第二次课学习要求：

1、观看金课建设平台上的视频7.5、7.6、7.7。

2、结合本预习课件，要求掌握以下知识点：

（1）知道引入电场线的两点人为规定；

（2）掌握静电场中电场线的性质；

（3）领会电通量的概念，取微元再次体会会求积分等数学思想与物理学间的关系，会直接由定义计算通过均匀电场中平面的电通量；

（4）深刻理解静电场中的高斯定律，弄清楚定理中每一个物理量的含义、相互间的关系、定理的物理意义，会运用该定理求解三类对称分布电场的以及某些情况下的电通量问题。

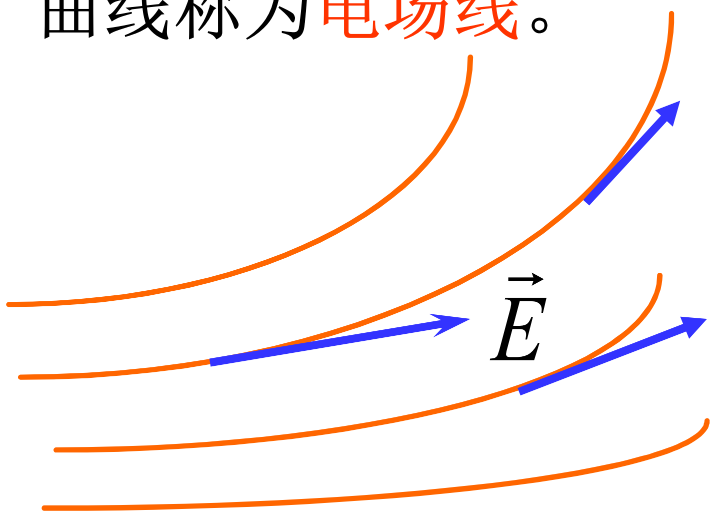
3、梳理现阶段学习到的两种求解场强空间分布的方法的基本思路和步骤。

§ 1 -2 静电场中的高斯定理

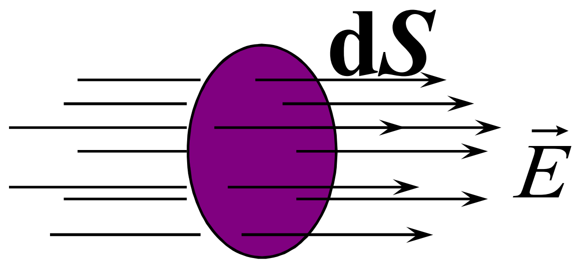
一. 电通量

1.电场线

在电场中画一组曲线，曲线上每一点的切线方向与该点的电场方向一致，这一组曲线称为电场线。

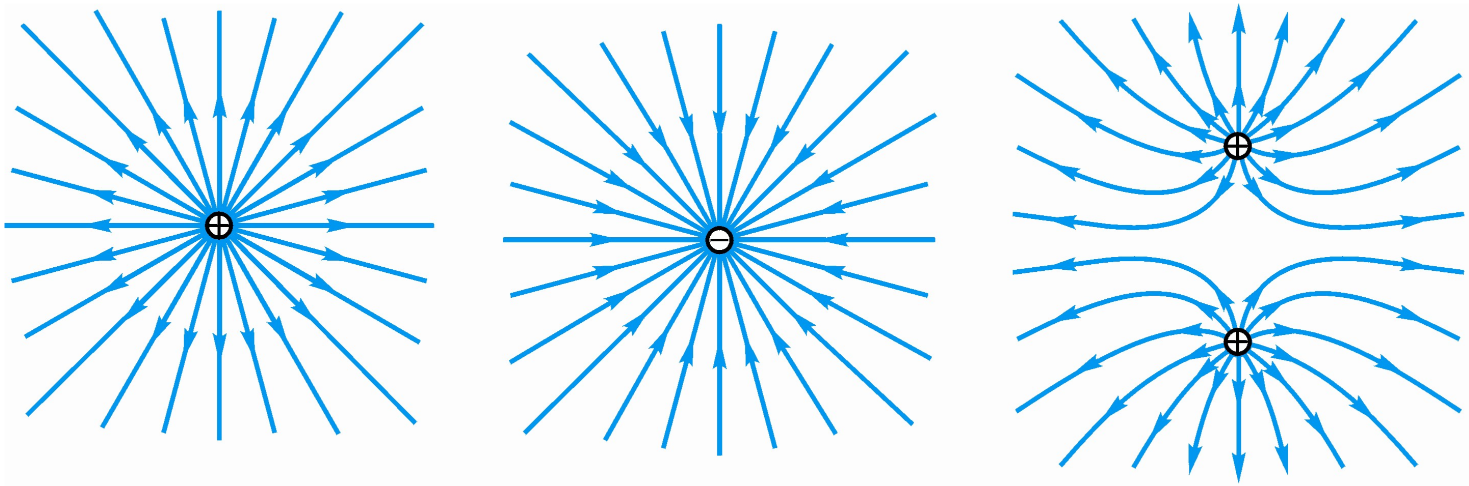


通过无限小面元dS的电场线数目dΦ_e与dS 的比值称为电场线密度。我们规定电场中某点的场强的大小等于该点的电场线密度

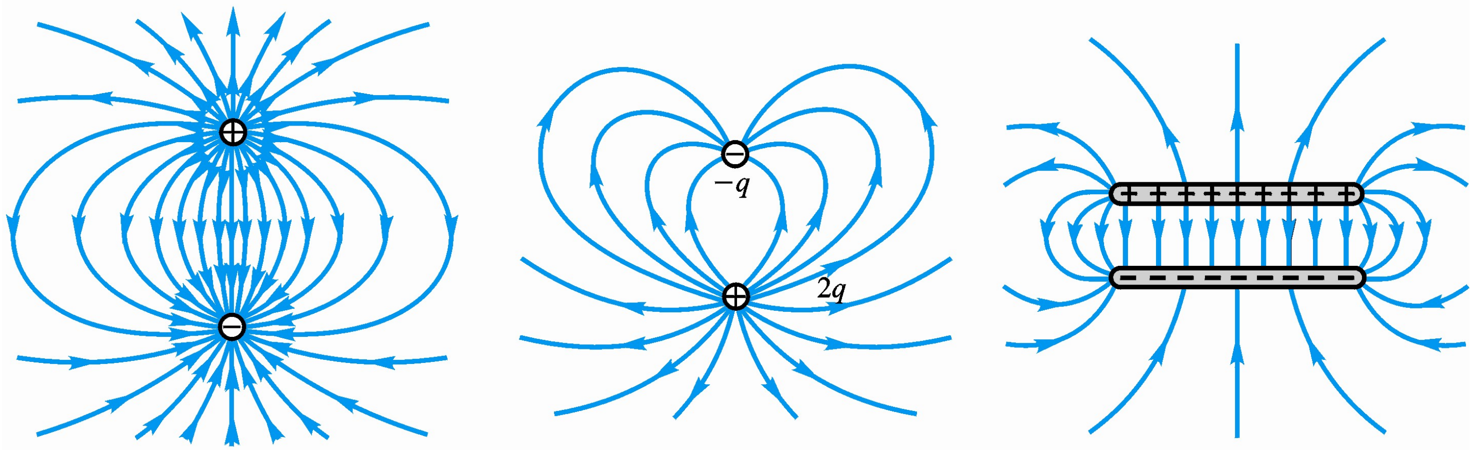


$\vec{E}$ $\begin{cases} \text{方向：电场线的切线方向} \\ \text{大小：} E = \dfrac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}S_\perp} = \text{电场线密度} \end{cases}$

