$$\mu \xleftarrow{P} \overline{X}$$

$$\sigma^2 \xleftarrow{P} S^2$$

$$\sigma_1^2/\sigma_2^2 \xleftarrow{P} S_1^2/S_2^2$$

$$\mu_1 - \mu_2 \xleftarrow{P} \overline{X} - \overline{Y}$$

第8章置信区间和假设检验

一. 区间估计

二. 假设检验

一．区间估计（置信区间）

1.置信区间的定义

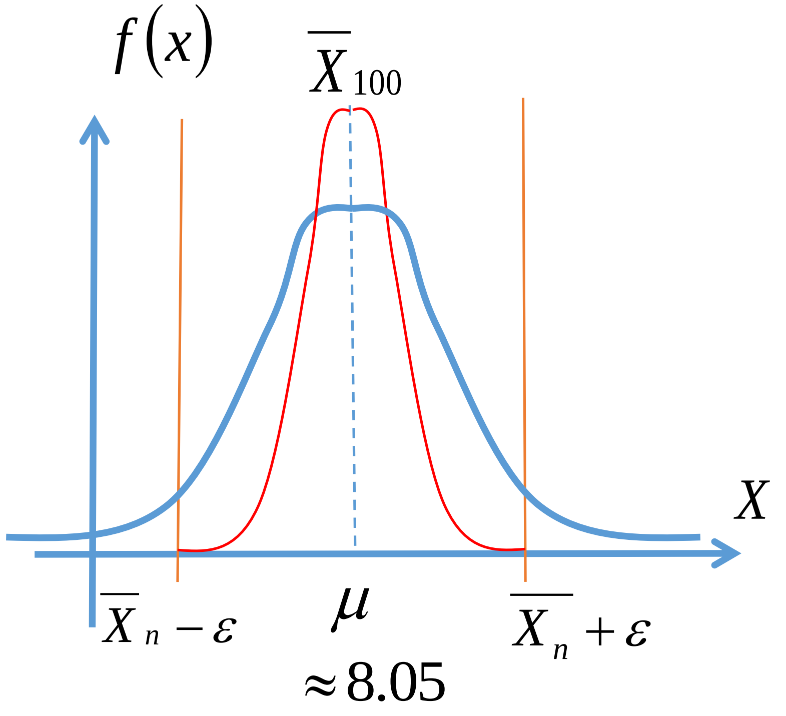
2.求置信区间的一般步骤

3.正态总体参数的置信区间

4.比例参数的置信区间

例：电视机寿命值 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 由大数定律，对任意的容许误差 $\varepsilon > 0$,

一定能找到一个***n***，使得： $P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$



抽取容量为***n*=100**的样本, $(7.8, 8.5, \cdots 7.9)$

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(7.8 + 8.5 + \ldots + 7.9) = 8.05$$

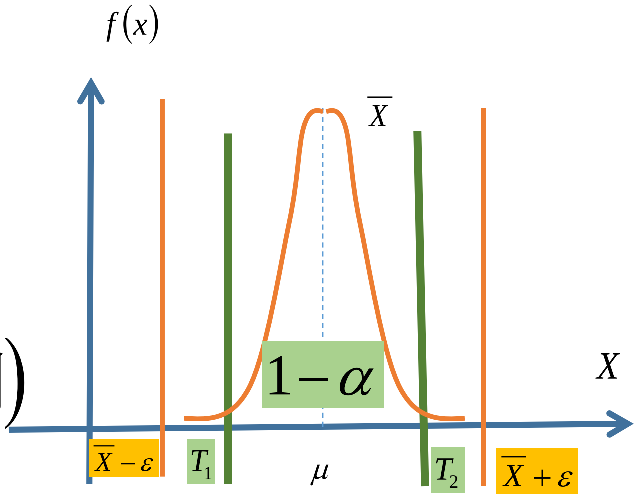
则 μ 在**8.05**左右，μ 的估计精度区间应该为：

$$\overline{X}_n - \varepsilon < \mu < \overline{X}_n + \varepsilon \qquad 8.05 - \varepsilon < \mu < 8.05 + \varepsilon$$

统计的基本原理（小概率事件原理）

若事件A发生的概率 $P(A)\le\alpha$ 则统计认为A在一次抽样下不发生。我们只抽样一次 $\overline{x}_n$用来估计$\boldsymbol{\mu}$，

