信息论
信号传输与处理的理论基础

第三章：部分习题求解概要

第七章：信道容量的初步概念

习题及部分解答

* 第三章习题
*   习题3.2、3.4、3.5、3.6、3.9、3.11（3.3节）、
*   习题7.37（又一个典型集合及其渐进均分性质）；
*   补充习题：结合本章结果和习题7.37，试定义一组m个随机变量的典型集合并猜测其渐进均分性质。你能证明你的猜测吗？

习题及部分解答（1）

* 习题3.2求解概要：
*
* $(-1/n)\log P(x_1,\ldots,x_n)P(y_1,\ldots,y_n)/P(x_1, y_1,\ldots,x_n,y_n)$
* $= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\{P(x_i)P(y_i)/P(x_i,y_i)\}$
* 根据（弱）大数定律，上式依概率所收敛到的极限是什么？
* 答案：I(X;Y)
*

习题及部分解答（2）

* 习题3.4求解概要
* (a) 是的，应用大数定律论证。
* (b) 是的，应用大数定律和以下的de Morve公式论证
* $$P[A] + P[B] = P[A \cap B] + P[A \cup B]$$
* A、B是任何事件，由此当P[A] 和 P[B]非常接近于1时，
* P[A∩B]也非常接近于1（试将该表述精确化）。
* (c) 仿定理3.1.2论证。
* (d) 仿定理3.1.2论证，注意因子1/2实际上是可以任意接近于1的正数。
*

习题及部分解答（3）

* 习题3.5求解概要
* (a) $1 = \sum_{(x1,\ldots,xn)} P(x_1, \ldots, xn)$
* $\geq \sum_{(x1,\ldots,xn)\ in\ Cn(t)} P(x_1, \ldots, xn)$
* $\geq \sum_{(x1,\ldots,xn)\ in\ Cn(t)} 2^{-nt}$
* $= |C_n(t)|2^{-nt}$
* (b) t = H[X], 试用大数定律证明之。

习题及部分解答（4）

* 习题3.6求解概要

可以先取对数、再依据大数定律计算极限。

答案：$2^{-H[X]}$.

注：这里熵H[X]中的对数是$\log_2$.

一般地，如果熵H[X]中的对数是$\log_B$，则答案是$B^{-H[X]}$.

习题及部分解答（5）

* 习题3.9 (a) 若$q(X_1,\ldots,X_n)=q(X_1)\ldots q(X_n)$, $X_1,\ldots,X_n \sim i.i.d.\ p(x)$,
* 求 $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log q(X_1,\ldots,X_n) = ?$
* 计算概要

$$\begin{aligned}
\lim -\frac{1}{n}\log q(X_1,X_2,\ldots,X_n) &= \lim -\frac{1}{n}\sum \log q(X_i) \\
&= -E(\log q(X)) \qquad \text{/* 大数定律 */} \\
&= -\sum p(x)\log q(x) \\
&= \sum p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)} - \sum p(x)\log p(x) \\
&= D(\mathrm{p}||\mathrm{q}) + H(\mathrm{p}).
\end{aligned}$$

* (b)求 $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log[q(X_1,\ldots,X_n)/p(X_1,\ldots,X_n)] = ?$
*

$$\begin{aligned}
\lim -\frac{1}{n}\log\frac{q(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{p(X_1,X_2,\ldots,X_n)} &= \lim -\frac{1}{n}\sum \log\frac{q(X_i)}{p(X_i)} \\
&= -E(\log\frac{q(X)}{p(X)}) \qquad \text{/* 大数定律 */} \\
&= -\sum p(x)\log\frac{q(x)}{p(x)} \\
&= \sum p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)} \\
&= D(\mathrm{p}||\mathrm{q}).
\end{aligned}$$