几种常见的电场线：



(a) 正电荷　　(b) 负电荷　　(c) 两个等值正电荷



(d) 两个等值异号电荷　　(e) 电荷$+2q$与电荷$-q$　　(f) 正负带电板

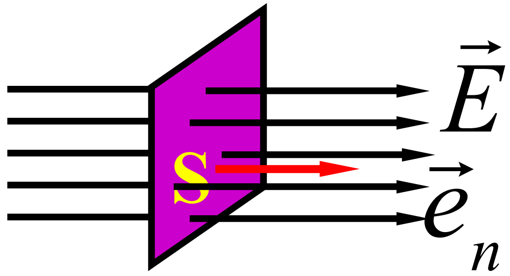
电场线性质

(1) 起于正电荷(或来自无穷远处)、止于负电荷(或伸向无穷远处)，不会在没有电荷的地方中断；

(2) 电场线不能形成闭合曲线；

(3) 在没有电荷的空间里，任何两条电场线不相交。

2. 电通量

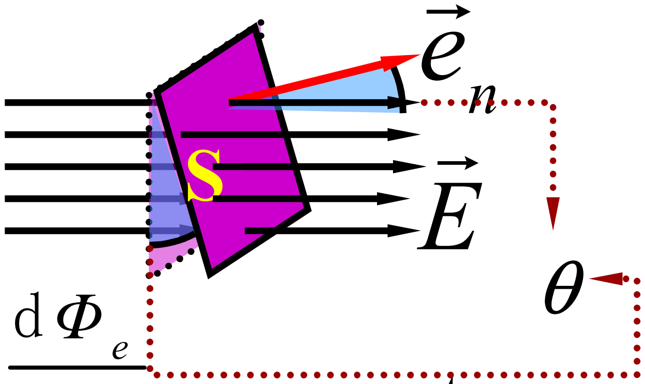


1）均匀电场 $\vec{E}$ ↑↑ $\vec{e}_n$

$$\Phi_e = ES$$

穿过的电场线数

2）均匀电场 $\widehat{\vec{E}\,\vec{e}_n} = \theta$



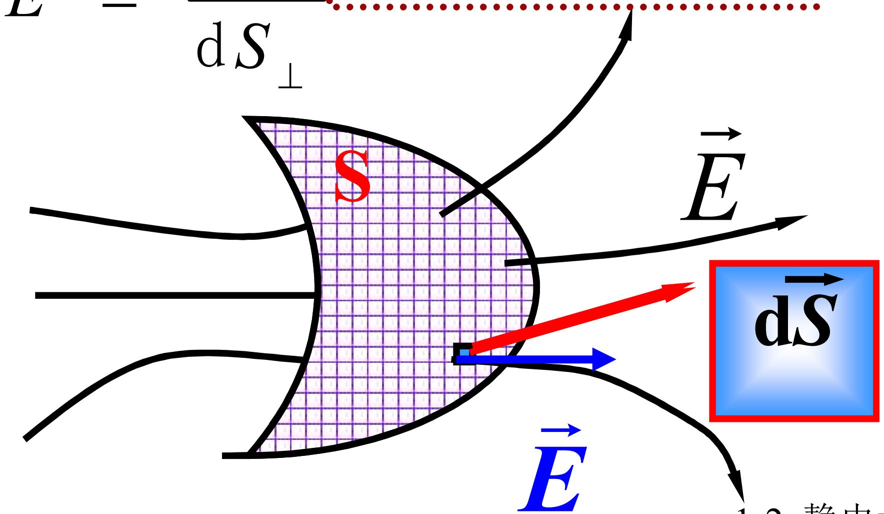
$$\Phi_e = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

$$E = \frac{d\Phi_e}{dS_\perp}$$

3）非均匀电场、任意曲面

$$d\Phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

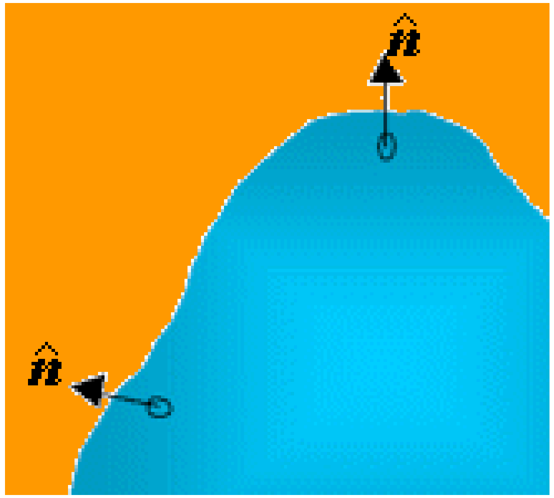
$$\boxed{\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$



单位：Vm

S为任意闭合曲面

$$\Phi_e = \oiint_S E\cos\theta \mathrm{d}S = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



规定：法线的正方向为指向闭合曲面的外侧。

$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} < 0$ 电场线穿入

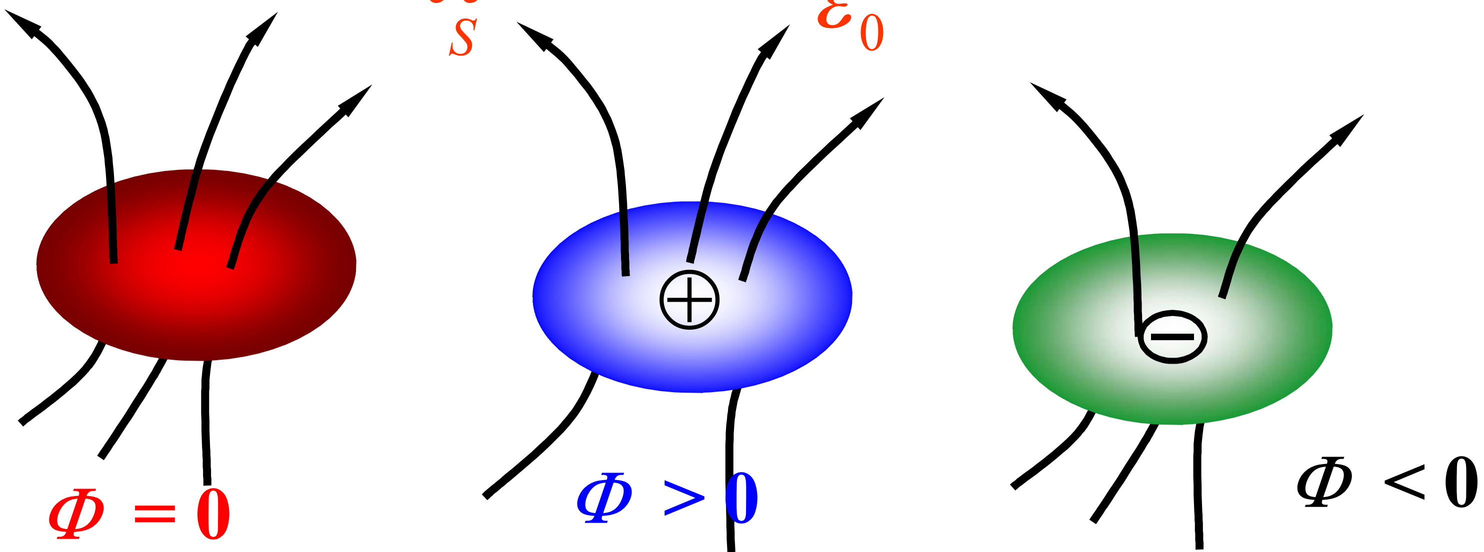
$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} > 0$ 电场线穿出

通过闭合面的电通量等于净穿出闭合面的电场线的条数

二、静电场中的高斯定理

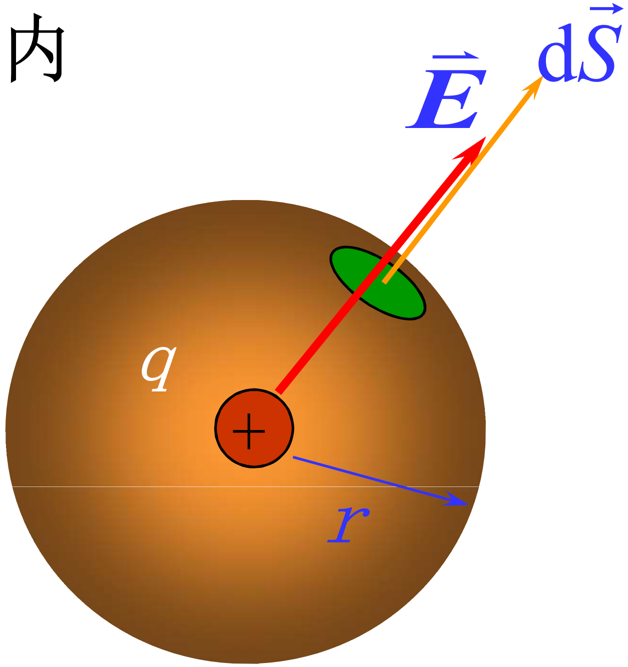
在真空中的任意静电场内，通过任一闭合曲面S的电通量Φ_e,等于该闭合曲面所包围的电荷电量的代数和除以ε_0，而与闭合曲面外的电荷无关。

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$



高斯定理的引出

(1) 场源电荷为点电荷且在闭合曲面内



$$\Phi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint\!\!\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint\!\!\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint\!\!\oint \mathrm{d}S$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

