狭义相对论

一、基本要求

1．理解爱因斯坦狭义相对论的两个基本假没。
2．理解洛仑兹坐标变换。
　了解狭义相对论中同时性的相对性，以及长度收缩和时间膨胀的概念。
　了解牛顿力学中的时空观和狭义相对论中的时空观以及二者的差异。
3．理解狭义相对论中质量和速度的关系、质量和能量的关系，并能用以分析、计算有关的简单问题。

二、内容提要

1．经典力学的绝对时空观

伽里略相对性原理　一切彼此相对作匀速直线运动的诸惯性系中的力学规律都是一样的。即力学规律的数学形式都是相同的。

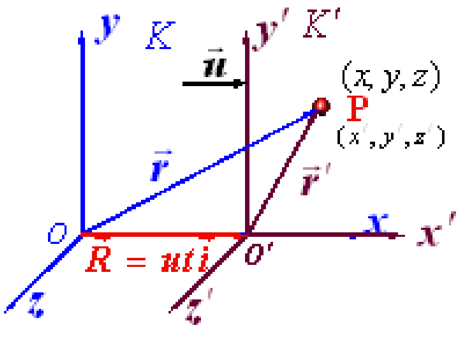
伽里略变换

设想两个作相对匀速运动的惯性系（参照系），各以直角坐标系 $K(O,x,y,z)$ 和 $K'(O',x',y',z')$ 表示，两者的坐标轴分别相互平行，而且 x 轴和 x' 轴重合在一起。K' 坐标系相对于 K 坐标系沿 x 轴方向以速度 $\vec{u}=u\vec{i}$ 运动。

设想在 K' 坐标系和 K 坐标系，当原点重合时，两个坐标系内的时钟校准为零，即 $x=x'=0$ 时，$t=t'=0$。

同一点 P 在 K' 坐标系和 K 坐标系中的坐标 (x',y',z',t') 和 (x,y,z,t) 有如下的关系：

$$\begin{cases} t'=t \\ x'=x-ut \\ y'=y \\ z'=z \end{cases}$$



或

$$\begin{cases} t=t' \\ x=x'+ut \\ y=y' \\ z=z' \end{cases}$$

这就是伽利略坐标变换公式。它完全体现了绝对时空观，是绝对时空观的数学表述。

经典力学的绝对时空观　　经典力学的时空观认为，时间和空间是相互独立的，对时间间隔和空间间隔的测量不会因为参考系的运动而改变。

根据上述位置变换关系及速度的定义，可导出质点运动速度在二惯性系之间的变换关系

$$\vec{v}'=\vec{v}-\vec{u} \qquad （v'_x=v_x-u、v'_y=v_y、v'_z=v_z）$$

加速度变换关系

$$\vec{a}'=\vec{a} \qquad （a'_x=a_x、a'_y=a_y、a'_z=a_z）$$

因此，在诸惯性系中，牛顿第二定律可表示为

$$\vec{F}=m\vec{a}，\quad \vec{F}'=m'\vec{a}'$$

牛顿第二定律相对于伽里略变换是不变的。

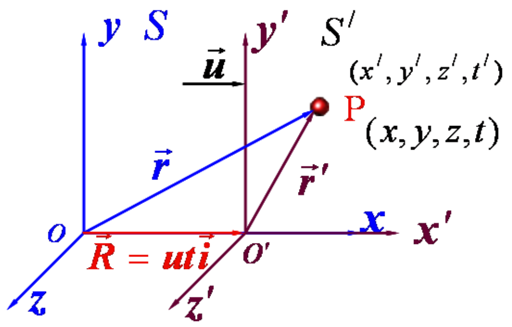
2．狭义相对论的基本假设

爱因斯坦相对性原理　一切彼此相对作匀速直线运动的诸惯性系都是平权的，其中物理规律都一样。

光速不变原理　在任何一个惯性系中测得的真空中的光速都相等。

3．洛仑兹变换

设想两个作相对匀速运动的惯性系（参照系），各以直角坐标系 $S(O,x,y,z)$ 和 $S^{/}(O^{/},x^{/},y^{/},z^{/})$ 表示，两者的坐标轴分别相互平行，而且 x 轴和 $x^{/}$ 轴重合在一起。$S^{/}$ 坐标系相对于 S 坐标系沿 x 轴方向以速度 $\vec{u}=u\vec{i}$ 运动。



设想在 $S^{/}$ 坐标系和 K 坐标系，当原点重合时，两个坐标系内的时钟校准为零，即 $x=x^{/}=0$ 时，$t=t^{/}=0$。

同一点 P 在 $S^{/}$ 坐标系和 S 坐标系中的坐标 $(x^{/},y^{/},z^{/},t^{/})$ 和 (x,y,z,t) 有如下的关系：

$$\begin{cases} x^{/}=\gamma(u)(x-ut) \\ y^{/}=y \\ z^{/}=z \\ t^{/}=\gamma(u)(t-\dfrac{u}{c^{2}}x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\gamma(u)(x^{/}+ut^{/}) \\ y=y^{/} \\ z=z^{/} \\ t=\gamma(u)(t^{/}+\dfrac{u}{c^{2}}x^{/}) \end{cases} \qquad \gamma(u)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}} \qquad \beta=\frac{u}{c}$$

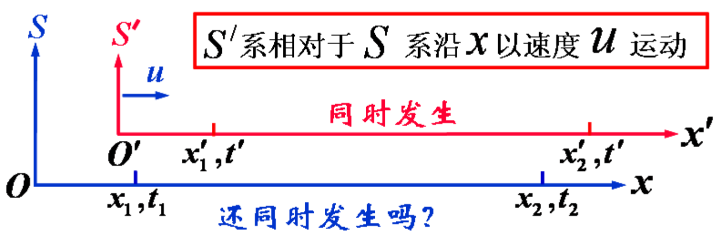
4．狭义相对论的时空观

“同时性”的相对性　在一个惯性系测得是同时发生的两事件，在另一个惯性系中测量可能不是同时发生的。

$S^{/}$ 坐标系相对于 S 坐标系沿 x 轴方向以速度 $\vec{u}=u\vec{i}$ 运动。在 $S^{/}$ 坐标系中不同空间地点同时发生两个事件 $A(x_1^{/},t_1^{/}=t^{/})$ 和 $B(x_2^{/},t_2^{/}=t^{/})$ ，