习题及部分解答（6）

* 习题3.11
* （a）借鉴3.4（b）中的提示。
*
* 习题7.37 仿照定理7.6论证的前半部分。

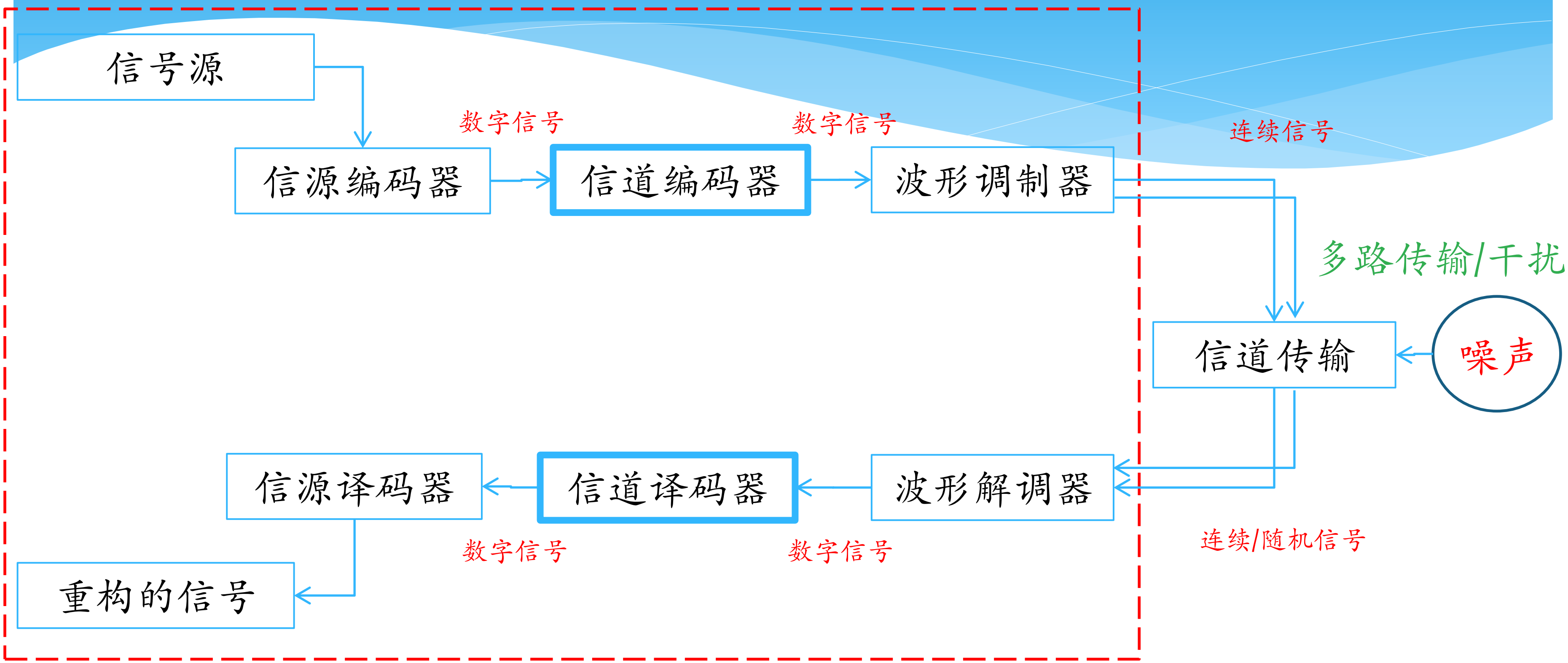
第三单元

信道容量、信道编码、通信可靠性

* 第七章　信道容量(Channel Capacity)
* 第九章　Gauss信道

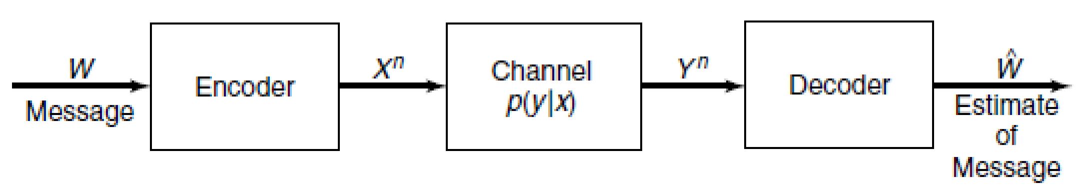
* ⊙基本概念：　信道、二元对称信道、容量、信道编码。
* ⊙基于冗余编码实现可靠通信的性能极限：
* 线性分组编码、最大似然译码算法、其他信道编码简介、
* 一般分组码的Shannon定理。
* ⊙ Gauss信道：
* 基本Gauss信道、有限带宽Gauss信道、
* Gauss信道的Shannon容量公式、功率约束条件下的性能优化
* ⊙ 其他应用和习题

数字通信系统：基本模型



* 信号传输与处理的基本过程

基本概念(1)



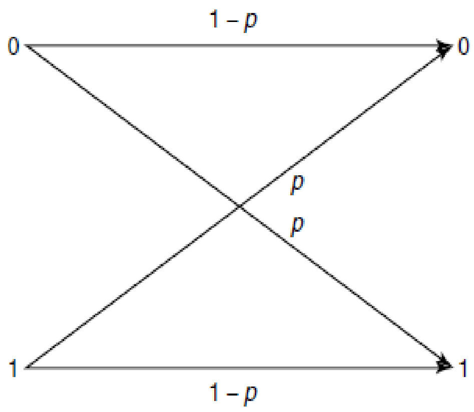
* 信道：能传输信息的任何介质或机制。
* 实例：通信链路、存储介质、电磁场、纸、…
* 信道的组成要素：
* 输入信号X：负载原始信息（发射机端）；
* 输出信号Y：接受达到的信息（接收机端）；
* X到Y的转移概率P[Y|X]：表达信息传输如何被失真。
* 信道容量：
* $$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

