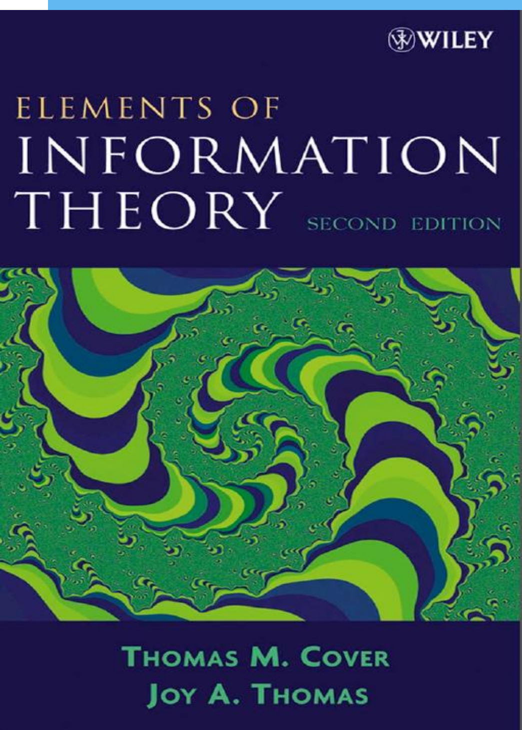
信息论

信号传输与处理的理论基础

Gauss信道-续（教程9.1,9.3~9.5）

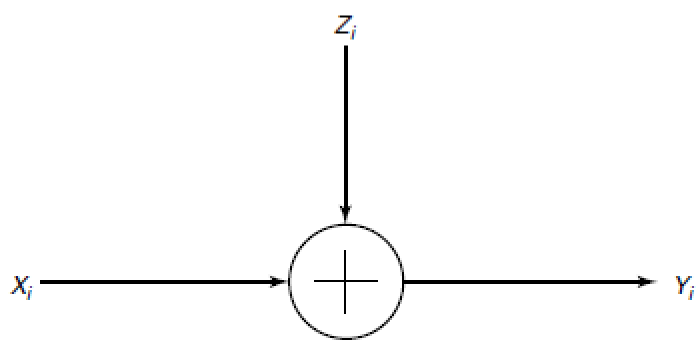


Gauss信道容量的基本公式
有限带宽Gauss信道的容量公式
更多的容量公式和性能优化

Gauss信道模型和基本性质

* 简要的概念回顾

* 基本Gauss信道是这样一个线性传输系统，具有以下特征：
*   (1) $Y = X + Z$；X、Y是发送和接收信号。
*   (2) 噪声Z是Gauss随机变量，其概率密度 $p(z) = \frac{1}{(2\pi N)^{1/2}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2N}}$



*

Gauss信道容量公式

* 简要的公式回顾
* 有限功率P的Gauss信道的容量（定义） $C = \max_{f(x): E X^2 \le P} I(X;Y).$
* Gauss信道容量的计算公式
* $$C(P) = (\frac{1}{2})\log(1+\frac{P}{N})$$
*
* Gauss信道容量公式的推广：
* Y = HX + Z；H是信道的传输增益系数，这时有
* $$\boxed{C(P, H) = (\frac{1}{2})\log(1+|H|^2\frac{P}{N})}$$

有限带宽Gauss信道容量公式

* **简要的概念回顾** 有限带宽Gauss信道是这样一个线性传输系统：
*   (1) $Y(t) = h(t)*X(t) + Z(t) = \int_0^{+\infty} d\tau h(\tau)X(t-\tau) + Z(t)$；
* t表示时间，X、Y是发送和接收信号。
*   (2) 信道的响应函数h(t)具有有限带宽2W，即信道的幅频特性
* $H(\omega) = 0, |\omega|>W$
*   (3) 噪声Z(t)是Gauss随机变量，其概率密度
* $$p[Z(t)=z] = \frac{1}{(2\pi N)^{1/2}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2N}}$$