$t_1\neq t_2$

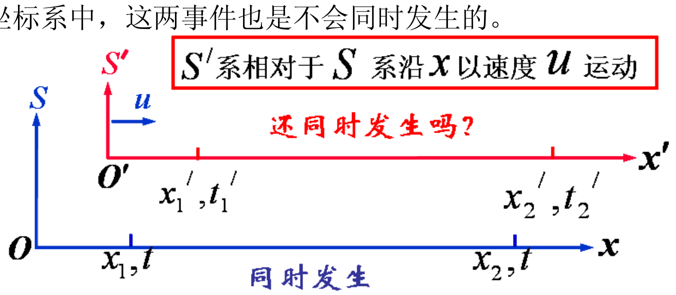
即，自 S 坐标系中测量，这两事件不是同时发生的。



如果在 S 坐标系中不同空间地点同时发生两个事件 $A(x_1,t_1=t)$ 和 $B(x_2,t_2=t)$，

$t_1^{/}\neq t_2^{/}$

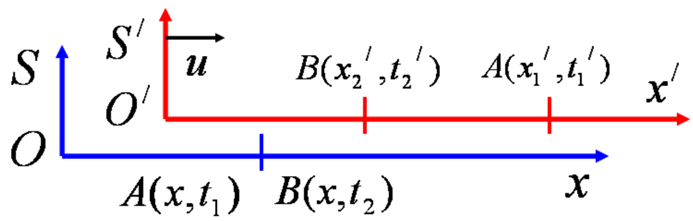
即，在 $S^{/}$ 坐标系中，这两事件也是不会同时发生的。



时间膨胀　在一个惯性系中观测，另一个做匀速直线运动的惯性系中同地发生的两个事件的时间间隔变大。这称为时间延缓效应。

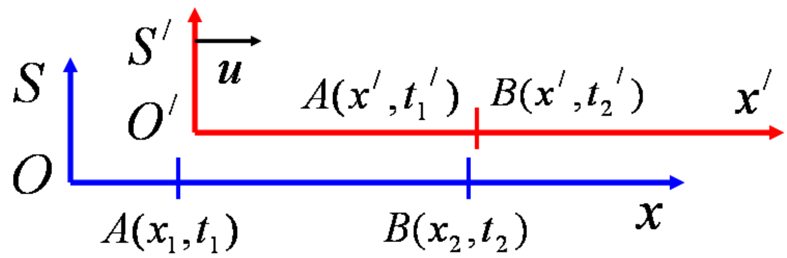
设两个事件在S系中发生在同一空间地点，即$A(x,t_1)$、$B(x,t_2)$，那么，在S'系中，这两个事件是发生在$A(x_1',t_1')$、$B(x_2',t_2')$。也就是说，S系跟随事件，或者说，事件的发生在S系是静止的

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > \Delta t = t_2 - t_1 \qquad （\Delta t\text{ 为原时，}\quad \Delta t'\text{ 为测时）}$$



如果设两个事件在S'系中发生在同一空间地点，即$A(x',t_1')$、$B(x',t_2')$，那么，在S系中，这两个事件是发生在$A(x_1,t_1)$、$B(x_2,t_2)$，

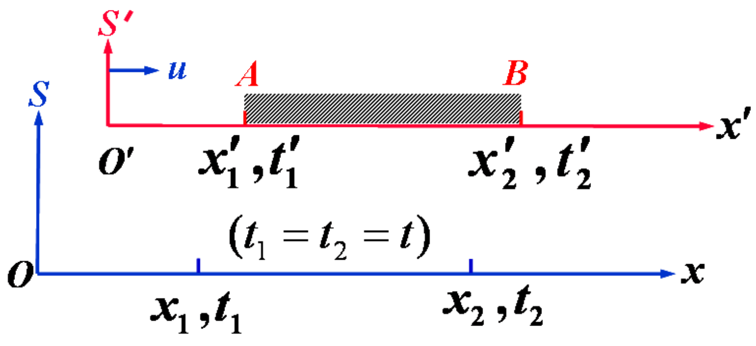
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > \Delta t' = t_2' - t_1' \qquad （\Delta t'\text{ 为原时，}\Delta t\text{ 为测时）}$$



长度收缩　在不同的惯性系中测量物体的长度是不同的。在与物体静止的惯性系中测量物体的长度（原长）最长；在与物体有相对运动的惯性系中测量物体的长度（测长）总要比原长短一些。这种效应称为长度收缩效应。

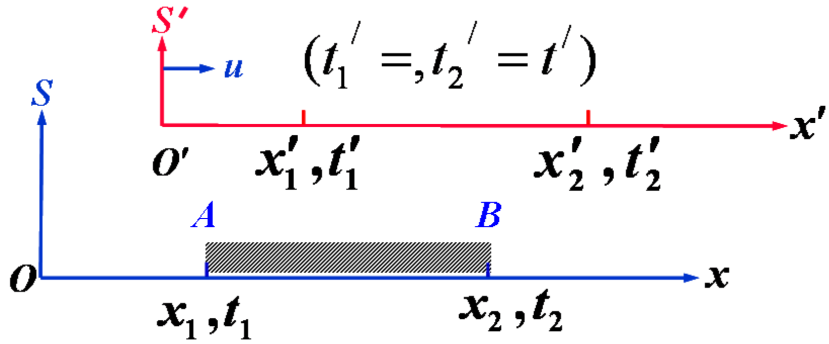
棒静止于S'系中，在S'系中测量棒的两个端点坐标的两个事件：$A(x_1',t_1')$、$B(x_2',t_2')$，在S系中测量棒的两个端点坐标的两个事件：$A(x_1,t_1=t)$、$B(x_2,t_2=t)$，

$$\Delta l = x_2 - x_1 = \frac{\Delta l'}{\gamma} = \Delta l'\sqrt{1-u^2/c^2} < \Delta l' = x_2' - x_1' \qquad （\Delta l'\text{ 原长，}\Delta l\text{ 测长）}$$