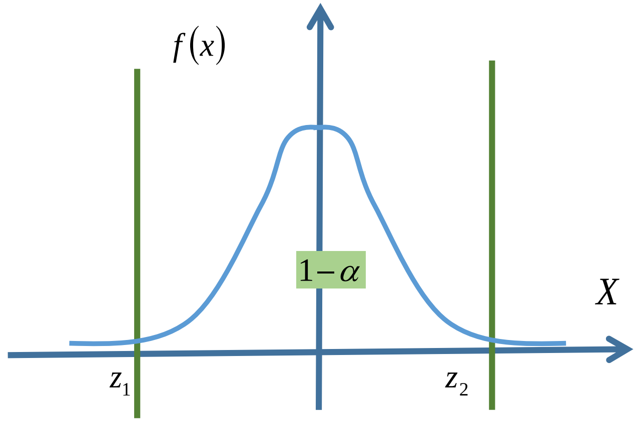
于是$\boldsymbol{\mu}$的估计区间应该为：$(T_1,\ T_2)$(两端小概率抽不到)



即$\boldsymbol{\mu}$的估计区间应该为：$\boxed{\overline{X}_n}\sim\boxed{N\left(\mu,\sigma^2/n\right)}$

$\cancel{8.05-\varepsilon<\mu<8.05+\varepsilon}$

的非小概率区间端点值 $\boxed{(T_1，T_2)}$



$$P\left(T_1<\overline{X}_n<T_2\right)=1-\alpha;\qquad \frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1);$$

$$P\left(z_1<\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_2\right)=1-\alpha\qquad \boxed{\overline{X}_n-z\,T_1\,\sqrt{n}}<\mu<\boxed{\overline{X}_n\,T_2\,z_i\,\sigma/\sqrt{n}}\ (\sigma\text{已知})$$

1.定义： 设总体 X 的分布函数为$F(x,\theta)$，其中 θ 为未知参数，

$X_1, X_2 \cdots X_n$ 为来自总体的简单随机样本，对任意给定的 $\alpha\,(0<\alpha<1)$ 如果由样本确定的两个统计量 $T_1(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 和$T_2(X_1, X_2 \cdots X_n)$，满足：

$$\boxed{P(T_1 \le \theta \le T_2) = 1-\alpha}$$

则称随机区间$[T_1, T_2]$是参数θ的置信度为1-α的置信区间。

对于随机区间$[T_1, T_2]$，T_1称为置信下限，T_2称为置信上限。

μ落在区间$(\overline{X}-\varepsilon, \overline{X}+\varepsilon)$的概率为1　　μ落在区间(T_1, T_2)的概率为$1-\alpha$

