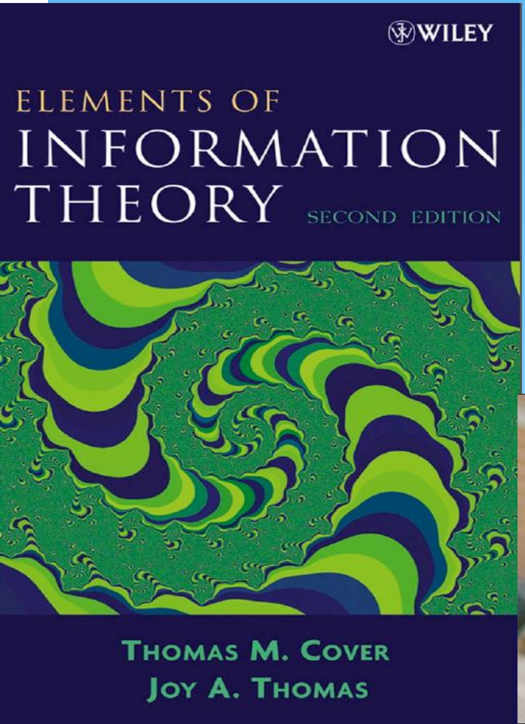
信息论

信号传输与处理的理论基础

Gauss信道 - 习题



第九章习题

习题9.3 输出功率（接收机最高功率）约束条件下的容量

Output power constraint. Consider an additive white Gaussian noise channel with an expected *output* power constraint P. Thus, $Y = X + Z$, $Z \sim N(0, \sigma^2)$, Z is independent of X, and $EY^2 \le P$. Find the channel capacity.

求解概要：

$$\begin{aligned} C &= \max_{f(X):E(X+Z)^2 \le P} I(X;Y) \\ &= \max_{f(X):E(X+Z)^2 \le P} (h(Y) - h(Y|X)) \\ &= \max_{f(X):E(X+Z)^2 \le P} (h(Y) - h(Z)) \end{aligned}$$

根据基本结论（参阅第八章定理8.6.5），在E[Y²]=P的约束条件下，熵h(Y)当Y具有Gauss分布Y~N(0,P)时具有最大值(1/2)log(2πeP)，且注意h(Z)= (1/2)log(2πeN)，因此

$$C = \frac{1}{2}\log 2\pi eP - \frac{1}{2}\log 2\pi eN = \frac{1}{2}\log\frac{P}{N}.$$

注意达到上述最大互信息量的X的概率分布是X~N(0,P-N)。

【思考】上述结果意味着如果P=0则C=无穷大，这会发生吗？为什么？

第九章习题

习题9.4 发射信号幅度均值约束下的指数噪声信道的容量

指数分布Z~$p(z) = (1/\mu)exp(-z/\mu)$, $z \geq 0$， $\mu=E[Z]$.

> *Exponential noise channels.* $Y_i = X_i + Z_i$, where Z_i is i.i.d. exponentially distributed noise with mean μ. Assume that we have a mean constraint on the signal (i.e., $EX_i \leq \lambda$). Show that the capacity of such a channel is $C = \log(1 + \frac{\lambda}{\mu})$.

* **求解概要**： 第一步

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{f(X):EX\leq\lambda} I(X;Y) \\
&= \max_{f(X):EX\leq\lambda} h(Y) - h(Y|X) \\
&= \max_{f(X):EX\leq\lambda} h(Y) - h(Z|X) \\
&= \max_{f(X):EX\leq\lambda} h(Y) - h(Z) \\
&= \max_{f(X):EX\leq\lambda} h(Y) - (1+\ln\mu)
\end{aligned}
$$

【子问题】对指数分布的噪声z，试计算其熵 $h(Z) = 1+\log\mu$。

* 第二步：为计算*max* h(Y)，将针对X的原始约束转换为针对Y的约束:
* $$E[Y] = E[X] + E[Z] \leqq \lambda + \mu$$
* 第三步： 求解优化问题 *max* h(Y) s.t. $E[Y] \leqq \lambda + \mu$，即
* $$max\ -\int_0^\infty dy f(y)\log f(y) \text{ s.t. } f(y) \geq 0, \int_0^\infty dy\, y f(y) \leqq \lambda + \mu$$