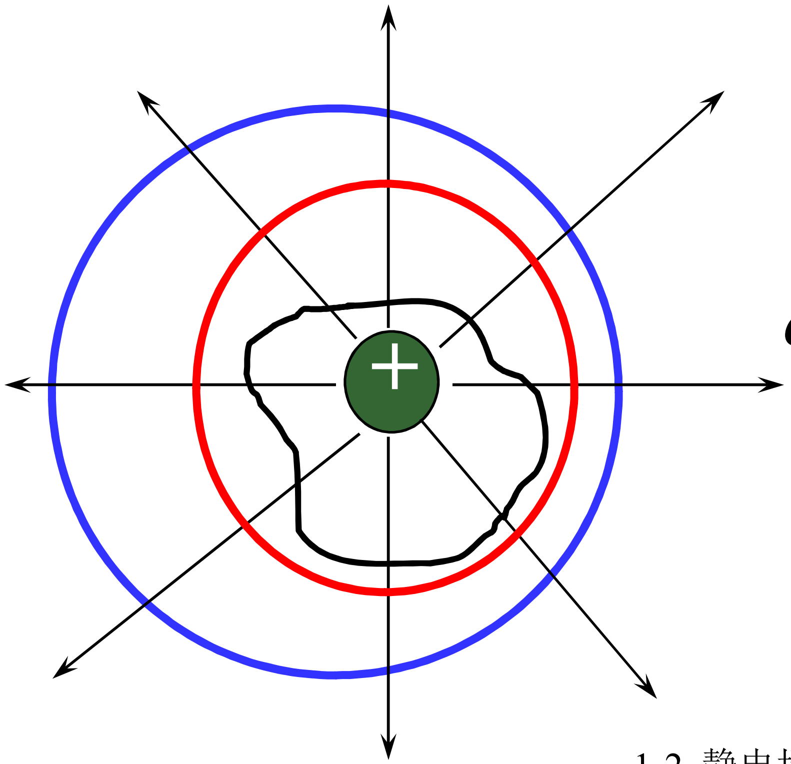
结论：与球面半径无关。即以点电荷**q**为中心的任一球面，不论半径大小如何，通过球面的电通量都相等，为$\frac{q}{\varepsilon_0}$。

讨论

$a.\quad q>0 \Rightarrow \Phi_e>0$ $\qquad q<0 \Rightarrow \Phi_e<0$

电量为q的正电荷有q/ε_0条电场线由它发出伸向无穷远

电量为q的负电荷有q/ε_0条电场线终止于它



b、若q不位于球面中心，积分值不变。

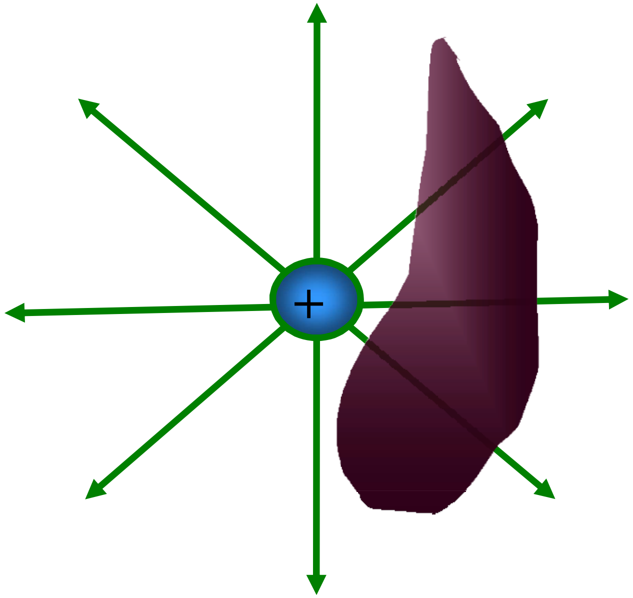
c、若封闭面不是球面，积分值不变。

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

(2) 点电荷Q电场中，闭合曲面不包围点电荷

取任意曲面S　电场线连续，通过S的净电场线为零

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



(3) 点电荷系的电场中

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

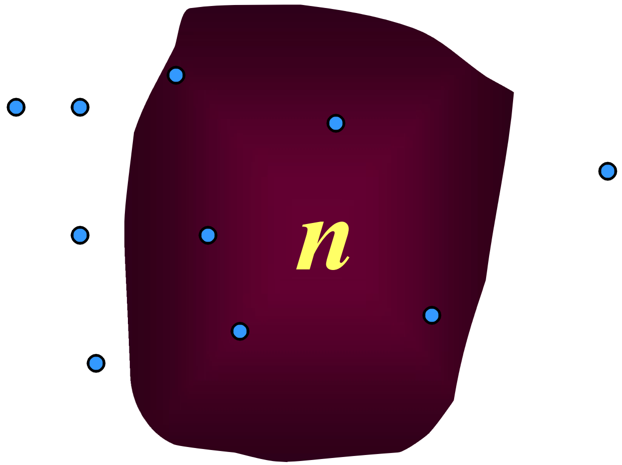
$$= (\oiint_S \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots \oiint_S \vec{E}_n \cdot \mathrm{d}\vec{S})$$

包围在内

$$+ \oiint_S \vec{E}_{n+1} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oiint_S \vec{E}_N \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

不被包围

$$\Phi_e = \sum \frac{Q_{i内}}{\varepsilon_0}$$



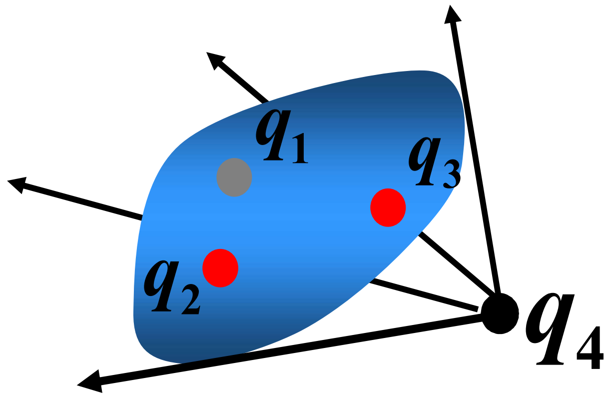
关于高斯定理的理解

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

$a.\ \vec{E}$ 是闭合面各面元处的电场强度，是由全部电荷（面内外电荷）共同产生的矢量和，而通过闭合曲面的电通量则仅由曲面内的电荷决定。

$$b.\quad \sum q_i > 0 \Rightarrow \Phi_e > 0$$

表明电场线从正电荷发出，穿出闭合曲面,所以正电荷是静电场的源头。



$$\sum q_i < 0 \Rightarrow \Phi_e < 0$$

表明有电场线穿入闭合曲面而终止于负电荷，所以负电荷是静电场的尾闾

静电场是有源场

$c.\ \sum_i q_i$----闭合曲面内所包围的电荷代数和，也称净电荷。$\sum_i q_i = 0$只能说明通过整个闭合曲面的电通量为零，而闭合曲面上各点的场强却不一定为零，并且闭合曲面上各面元的电通量也不一定都为零。

$d.$ 高斯定理不但适用于静止电荷和静电场，也适用于运动电荷和迅速变化的电磁场，它对任意形状的闭合曲面都适用。

*高斯定理微分形式（了解）

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e \mathrm{d}V \qquad \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V div\vec{E}\mathrm{d}V$$

$div\vec{E}$ — 场强$\vec{E}$的散度 $\qquad div\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E}$

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{E}\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e \mathrm{d}V \qquad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_e = 0 \rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad \rho_e \neq 0 \rightarrow \nabla\cdot\vec{E} \neq 0$$

高斯定理微分形式表明，静电场是有源场，静电场的源就是电荷密度不为零的那些点。

三、高斯定理的应用

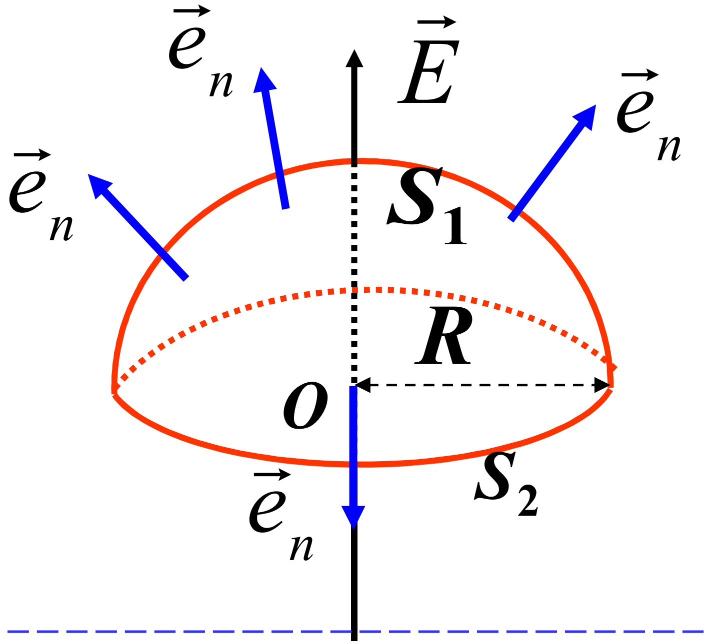
$$\Phi_e = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$$