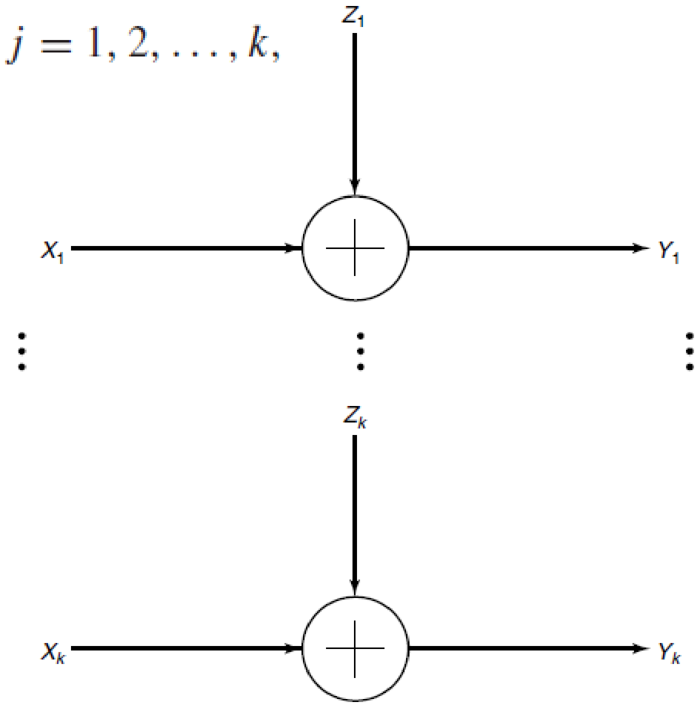
    (4) Z(t)是白噪声过程，即任何不同时刻的$Z(t_1)$和$Z(t_2)$概率独立。

*   常数增益Gauss信道上每单位时间的传输容量
*
* $$C_W = W\log(1+|H|^2\frac{P}{N_0 W})$$

容量公式的应用（1） 参阅9.4节

* 并行Gauss信道的容量

$$Y_j = X_j + Z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$



* 考虑右图中的并行Gauss信道模型，所有
* 发送信号X_j接受总功率约束

$$E \sum_{j=1}^{k} X_j^2 \le P.$$

* 各信道上的噪声Z_1、…,Z_k概率独立，且为
* Gauss噪声：

$$Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j)$$

* 问题：确定该信道的容量。

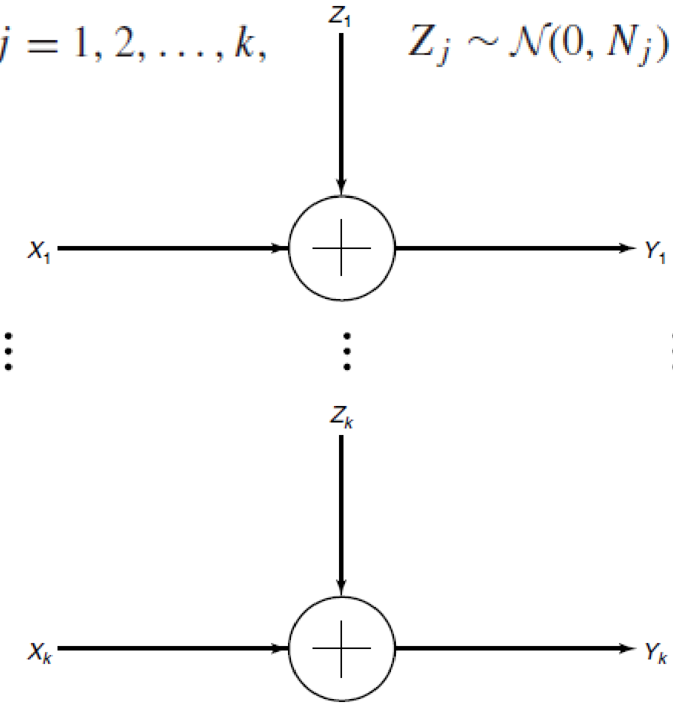
* 分析：第一步：根据容量的定义有

$$C = \max_{f(x_1,x_2,\ldots,x_k):\sum E X_i^2 \le P} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$$

