《工科数学分析基础 2》答案、评分标准

2013、6、21

A 卷

一、填空题（满分 30 分，每一空 3 分）

1．设 $z=(1+x^2)^y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\underline{\ 2\ }$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\underline{\ 2\ln 2\ }$.

2．设 $z=f(x+y,xy)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，则

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{\ f_1'+yf_2'\ }$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\underline{\ f_{11}''+2yf_{12}''+y^2f_{22}''\ }$.

3、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+2y+3z=z^3$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{\ \dfrac{1}{3z^2-3}\ }$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{\ \dfrac{2}{3z^2-3}\ }$.

4．在收敛区间 $(-1,1)$ 内，下列函数关于 x 的幂级数为：

$\dfrac{1}{1+x}=\underline{\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\ }$ ；　　$\arctan x=\underline{\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\ }$.

5．设曲线 L：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$，则 $\oint_L (x+3z^2)\,\mathrm{d}s=\underline{\ 2\pi\ }$ ；

$\oint_L x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+3z\,\mathrm{d}z=\underline{\ 0\ }$（从 z 轴正向往负向看，L 为逆时针方向）.

二、单项选择题（满分 20 分， 每题 4 分）

1．设函数 $y_1=x+e^x$，$y_2=x+e^{2x}$，$y_3=x+e^x+e^{2x}$ 都是某个二阶常系数线性微分方程的解，则该方程的通解为_____**A**_____.

A．$y=x+c_1e^x+c_2e^{2x}$；　　**B**．$y=e^x+c_1x+c_2e^{2x}$；

C．$y=e^{2x}+c_1e^x+c_2x$；　　**D**．$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3x$.

2．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}\sin(x^2y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则 $f_x'(0,1)=$_____**B**_____.

A．0；　　**B**．1；

C．2；　　**D**．3.

3．设积分域 D：$|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D (|x|+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____**C**_____.

A．0；　　**B**．$\dfrac{1}{3}$；

C. $\dfrac{2}{3}$； D. 1.

4．设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $f_x'(x,y)>0$，$f_y'(x,y)>0$，则在以下结论中，错误的是____**B**____.

A. $f(1,1)>f(0,0)$； B. $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个极小值；

C. $f(x,y)$ 没有极值； D. 方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}>0$，其中方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$.

5．在以下级数中，发散的是____**C**____.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{1}{n})$； B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{n})$；

C. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$； D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n+3^n}{5^n-4^n}$.

三、（满分 10 分）求微分方程组 $\begin{cases} y_1'=2y_1-3y_2 \\ y_2'=y_1-2y_2 \end{cases}$ 的通解.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 3\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0$， 特征根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$；

对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{v}_2=(3,1)^{\mathrm{T}}$； （6 分）

通解 $y=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-x}+c_2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{x}$. （10 分）

四、（满分 10 分）求由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=1$ 所围成的均质几何体 V（密度 $\rho=1$）的质心坐标.

解 设质心 $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性易知，$\bar{x}=\bar{y}=0$. （2 分）

$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}r\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{3}$， （或 $\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 zr\,\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{3}$） （6 分）

$\iiint\limits_V \mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}r\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{2}$， （9 分）

所以 $\bar{z}=\dfrac{2}{3}$，质心 $P(0,0,\dfrac{2}{3})$. （10 分）

五、（满分 10 分）设函数 $\varphi(x)$ 有连续导数，$\varphi(1)=0$，且曲线积分 $\int\limits_L y(x-\varphi(x))\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y$

与路径无关，求$\varphi(x)$，并计算$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} y(x-\varphi(x))\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y$.

解 由题意 $x-\varphi(x)=\varphi'(x)$，即 $\varphi'(x)+\varphi(x)=x$， （2 分）

所以 $\varphi(x)=e^{-\int \mathrm{d}x}(\int xe^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c)=e^{-x}(e^{x}(x-1)+c)$， （5 分）

又 $\varphi(1)=0$，所以 $c=0$，$\varphi(x)=x-1$. （6 分）

$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} y(x-\varphi(x))\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)} y\,\mathrm{d}x+(x-1)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x+\int_0^1 0\,\mathrm{d}y=0$. （10 分）

六、（满分 10 分）计算第二型曲面积分$I=\iint\limits_{S} 2xy^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解 补有向曲面$\widetilde{S}$：$z=z(x,y)=0$ $(D_{xy}:x^2+y^2\le 1)$，取下侧.

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\widetilde{S}} 2xy^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{V}(2y^2+z^2)\mathrm{d}V$， （3 分）

其中 $\iiint\limits_{V}(2y^2+z^2)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{2\pi}{5}$， （6 分）

而 $\iint\limits_{\widetilde{S}} 2xy^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\widetilde{S}} 2x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}} 2x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=-\dfrac{\pi}{2}$， （9 分）

所以$I=\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{9\pi}{10}$. （10 分）

七、（满分 10 分）求$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$ 的收敛域、和函数$S(x)$，并计算数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$的和.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$ 的收敛域为$(-1,1)$. （2 分）

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''-(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'$

$=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n)''-(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n)'=(\dfrac{1}{1-x})''-(\dfrac{1}{1-x})'=\dfrac{2}{(1-x)^3}-\dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$. （8 分）

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2}S(\dfrac{1}{2})=6$. （10 分）

B 卷

一、填空题（满分 30 分，每一空 3 分）

1．设 $z=(1+x^3)^y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ __3__，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$ __$2\ln 2$__.

