§7.2 静电场的环路定理　电势

前面介绍了电场,电场对电荷有作用力，电场对电荷既然有作用力，那么，当电荷在电场中移动时，电场力就要做功。根据力和能量的关系，则能量和电场有关。

从静电力作功研究静电场的重要性质：保守性

一. 静电场力的功

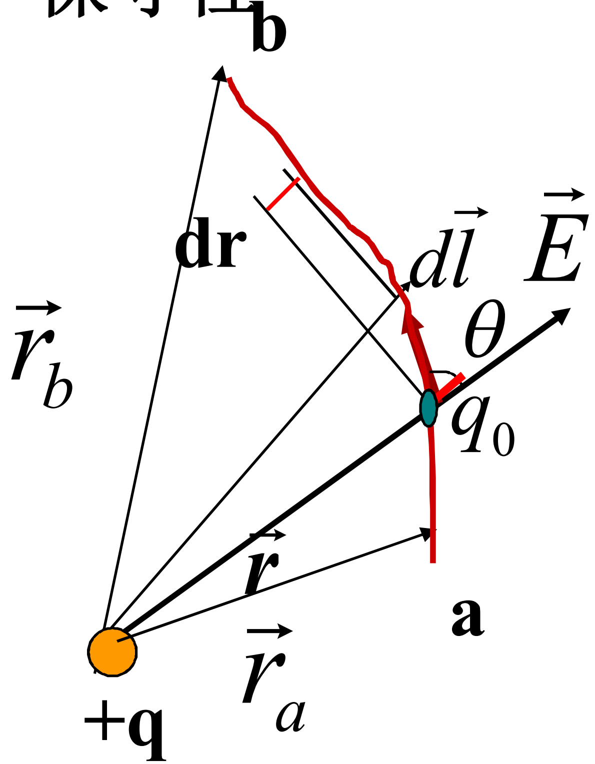
一点电荷q 在其周围产生电场，

另有一试验电荷q_0 在场中运动：

电场力作元功：

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = q_0\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\cdot dl = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$



q_0从a点移到b点电场力做的功为：

$$A_{ab}=\int_a^b dA=\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2}=\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

在点电荷q形成的静电场中，静电场对移动电荷所做的功仅和移动电荷的始、末位置有关，与具体路径无关。点电荷形成的静电场是保守力场。

可以得到，对任何静电场(无论是由点电荷、点电荷系、带电体等)，电场对移动电荷作功恒与路径无关，仅与移动电荷的初、末位置有关。这样电场力就是保守力(即做功与路径无关)。故静电场是保守力场。

二. 电势能

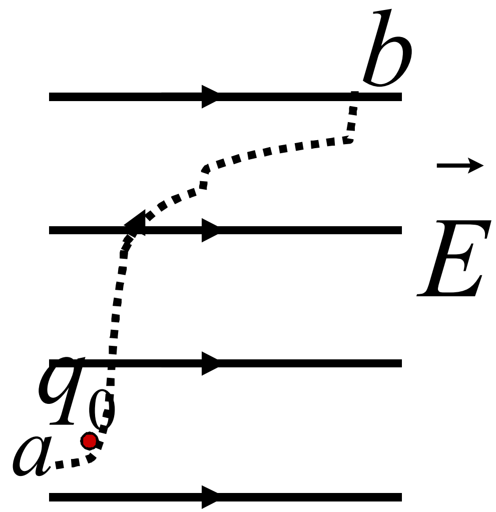
静电场是保守力场，可以引进一势能：即设在此静电场中的电荷具有**静电势能（简称电势能）**。

静电场力作功等于相应电势能的减少量

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{f}\cdot d\vec{l}=W_a-W_b$$

a点电势能

b点电势能



$$\therefore W_a = \int_a^b \vec{f} \cdot d\vec{l} + W_b = q_0 \int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + W_b$$

规定电势能的零点：

1)当电荷分布在有限区域时，无穷远处的电势能为零；

$$\boxed{\text{则：}\quad W_a = q_0 \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

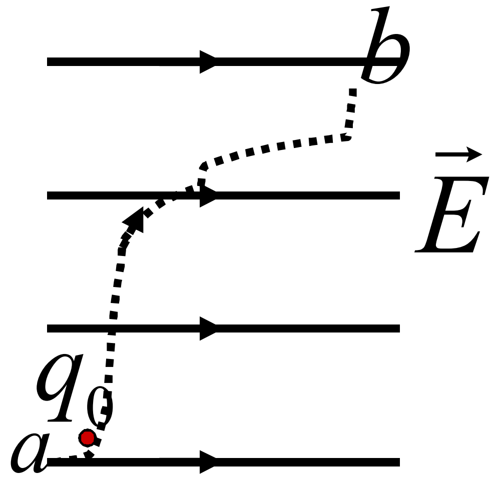
2）场中某一点 ***b*** 的电势能为零，$W_b = 0$ (如地球的地面)

$$\boxed{\text{则：}\quad W_a = q_0 \int_a^{b} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

试验电荷q_0在静电场中某点的电势能在数值上等于q_0从该点移到电势能零点处静电场力所做的功。

三. 电势

如图示点电荷在场中受力 $\vec{f} = q_0\vec{E}$



$$\int_a^b \vec{f}\cdot d\vec{l} = q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = W_a - W_b$$

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0}$$

$$\boxed{\frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0}}$$

与试验电荷无关反映了

电场在 ***a b*** 两点的性质

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_a - U_b$$ 称 a b两点电势差

electric potential difference

若选b点的电势为参考零点

则a点的电势由下式得到:

$$\boxed{U_a = \int_a^{\text{电势零点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

讨论

- 电势零点的选择(参考点)