如果棒静止于 S 系中，在 S 系中测量棒的两个端点坐标的两个事件：$A(x_1,t_1)$、$B(x_2,t_2)$，在 S' 系中测量棒的两个端点坐标的两个事件：$A(x_1',t_1'=t')$、$B(x_2',t_2'=t')$，

$$\Delta l' = x_2' - x_1' = \frac{\Delta l}{\gamma} = \Delta l\sqrt{1-u^2/c^2} < \Delta l = x_2 - x_1 \qquad (\Delta l \text{ 原长，} \Delta l' \text{ 测长})$$



5．洛仑兹速度变换公式

一质点，在 S 系测得其运动速度为

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

在 S' 系测得其运动速度为

$$\vec{v}' = v_x'\vec{i}' + v_y'\vec{j}' + v_z'\vec{k}' = \frac{dx'}{dt'}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt'}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt'}\vec{k}'$$

若 S' 坐标系相对于 S 坐标系沿 x 轴方向以速度 $\vec{u} = u\vec{i}$ 运动。则速度变换关系为

$$\begin{cases} v_x' = \dfrac{v_x - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}v_x} \\ v_y' = \dfrac{v_y}{1 - \dfrac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \\ v_z' = \dfrac{v_z}{1 - \dfrac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + u}{1 + \dfrac{u}{c^2}v_x'} \\ v_y = \dfrac{v_y'}{1 + \dfrac{u}{c^2}v_x'}\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \\ v_z = \dfrac{v_z'}{1 + \dfrac{u}{c^2}v_x'}\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \end{cases}$$

6．狭义相对论质点动力学

相对论质量　若在一相对静止的惯性系测得物体的质量为 m_0，则在相对物体以 v 的速度运动的另一惯性系测得其质量为 m，

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (m_0 \text{ 为静止质量})$$

相对论动量

$$\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

相对论动能

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2$$

相对论能量

运动能量：$E = mc^2$

静止能量：$E_0 = m_0c^2$

相对论能量守恒

$$\sum_i E_i = \sum_i (m_ic^2) = 常量$$

$$\sum_i m_i = 常量$$

相对论动量能量关系

$$E^2 = P^2c^2 + {m_0}^2c^4$$

光子的认识

$E = h\nu$， $p = \dfrac{h}{\lambda}$

二、问题讨论

1、根据爱因斯坦的时空观，讨论

（1）在一惯性系中观测，两个事件同时不同地发生，则在其他惯性系中观测，这两个事件是否可能同时发生？是否可能同地发生？

（2）在一惯性系中观测，两个事件同地不同时发生，则在其他惯性系中观测，这两个事件是否可能同地发生？是否可能同时发生？

（3）在一惯性系中观测，两个事件同时同地发生，则在其他惯性系中观测，这两个事件是否可能同时发生？是否可能同地发生？

答：爱因斯坦相对时空观的数学表述为罗伦兹变换

$$\begin{cases} x' = \gamma(u)(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(u)(t - \dfrac{u}{c^2}x) \end{cases} \qquad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \beta = \frac{u}{c}$$

（1）在 S 系中观测，两个事件同时不同地发生，即

事件 $A(x_1, t_1), B(x_2, t_2)$， $t_1 = t_2, x_1 \neq x_2$

在 S' 系中观测，事件 $A(x_1', t_1'), B(x_2', t_2')$，则

$$\begin{cases} x_1' = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ t_1' = \gamma(u)(t_1 - \dfrac{u}{c^2}x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \\ t_2' = \gamma(u)(t_2 - \dfrac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$

$$t_1' \neq t_2' \qquad x_1' \neq x_2'$$

即：在一惯性系中观测，两个事件同时不同地发生，则在其他惯性系中观测，这两个事件不可能同时发生，也不可能同地发生。

（2）在 S 系中观测，两个事件同地不同时发生，即

事件 $A(x_1,t_1),B(x_2,t_2)$， $x_1 = x_2, t_1 \neq t_2$

在 S' 系中观测，事件 $A(x_1',t_1'),B(x_2',t_2')$，则

$$\begin{cases} x_1' = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ t_1' = \gamma(u)(t_1 - \dfrac{u}{c^2}x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \\ t_2' = \gamma(u)(t_2 - \dfrac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$

$$x_1' \neq x_2' \qquad t_1' \neq t_2'$$

即：在一惯性系中观测，两个事件同地不同时发生，则在其他惯性系中观测，这两个事件不可能同地发生，也不可能同时发生。

（3）在 S 系中观测，两个事件同地同时发生，即

事件 $A(x_1,t_1),B(x_2,t_2)$， $x_1 = x_2, t_1 = t_2$

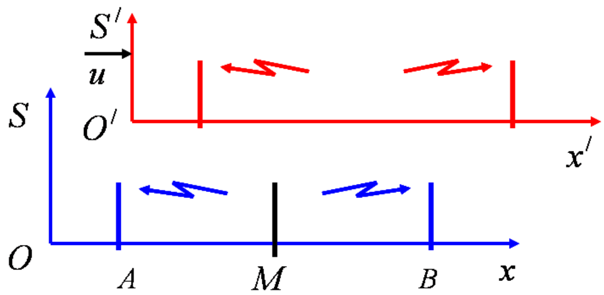
在 S' 系中观测，事件 $A(x_1',t_1'),B(x_2',t_2')$，则