1 . 利用高斯定理求某些电通量

例：设均匀电场 $\vec{E}$ 和半径为***R***的半球面的轴平行，

计算通过半球面的电通量。

课堂练习　　求均匀电场中一半球面的电通量。



$$\Phi_{S_1} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_{S_2} = -E\pi R^2$$

$$\because \sum q_i = 0 \qquad \therefore \Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\boldsymbol{\Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0}$$

$$\boldsymbol{\Phi_{S_1} + (-E\pi R^2) = 0}$$

$$\boldsymbol{\Phi_{S_1} = E\pi R^2}$$

$$\Phi_e = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

2、当场源分布具有高度对称性时求场强分布

步骤：

（1）. 对称性分析，确定 $\vec{E}$ 的大小及方向分布特征

（2）. 作高斯面，计算电通量及 $\sum q_i$

要求： * 高斯面必须是闭合曲面且必须通过所求场点

* 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算,

在 S 上待求 $\vec{E}$ 处，让一部分曲面上 $\vec{E} /\!/ \mathrm{d}\vec{S}$ 且等大,

使得 $\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\int \mathrm{d}S$,

其余处必须有 $\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \begin{cases} \text{or} \quad E = 0, \\ \text{or} \quad \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{S} \end{cases}$

（3）. 利用高斯定理求解

例**1.** 均匀带电球面的电场。已知$\boldsymbol{R}$、 $\boldsymbol{q>0}$

解: 对称性分析 $\longrightarrow \vec{E}$具有球对称

作高斯面——半径为r 的同心球面 $\boldsymbol{r < R}$

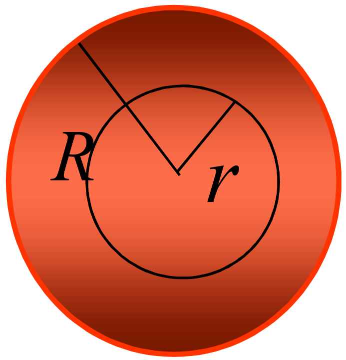
计算电通量 $$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E_1 \mathrm{d}S$$

$$= E_1 \oiint_S \mathrm{d}S = E_1 4\pi r^2$$

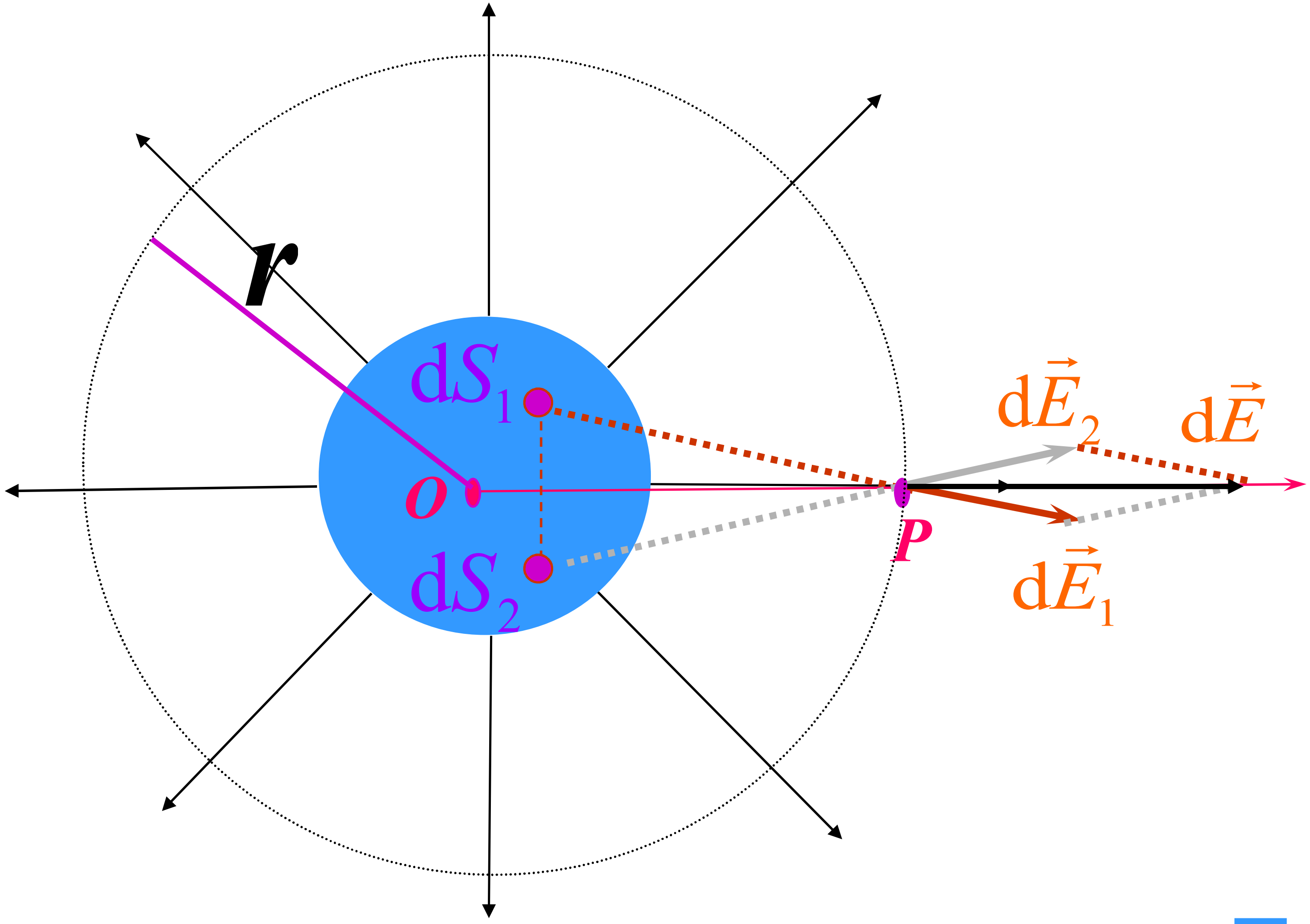
高斯面内包围的电量 $$\sum q_i = 0$$

用高斯定理求解 $$\boldsymbol{E_1 4\pi r^2 = 0}$$

$$\boxed{\therefore \boldsymbol{E_1 = 0}}$$



$\vec{E}$的对称性分析



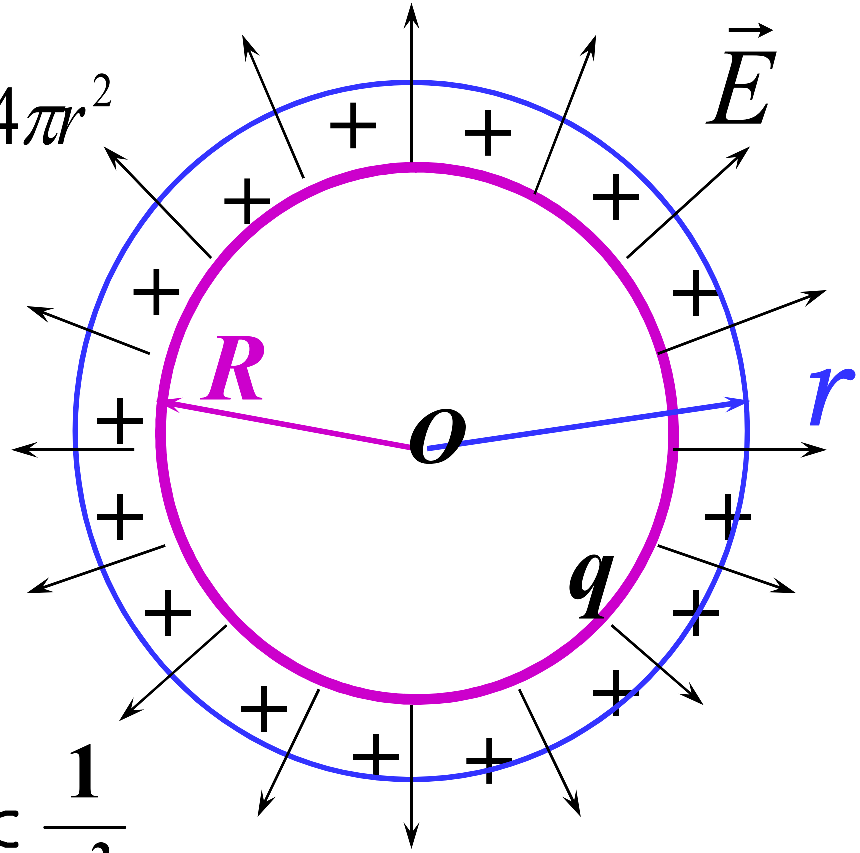
r
$\mathrm{d}S_1$
O
$\mathrm{d}S_2$
P
$\mathrm{d}\vec{E}_2$
$\mathrm{d}\vec{E}$
$\mathrm{d}\vec{E}_1$