【子问题：用泛函变分和Lagrange乘子算法解之】结果是

* $$f^*(y) = (\lambda+\mu)^{-1} exp(-z/(\lambda+\mu)),$$ 指数分布！

第九章习题

* 习题9.4(续一)
* 第四步：将中间结果代回第一步，得
* $$C = \log(1+\frac{\lambda}{\mu}) = \log(1+\sqrt{SNR})$$

【子问题：用计算证明，均值为a的指数分布的方差为a^2】

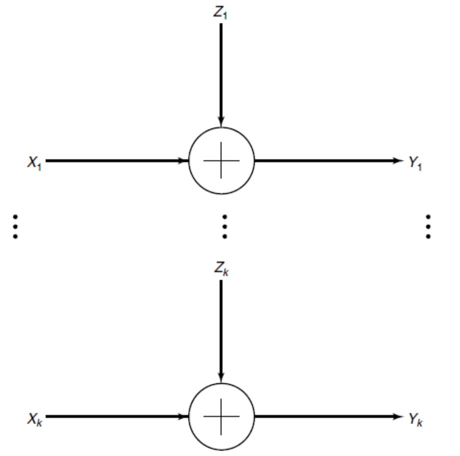
第五步：确定X的最优概率分布

（选做；提示：因为p(y)=p(x)*p(z)，故易用特征函数法或Fourier变换法求p(x)）

【注：指数分布的线性组合并非指数分布，因此和Gauss信道不同，实现指数信道容量的发射端状态分布并非指数分布】

* 进一步的讨论：
* (1) C仅与SNR有关，并且是SNR的缓增函数：$C \approx (1/2)\log SNR$.
* (2) 当SNR<<1时，$C \approx \sqrt{SNR}$。
* (3) 对SNR相同的情形，Gauss信道的容量和指数信道的容量哪个更大?
* 【补充习题：用两种信道的容量公式，确定两者相对优劣的信噪比区域】

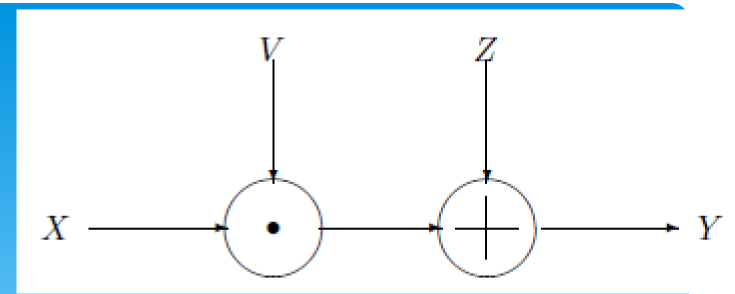
第九章习题



* 习题9.4(续二) 指数信道的进一步讨论

* (1) 若指数信道的传输增益为h：Y=hX+Z, 则容量
* $$C = \log(1+h\frac{\lambda}{\mu}) = \log(1+h\sqrt{SNR})$$ 【为什么？试用前面的方法推导】
* (2) 并行组合的指数信道
* 根据高斯信道类似的分析方法，在约束条件$E[X_j] \le a$下有【习题】
* $$C = max\ \sum_{j=1}^{m} log(1+\frac{a_j}{\mu_j})\ \ s.t. \sum_{j=1}^{m} a_j \le a \text{ 且} a_j \ge 0\ ,\ j=1,\dots,m$$
* 【习题]用Lagrange乘子算法定出以上问题的最优解($a_1^*,\dots,a_m^*$)。注意该解还具有注水算法的特征吗?
* (3) 对有限带宽2W的指数信道，单位时间的容量
* $$C = W\log(1+\lambda/\sqrt{WN_0})$$
* N_0是指数白噪声的功率谱密度。
* 【习题】你能不用定量计算，基于概念性思考得出该结论吗?