基本概念(2)

* 二元对称信道及其容量

* BSC信道的组成要素：
* 输入信号X：$X \in \{0,1\}$；
* 输出信号Y：$Y \in \{0,1\}$；
* 转移概率P[Y|X]：$P[y=0|x=1] = P[y=1|x=0] = p$
* BSC的基本参数p称为比特的差错概率。

BSC状态转移图



* BSC的信道容量：$C(p) = 1 - H[p,1-p]$

* 其中H[p,1 - p] 是表达式 plogp +(1 – p)log(1-p)， 也常记为H(p).

基本概念(3)

* BSC容量公式的推导：

* 第一步：计算互信息量I(X;Y)

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= H(Y) - \sum p(x)H(Y|X=x) \\
&= H(Y) - \sum p(x)H(p) \\
&= H(Y) - H(p) \\
&\leq 1 - H(p),
\end{aligned}
$$

* 第二步：计算 $C = \max_{P(x)} I(X;Y)$
* 注意到当X具有概率分布P[X=0]=P[X=1]=1/2时，P[Y=0]=P[0|0]P[X=0]+
* +P[0|1]P[X=1] = (1-p)(1/2) + p(1/2) = ½, P[Y=1] = 【习题：完成计算】=1/2，
* 因此这时H[Y]=1, 再结合第一步的计算结果，得到C = 1 – H(p).