任意　视分析问题方便而定

参考点不同电势不同

通常

理论计算有限带电体电势时选无限远为参考点

实际应用中或研究电路问题时取大地、仪器外壳等

电势的单位: ***SI***制：单位 **V** (伏特)

在静电场中，任意两点间的电势差：

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_{(a)}^{(\infty)} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{(b)}^{(\infty)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

任意两点***a***、***b***的电势差在数值上等于单位正试验电荷从 ***a*** 点经任意路径到 ***b*** 点电场力做的功。

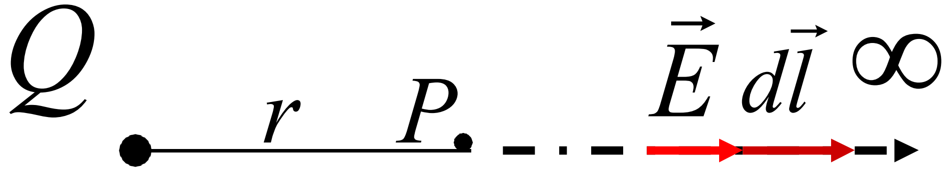
如果电场的电势分布已知，则试验电荷 q_0 在电场中从***a*** 到 ***b*** (经任意路径)，电场力作的功为：

$$A_{ab} = q_0 U_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

四. 电势的计算

1. 点电荷Q的电场中的电势分布

$$U_P = \int_P^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$= \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$d\vec{l} = d\vec{r}$$

$$\boxed{U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

球对称

标量

正负

2 电势叠加原理

点电荷系所产生的电场：
$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

空间某点的电势：

$$U_p = \int_P^{P(0)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P(0)} \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{l}_i = \sum_i \int_P^{P(0)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}_i$$

$$\boxed{\therefore U_p = \sum_i U_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i}}$$

电荷连续分布的带电体：
$$\boxed{U = \int_{(Q)} dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q)} \frac{dq}{r}}$$

计算电势的方法：

1) 已知电场强度 $\vec{E}$ 的分布，利用电势的定义：

$$U_a = \int_a^{\text{电势零点}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \longrightarrow \text{可计算电势的分布}$$

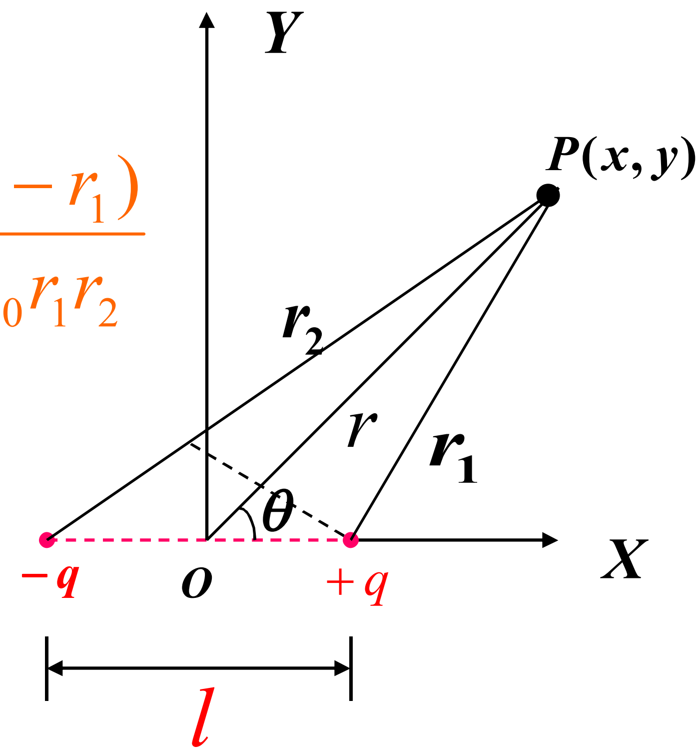
2)已知 q_I 或 $\rho(\sigma, \lambda)$ 分布，利用点电荷的电势和电势叠加原理，可求得带电体在周围产生的电势

$$U_p = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i} \qquad U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q)} \frac{dq}{r}$$

例(书例7.8) 求电偶极子电场中任一点P的电势

解：由叠加原理

$$U_P = U_1 + U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}$$



$$\because r >> l \quad r_2 - r_1 \approx l\cos\theta \quad r_1 r_2 \approx r^2$$

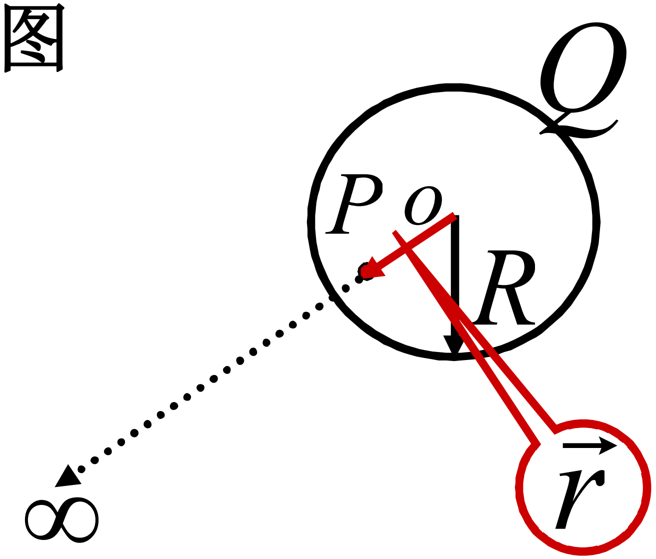
$$\therefore U_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2}$$