$$\begin{cases} x_1' = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ t_1' = \gamma(u)(t_1 - \dfrac{u}{c^2}x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \\ t_2' = \gamma(u)(t_2 - \dfrac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$

$$x_1' = x_2' \qquad t_1' = t_2'$$

即：在一惯性系中观测，两个事件同地同时发生，则在其他惯性系中观测，这两个事件一定同地发生，也一定同时发生。

2、如图所示，在地面上 M 点固定一光源，在离光源等距的两点 A 和 B 固定有两个光接收器。今使光源发出一闪光，在地面参考系中观测，两个接收器是否同时接收到两个光信号?在沿 A B 方向高速运行的火车参考系 S' 中观测，哪个接收器先接收到光信号。



答：是；不能，接收器 B 先接收到光信号。

设在地面坐标系 S 中， A 、 B 接收到信号的事件为 $A(x_1,t_1),B(x_2,t_2)$；高速运行的火车参考系 S' 中， A 、 B 接收到信号的事件为 $A(x_1',t_1'),B(x_2',t_2')$，如图所示。

在 S 系中，事件 A 、 B 的发生是静止的，而且 M 是 AB 的中点，两个事件必定同时

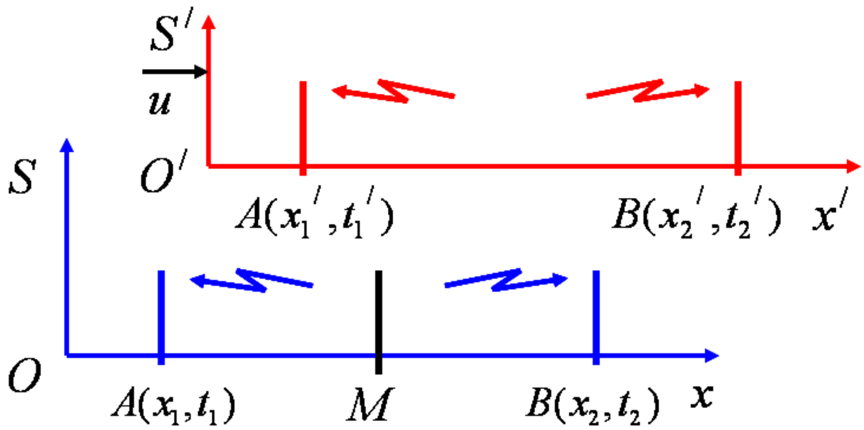
发生。注意：不同地点（$t_1=t_2, x_1<x_2$）。

由于 A、B 是在 S 系中不同地点同时发生的两件事，根据同时性的相对性，在 S' 系中必定是不同时发生的。根据罗伦兹变换

$$\begin{cases} t_1{}' = \gamma(u)(t_1 - \dfrac{u}{c^2}x_1) \\ t_2{}' = \gamma(u)(t_2 - \dfrac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$

$$t_2{}' - t_1{}' = \gamma(u)(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2) - \gamma(u)(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1) = -\gamma(u)\frac{u}{c^2}(x_2 - x_1) < 0$$

所以，在 S' 系中观测，B 事件先于 A 事件发生，即在 S' 系中观测，B 接收器先接收到光信号。



3、 一观察者为测量相对自己运动的物体的长度而测量物体两端坐标，对该观察者而言，测量两端坐标这两个事件的最低要求是什么？如果他实施了正确测量，他测得的物体沿运动方向的长度是长于还是短于该物体沿该方向的静止长度。

答：通过测量运动物体两端坐标的办法来测量物体的长度，必须同时测量两端坐标；根据“长度收缩”原理，运动物体的长度要短于该物体沿该方向的静止长度。

4、 如果我们说，在一个惯性系中测得某两个事件的时间间隔是它的固有时间，这就意味着，在该惯性系中观测，这两个事件发生在同一地点；若在其他惯性系中观测，它们是发生在同一地点吗？时间间隔是长于还是短于固有时间？

答：设两个事件在 S 系中发生在同一空间地点，即 $A(x,t_1)$、$B(x,t_2)$，在 S' 系中，这两个事件是发生在 $A(x_1{}',t_1{}')$、$B(x_2{}',t_2{}')$。

由于两个事件在 S 系中是静止的，所以，两个事件的时间坐标之差就是固有时间

$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$

根据罗伦兹变换，得到

$$\begin{cases} x_1{}' = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ x_2{}' = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \end{cases}$$

$$x_2^{\prime}-x_1^{\prime}=\gamma(u)(x_2-ut_2)-\gamma(u)(x_1-ut_1)=-\gamma(u)u(t_2-t_1)\neq 0$$

可见，在$S^{\prime}$系中观测，这两件事发生在不同地点。

由于$\Delta t=t_2-t_1>0$是固有时间，根据时间膨胀原理，固有时间最短，在其他惯性系中测量同样的两件事的时间间隔都比固有时间长。根据罗伦兹变换

$$\begin{cases} t_1^{\prime}=\gamma(u)(t_1-\dfrac{u}{c^2}x_1) \\ t_2^{\prime}=\gamma(u)(t_2-\dfrac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$

在$S^{\prime}$系中观测，这两件事发生的时间间隔为

$$\Delta t^{\prime}=t_2^{\prime}-t_1^{\prime}=\gamma\,\Delta t=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}>\Delta t=t_2-t_1$$

5、如果A、B是在$S^{\prime}$系中互为因果关系的两个事件（A是B的原因，先于B发生）。问：是否能找到一个惯性系，在该系中测得B先于A发生，出现时间顺序颠倒的现象？

