第五章 大数定律 中心极限定理

主讲人：杨彦春

大连理工大学数学科学学院概率统计教研室

复　习

关注产品寿命值　（随机现象）

比较两厂寿命均值　（存在-未知）

估计两厂寿命均值（然后比较）

随机抽取n个产品测寿命值

（9.3, … 8.1）（9.3…8.1）是一个样本点

合理？

$\left(\bar{x} = \frac{\cdots}{n} = 7.9\right)$

（甲厂寿命均值在7.9年左右）

概率统计研究：寻求理论支持

第一章：确定研究对象（随机试验）

第二章：建立随机变量

电视机寿命值　总体寿命值　$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

独立重复n次

第三章：二维随机变量（推广n维）

1. 样本的分布　$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$联合分布

2. 样本均数分布　二维随机变量函数　$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

第四章：数字特征　总体均值即μ

第五章：大数定律　$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

第五章 大数定律 中心极限定理

一. 一个定义

二. 三个大数定律

三. 两个中心极限定理

(1). $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，抽样（9.3,6.9,7.2....8.1），用$\overline{x}_n = 7.9$估计μ 是可行$\xleftrightarrow{(\text{数学语言})}$对于给定的容许误差 $\varepsilon > 0$，满足 $P(|7.9-\mu|<\varepsilon)=1$

(2). $\overline{x}_n = 7.9$是随机变量$\overline{X}_n$的一个随机结果，若保证$\overline{x}_n = 7.9$估计μ的合理性，还需保证$\overline{X}_n$的每一个随机取值都满足误差需求，即满足：

$$P(|\overline{X}_n-\mu|<\varepsilon)=1 \cdots\cdots(\text{i})$$

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = X \quad (n=1) \\ \overline{X}_2 = \dfrac{1}{2}(X_1+X_2) \quad (n=2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \overline{X}_n = \dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots X_n) \end{cases}$$

(3). $\overline{X}_n$是随机变量，且与n有关，我们不能满足(i) 式对所有n成立

但我们可以设法证明：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|<\varepsilon\right)=1$$

若此式成立，我们称样本均数依概率收敛于总体均数。并且，当n较大时可用$\overline{X}_n$估计μ。

一. 一个定义

定义：依概率收敛

对于随机变量列 $\overline{X}_1,\overline{X}_2\cdots\overline{X}_n\cdots$，如果对给定的$\varepsilon>0$，满足：

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|<\varepsilon\right)=1$$

我们称$\overline{X}_n$依概率收敛于μ。

(我们给定如下更一般的依概率收敛定义)

依概率收敛：$Y_1,Y_2,\cdots Y_n\cdots$ 是一个随机变量列，a 是常数，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，有：

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|Y_n-a\right|<\varepsilon\right)=1$$

则称随机变量列Y_n依概率收敛于a，记为：$Y_n\xrightarrow{P}a$。

二. 三个大数定律

1.切比雪夫大数定律

2.伯努利大数定律

3.辛钦大数定律

为了证明$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$，我们给出切比雪夫不等式

定理：随机变量X(分布已知或者未知，离散或者连续不关心），记

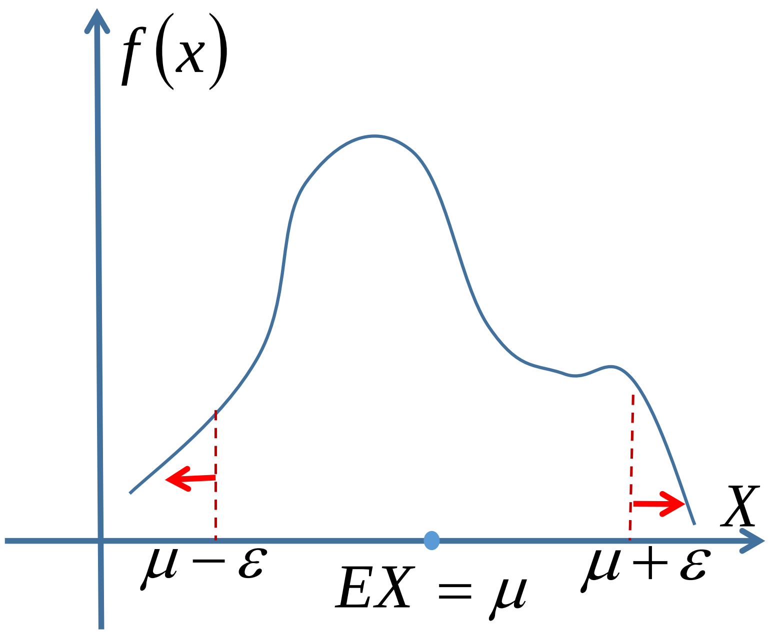
$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$存在，$\varepsilon>0$是常数(容许误差)，