$$\boxed{U_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

其中 θ 为$\vec{r}$和 $\vec{l}$ 之间的夹角，

$\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$ 为单位向量

例 计算均匀带电球面的电势 如图



解：

均匀带电球面电场的分布为

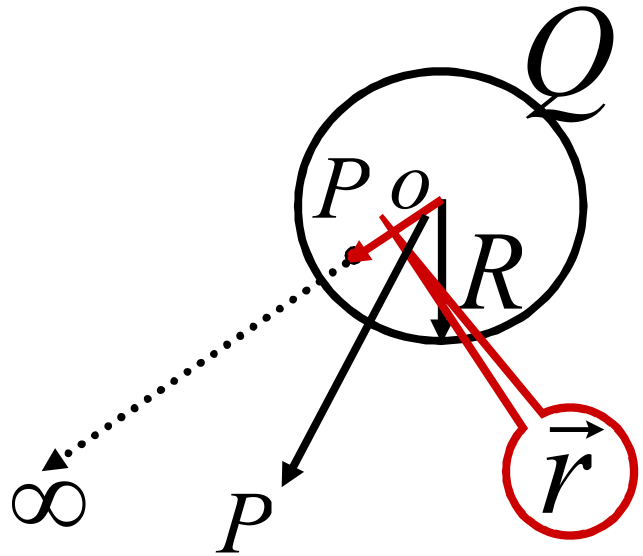
$$r<R \qquad E=0$$

$$r>R \qquad \vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

若场点在球内 即 $r<R$ 如图

$$\boldsymbol{U}=\int_P^{\infty}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}=\int_r^R o\,dl+\int_R^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \int_r^R o\,dl + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$



$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

场点在球面外　即　$r > R$

$$U = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

• 电势分布

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad r<R$$

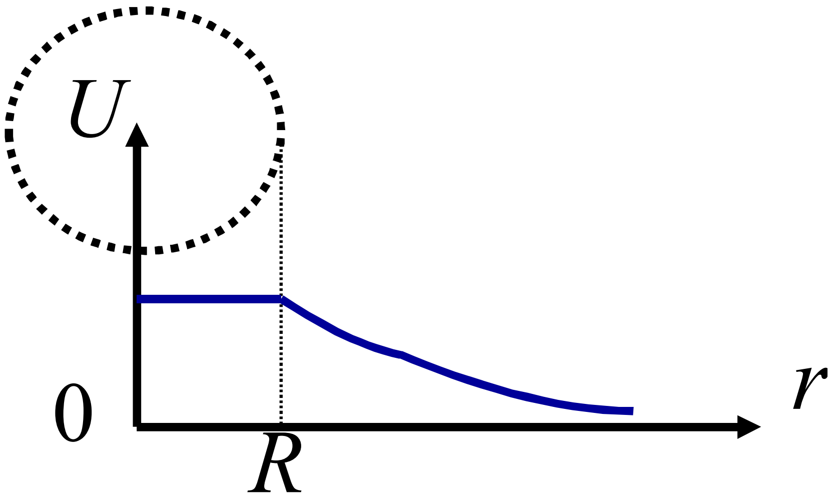
等势体

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad r>R$$

与电量集中在球心的

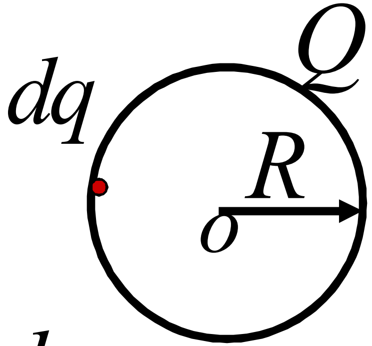
点电荷的电势分布相同

• 图示



例　计算电量为 Q 的带电球面球心的电势

解：



在球面上任取一电荷元 dq

则电荷元在球心的电势为 $$dU=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由电势叠加原理

球面上电荷在球心的总电势

$$U=\int_{(Q)}dU=\int_{(Q)}\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

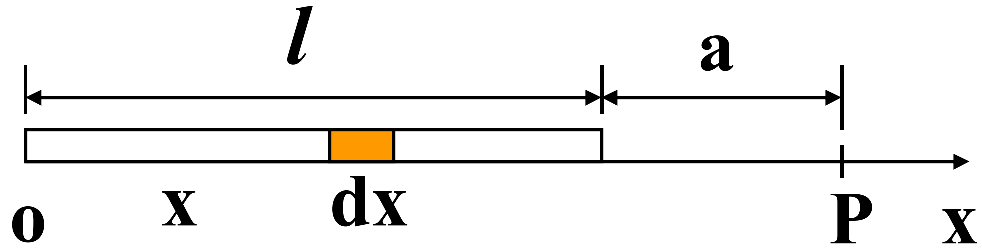
思考：

- 电量分布均匀？
- 圆环、圆弧？

例　长为 l 均匀带电细杆，电荷线密度为 λ，如图。计算P点的电势。

解：

取一电荷元dq



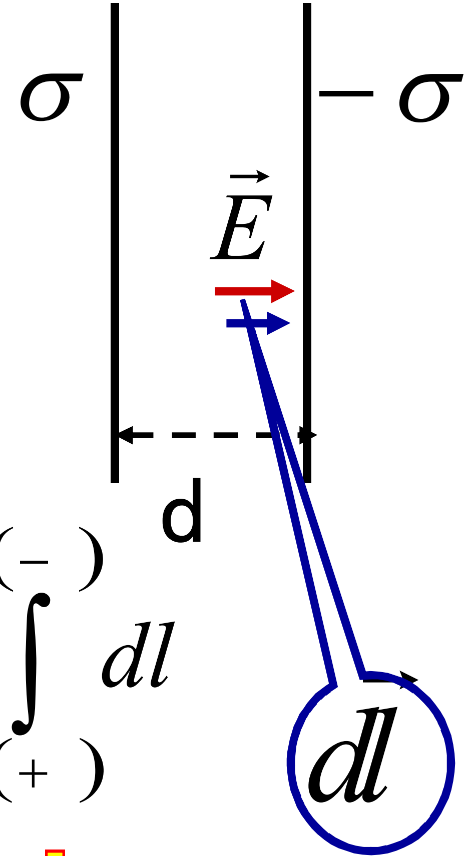
$$dq = \lambda dx$$

$$\therefore dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(l+a-x)} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}$$

$$\therefore U = \int dU = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{(l+a-x)} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{l+a}{a}$$