容量公式的应用（2） 参阅9.4节

* 并行Gauss信道的容量

$$Y_j = X_j + Z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j)$$



* 分析（续）

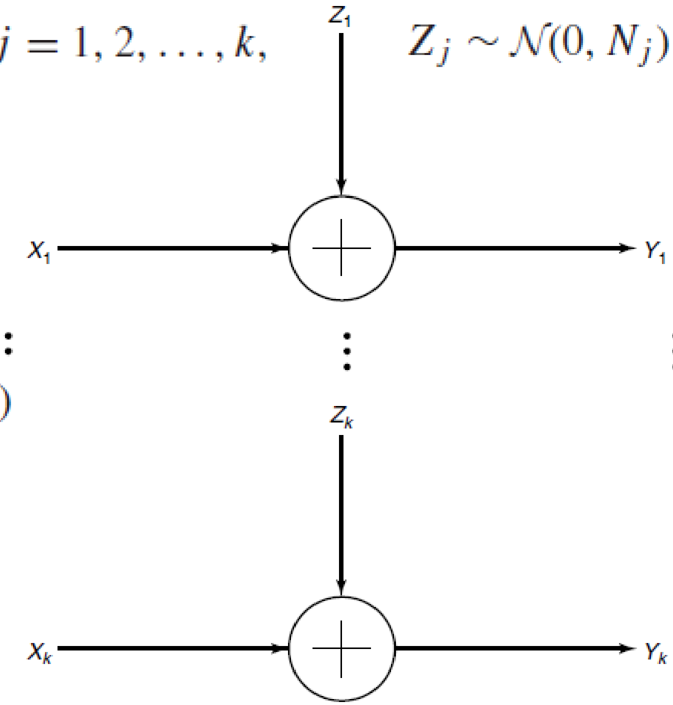
  第二步：

$$\begin{aligned}
I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) \\
&= h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k | X_1, X_2, \ldots, X_k) \\
&= h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - h(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k | X_1, X_2, \ldots, X_k) \\
&= h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - h(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k) \\
&= h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i) \\
&\le \sum_i h(Y_i) - h(Z_i) \\
&\le \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right),
\end{aligned}$$

容量公式的应用（3） 参阅9.4节

* 并行Gauss信道的容量

$$Y_j = X_j + Z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j)$$



* 分析（续）

  第三步：求解最优化问题

$$C = \max_{f(x_1, x_2, \ldots, x_k): \sum E X_i^2 \le P} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$$

$$= max_{f(x1,\ldots,xk):\ P1+\ldots+Pk \le P} \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right)$$

该优化问题的含义是：在满足总功率约束的条件下，求各信道上的最优功率分配 $(P_1^*, \ldots, P^*_k)$, $\Sigma_j P_j^* \leqq P^*_j$, 使总容量C最大。

解法：运用乘子算法求 $\sum_i \ log\,(1 + \frac{P_i}{N_i}) - \lambda \sum_i \ P_i$ 对 $(\lambda, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_k)$ 的极值。