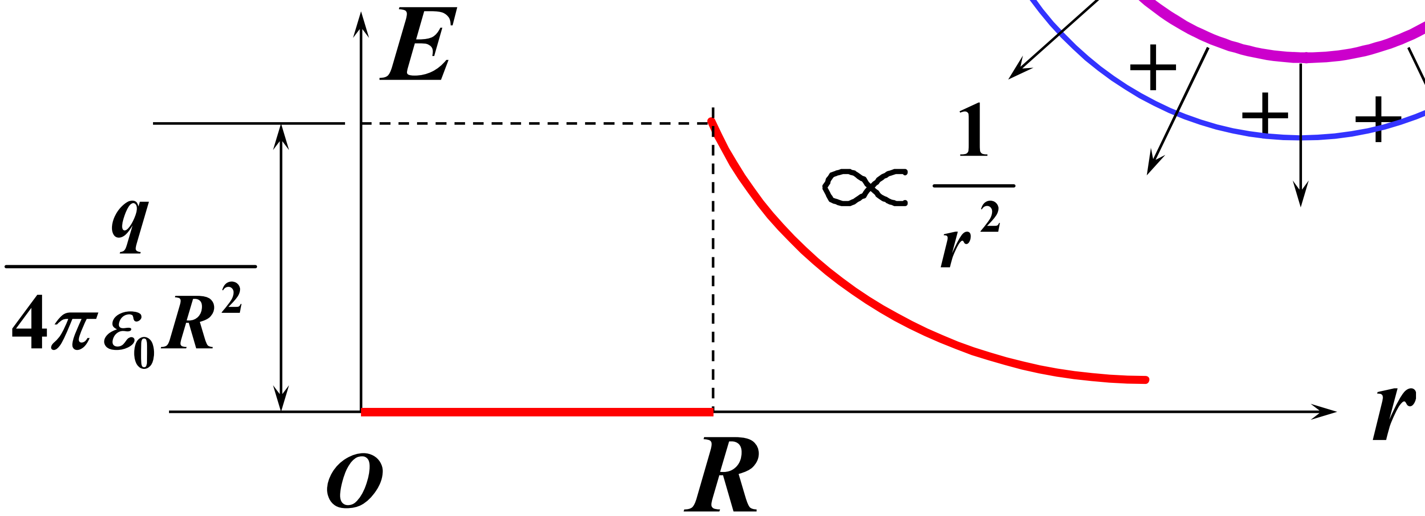
$r > R$

$$\Phi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_2 \oint\!\!\oint_{S_2} \mathrm{d}S = E_2 4\pi r^2$$

$$\sum q_i = q \qquad E_2 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$





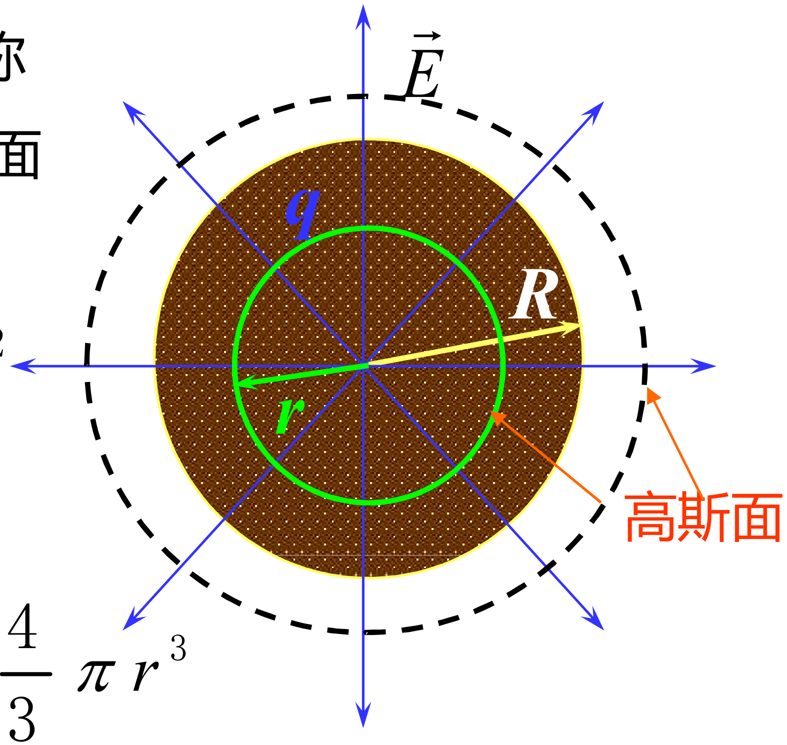
例2. 均匀带电球体的电场。已知R、 $q>0$

解: 对称性分析 ----场强分布具有球对称

作高斯面——任意半径为r 的同心球面

计算电通量

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E4\pi r^2$$



高斯面内包围的电荷量

$$r < R, \quad \sum q_i = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3$$

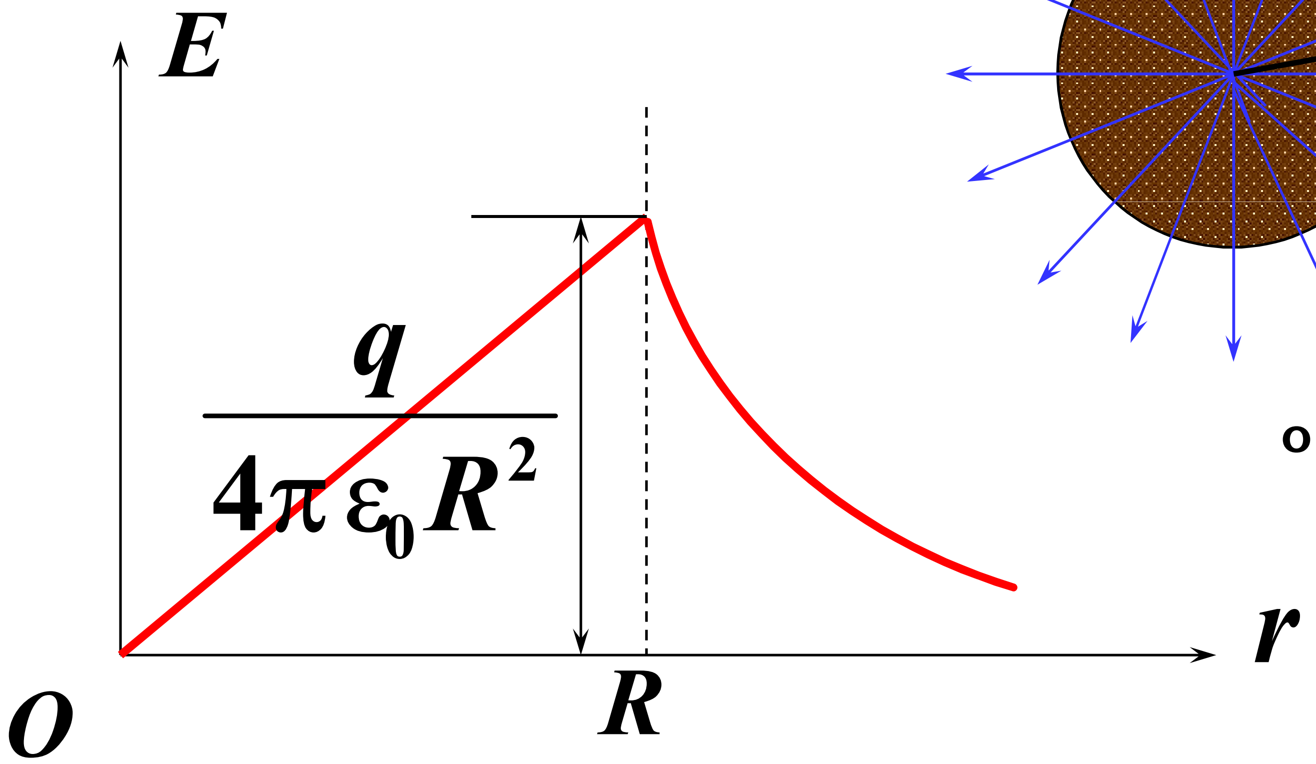
用高斯定理求解

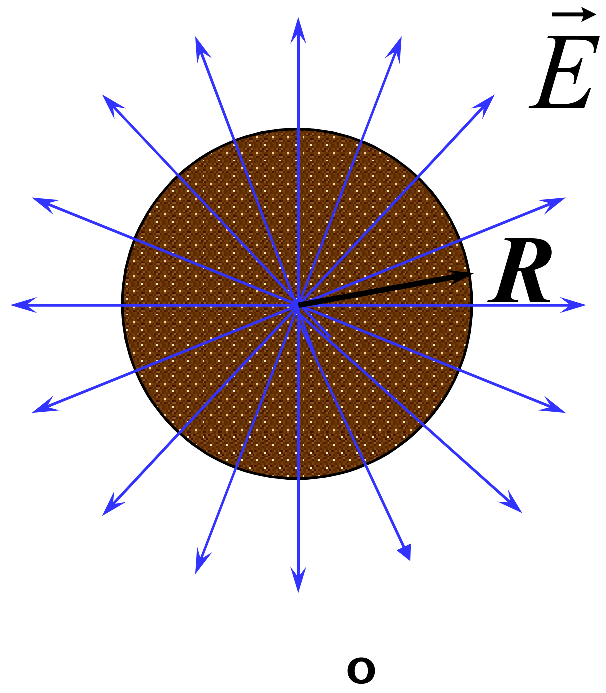
$$r > R, \quad \sum q_i = q$$

$$E_1 = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(r < R)$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(r > R)$$