答：不可能。

设A、B在$S^{\prime}$系中的时空坐标分别为$A(x_1^{\prime},t_1^{\prime})$、$B(x_2^{\prime},t_2^{\prime})$，在$S$系中的时空坐标分别为$A(x_1,t_1),B(x_2,t_2)$。由罗伦兹变换，有

$$\begin{cases} t_1=\gamma(u)(t_1^{\prime}+\dfrac{u}{c^2}x_1^{\prime}) \\ t_2=\gamma(u)(t_2^{\prime}+\dfrac{u}{c^2}x_2^{\prime}) \end{cases}$$

$$t_2-t_1=\gamma(u)(t_2^{\prime}+\frac{u}{c^2}x_2^{\prime})-\gamma(u)(t_1^{\prime}+\frac{u}{c^2}x_1^{\prime})=\gamma(u)[(t_2^{\prime}-t_1^{\prime})+\frac{u}{c^2}(x_2^{\prime}-x_1^{\prime})]$$

可见，在$t_2^{\prime}>t_1^{\prime}$的条件下，可能出现两种情况：

（1）如果$x_2^{\prime}>x_1^{\prime}$，则必有$t_2>t_1$，即只要在$S^{\prime}$系中测得$A$先于$B$发生，则在$S$系中测得也是$A$先于$B$发生。

（2）如果$x_2^{\prime}<x_1^{\prime}$，则从数学上有可能。但这只是数学上的，在物理上是不可能的。如果物理上A事件是B事件原因，则$x_1^{\prime}$处的影响必以某种物质运动方式，以速度

$$v_S=\left|\frac{x_2^{\prime}-x_1^{\prime}}{t_2^{\prime}-t_1^{\prime}}\right|=-\frac{x_2^{\prime}-x_1^{\prime}}{t_2^{\prime}-t_1^{\prime}}\qquad（因为）$$

传递到$x_2^{\prime}$处，则

$$t_2-t_1=\gamma(u)[(t_2^{\prime}-t_1^{\prime})-\frac{uv_S}{c^2}(t_2^{\prime}-t_1^{\prime})]=\gamma(u)(t_2^{\prime}-t_1^{\prime})(1-\frac{uv_S}{c^2})$$

根据狭义相对论的理论：$u<c$ $v_S<c$，所以$1-\frac{uv_S}{c^2}>0$，

因此，只要$t_2'>t_1'$，必有$t_2>t_1$。

由此得出结论，互为因果关系的两事件，在任何惯性系中都不会出现时序颠倒的情况。这也说明，不会因为相对论效应，而改变客观事件的因果规律。或者说狭义相对论是自洽的。甚至可以说，只有在狭义相对论下，客观物质世界的因果关系才不会颠倒，狭义相对论是反映客观规律的正确理论。

四、解题指导

例 1 两个惯性系S、S'沿x轴相对运动，当两坐标原点O、O'重合时计时开始。若在S系中测得某两个事件的时空坐标分别为$x_1=6\times10^4m$，$t_1=1\times10^{-4}s$；$x_2=12\times10^4m$，$t_2=2\times10^{-4}s$，而在S'系中测得两个事件同时发生，试问：

（1）S'系相对S系的速度如何？

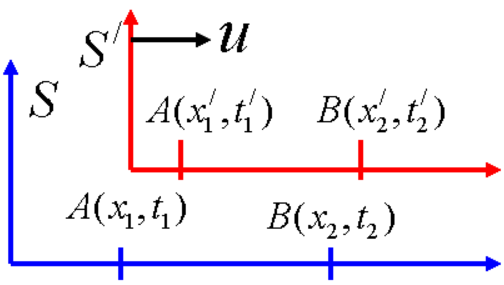
（2）S'系中测得这两个事件的空间间隔是多少？

解题分析：由于两个惯性系是相对运动的，在两个坐标系中测得的同一事件的时空坐标不同。它们之间的关系由罗伦兹变换联系在一起。

两个事件在某坐标系中的时间的间隔，就是这两个事件在该坐标系中的时间坐标之差；两个事件在某坐标系中的空间的间隔，就是这两个事件在该坐标系中的空间坐标之差。

解：（1）设S'系相对S系的速度为u，由罗伦兹变换，在S'系中测得两个事件的时间坐标分别为

$$\begin{cases} t_1'=\gamma(u)(t_1-\frac{u}{c^2}x_1) \\ t_2'=\gamma(u)(t_2-\frac{u}{c^2}x_2) \end{cases}$$



由题意$t_2'=t_1'$，即

$$t_2-\frac{u}{c^2}x_2=t_1-\frac{u}{c^2}x_1$$

$$u=\frac{c^2(t_2-t_1)}{x_2-x_1}=\frac{(3\times10^8m/s)^2(2-1)\times10^{-4}s}{(12-6)\times10^4m}=1.5\times10^8m/s$$

这说明S'系沿S系x轴正方向运动。

（2）设S'系中测得这两个事件的空间坐标分别为x_1'、x_2'，由罗伦兹变换，

$$\begin{cases} x_1=\gamma(u)(x_1'+ut_1') \\ x_2=\gamma(u)(x_2'+ut_2') \end{cases}$$

由于$t_2'=t_1'$，得到S'系中测得这两个事件的空间间隔

$$x_2'-x_1'=\frac{x_2-x_1}{\gamma(u)}=(x_2-x_1)\sqrt{1-\beta^2}=(x_2-x_1)\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}=5.2\times10^4m$$

讨论：（1）这两个事件在S系和S'系中都不是发生在同一地点，因此两个事件在S系和S'系中的时间坐标之差都不是原时（固有时间）。无法应用时间膨胀的概念。

（2）这两个事件在S系中的发生是静止的，所以这两个事件的空间坐标之差(x_2-x_1)可以看作“原长”；这两个事件在S'系中虽然是运动的，但在S'系中这两个事件是同时发生的，