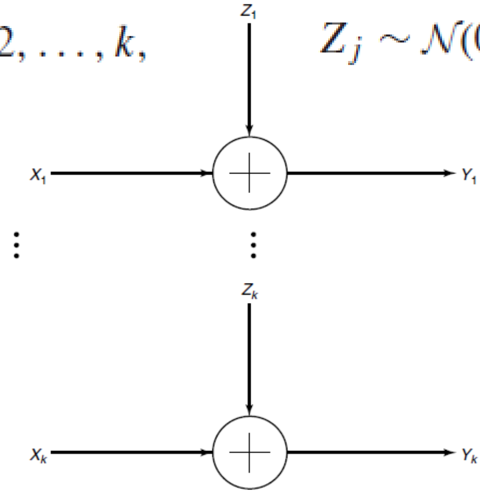
对每个 P_j 求偏导数，得极值方程

$$\mathrm{P}_j + \mathrm{N}_j = 1/\lambda \quad j = 1,2,\ldots,\mathrm{N}$$

容量公式的应用（4） 参阅9.4节

* 并行Gauss信道的容量

$$Y_j = X_j + Z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \qquad Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j)$$



* 分析（续）

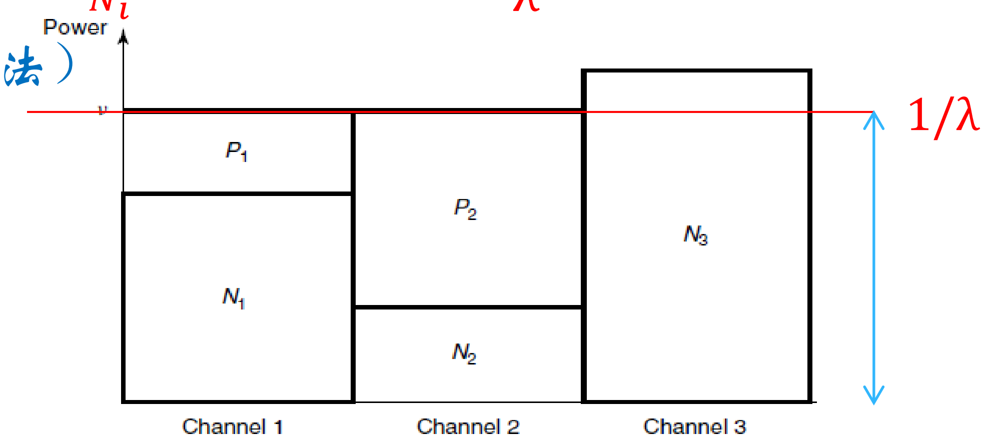
第四步：将极值方程的形式解代回约束方程，确定乘子λ

$$P = \sum_i P_i^{\ *} = \sum_{i=1}^{k} max(0, \frac{1}{\lambda} - N_i)$$

小结：以上方程须进行数值求解，根据λ的数值最终确定问题的解：

$$C = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} log(1+\frac{P*_i}{N_i}), \quad P^*_i = max(0, \frac{1}{\lambda} - N_i), \ i=1,2,\ldots,N$$

解的解释（注水算法）



容量公式的应用（5）

* 有限带宽/彩色高斯信道及其总容量（“彩色”指频率特性H(ω)不是常数函数）
* (1) $y(t) = h(t)*x(t) + Z(t) = \int_0^{+\infty} d\tau h(\tau)x(t-\tau) + z(t)$；
* 等价的频域模型
* $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) + Z(\omega)$
* t表示时间，ω 表示频率，X、Y是发送和接收信号。
* (2) 信道具有有限带宽2W：
* $H(\omega) = 0, |\omega|>W$
* (3) 噪声Z(t)是Gauss随机变量并具有功率谱密度$N_0(\omega)$

参考公式

$C = W\log(1+|H|^2\frac{P}{N_0 W})$

* 总功率有限的彩色Gauss信道上每单位时间的总容量
* $C = \max \int_{-W}^{W} d\omega \log(1+|H(\omega)|^2\frac{P(\omega)}{N_0(\omega)})$ s.t. $\int_{-W}^{W} d\omega P(\omega) \leqq P$， $P(\omega)\geq 0$

【思考】为什么总容量具有以上的积分表达式?