均匀带电球体电场强度分布曲线





例3. 均匀带电无限大平面的电场，已知σ

解： $\vec{E}$具有面对称

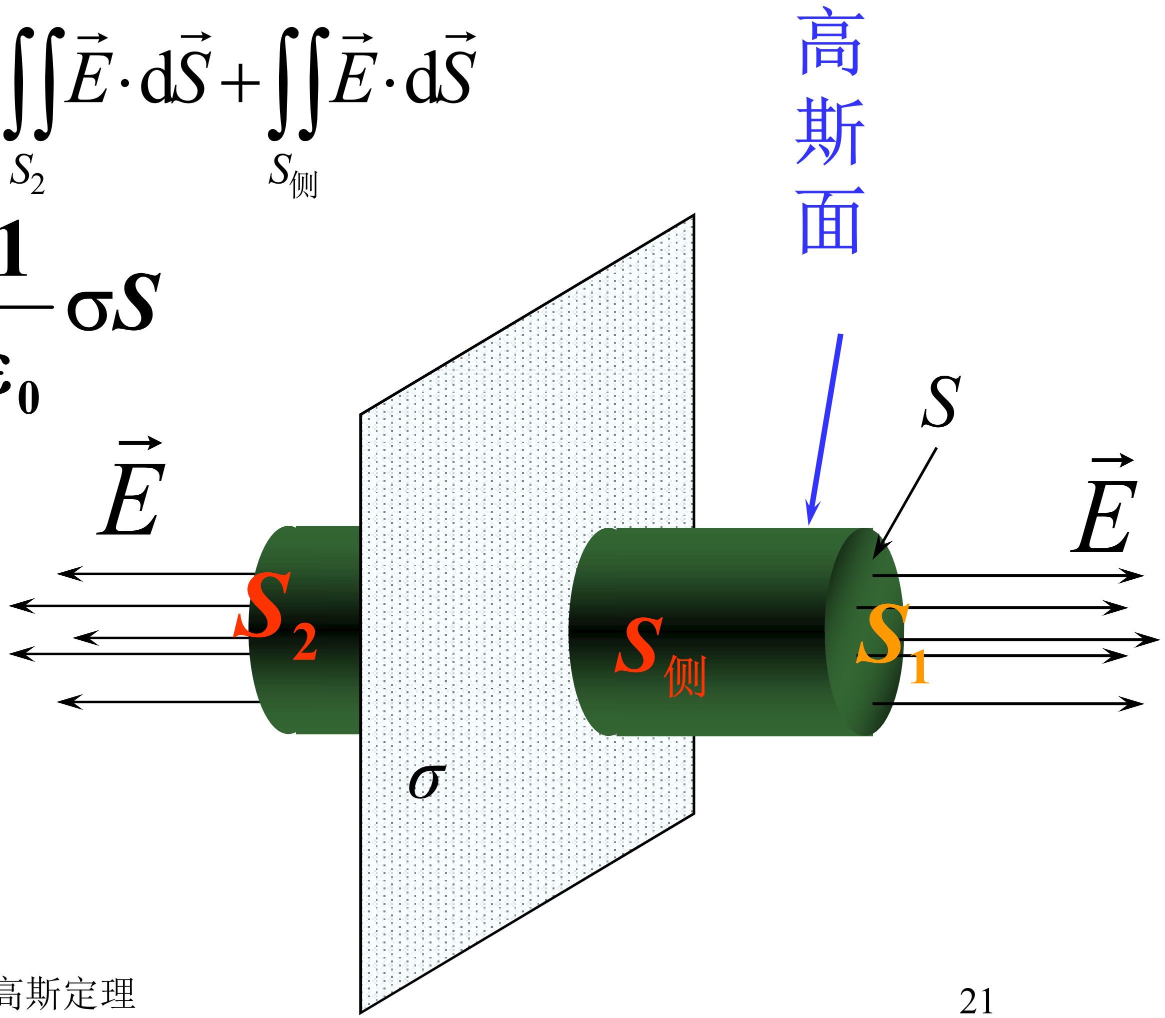
高斯面：两底面与平板平行等距、侧面与平板垂直的圆柱面

$$\Phi_e = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_{侧}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= ES_1 + ES_2 + 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

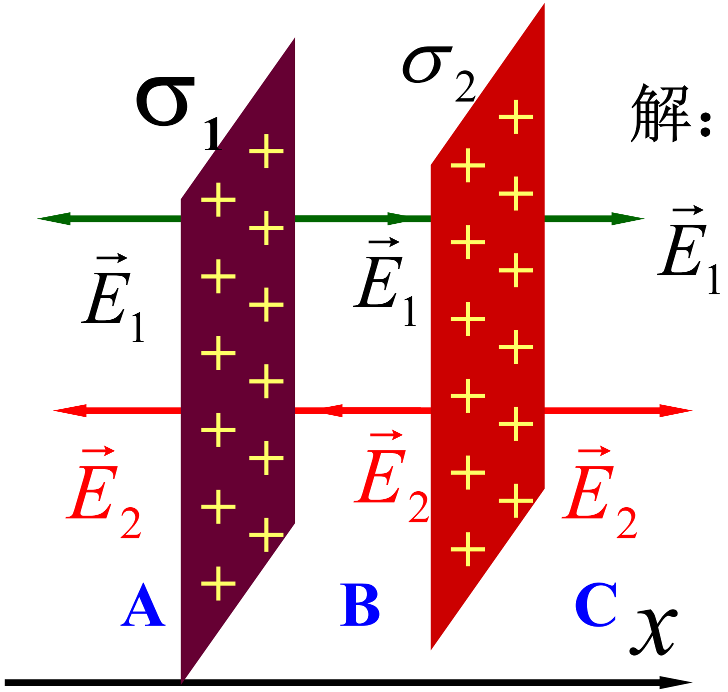
$$2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



例 求：电荷面密度分别为σ_1 、σ_2 两个平行放置的无限大均匀带电平面的场强分布。

当场源是几个具有对称性的带电体时，可用高斯定理分别求各带电体单独存在时的场强，再作矢量叠加。



解：

$$E_1=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\qquad E_2=\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_A=-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_B=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_C=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

带电平板电容器间的场强

$$\boxed{E_B=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

当 $\sigma_1=-\sigma_2=\sigma$

$$E_A=E_C=0$$

例4. 均匀带电圆柱面的电场。

沿轴线方向单位长度带电量为λ

解：场具有轴对称　　　　高斯面：圆柱面

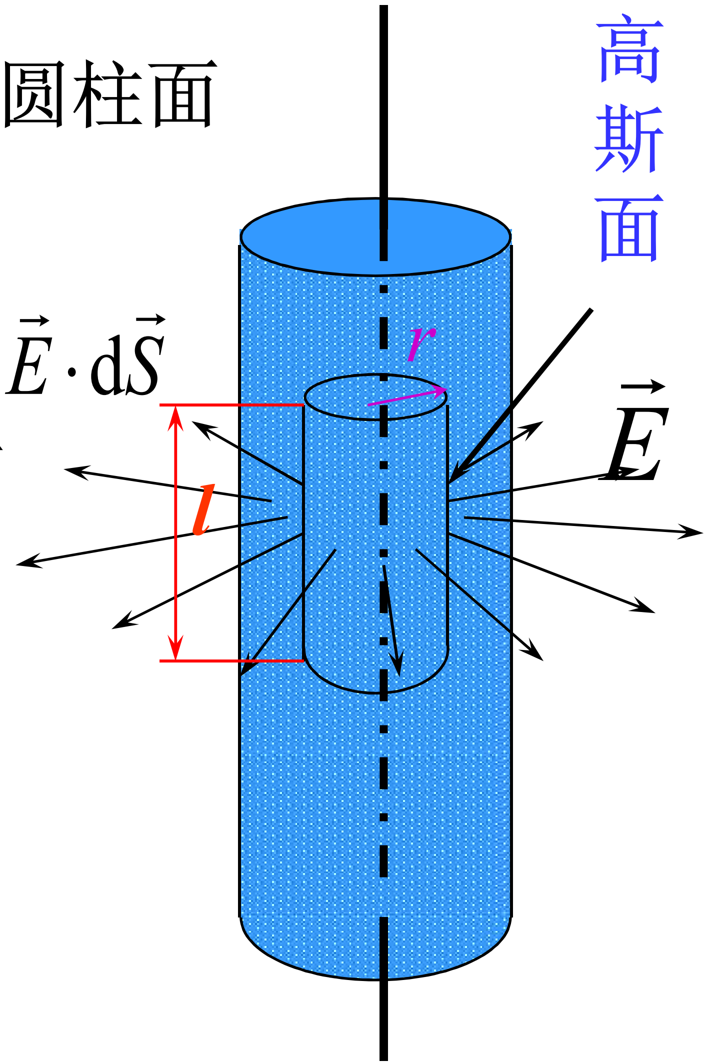
(1) $r<R$

$$\Phi_e=\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{上底}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\iint_{下底}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\iint_{侧面}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$=0+0+E2\pi rl=E2\pi rl$$