因此在 S' 系中这两个事件的空间坐标之差 $(x_2' - x_1')$ 可以看作测长。可以应用长度收缩的概念。

$$x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\sqrt{1-u^2/c^2}$$

（3）在 S' 系中同时 $(t_1' = t_2')$ 发生的两个事件 $(x_1', t_1'), (x_2', t_2')$，由于发生的地点不同 $(x_1' \neq x_2')$，则在另一个惯性系 S 系中不是同时发生的 $(t_1 \neq t_2)$。这就是“同时性的相对性”。

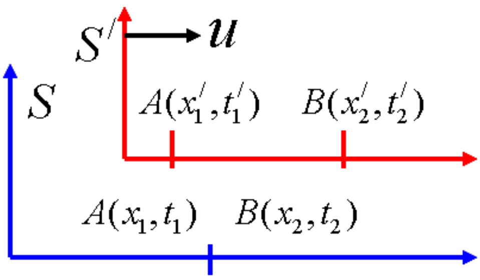
例 2 在惯性系 S 系中，测得某两个事件发生在同一地点，时间间隔为 $4s$；在另一个惯性系 S' 系中，测得这两个事件发生的时间间隔为 $6s$。求在 S' 系中，这两个事件的空间间隔。

解题分析：在同一地点先后发生两个事件的时间间隔为固有时间（原时），所以在 S 系中测得的 $\Delta t = 4s$ 是固有时间。在另一个惯性系 S' 系中，这两个事件不可能发生在同一地点，测得这两个事件发生的时间间隔为 $\Delta t' = 6s$，是由于相对论时间膨胀效应的结果。

解：由相对论时间膨胀效应

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad 6 = \frac{4}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad u = \frac{\sqrt{5}}{3}c = 0.745c$$

根据罗伦兹变换，在 S' 系中，测得这两个事件的空间坐标为



$$\begin{cases} x_1' = \gamma(u)(x_1 - ut_1) \\ x_2' = \gamma(u)(x_2 - ut_2) \end{cases}$$

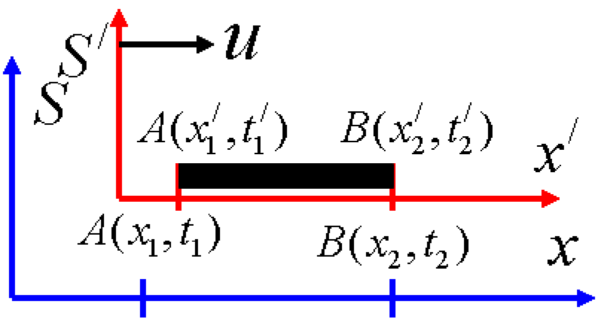
由于在惯性系 S 系中，这两个事件发生在同一地点，$\Delta x = x_2 - x_1 = 0$，所以在 S' 系中，这两个事件的空间间隔为

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \gamma(u)(x_2 - ut_2) - \gamma(u)(x_1 - ut_1)$$
$$= \gamma(u)(x_2 - x_1) - u\gamma(u)(t_2 - t_1) = -u\gamma(u)\Delta t$$
$$= -\frac{u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -1.34\times 10^9 m$$

讨论：由于在 S' 系中，两个事件的空间坐标不是同时测量的，$\Delta x'$ 不是测长，无法应用长度收缩的概念。

例 3 一静止长度为 l_0 的火箭，以速率 u 相对地飞行，现自其尾端发射一个光信号。试根据罗伦兹变换计算，在地面系中观测，光信号自火箭尾端到前端所经历的位移、时间、速度。

分析：设光信号自火箭尾端发射为“事件 1”，光信号到达火箭前端为“事件 2”。在火箭系（S'）中，测量火箭的长度是原长 $\Delta x' = l_0$，光信号是以 c 传送的，所以，在 S' 系中，光信号自火箭尾端到前端所经历的时间为 $\Delta t' = \Delta x'/c = l_0/c$。



解：根据罗伦兹变换，在地面系（S）中，测得的光信号自火箭尾端到前端所经历的位移为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma(u)(x_2' + ut_2') - \gamma(u)(x_1' + ut_1') = \gamma(u)\Delta x' + u\gamma(u)\Delta t'$$

$$= \frac{l_0 + u\dfrac{l_0}{c}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = l_0\sqrt{\frac{1+\dfrac{u}{c}}{1-\dfrac{u}{c}}}$$

在地面系（S）中，测得的光信号自火箭尾端到前端所经历的时间为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(u)(t_2' + \frac{u}{c^2}x_2') - \gamma(u)(t_1' + \frac{u}{c^2}x_1') = \gamma(u)\Delta t' + \frac{u}{c^2}\gamma(u)\Delta x'$$

$$= \frac{\dfrac{l_0}{c} + \dfrac{u}{c^2}l_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{l_0}{c}\sqrt{\frac{1+\dfrac{u}{c}}{1-\dfrac{u}{c}}}$$

在地面系中观测，光信号自火箭尾端到前端的速度为

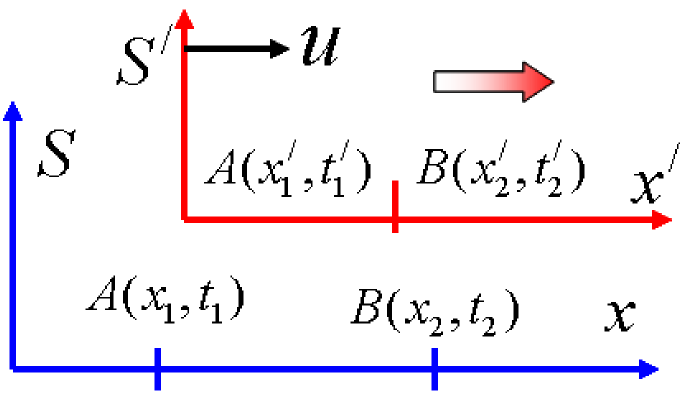
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c$$