例. 平行板电容器两板间的电势差

解:



平行板电容器内部的场强为 $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

两板间的电势差

$$\Delta U = \int_{(+)}^{(-)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{(+)}^{(-)} E dl = E \int_{(+)}^{(-)} dl$$

$\vec{E}, d\vec{l}$ 方向一致

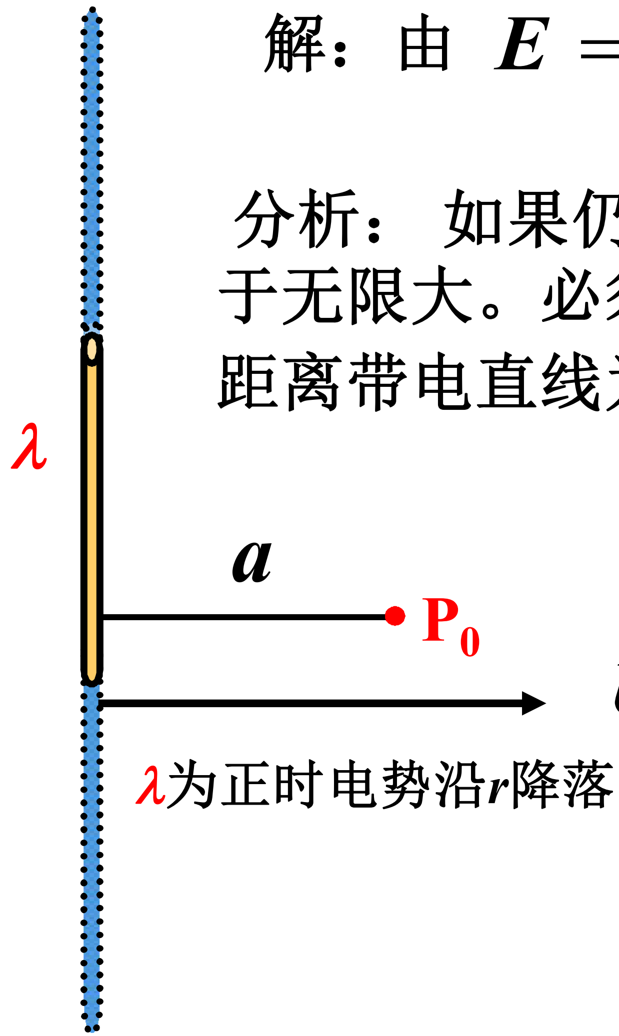
均匀场

$$\boxed{\Delta U = Ed}$$

例 求电荷线密度为λ的无限长带电直线的电势分布。

解：由 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ $\quad U=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

分析： 如果仍选择无限远为电势0点，积分将趋于无限大。必须选择某一定点为电势0点，现在选距离带电直线为 a 的P_0点为电势0点。



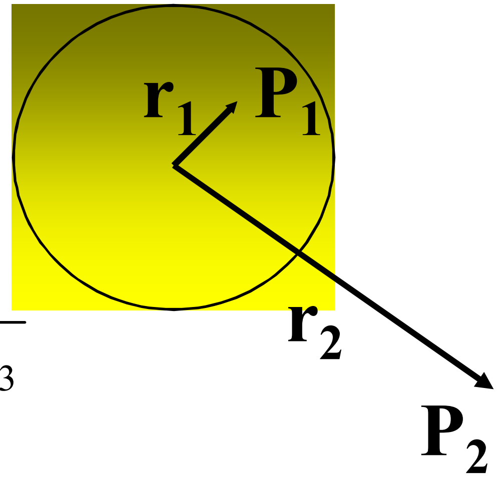
$$U=\int_r^{P_0}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$U=\int_r^{a}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot \mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}$$

例 均匀带电球体，带电荷为Q，半径为R 计算其球内、外的电势分布

解：先计算 $\vec{E}$ 的分布



$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r \le R) \\ \vec{E}_2 = \dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$Q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{3}{4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q'\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

球外一点 P_2 的电势：

$$U_{P_2} = \int_{P_2}^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_2}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

球内一点 P_1 的电势：

$$U_{P_1}=\int_{P_1}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{r_1}^{R}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_{R}^{\infty}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_{r_1}^{R}rdr+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R}^{\infty}\frac{dr}{r^2}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot\frac{1}{2}(R^2-r_1^2)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}(3-\frac{r_1^2}{R^2})$$

$$\boxed{U_{P_2(外)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}}$$

$$\boxed{U_{P_1(内)}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}(3-\frac{r_1^2}{R^2})}$$

