第三章 二维随机变量及其分布

二维随机变量：

1.小学生身高$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，体重$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，

健康状况(身高，体重)分布：$\left(X,Y\right)$ **（有实际背景的二维随机变量）**

2.将一枚骰子掷两次看成 一个试验，样本点如图。$\left(X_1,X_2\right)$ 为二维随机变量

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

（同一试验 X 重复两次看成一个试验构成的二维变量）。

(3,2)为(X_1, X_2)二维试验一个样本点。不是X试验两次取 3,2 两个值。

n维随机变量：

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

1.成年人健康状况的 n 个指标（身高，体重，血压，...）用 n个随机变量表示，$(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 称为 n 维随机变量。 （不关心）

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
3	$1/36$	$\boxed{1/36}$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

2.将一枚掷骰子掷n次 构成n维随机变量。$(X_1, X_2 \cdots X_n)$

（重点研究） (3,1,.........5)

定义：$S(e)$ 是样本空间，$X(e)$,$Y(e)$ 是定义在$S(e)$ 上的两个随机变量，则称有序数组（$X(e)$,$Y(e)$）为二维随机变量，简记为（X,Y）。同样我们可以定义n 维随机变量$\left(X_1, X_2 \cdots X_n\right)$ 。

二维随机变量的一切结果都可以推广到 n 维。

用 X 表示电视机寿命值分布， 从 X 中抽样得到的 n个寿命值

（9.3,6.9,7.2....8.1）

电视机寿命试验X 重复n次构成n维变量$\left(X_1, X_2 \cdots X_n\right)$

（9.3,6.9,7.2....8.1）是$\left(X_1, X_2 \cdots X_n\right)$的一个样本点

$\left(X_1, X_2 \cdots X_n\right)$ 是一个样本，而不是n个样本。

一. 二维离散型随机变量及其分布

二. 二维随机变量的分布函数

三.二维连续型随机变量及其分布

四. 随机变量的独立性

五.二维随机变量函数的分布

一. 二维离散型随机变量及其分布

1.联合分布列

2.边际分布列

3.条件分布列

定义：X,Y 为两个离散型随机变量，称（X,Y）为二维离散型随机变量。

1.联合分布列

定义：设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，且 X 的所有可能取值为 $x_1,x_2\ldots,Y$ 的可能取值为 $y_1y_2\cdots$，称

$$P\left(X=x_i,Y=y_j\right)\overset{\Delta}{=}\boxed{P\left\{\left(X=x_i\right)\cap\left(Y=y_j\right)\right\}}=p_{ij},i,j=1,2,\ldots$$

为二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布列。

例1. 掷两次骰子看成一个试验，

用 (X, Y) 表示出现的点数。

$$P(X=i, Y=j)=\frac{1}{36}, i, j=1,2,\ldots 6$$

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

例2. 某球队的队服，X 表示颜色，

Y 表示款式，(X, Y) 为二维

离散型随机变量。

$Y \backslash X$	$x_{1(红)}$	$x_{2(兰)}$	$x_{3(黄)}$	
$y_{1(长)}$	$15/100$	$10/100$	$12/100$	
$y_{2(短)}$	$20/100$	$18/100$	$25/100$	
				1

性质：(i) $p_{ij} \geq 0$;　(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1$

2.边际分布列（边缘分布列）

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i.} \qquad i=1,2\ldots$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{.j} \qquad j=1,2\ldots$$

$Y \backslash X$	$x_{1(红)}$	$x_{2(兰)}$	$x_{3(黄)}$	
$y_{1(长)}$	$15/100$	$10/100$	$12/100$	$37/100$
$y_{2(短)}$	$20/100$	$18/100$	$25/100$	$63/100$
	$35/100$	$28/100$	$37/100$	1

$X_{(色)}$	x_1	x_2	x_3
p	0.35	0.28	0.37

$Y_{(款)}$	y_1	y_2
p	0.37	0.63

3.条件分布列

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad i=1,2\ldots$$

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \qquad j=1,2\ldots$$

$Y \backslash X$	$x_{1(红)}$	$x_{2(兰)}$	$x_{3(黄)}$	
$y_{1(长)}$	0.15	0.1	0.12	0.37
$y_{2(短)}$	0.2	0.18	0.25	0.63
	0.35	0.28	0.37	1

