A 二、 B 四、（12 分）

【高数】已知两直线 $L_1: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 和 $L_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

(1) 证明 L_1 和 L_2 相交； (2) 求由 L_1 和 L_2 确定的平面方程.

(1)证 直线 L_1 过点 $M_1(2,0,-1)$，方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(-1,1,2)$；直线 L_2 过点 $M_2(1,-1,1)$，

方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(1,1,-2)$.

由混合积 $\left[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0$，知 L_1 和 L_2 共面；（4 分）

又因为 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 不平行，所以 L_1 和 L_2 相交.（6 分）

(2) 取法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=(-4,0,-2)$，（9 分）

所求平面方程 $-4(x-2)-2(z+1)=0$，即 $2x+z-3=0$.（12 分）

【工数】求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$，

对应的齐次方程的通解 $Y=c_1e^x+c_2e^{2x}$.（4 分）

设非齐次方程的特解 $y^*=(ax^2+bx)e^{2x}$，则（7 分）

$y^{*\prime}=\left(2ax^2+(2a+2b)x+b\right)e^{2x}$， $y^{*\prime\prime}=\left(4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b)\right)e^{2x}$.

代入原方程，

$\left(4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b)\right)-3\left(2ax^2+(2a+2b)x+b\right)+2(ax^2+bx)=x,$

$2ax+(2a+b)=x.$

故 $\begin{cases}2a=1\\ 2a+b=0\end{cases}$， $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-1\end{cases}$， $y^*=\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x}$.（10 分）

原方程的通解 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x}$（其中 c_1, c_2 为任意常数）.（12 分）

单项选择题（共 48 分，每小题 4 分）

A 卷：1A；2C；3B；4D；5D；6C；7B；8A；9B；10A；11C；12D.

B 卷：1B；2D；3A；4C；5A；6D；7B；8C；9A；10D；11C；12B.

【微积分】计算二重积分 $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=2$， $y=0$， $y=2$ 及曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 围成的平面有界闭区域.

解 将曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 和直线 $x=0$ 所围成的半圆域记为 D_1，则

$$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 y^2\mathrm{d}y\int_0^2\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r \qquad \text{（6 分）}$$

$$=\frac{16}{3}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{（8 分）}$$

$$=\frac{16}{3}-4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{16}{3}-\frac{5}{8}\pi. \qquad \text{（12 分）}$$

单项选择题（共 48 分，每小题 4 分）

A 卷：1A；2C；3B；4D；5D；6C；7B；8A；9B；10A；11C；12D .

B 卷：1B；2D；3A；4C；5A；6D；7B；8C；9A；10D；11C；12B.

A 三、B 二、（12 分）

设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x)=|x|\ (-\pi<x\le\pi)$. 求 $f(x)$ 的傅里叶（**Fourier**）级数，并由此计算数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 之和.

解 $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,\mathrm{d}x=0\ (n=1,2,\cdots)$； **（2 分）**

$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$； **（4 分）**

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}\sin nx$

$=\dfrac{2}{n\pi}(x\sin nx)\Big|_0^{\pi}-\dfrac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi}=\begin{cases}0, & n\text{为偶数}\\ \dfrac{-4}{n^2\pi}, & n\text{为奇数}\end{cases}.$ **（7 分）**

$f(x)$ 在上处处连续，且只有两个单调区间，所以由 **Dirichlet** 收敛性定理，有

$x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\quad(-\pi<x\le\pi)$. **（9 分）**

在上式中令 $x=0$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$. **（12 分）**

单项选择题（共 48 分，每小题 4 分）

A 卷：1A；2C；3B；4D；5D；6C；7B；8A；9B；10A；11C；12D .

B 卷：1B；2D；3A；4C；5A；6D；7B；8C；9A；10D；11C；12B.

A 四 、 B 三、（8 分）

设函数 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上可微. 当 $x^2+y^2<1$ 时，

$f(x,y)=f_x'(x,y)+f_y'(x,y)$；当 $x^2+y^2=1$ 时，$f(x,y)\equiv 0$. 求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值.