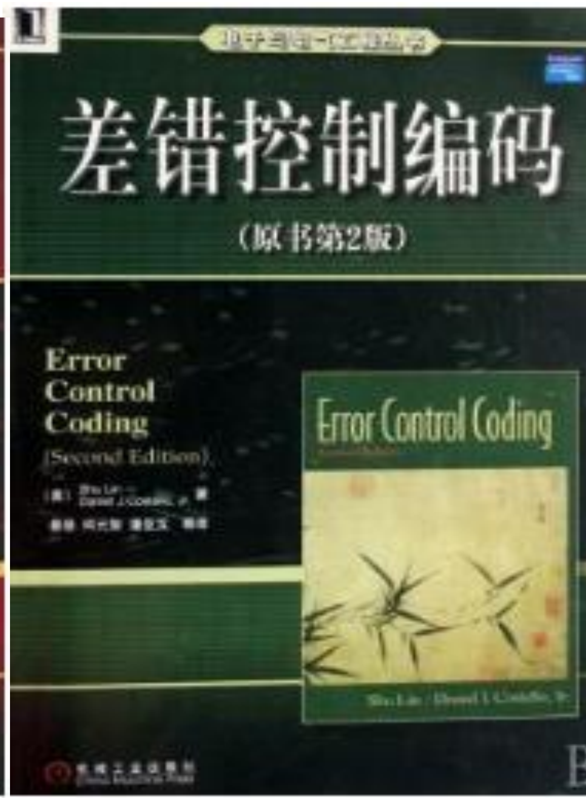
基本概念(4)

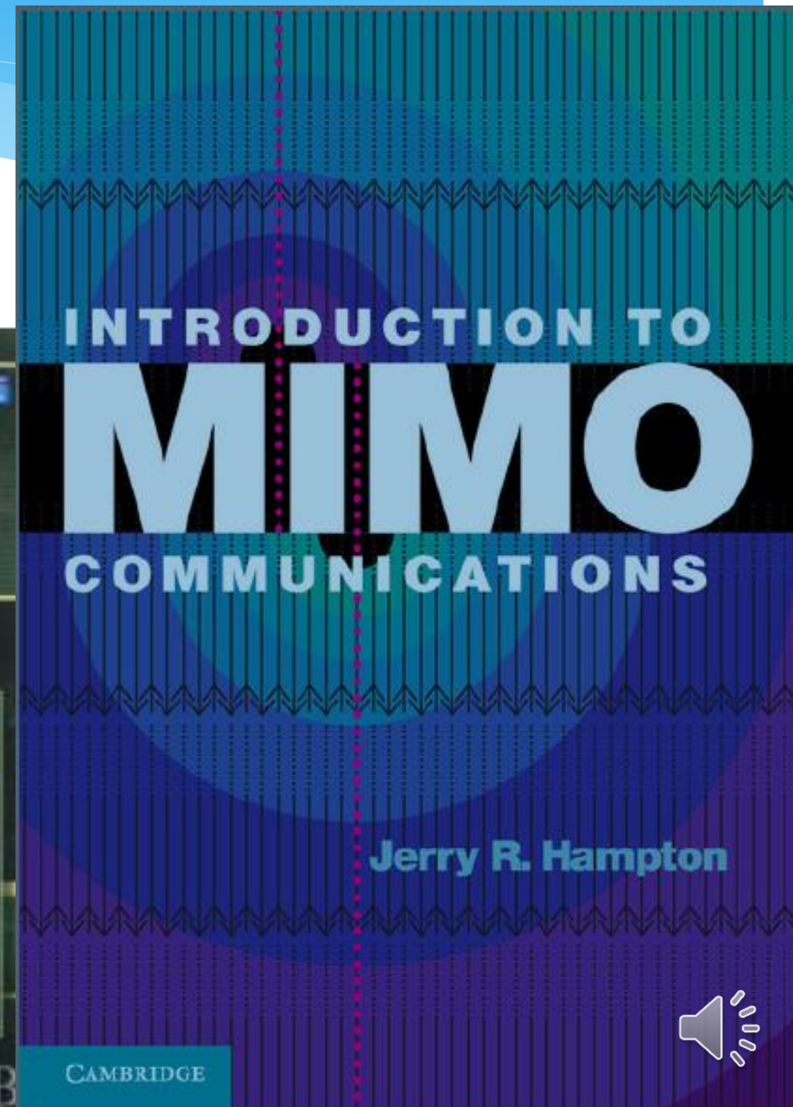
* 其他类型的信道：参见7.1和7.2节
* 【本课程着重于研讨BSC信道和Gauss信道，对其他信道不做探讨】