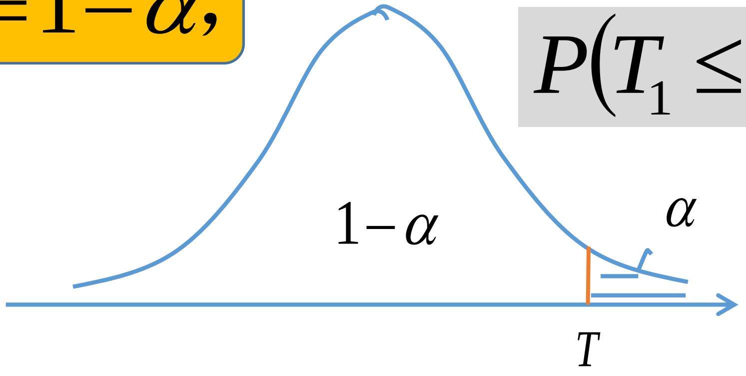
称 T 为参数θ的，置信度为 1-α 的单侧置信下限，若 T 满足：

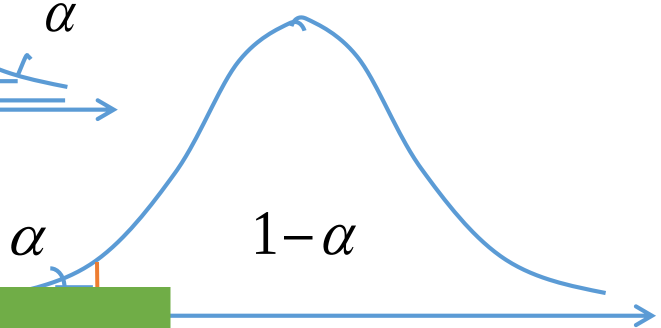
$$P(\theta \ge T)=1-\alpha$$

称 T 为参数θ的，置信度为 1-α 的单侧置信上限，若 T 满足：

$$P(\theta \le T)=1-\alpha,$$

$$P(T_1 \le \theta \le T_2)=1-\alpha$$





2.求置信区间的一般步骤

(1) 确定μ的估计量$\overline{X}$（7章）

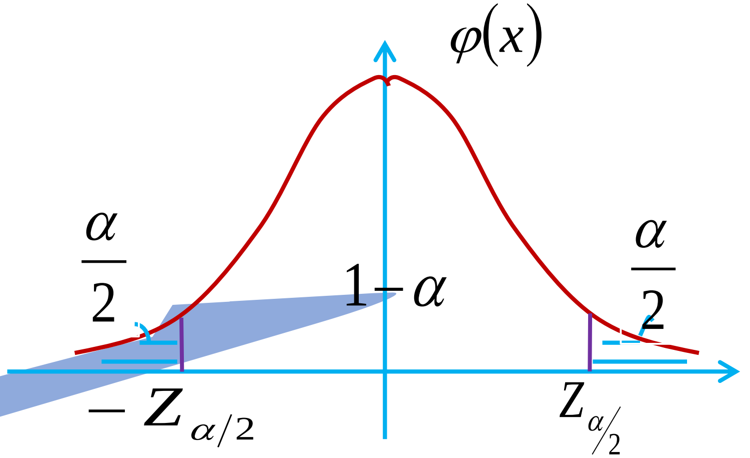
(2) 确定$\hat{\theta}$ 的分布 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(3) 确定$\hat{\theta}$分布的非小概率事件区间 $P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$

(4) 从不等式中解出θ

$$\overline{X}_n - z_i\,\sigma/\sqrt{n} < \mu < \overline{X}_n + z_i\,\sigma/\sqrt{n}$$

3.正态总体参数的置信区间



1.μ的置信区间(σ已知)

(1)双侧 $\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X_n}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X_n}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$P(T_1 \le \theta \le T_2)=1-\alpha$$

$$\boxed{\left(\overline{X_n}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_n}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

例1.某车间生产的一批圆形纽扣的直径 $X \sim N\left(\mu, 0.05^2\right)$，现从中随机抽取6个，量得平均直径 $\bar{x} = 14.95mm$ 。在0.95的置信度下求这批纽扣平均直径 μ 的置信区间。$\left(Z_{0.025} = 1.96\right)$

解：由 $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，可得：$P\left(-Z_{0.025} \le \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{0.025}\right) = 0.95$

$$P\left(\overline{X}_n - Z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}_n + Z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

μ的0.95置信区间为：$\left[\overline{X}_n - Z_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}，\overline{X}_n + Z_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

$$= \left[14.95 - 1.96\frac{0.05}{\sqrt{6}},\ 14.95 + 1.96\frac{0.05}{\sqrt{6}}\right] = \left[14.7711，15.1289\right]$$

(2) μ单侧上限 (Z_α) $\dfrac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$P\left(\overline{X_n}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X_n}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\mu \le \overline{X_n}+Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha\ ;$$

$$\boxed{\left(-\infty\ \ \overline{X_n}+Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$P\left(\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge Z_\alpha\right)=1-\alpha$$

错

(3) μ单侧下限 $(-Z_\alpha)$ $\dfrac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