2．设 $z=f(x+y,xy)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，则

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __$f_1'+xf_2'$__，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ __$f_{11}''+2xf_{12}''+x^2f_{22}''$__.

3、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+3y+5z=z^5$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ __$\dfrac{1}{5z^4-5}$__，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __$\dfrac{3}{5z^4-5}$__.

4．设曲线 L：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$，则 $\oint_L(x+3z^2)\,\mathrm{d}s=$ __2π__；

$\oint_L x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+3z\,\mathrm{d}z=$ __0__（从 z 轴正向往负向看，L 为逆时针方向）.

5．在收敛区间 $(-1,1)$ 内，下列函数关于 x 的幂级数为：

$\dfrac{1}{1+x}=$ __$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$__；　　$\arctan x=$ __$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$__.

二、单项选择题（满分 20 分，　每题 4 分）

1．设函数 $y_1=x+e^x$，$y_2=x+e^{3x}$，$y_3=x+e^x+e^{3x}$ 都是某个二阶常系数线性微分方程的解，则该方程的通解为____**A**____.

A． $y=x+c_1e^x+c_2e^{3x}$；　　**B．** $y=e^x+c_1x+c_2e^{3x}$；

C． $y=e^{3x}+c_1e^x+c_2x$；　　**D．** $y=c_1e^x+c_2e^{3x}+c_3x$.

2．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}\sin(x^2y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则 $f_x'(0,2)=$____**B**____.

A．0；　　**B．1；**

C．2；　　**D．3.**

3．设积分域 D：$|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D(|y|+x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____**C**____.

A． 0；　　**B．** $\dfrac{1}{3}$；

C． $\dfrac{2}{3}$；　　**D．** 1.

4．设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $f_x'(x,y)<0$， $f_y'(x,y)<0$，则在以下结论中，错误的是<u>　　B　　</u>．

A． $f(1,1)<f(0,0)$；　　　　B． $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个极大值；

C． $f(x,y)$ 没有极值；　　　　D．方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}<0$，其中方向 $\boldsymbol{l}=3\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}$．

5．在以下级数中，发散的是<u>　　C　　</u>．

A． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$；　　　　B． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{1}{n})$；

C． $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$；　　　　D． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+3^n}{6^n-5^n}$．

三、（满分 10 分）求微分方程组 $\begin{cases} y_1'=3y_1-5y_2 \\ y_2'=y_1-3y_2 \end{cases}$ 的通解.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 5\\ -1 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2-4=0$， 特征根 $\lambda_1=-2$， $\lambda_2=2$；

对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{v}_2=(5,1)^{\mathrm{T}}$；　　通解 $y=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2x}+c_2\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}e^{2x}$．

四、（满分 10 分）求由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成的均质几何体 V （密度 $\rho=1$ ）的质心坐标.

解 设质心 $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性易知，$\bar{x}=\bar{y}=0$．　　　　（2 分）

$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{4}$，　（或 $\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^1 zr\,\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{4}$ ）　　（6 分）

$\iiint\limits_V \mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{3}$，　（或由体积公式）　　　　（9 分）

所以 $\bar{z}=\dfrac{3}{4}$，质心 $P(0,0,\dfrac{3}{4})$．　　　　（10 分）

五、（满分 10 分）设函数 $\varphi(x)$ 有连续导数，$\varphi(1)=0$，且曲线积分 $\int\limits_L y(\varphi(x)-x)\,\mathrm{d}x-\varphi(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $\varphi(x)$，并计算 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}y(\varphi(x)-x)\,\mathrm{d}x-\varphi(x)\,\mathrm{d}y$．

解 由题意， $\varphi'(x)+\varphi(x)=x$，　　　　（2 分）

所以 $\varphi(x)=e^{-\int\mathrm{d}x}(\int xe^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c)=e^{-x}(e^x(x-1)+c)$，　　　　（5 分）

又 $\varphi(1)=0$，所以 $c=0$，$\varphi(x)=x-1$. （6 分）

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} y(\varphi(x)-x)\,\mathrm{d}x-\varphi(x)\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)} -y\,\mathrm{d}x+(1-x)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x+\int_0^1 0\,\mathrm{d}y=0 .$$ （10 分）

六、（满分 10 分）计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_S xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2yx^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解 补有向曲面 $\widetilde{S}$：$z=z(x,y)=0\qquad(D_{xy}:x^2+y^2\le 1)$，取下侧.

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\widetilde{S}} xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2yx^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_V (2x^2+z^2)\mathrm{d}V$， （3 分）

其中 $\iiint\limits_V (2x^2+z^2)\mathrm{d}V=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \rho^4\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{2\pi}{5}$， （6 分）

而 $\iint\limits_{\widetilde{S}} xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2yx^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\widetilde{S}} 2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}} 2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=-\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=-\dfrac{\pi}{2}$， （9 分）

所以 $I=\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{9\pi}{10}$. （10 分）

七、（满分 10 分）求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$ 的收敛域、和函数 $S(x)$，并计算数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$ 的和.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$. （2 分）

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''-\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''-(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'$$

$$=(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)''-(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)'=(\frac{1}{1-x})''-(\frac{1}{1-x})'=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3} .$$ （8 分）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{n-1}}=\frac{1}{3}S(\frac{1}{3})=\frac{3}{2} .$$ （10 分）