证 函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，所以在 D 上取到最大值. （2 分）

在边界线上，最大值的可疑值为 0. （4 分）

在 D 的内部，可疑点 $M(x_0,y_0)$ 必为驻点，故 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，所以

可疑值 $f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)=0$. （7 分）

比较以上的可疑值可知，$f(x,y)$ 在 D 上的最大值等于 0 . （8 分）

单项选择题（共 48 分，每小题 4 分）

A 卷：1A；2C；3B；4D；5D；6C；7B；8A；9B；10A；11C；12D .

B 卷：1B；2D；3A；4C；5A；6D；7B；8C；9A；10D；11C；12B.

A 四 、 B 三、（8 分）

设函数 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上可微.当 $x^2+y^2<1$ 时，

$f(x,y)=f_x'(x,y)+f_y'(x,y)$；当 $x^2+y^2=1$ 时，$f(x,y)\equiv 0$. 求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值.

证 函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，所以在 D 上取到最大值. （2 分）

在边界线上，最大值的可疑值为 0. （4 分）

在 D 的内部，可疑点 $M(x_0,y_0)$ 必为驻点，故 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，所以

可疑值 $f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)=0$. （7 分）

比较以上的可疑值可知，$f(x,y)$ 在 D 上的最大值等于 0 . （8 分）

单项选择题（共 48 分，每小题 4 分）

A 卷：1A；2C；3B；4D；5D；6C；7B；8A；9B；10A；11C；12D .

B 卷：1B；2D；3A；4C；5A；6D；7B；8C；9A；10D；11C；12B.

A 五、B 六、（10 分）

计算曲线积分 $\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $(x-1)^2+y^2=4\,(y\ge 0)$ 上由点 $A(-1,0)$ 到点 $B(3,0)$ 的有向弧段.

解 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\quad\left(x^2+y^2\ne 0\right)$，

所以，在不包含原点的单连通域内，曲线积分与路径无关．　　（3 分）

令 $L_1: y=\sqrt{1-x^2}\ (x:-1\to 1)$， $L_2: y=0\,(x:1\to 3)$，则　　（5 分）

$$\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{L_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\int_{L_2}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

其中，$\int_{L_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{L_1} xdy-ydx=\int_{\pi}^{0}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dx=-\pi$；　　（7 分）

$\int_{L_2}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_1^3 0dx=0$.　　（9 分）

所以，$\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\pi$.　　（10 分）

单项选择题（共 48 分，每小题 4 分）

A 卷：1A；2C；3B；4D；5D；6C；7B；8A；9B；10A；11C；12D .

B 卷：1B；2D；3A；4C；5A；6D；7B；8C；9A；10D；11C；12B.

A 六、B 五、（10 分）

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(xz+\sin y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(xy+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\sin x+y)(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中，有向曲面 $\Sigma: x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1\,(z\geq 0)$，取上侧 .

解 令 $S: z=0, D_{xy}: x^2+y^2\leq 1$，取下侧 . 由 Gauss 公式， （2 分）

$$\oiint\limits_{\Sigma+S}(xz+\sin y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(xy+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\sin x+y)(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{V}(z+x+\sin x+y)\mathrm{d}V$$

$$=\iiint\limits_{V}z\,\mathrm{d}V$$

$$=\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 z\cdot\pi\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}z=\pi .$$ （6 分）

$$\iint\limits_{S}(xz+\sin y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(xy+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\sin x+y)(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{S}(\sin x+y)(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(\sin x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 .$$ （9 分）

综上， $I=\pi$. （10 分）

单项选择题（共 48 分，每小题 4 分）

A 卷：1A；2C；3B；4D；5D；6C；7B；8A；9B；10A；11C；12D .

B 卷：1B；2D；3A；4C；5A；6D；7B；8C；9A；10D；11C；12B.