X	x_1	x_2	x_3
$P(X=x_i\|Y=y_1)$	$\frac{0.15}{0.37}$	$\frac{0.1}{0.37}$	$\frac{0.12}{0.37}$

Y	y_1	y_2
$P(Y=y_j\|X=x_2)$	$\frac{0.1}{0.28}$	$\frac{0.18}{0.28}$

例3. 10件产品，5件一等品，3件二等品，2件次品，从中任取3件，用 X表示一等品的个数，Y 表示次品的个数，求 (1) (X,Y) 的联合分布列。(2) X 的边界分布列。(3) 在 X=1的条件下，Y 的分布列，(4) $P(X\text{-}Y=0)$。

解：$(1)\ P(X=m,Y=n)=\dfrac{C_5^m\ C_2^n\ C_3^{3-n-m}}{C_{10}^3}$，

$$m=0,1,2,3;\ n=0,1,2;\ m+n\le 3$$

Y \ X	0	1	2	3
0	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{24}$	0	0
(2)	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

(3)

Y	0	1	2
$P(Y=n\mid X=1)$	$\dfrac{1/8}{5/12}$	$\dfrac{1/4}{5/12}$	$\dfrac{1/24}{5/12}$

$$(4)\quad P(X-Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{120}+\frac{1}{4}=\frac{31}{120}$$

例**4.**某人射击命中率为 ***p***，用 ***X*** 表示首次命中所需要的射击次数，***Y*** 表示 第二次命中所需要的射击次数。求 **(1)** **(*X*,*Y*)** 的联合分布列，**(2)** ***X*** 的边际分布列，**(3)** $P(Y=n|X=m)$ 1 2 $\cdots$ m $\cdots$ n

解：$(1)\ P(X=m,Y=n)=p^2q^{n-2}$， $m=1,2\cdots,n=m+1,\cdots$

$$(2)\ P(X=m)=\sum_{n=m+1} p^2q^{n-2}=p^2\frac{q^{(m+1)-2}}{1-q}=pq^{m-1},m=1,2\cdots$$

$$(3)\ P(Y=n|X=m)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(X=m)}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1},$$

$$(4)\ P(Y=n)=\sum p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2}\quad n=m+1,\cdots\ (m=1,2\cdots)$$

$$n=2,3\cdots$$

例5：设某班车起点站上客人数 $X \sim P(\lambda)$ ，每位乘客中途下车的概率为 $p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立，以Y表示在中途下车的人数，求：（1）在发车时有n个乘客的条件下，中途有m人下车的概率；

（2）二维随机变量（X,Y）的联合分布列。

解：(1) $P(Y=m|X=n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ $\quad m=0,1\ldots n, n=0,1\ldots$

$$(2)P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m|X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^m p^m q^{n-m}$$

$$=\frac{1}{n!}e^{-\lambda}C_n^m(p\lambda)^m(q\lambda)^{n-m} \qquad m=0,1\ldots n, n=0,1\ldots$$

（3）中途下车人数Y的分布列。

$$P(Y=m)=\sum P(X=n,Y=m) \qquad Y \sim P(p\lambda)$$

$$=\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n!}e^{-\lambda}C_n^m(p\lambda)^m(q\lambda)^{n-m}=\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n!}e^{-\lambda}\frac{n!}{m!(n-m)!}(p\lambda)^m(q\lambda)^{n-m}$$

$$=\frac{(p\lambda)^m}{m!}e^{-\lambda}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{(q\lambda)^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{(p\lambda)^m}{m!}e^{-\lambda}e^{q\lambda}=\frac{(p\lambda)^m}{m!}e^{-p\lambda}$$

$$\boxed{P(X=n,Y=m)=\frac{1}{n!}e^{-\lambda}C_n^m(p\lambda)^m(q\lambda)^{n-m}} \qquad m=0,1\ldots$$

例6. X 在1,2,3,4 四个数字中随机取值，Y 从1到 X 随机取整数值，求 (X,Y) 的联合分布列。

解：$P(X=m)=\dfrac{1}{4},\quad m=1,2,3,4.$

$$P(Y=n|X=m)=\frac{1}{m},$$

$$n=1,2\cdots m.\,(m=1,2,3,4).$$

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

$$P(X=m,Y=n)=P(X=m)P(Y=n|X=m)$$

$$=\frac{1}{4m},\quad m=1,2,3,4;\, n=1,2\cdots m.$$