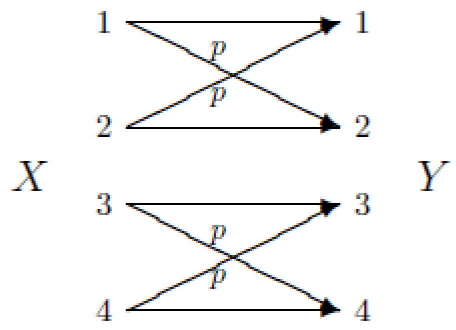
【注2】请回答：使复合信道的$I(X;Y)$达到最大值C的、发送端状态的概率分布是什么？你能基于信道1和2的发送转状态达到其最大互信息量的概率分布$P_1^*(X_1)$和$P_2^*(X_2)$，写出该表达式吗？

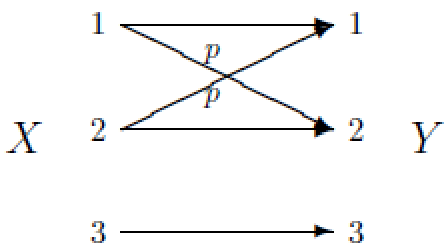
【注3】以该题为基础，试求解习题7.18(c)。

习题选解

* 习题7.34
* (1)按7.5题的复合方式计算图A复合信道的容量
* (2)按7.28题的复合方式计算图A复合信道的容量

图A





图B

* (3)按7.5题的复合方式计算图B复合信道的容量
* (4)按7.28题的复合方式计算图B复合信道的容量
* 【注：图B的第二个信道是一个无噪声二元数字信道。该信道的容量是什么？】

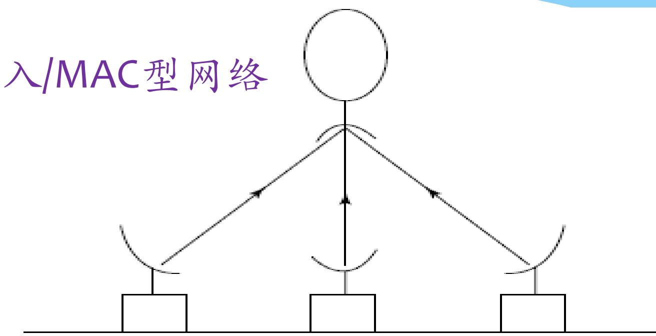
关于复杂网络Shannon定理的一点延伸知识（1）

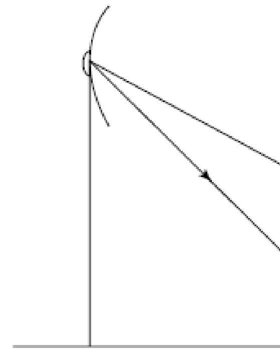
* 无记忆离散BSC信道的Shannon定理解决了链路传输可靠性的基本问题。
* 新问题：
* 如果链路上的传输信号和噪声/干扰不限于离散形态，结论怎样?
* 例：Gauss链路信道（第九章）、带Gauss噪声的MIMO信道（第三单元）等
* 如果不是简单的链路、而是针对更复杂的网络路由结构，结论怎样?
* 例：多点接入网络、广播网络、因特网、自组织/Ad Hoc网等
* 如果传输差错特性随时间变化、差错具有特性/有记忆网络，结论怎样?
* 例：深度衰落信道等
* Shannon定理时随网络技术不断发展而不断深入的永恒的问题之源，参见第15章。

关于复杂网络Shannon定理的一点延伸知识（2）

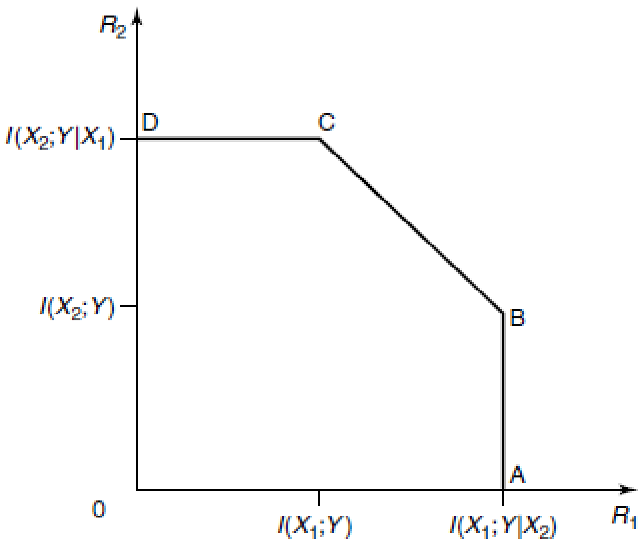
- 例1 多点接入型网络，如WSN前端、蜂窝网和卫星的上行链路等。
- 例2 广播型网络，如蜂窝网和卫星的下行链路等。

多点接入/MAC型网络

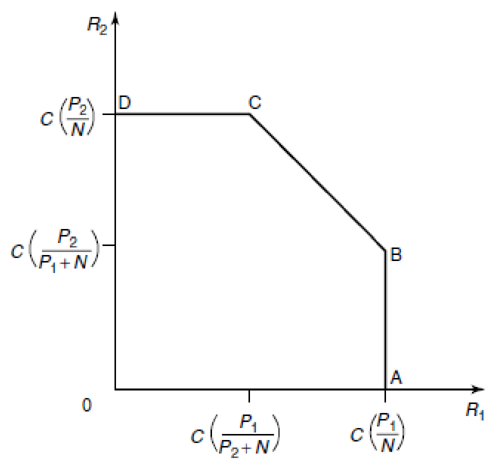




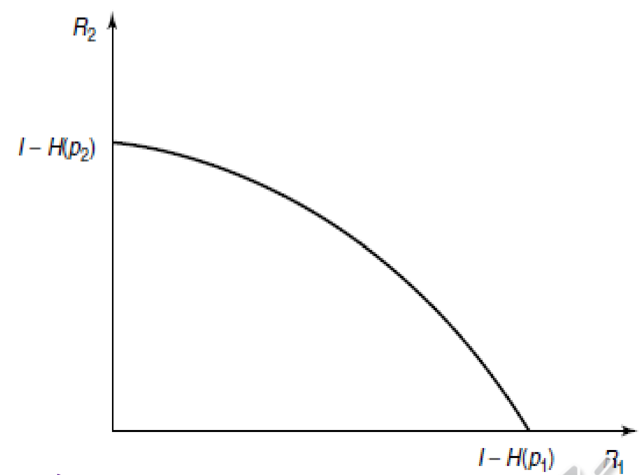
广播型网络



MAC型网络的容量区域：凸多面体



带Gauss噪声的MAC型网络的容量区域



退化型广播型网络的容量区域

下次课预习

* 第九章 Gauss信道

* Gauss信道的基本容量公式
* 有限带宽Gauss信道的容量公式
* 更多的容量公式和性能优化

* 基础知识
时变信号的频谱、Fourier变换、随机信号的功率谱、
* 泛函优化的变分计算（参见第二章）。