则有 $P\left(|X-\mu|\geq\varepsilon\right)\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$；　或　$P\left(|X-\mu|<\varepsilon\right)\geq 1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

不管X的分布，对于给定的$\varepsilon>0$，只用X的方差来估计事件概率$P\left(|X-\mu|<\varepsilon\right)$的大小

证明：设 **X** 的分布密度函数为 ***f*(*x*)**，

$$P\left(|X-\mu|\geq\varepsilon\right)=\int_{|X-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx$$



$$|X-\mu|\geq\varepsilon,\quad \frac{|X-\mu|}{\varepsilon}\geq 1,\qquad \left(\frac{|X-\mu|}{\varepsilon}\right)^2\geq 1$$

$$P\left(|X-\mu|\geq\varepsilon\right)\leq\int_{|X-\mu|\geq\varepsilon}\left(\frac{|X-\mu|}{\varepsilon}\right)^2 f(x)dx=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|X-\mu|\geq\varepsilon}(X-\mu)^2 f(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(X-\mu)^2 f(x)dx=\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

于是 $P\left(|X-\mu|\geq\varepsilon\right)\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ ； $\Longrightarrow$ $P\left(|X-\mu|<\varepsilon\right)\geq 1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

1. 切比雪夫大数定律（独立同分布）：

$$\left(P\left(\left|X-\mu\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$\left(\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu\right)$$

$X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$是独立同分布的随机变量列, $EX_i=\mu, DX_i=\sigma^2$存在,

构造$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，有 $E\overline{X}_n=\mu$，$D\overline{X}_n=\sigma^2/n$，则对 $\forall\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|<\varepsilon\right)=1$$

证：由契比雪夫不等式 $P\left(\left|\overline{X}_n-E\overline{X}_n\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D\left(\overline{X}_n\right)}{\varepsilon^2}$

即 $P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$；$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|<\varepsilon\right)\geq \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\right)=1$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|<\varepsilon\right)=1$；　$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ （期望方差存在）

（独立同分布）切比雪夫大数定律告诉我们:只要 X 的期望、方差存在，且抽取的产品足够多，就可以用样本均数估计总体均数。对任何试验都适用。

切比雪夫大数定律（一般情况）： 去掉了同分布的条件

$X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$是独立的随机变量列, $EX_i = \mu_i$, $DX_i = \sigma_i^2 \quad i = 1,2,\cdots$

方差一致有界,即存在任意常数C，使$DX_i \le C$。则对$\forall \varepsilon > 0$有:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

$$\left(P(|X-\mu| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\ D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$$

可无视此(一般情况)定理

2.伯努利大数定律：

$\left(\text{切比雪夫大数定律应用在军火上}: \dfrac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p\right)$

$X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$是独立同分布的随机变量列 $X_i \sim B(1, p)$ $i = 1,2\cdots$

$(x_1, x_2, \cdots x_n)$每个取值0或1

构造 $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$EX = p,\ DX = p(1-p),$

$\sum_{i=1}^{n} X_i = n_A;\quad \overline{X}_n = \dfrac{n_A}{n}$

$\left(\begin{array}{l} EX = p \text{ 是}A\text{发生的概率} \\ \overline{X}_n = \dfrac{n_A}{n}\text{是}A\text{发生的频率} \end{array}\right)$

则有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| < \varepsilon\right) = 1;$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\dfrac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1;$

$\left(\overline{X}_n \xrightarrow{P} p\right)$ $\dfrac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$

3.辛钦大数定律：$\left(\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu\right.$ 对方差无要求$\left.\right)$

$X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$ 是独立同分布的随机变量列，$EX_i = \mu$ 存在，

构造 $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，　$E\overline{X}_n = \mu$，对 $\forall \varepsilon > 0$，有：　（证明略）

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

与切比雪夫大数定律比，辛钦大数定律无需方差存在

总体 X，只要抽取独立同分布的样本 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$，且 n 足够大，由辛钦大数定律就可以用样本均数估计总体均数。　$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$