五、 静电场的环路定理

表述 静电场中场强沿任意闭合环路的线积分恒等于零

即 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ → 场强环路定理

有源
无旋

讨论

- 静电场的基本方程
- 保守场
- 微分形式 $\nabla \times \vec{E} = 0$

Stokes 公式 $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$ S是以L为边界的曲面

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

对任意S曲面成立 只能有 $\nabla \times \vec{E} = 0$ 旋度

六、 等势面 电势梯度

(一) 等势面

由电势相等的点组成的面叫等势面

满足方程 $U(x, y, z) = C$

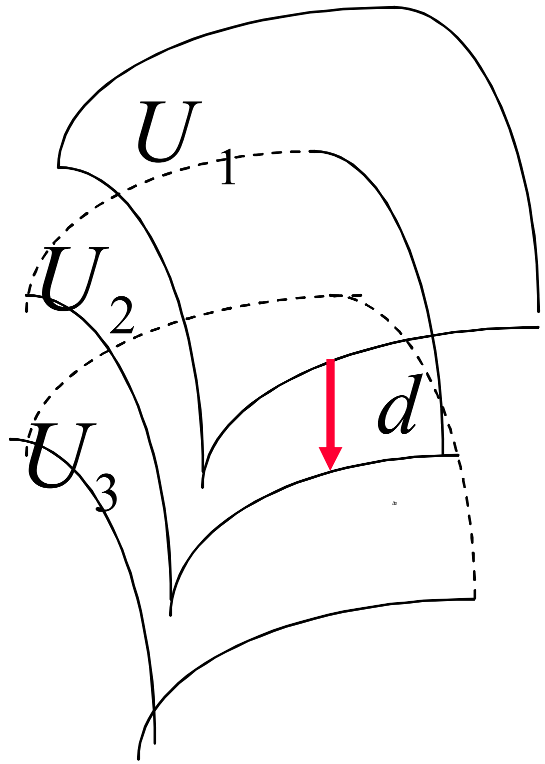
当常量C取等间隔数值时

$$\Delta C = C_2 - C_1 = C_3 - C_2$$

可以得到一系列的等势面

$$\Delta U_{12} = \Delta U_{23}$$

$$\Delta U \approx Ed$$

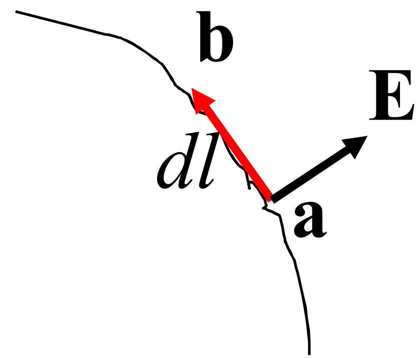


等势面的疏密反映了场的强弱

(二) 电力线与等势面的关系

1. 电力线处处垂直等势面

在等势面上任取两点 a、b，则



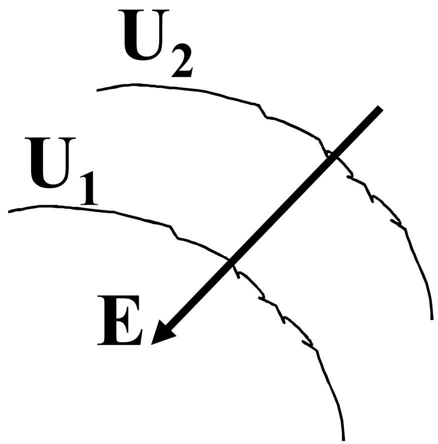
$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = U_a - U_b \xrightarrow{\text{等势}} = 0$$