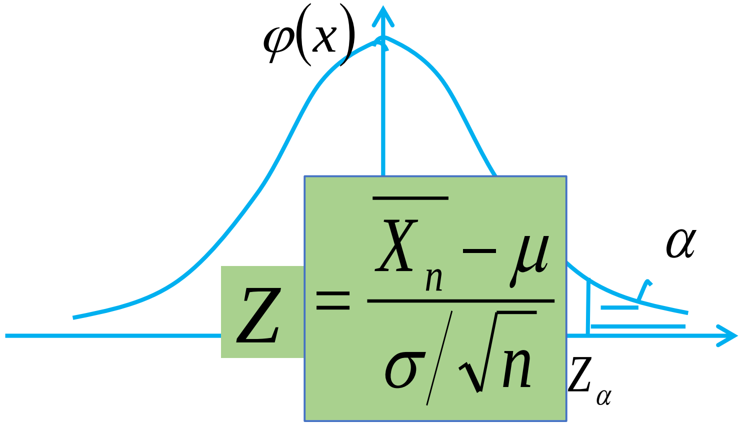
$$P(\theta \le T)=1-\alpha$$

$$\mu \le T$$

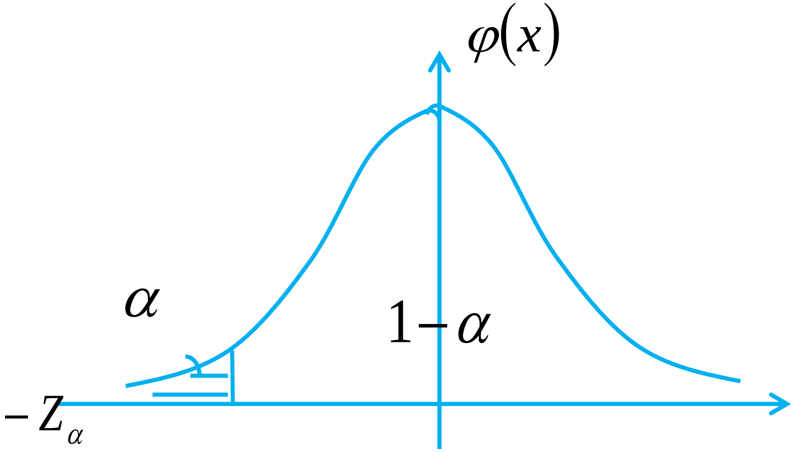
$$P\left(\mu \ge \overline{X_n}-Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha\ ;$$

$$P(\theta \ge T)=1-\alpha$$

$$\boxed{\left(\overline{X_n}-Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ +\infty\right)}$$



$$Z=\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$



例. 某车间生产的一批圆形纽扣的直径 $X \sim N\left(\mu, 0.05^2\right)$，现从中随机抽取 **6**个，量得平均直径 $\bar{x} = 14.95mm$ 。在**0.95**的置信度下求这批纽扣平均直径 μ 的置信下限。 $\left(Z_{0.05} = 1.64\right)$

解： 由 $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, $P\left(\overline{X}_n - Z_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}_n + Z_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$

$$P\left(\mu \ge \overline{X}_n - Z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

μ 的**0.95**置信下限为： $\left[\overline{X}_n - Z_{0.05}\,\sigma/\sqrt{n}\ ,\infty\right]$

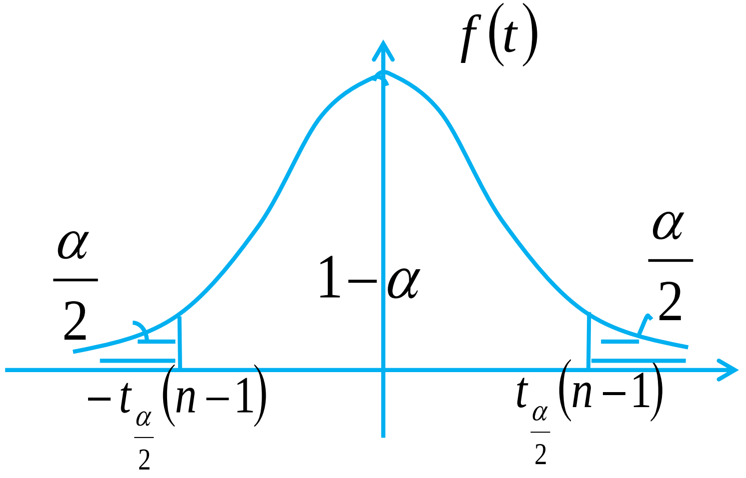
$$= \left[14.95 - 1.64\frac{0.05}{\sqrt{6}},\ \infty\right] = \left[14.91\ ,\infty\right]$$

2.μ的置信区间 (σ未知)

(1) 双侧

$\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

$$\frac{\overline{X}_n-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{\overline{X}_n-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X}_n-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}_n+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$\boxed{\left(\overline{X}_n-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}_n+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$P\left(\overline{X}_n-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}_n+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

例2.一批袋装大米质量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现从中随机抽取10袋，称得质量（单位：kg）为：50.6，50.8，49.5，50.5，50.4，49.7，51.2，49.3，50.6，51.2。求这批袋装大米平均质量 μ 在0,99置信度下的置信区间。

$$\bar{x} = 50.38 \quad s^2 = 0.4484 \quad n = 10$$

解：$\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$P\left(-t_{0.005}(9) \le \frac{\overline{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{0.005}(9)\right) = 0.99$$

$$P\left(\overline{X}_n - t_{0.005}(9)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}_n + t_{0.005}(9)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.99 \qquad (t_{0.005}(9) = 3.25)$$

$$\left[\overline{X}_n - t_{0.005}(9)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{0.005}(9)\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \left[50.38 - 3.25\frac{\sqrt{0.4484}}{\sqrt{10}}, 50.38 + 3.25\frac{\sqrt{0.4484}}{\sqrt{10}}\right]$$