【提示】将有限带宽信道想象为频域上的一组带宽为$(\omega_j, \omega_j+d\omega)$的Gauss并行子信道。

容量公式的应用（6）

* 有限带宽/彩色高斯信道及其总容量（续）
*
* 总功率有限的彩色Gauss信道上每单位时间的总容量归结为以下
* 带约束的优化问题：
* 求发送端总功率P的最优分配$P^*(\omega)$，$|\omega| \leqq W$，使
* $C = \max \int_{-W}^{W} d\omega \log(1+|H(\omega)|^2 \frac{P(\omega)}{N_0(\omega)})$ s.t. $\int_{-W}^{W} d\omega P(\omega) \leqq P$，$P(\omega) \geq 0$
* 最优问题的解：
* 应用泛函变分和乘子算法对上述积分表达式计算变分、令其为零，
* 得到$P^*(\omega)$的极值方程：$P^*(\omega) = \max(\frac{1}{\lambda} - N_0(\omega))$，$|\omega| \leqq W$

将极值方程的形式解代回约束方程$\int_{-W}^{W} d\omega P^*(\omega) = P$确定乘子λ。

【习题】完成上述计算。最后的结果具有什么形式？你能不做任何计算，直接得出该结果吗？！

容量公式的应用（7）

* 为达到有限带宽/彩色高斯信道单位时间的总容量，
* 发送端对功率分配实施注水算法

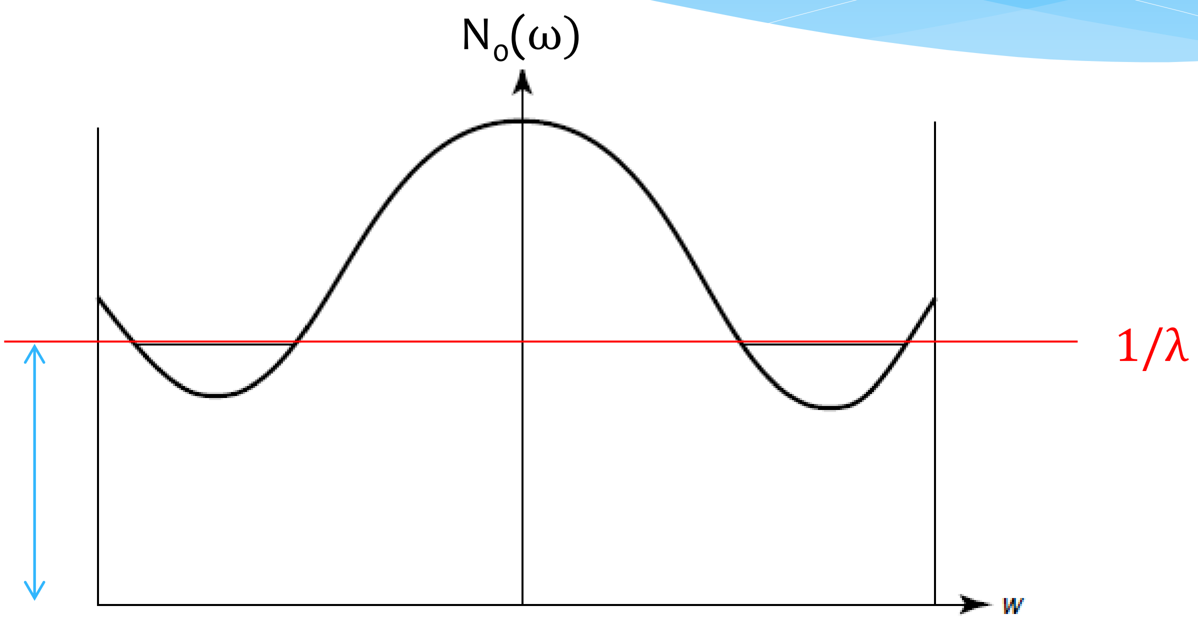


FIGURE 9.5. Water-filling in the spectral domain.

第九章习题

- 9.1~9.9、9.11~9.12。