∵a、b 任取

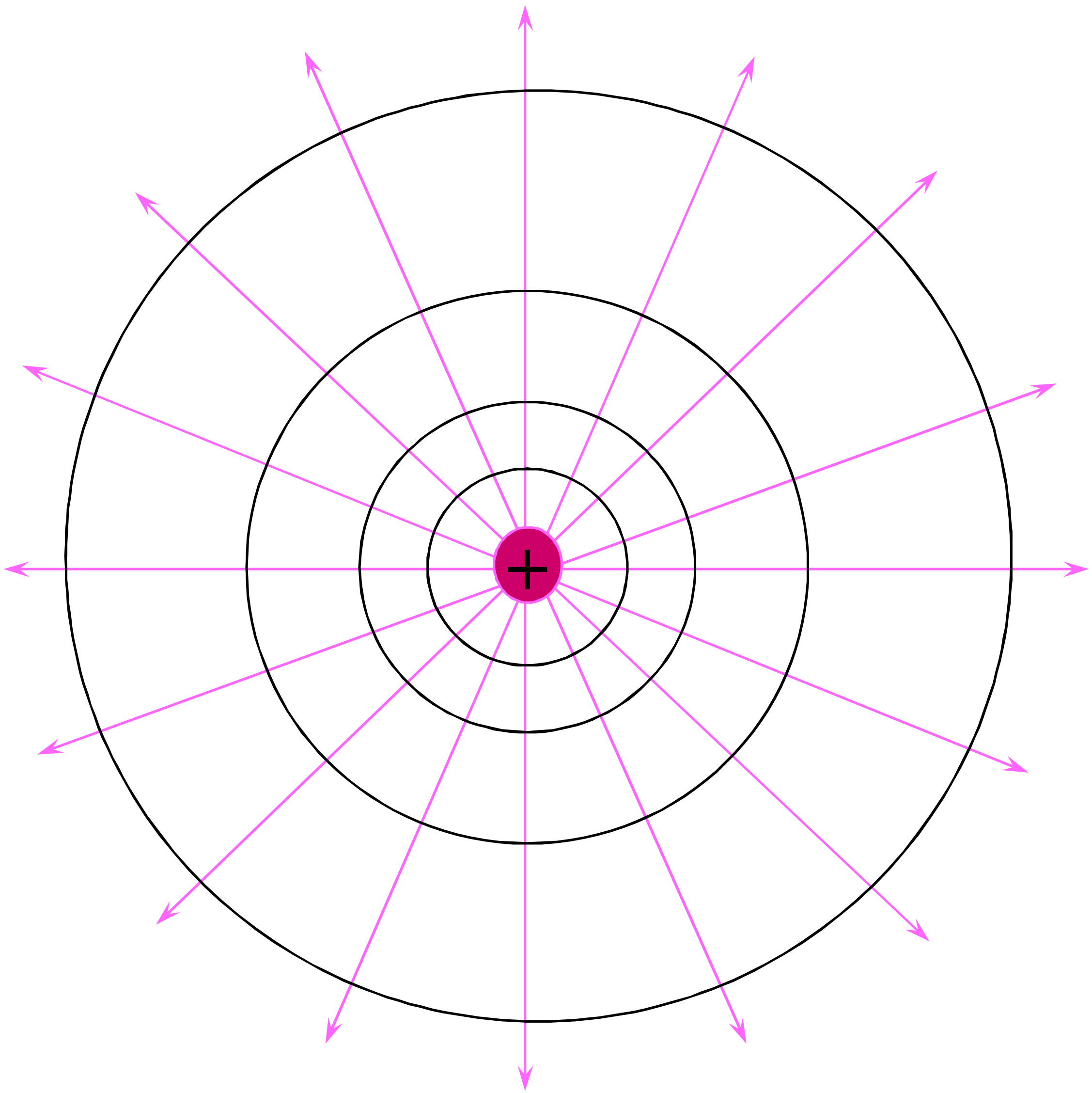
∴ 处处有 $\vec{E}\perp d\vec{l}$

2. 电力线指向电势降的方向

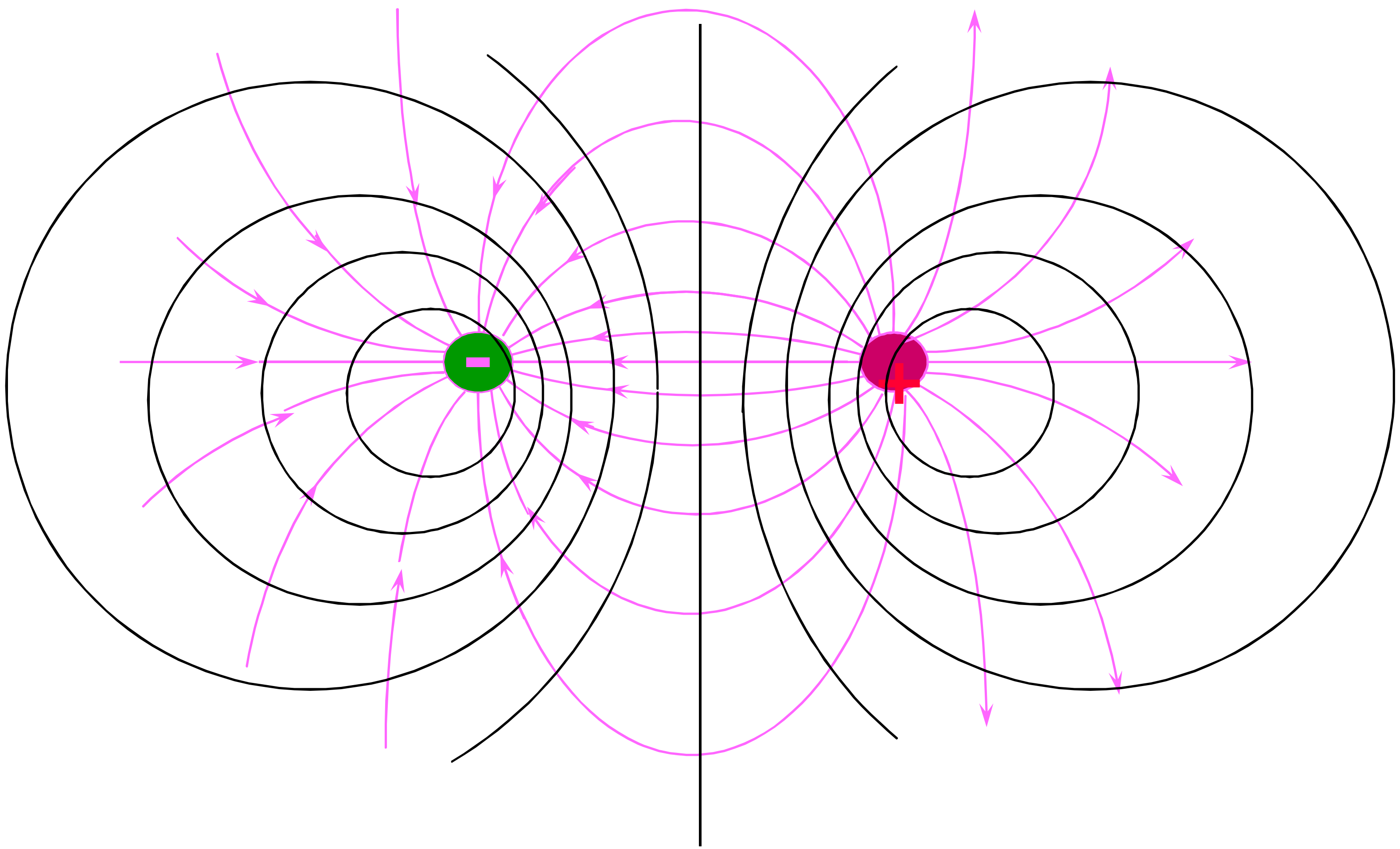
$U_2 > U_1$ （电场力作正功可得）



点电荷的电场线与等势面 ☆

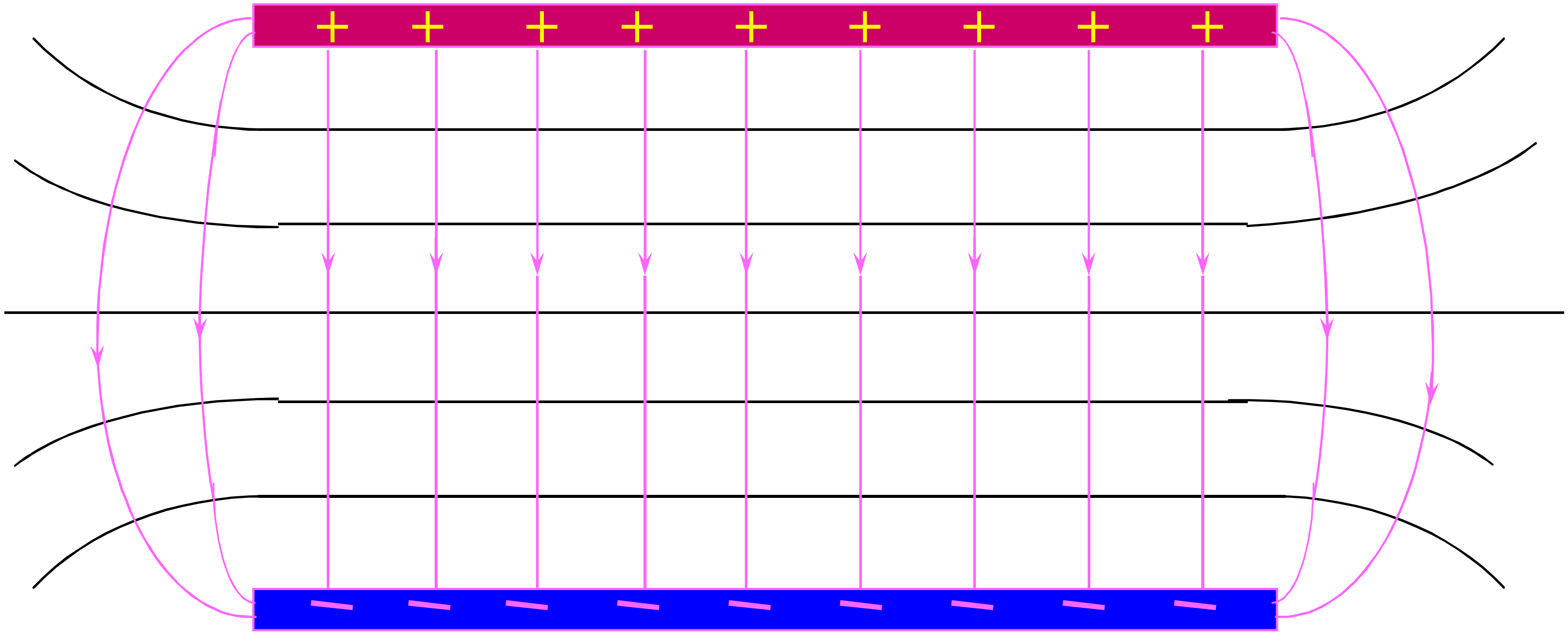


电偶极子的电场线与等势面



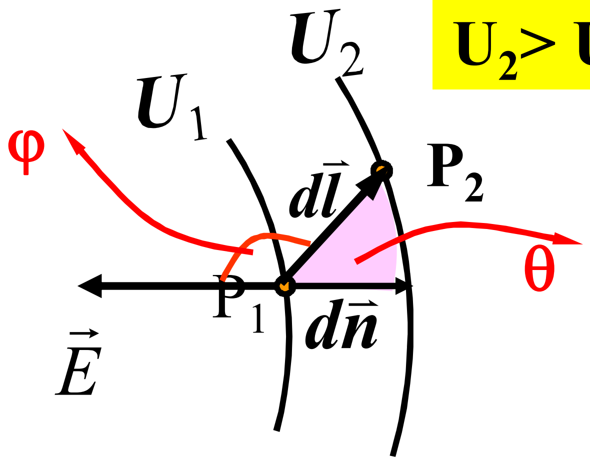
平行板电容器的电场线与等势面

☆



(三)、电势梯度

P_1、P_2是距离很近的两等势面上两点



$U_2 > U_1$

$$dn = dl\cos\theta$$

$$\frac{dU}{dn} = \frac{dU}{dl\cos\theta}$$

$$\frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dn}\cos\theta$$

说明电势沿法线方向变化率最大

定义电势梯度

$$\boxed{gradU = \frac{dU}{dn}\vec{n}}$$