讨论：

（1）光信号在火箭系和地面系中的传递速率都为c。这完全满足"光速不变原理"。

（2）在火箭系（S'）中，光信号自火箭尾端发射的"事件 1"，和光信号到达火箭前端的"事件 2"不是发生在同一地点，因此，$\Delta t' = \Delta x'/c = l_0/c$不是原时。

例 4 在地球－月球系中测得地－月距离为$3.844\times10^8 m$，一火箭以$0.8c$的速率沿着从地球到月球的方向飞行，先经过地球，后经过月球。问在地球－月球系和火箭系中观测，火箭由地球飞向月球各需多少时间？



分析：在火箭看来，火箭与地球相遇和火箭与月球相遇这两件事是在同一地点发生的，这两件事的时间间隔是原时。可以用时间膨胀效应求解。

解：设地－月系为S系，火箭与地球相遇为"事件 1"：(x_1, t_1)，火箭与月球相遇为"事件 2"：(x_2, t_2)。设火箭系为S'系，火箭与地球相遇为"事件 1"：(x_1', t_1')，火箭与月球相遇为"事件 2"：(x_2', t_2')。

在S系中，两个事件发生的空间间隔为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3.844\times10^8 m$$

所以，在S系中，两个事件发生的时间间隔为

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{x_2 - x_1}{u} = \frac{3.844\times10^8 m}{0.8\times3\times10^8 m/s} = 1.6s$$

由于在S'系中，两个事件是在同一地点发生的，所以，两个事件的时间间隔$\Delta t' = t_2' - t_1'$是原时。在S系中，两个事件的时间间隔$\Delta t = t_2 - t_1$是测时。则

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-u^2/c^2} = 1.6s\times\sqrt{1-0.8^2} = 0.96s$$

讨论：也可以用罗伦兹变换和长度收缩效应求解。

（1）用罗伦兹变换求解

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{1.6s - \frac{0.8}{3\times10^8 m/s}\times 3.844\times10^8 m}{\sqrt{1-0.8^2}} = 0.96s$$

（2）用长度收缩效应求解

在 S 系中，地球和月球是“静止的”，它们之间的距离是原长 $l_0 = 3.844\times10^8 m$。而在 S' 系中，地球和月球是“运动的”，它们之间的距离是测长 l'，则

$$l' = l_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

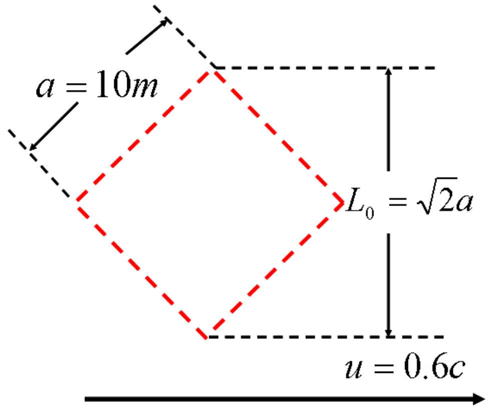
在 S' 系中（火箭），地球和月球运动速度也是 $u = 0.8c$，所以，S' 系测得的时间间隔为

$$\Delta t' = \frac{l'}{u} = \frac{l_0\sqrt{1-u^2/c^2}}{0.8c} = \frac{3.844\times10^8 m\times\sqrt{1-0.8^2}}{0.8\times3\times10^8 m/s} = 0.96s$$

例 5 一静止面积为 $S_0 = 100m^2$，面密度为 σ_0 的正方形板，当观测者以 $u = 0.6c$ 的速度沿其对角线运动。求

（1）所测得图形的形状和面积；

（2）面密度之比 σ/σ_0



分析：该“正方形”也是沿着其对角线相对观测者运动的。长度收缩只发生在运动方向上，在垂直于运动方向上不发生长度收缩。因此，观测者测得的图形是一个菱形。

还要考虑到，观测者测得的“质量”是“运动质量“。

解：（1）根据相对论长度收缩效应，观测者测得沿运动方向平行的对角线收缩为

$$L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2} = L_0\sqrt{1-u^2/c^2} = L_0\sqrt{1-0.6^2} = 0.8L_0$$

垂直于运动方向的对角线仍然为 $L_0 = \sqrt{2}a$，所以，观测者测得图形的形状为菱形，面积为

$$S = \frac{LL_0}{2} = \frac{0.8L_0^{\ 2}}{2} = \frac{0.8\times2a^2}{2}$$

$$= 0.8S_0 = 80m^2$$

（2）板的静止质量为

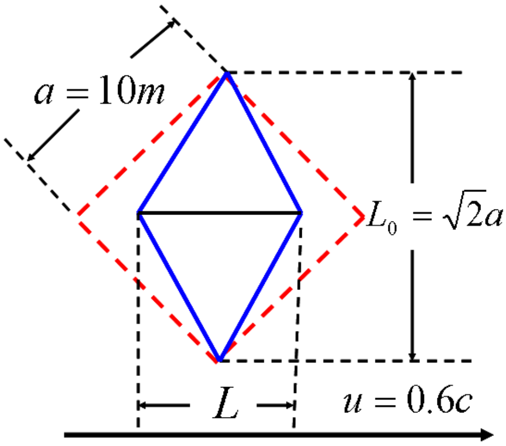
$$m_0 = S_0\sigma_0$$

板的运动质量为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{S_0\sigma_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

所以，观测者测得的面密度为

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{S_0\sigma_0}{S\sqrt{1-u^2/c^2}}$$



$$\frac{\sigma}{\sigma_0}=\frac{S_0}{S\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$=\frac{S_0}{0.8S_0\sqrt{1-0.6^2}}=\frac{25}{16}$$