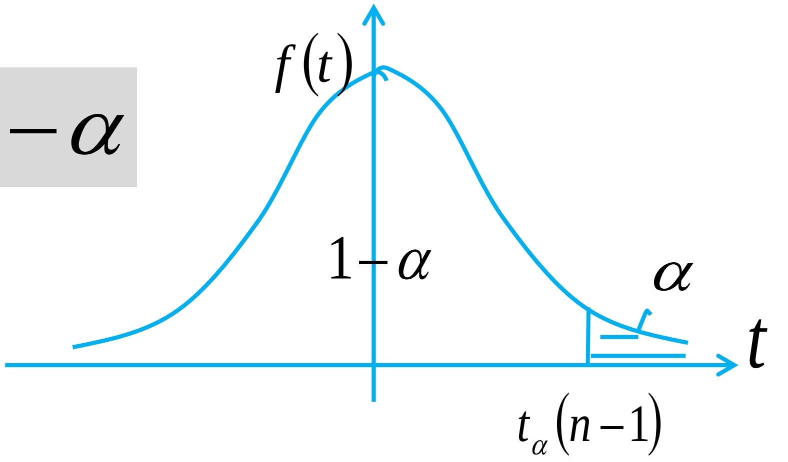
$$= [49.83，50.93]$$

(2) 单侧上限 $\left(t_{\alpha}(n-1)\right)$

$$\frac{\overline{X}_n-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$P(\theta \le T)=1-\alpha$$

$$P\left(\mu \le \overline{X}_n + t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

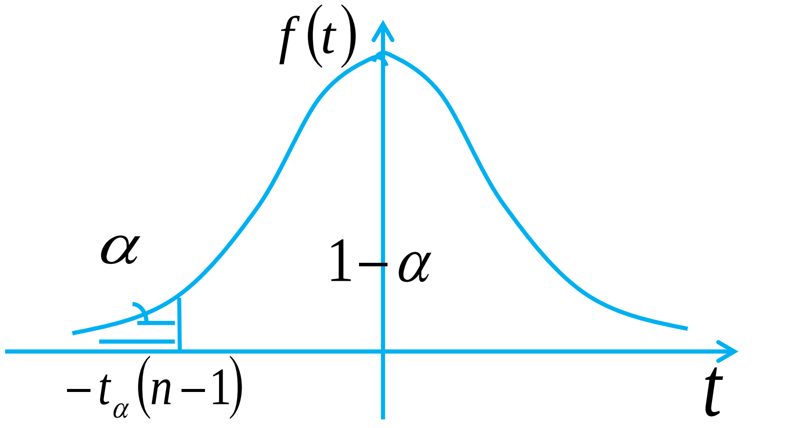


$$\left(-\infty\ ,\overline{X}_n + t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

(3) 单侧下限 $\left(-t_{\alpha}(n-1)\right)$

$$P(\theta \ge T)=1-\alpha$$

$$P\left(\mu \ge \overline{X}_n - t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$



$$\left(\overline{X}_n - t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\ ,+\infty\right)$$

$$P\left(\overline{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1\text{-}\alpha$$

例3.为估计制造某种产品所需的单位平均工作时间（h），现制造5件，所需工作时间如下：10.5,11,11.2,12.5,12.8.假设所需工作时间 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$**，试求** μ **的0.95的单侧置信下限。** $n=5$ $\quad \overline{x}=11.6$ $\quad s^2=0.995$

解：1) 由 $\dfrac{\overline{X_n}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \Longrightarrow P\left(\mu \geq \overline{X_n}-t_{0.05}(4)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)=0.95$

解得μ的单侧置信下限为 $\overline{X_n}-t_{0.05}(4)\dfrac{S}{\sqrt{n}}=11.6-2.131\times\dfrac{\sqrt{0.995}}{\sqrt{5}}=12.55$

制造单件产品所需最少工作时间为12.55小时 $\quad \left(t_{0.05}(4)=2.131\right)$

$$P\left(\overline{X_n}-t_{0.025}(4)\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X_n}+t_{0.025}(4)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$