$$\sum q_i=0$$

$$\boxed{E=0}$$



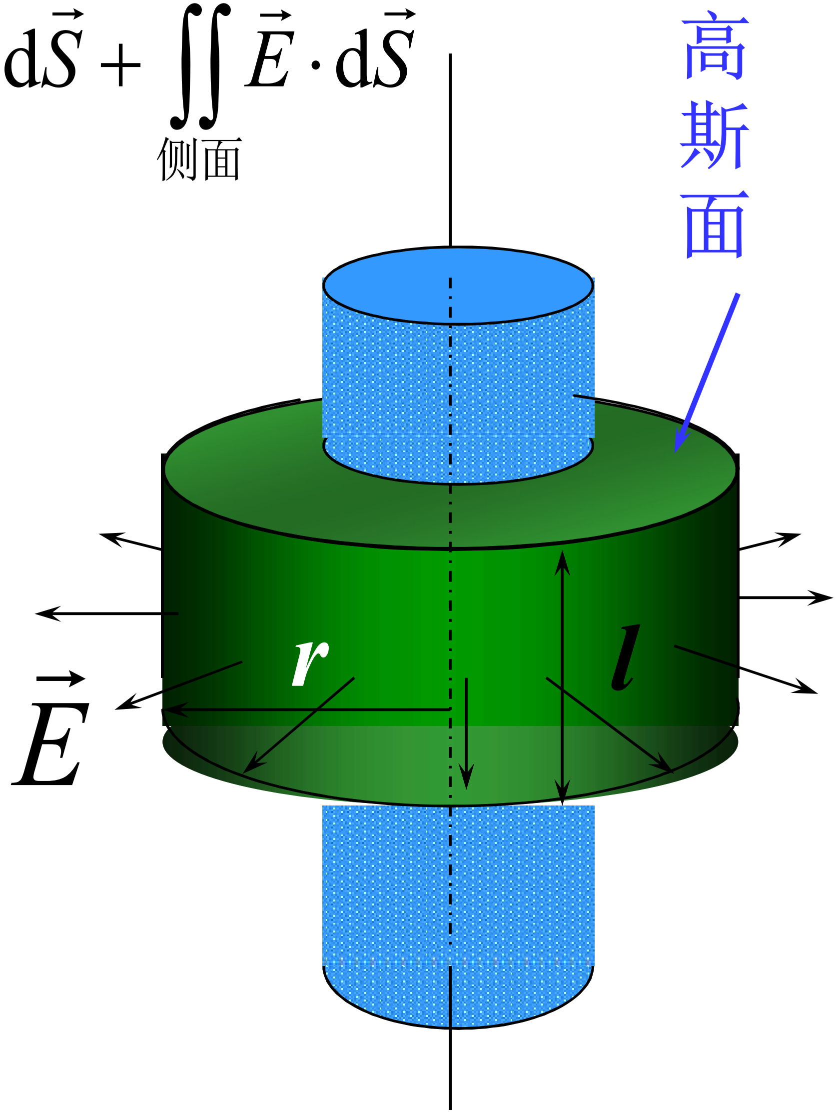
(2) $r > R$

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E2\pi rl$$

$$\sum q_i = \lambda l$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



小结

- 电荷分布具有均匀球对称性，则其电场分布具有球对称性；
- 无限大均匀带电平板的电场分布具有均匀面对称性；
- 电荷分布呈均匀轴对称性，则其电场分布具有均匀轴对称性。

需要重点掌握的内容

- 明确任何电荷（无论静止还是运动）都在其周围空间激发电场，而电场又对处在其中的任何电荷都有力的作用；**电场是物质的一种存在形态，它同实物一样也具有能量、动量、质量等属性。**
- **掌握场强定义，知道场强是反映电场强弱和方向性的基本物理量，会计算场强（有三种不同的方法计算不同的场强。）**

- 重点掌握高斯定理的内容及理解。会运用它求某些曲面的电通量及某些特殊的场强。
- 计算场强的方法：

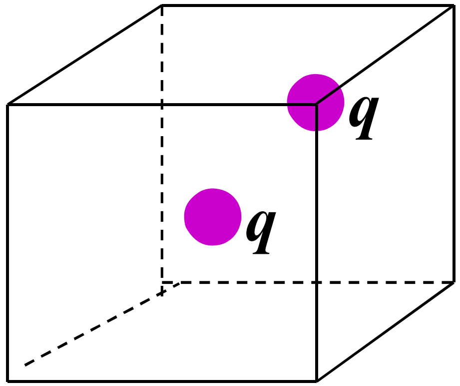
1. 由点电荷场强公式及场强叠加原理求电荷呈离散分布的带电体的场强。

2. 分割带电体，取微元，求积分——一般方法，用来求连续带电体的场强。原则上可计算所有带电体的场强。

3. 利用高斯定理求场强——仅限于具有高度对称性的电场。

课堂讨论

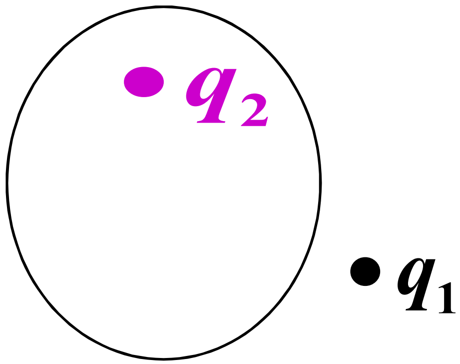
1．立方体边长 a，求



$q\begin{cases}\text{位于中 心}\\ \text{位于一顶点}\end{cases}$ 过每一面的通量

$$\Phi_e=\frac{q}{6\varepsilon_0}$$

$$\Phi_e=\begin{cases}0\\ \dfrac{q}{24\varepsilon_0}\end{cases}$$



2．如图　讨论

移动两电荷对场强及通量的影响

课堂练习：

求均匀带电圆柱体的场强分布，已知R，λ

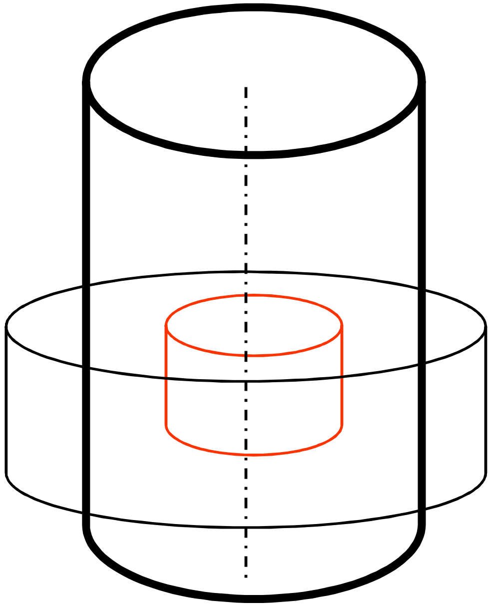
$r < R$

$$E2\pi rl = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \pi R^2}\pi r^2 l$$

$r > R$

$$E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2} & r < R \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$



练习 已知：均匀带电球壳的ρ（或 q）及R_1、R_2

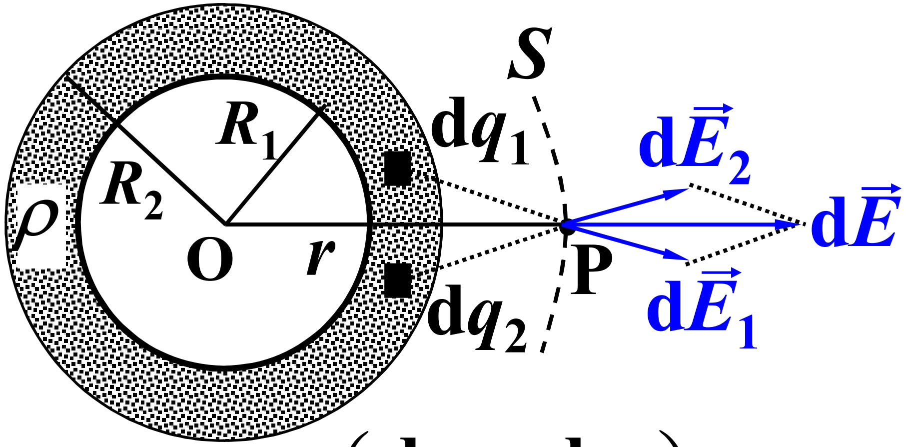
求：电场强度的分布。

解：分析$\vec{E}$的对称性：

$$\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}\vec{E}_1 + \mathrm{d}\vec{E}_2$$