* 信道容量的普遍性质
* （1） $C \geq 0$ (为什么？进一步讲，在什么情况下C=0？)
* (2) $C \leqq \log M$, M是发送机端信号X的状态数（为什么？）
* (3) $C \leqq \log N$, N是接受机端信号Y的状态数（为什么？）
* 根据以上性质，仅仅提高接收机或发送机之一端的状态数，能提升容量吗？
* (4) I(X;Y)是P(x)的凹函数。

经典编码与现代编码(1)

* S.Lin, R.Costello

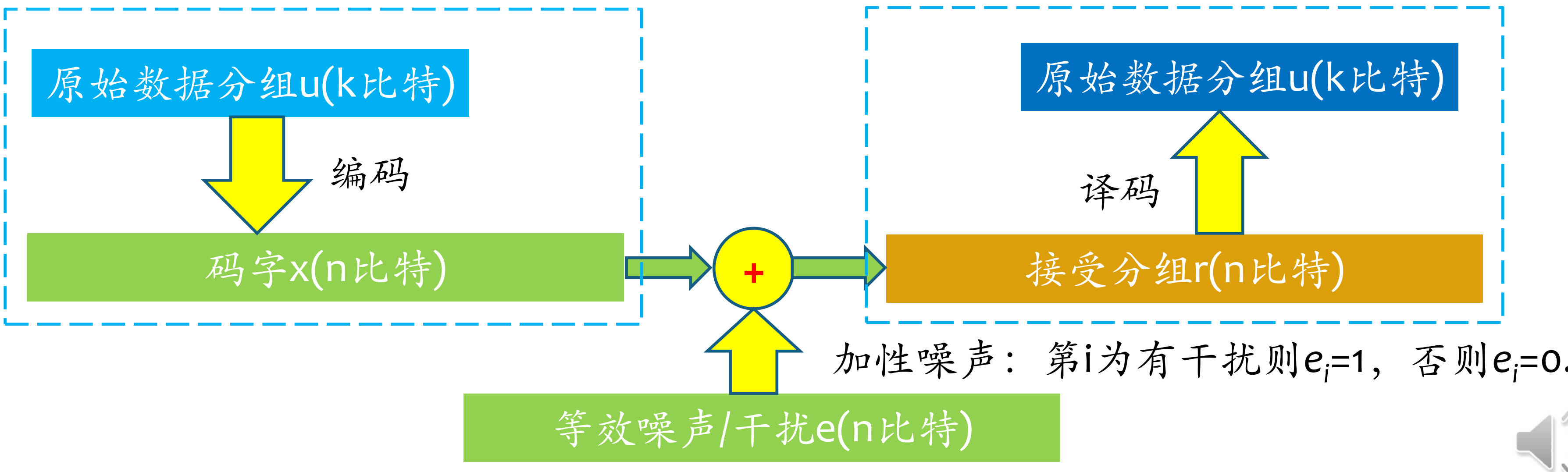




经典编码与现代编码(2)

* 什么是**信道编码**(Channel Coding)

* 在含噪声的信道上，将原始数字序列按照某种方式引入
* 冗余，以降低信息的传输速率为代价，换取传输差错概率
* 的降低，即通过信息冗余以提升传输的可靠性。



经典编码与现代编码(3)

信道编码的基本类型

* (1) 线性分组码
* (2) 线性卷积码
* (3) 混合线性码
* (4) 时空线性码
* (5) 适应性信道编码

经典编码(1950至今)：(1)、(2)

现代编码(1990至今)：(3)、(4)、(5)

* 分组码：当前传输的码字x(t)仅和当前原始信息分组u(t)有关。
* $x(t) = Gu(t)$, G是编码矩阵。
* 卷积码：当前传输的码字x和当前及其之前的一组原始信息
* u(t), u(t-1),..., u(t-L)有关：
* $x(t) = G_0u(t)+G_1u(t-1)+\dots+G_Lu(t-L)$, G_j是编码矩阵。