第九章习题



* 习题9.5 衰落信道 Y=VX+Z
* Z：加性噪声，V：乘性噪声(衰落因子)
* Z、V、X概率独立。证明 $I(X;Y|V) \geq I(X;Y)$
* 即：关于信道衰落因子的知识有助于提升容量。

【注】$I(X;Y|V) \equiv H(X|V) - H(X|Y,V)$ (2.60) $I(X;Y|V) \geq 0$ (2.92); 递归关系 (2.62)。

<u>求解概要</u>:

按两种方式根据(2.62)式展开

$$\begin{aligned} I(X;Y,V) &= I(X;V) + I(X;Y|V) \\ &= I(X;Y) + I(X;V|Y) \end{aligned}$$

因此

$$I(X;V) + I(X;Y|V) = I(X;Y) + I(X;V|Y) \qquad (i)$$

由于X、V概率独立，因此【请验证】

$$I(X;Y|V) = I(X;Y) + I(X;V|Y) \qquad (ii)$$

又由于 $I(X;Y|V) \geq 0$，因此

$$I(X;Y|V) \geq I(X;Y) \qquad (iii)$$

将(*iii*)和(*ii*)代入(*i*)，得到结论 $I(X;Y|V) \geq I(X;Y)$。

【注】衰落信道是无线移动网络的基本传输模型，衰落信道的容量分析与计算是当代网络科学最重要也最复杂的课题之一。

第九章习题

习题9.6 双信道上的功率分配

考虑两个Gauss信道，其传输方程 $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$

【请解释这些表达式的含义】

针对发送信号状态的功率约束是$E(X_1^2+X_2^2) \le 2P$，并假设 $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$。

在总功率P满足的什么条件下，双信道的复合信道表现得如一个单信道?

求解概要:

根据最优功率分配的注水算法进行分析【对双信道的情形，可参考习题3+】，

当$P \le \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)$时，复合信道仅有第二个信道起作用（发送功率全部分配到该信道）；当$P \ge \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)$时，第一个信道开始起作用。

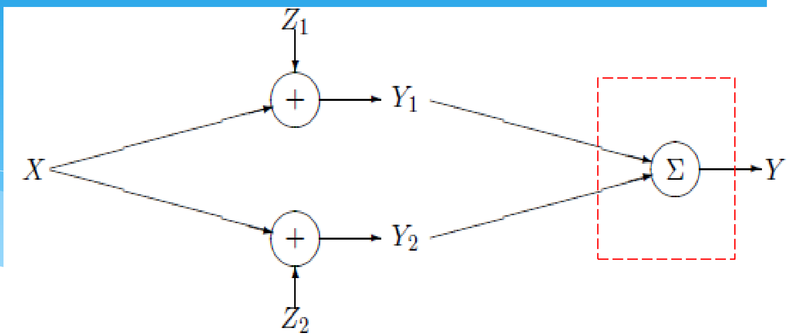
【请详细验证以上结论；在这里$\frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)$是一个临界功率】

【补充的问题（选做）：

你能对三个并行信道$\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \sigma_3^2$确定（相应有两个）临界功率吗?】

第九章习题

* 习题9.7　多径传输的Gauss信道模型
* 传输方程
* $Y=Y_1+Y_2 = 2X + Z_1 + Z_2$



(a) Find the capacity of this channel if Z_1 and Z_2 are jointly normal with covariance matrix $K_Z = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$.

(b) What is the capacity for $\rho = 0$, $\rho = 1$, $\rho = -1$?

* 求解概要:
* 注意与习题9.2不同，这里要计算的是
* $C = max_{E[X^2]\le P}\, I(X;Y) = max_{E[X^2]\le P}\, I(X;Y_1+Y_2)$
* 仿前面的问题分析和计算。（结果与习题9.2相同）$C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2P}{\sigma^2(1+\rho)}\right)$。
* 对解的讨论，参见习题9.2。
* 【注】本题和习题9.2不同之处在于后处理环节；这可以作为数据处理不等式的一个实例。