$$\mathrm{d}E_1 = \mathrm{d}E_2$$

方向是关于OP 对称的

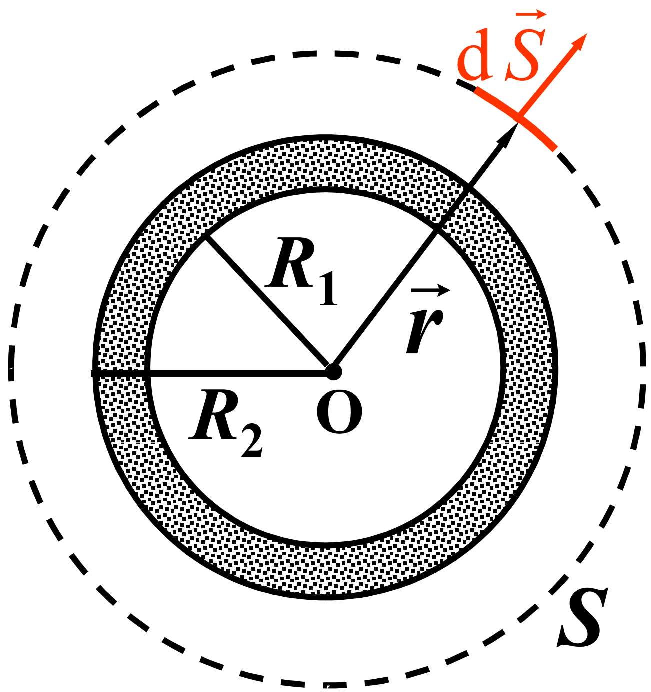


（q）（$\mathrm{d}q_2 = \mathrm{d}q_1$）

球对称

$$\vec{E} = E_{(r)} \cdot \vec{e}_r$$

选高斯面S为与带电球壳同心的球面



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

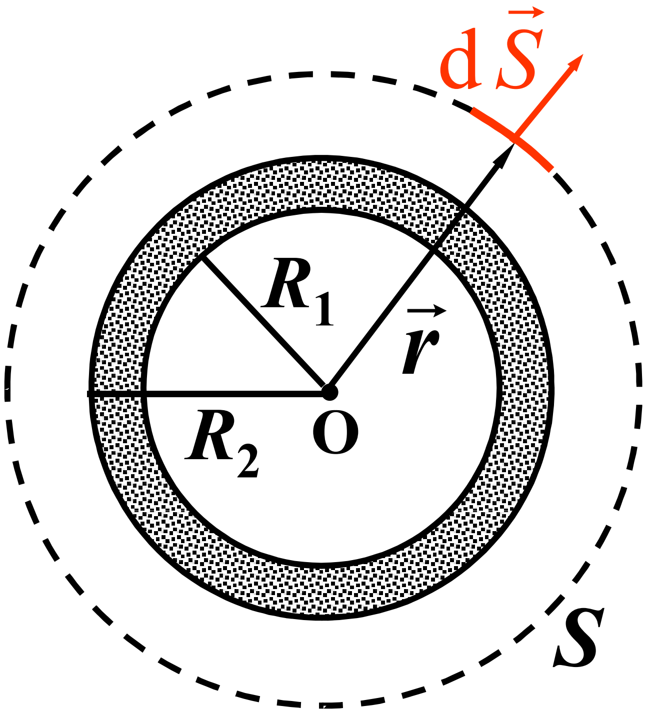
$$= \oint E(r)\mathrm{d}S \;= E(r)\oiint_S \vec{S}$$

$$= 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

又 $$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_{内}}{\varepsilon_0}$$

所以 $$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$r < R_1$， $q_{内} = 0$， 有 $E = 0$ ；



- $R_1 < r < R_2$，

$$q_{内} = \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)\rho，$$

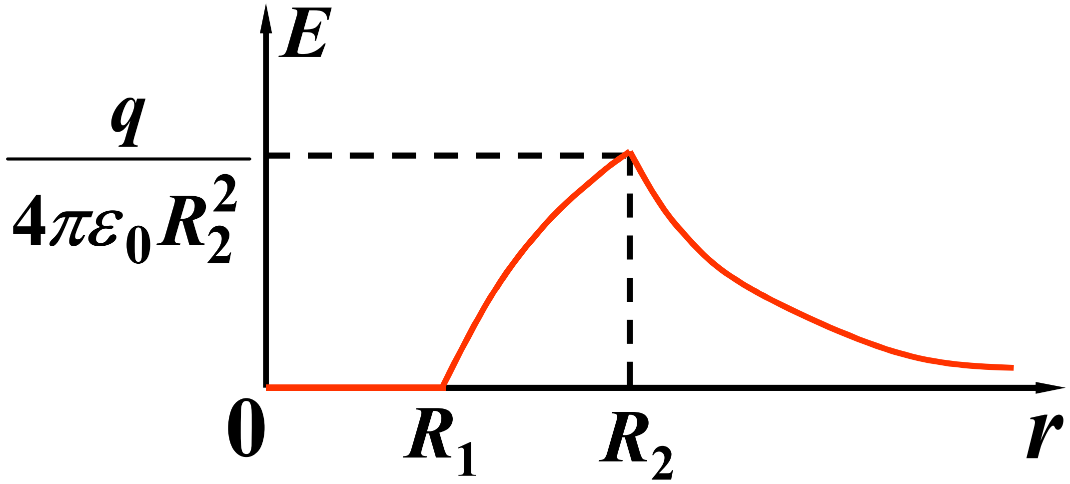
有 $$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{e}_r$$

- $r > R_2$， $q_{内} = \dfrac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho = q$，

有 $$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$ （同点电荷的电场）

讨论

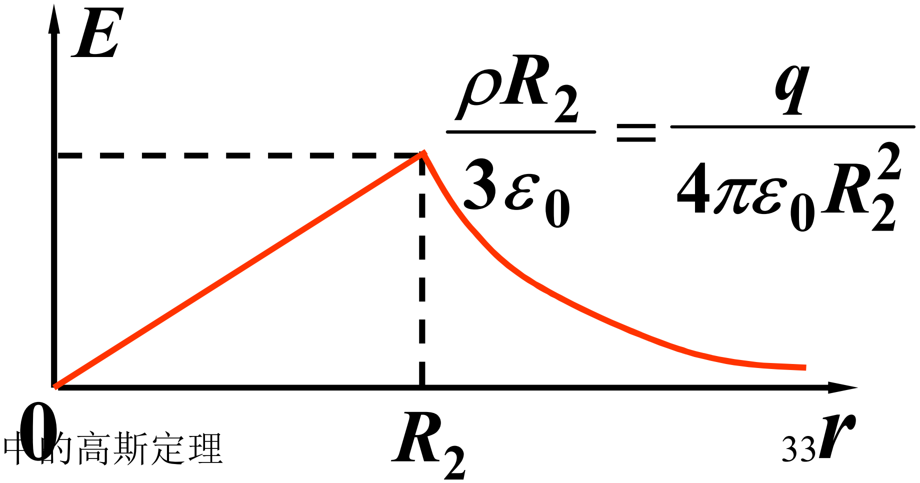
1. E 的分布



2. 特殊情况

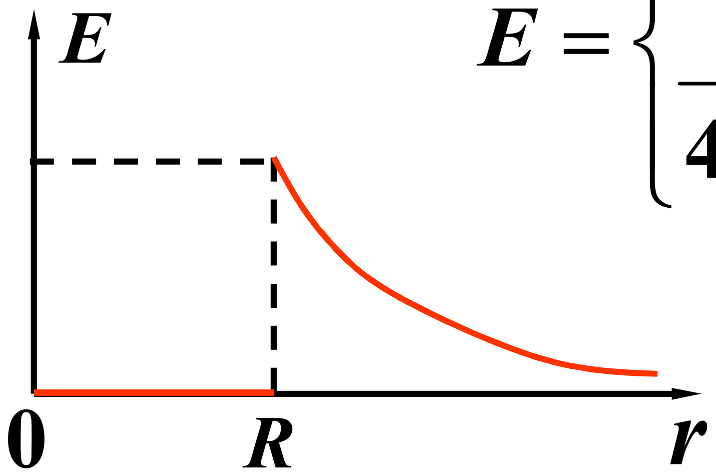
1）令$R_1 = 0$，得均匀带电球的情形：

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon_0} & （球内） \\ \dfrac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & （球外） \end{cases}$$



2）令$R_1 = R_2 = R$，且 q 不变，

得均匀带电球面的情形：



$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \quad , & （球面内） \\ \dfrac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & （球面外） \end{cases}$$

在 $r = R$ 处 E 不连续，

这是因为忽略了电荷厚度所致。