电势沿l方向的变化率等于电势梯度在l方向的投影

P_1和P_2两点间的电势差为

$$U_1 - U_2 = \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$dU = U_2 - U_1 = -\vec{E}\cdot d\vec{l} = -Edl\ \cos\varphi$$

$$E_l = E\cos\varphi = -\frac{dU}{dl}$$

场强沿l方向的分量等于电势沿l方向变化率 的负值

$$\longrightarrow \boxed{E = -\frac{dU}{dn}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -gradU}$$

某点的场强等于该点电势梯度的负值

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dn}$$

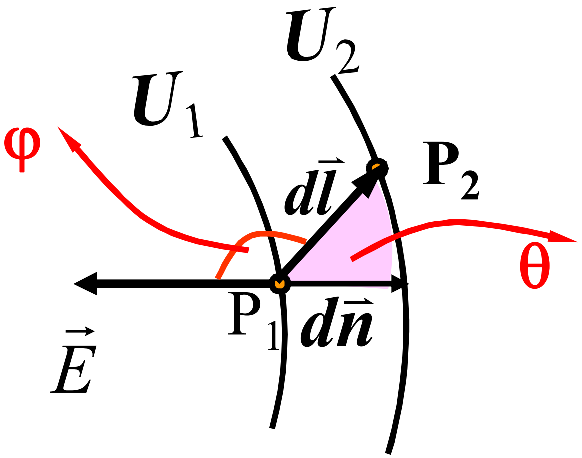
$$E\cos\varphi = -\frac{dU}{dl} = E_l$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = \vec{E}$$



$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)U = -\nabla U$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$$

电势梯度

$$\vec{E} = -gradU$$

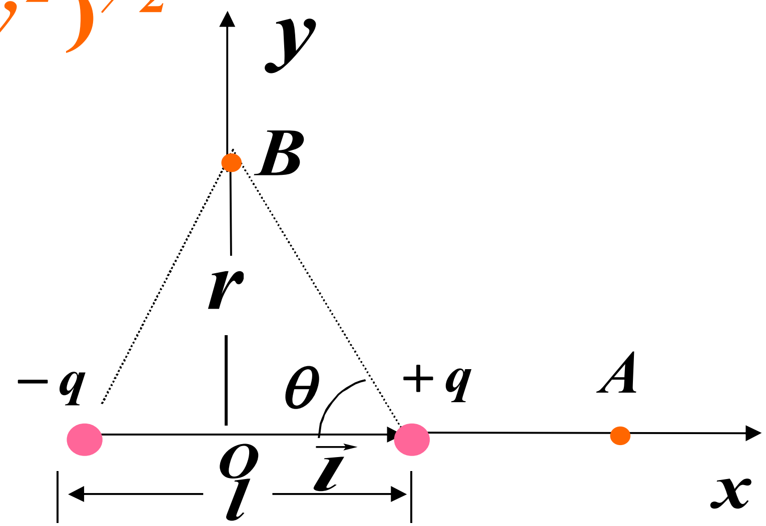
$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

例．(书例7.9)计算电偶极子电场中任一点的场强

解：
$$U=U(x,y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$



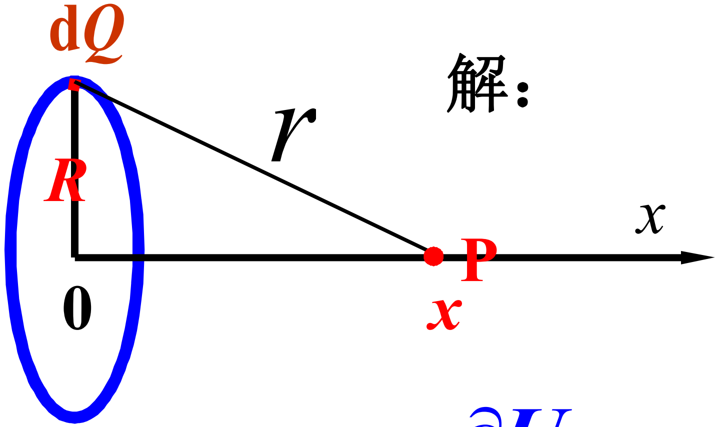
B点(x=0)
$$\vec{E}=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}\vec{i}$$

A点(y=0)
$$\vec{E}=\frac{p}{2\pi\varepsilon_0 x^3}\vec{i}$$

例

已知：总电量Q；半径R。

求：均匀带电圆环轴线上的电势与场强。



解：

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_Q dQ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

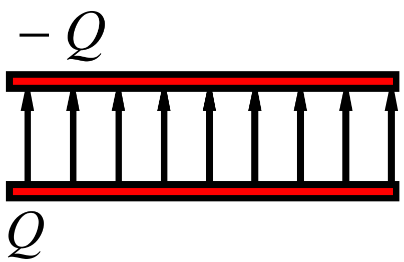
$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

$$\boxed{U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}}$$

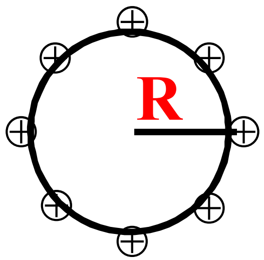
$$E = E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

思考题下例说法对否？举例说明。

（1）场强相等的区域，电势处处相等？

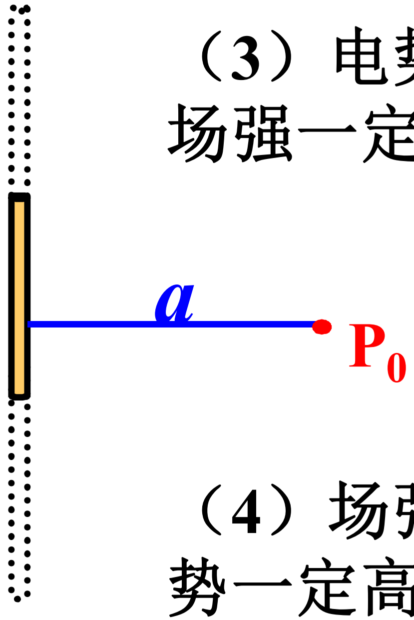


（2）场强为零处，电势一定为零？



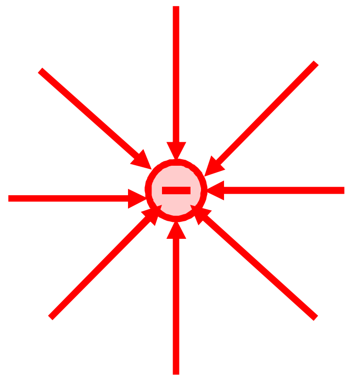
$$U=\int_r^{0势}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$-\nabla U=\vec{E}$$



（3）电势为零处，场强一定为零？

（4）场强大处，电势一定高？



小结

1. 两个物理量 $\vec{E}$ U

2. 两个基本方程 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0}$ $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

3. 两种计算思路 $\vec{E} = \int_{(Q)} d\vec{E}$ $U = \int_{(Q)} dU$

（1）电荷分布对称

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0}$$

$$U = \int_{(P)}^{P(0)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

（2）电荷分布已知，不对称

$$U = \sum U_i$$

$$E = -\nabla U$$