例 6 离地面$6000m$的高空大气中，产生一π介子，以速度$v=0.998c$飞向地球。假定π介子在自身参照系中的平均寿命为$2\times10^{-6}s$，根据相对论理论，试问：

（1）地球上的观测者判断π介子能否到达地球？

（2）与π介子一起运动的参照系中观测者的判断结果又如何？

解：（1）π介子在自身参照系中是静止的，因此，在π介子自身参照系中，π介子的产生和消失这两个事件的时间间隔（平均寿命），$\Delta t_0=2\times10^{-6}s$是固有时间。

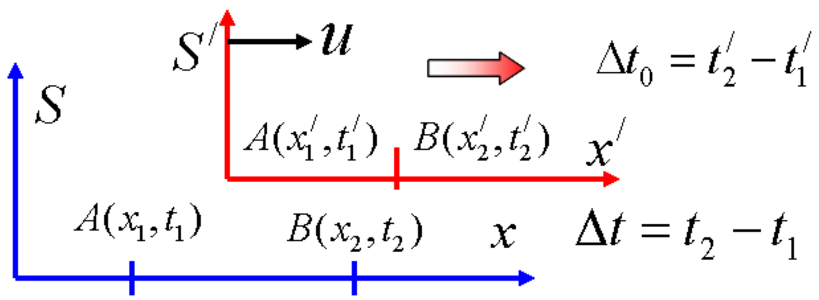
地球上的观测者，由于时间膨胀效应，测得π介子的平均寿命为

$$\Delta t=\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{2\times10^{-6}s}{\sqrt{1-0.998^2}}=31.6\times10^{-6}s$$

即在地球上的观测者看来，π介子一生可以飞行的距离为

$$L=v\Delta t=0.998\times3\times10^8m/s\times31.6\times10^{-6}s\approx9460m>6000m$$

所以判断π介子能够到达地球。



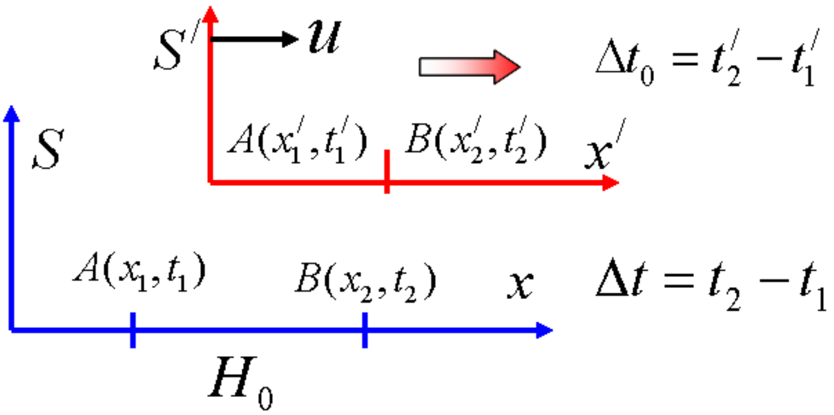
（2）在与π介子一起运动的参照系中，π介子是静止的，但地球以速率$v=0.998c$接近π介子。从地面到π介子产生处为$H_0=6000m$是在地球上测得的。由于空间收缩效应，在与π介子一起运动的参照系中，这段距离应为

$$H=H_0\sqrt{1-v^2/c^2}=6000m\times\sqrt{1-0.6^2}=379m$$

在与π介子一起运动的参照系中，在其一生地球的行程为

$$L_0=v\Delta t_0=0.998\times3\times10^8m/s\times2\times10^{-6}s\approx599m>379m$$

所以判断地球能够在π介子消失前赶到，即π介子能够到达地球。



讨论：实际上，π 介子能够到达地球，这是客观事实，不会因为参考系的不同而改变。

例 7 把静止质量为 $m_0 = 9.11\times10^{-31}kg$ 的电子从 $v_1 = 0.6c$ 的速度加速到 $v_2 = 0.8c$，需要的能量是多少？这时电子的质量增加了多少？

分析：高速运动的电子，必须要考虑相对论效应。高速运动的电子的动能 E_K 是其运动能量 $E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 与电子的静止能量 $E_0 = m_0c^2$ 之差。

解：加速电子所需要的能量，等于电子动能的增加

$$\Delta E_K = (E_2 - E_0) - (E_1 - E_0) = E_2 - E_1$$

$$= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_2^{\ 2}/c^2}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_1^{\ 2}/c^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-0.8^2}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-0.6^2}} = \frac{5}{12}m_0c^2$$

$$= \frac{5}{12}\times9.11\times10^{-31}kg\times(3\times10^8 m/s)^2$$

$$\approx 3.4\times10^{-14}J = 2.13\times10^5 eV = 0.213MeV$$

即需要对电子做 $0.213MeV$ 的功。

讨论：如果把电子从 $v_1 = 0.4c$ 的速度加速到 $v_2 = 0.6c$，可以计算，需要做 $0.084MeV$ 的功。可见，电子的速度越高，加速越困难。尤其是在接近光速时，加速电子需要付出巨大的能量。实际上，不可能将电子加速到光速。

例 8 求一个质子和一个中子结合成一个氘核时放出的能量。已知它们的静止质量分别为

质子	$m_p = 1.67262\times10^{-27}kg$
中子	$m_n = 1.67493\times10^{-27}kg$
氘核	$m_D = 3.34359\times10^{-27}kg$

分析：核反应前后有静止质量亏损，与静止质量亏损对应的是静止能量亏损，也就是一次核反应所释放的能量。

解：

$$\Delta E = (m_0 - m)c^2 = (m_p + m_n - m_D)c^2$$

$$= [(1.67262 + 1.67493) - 3.34359]\times10^{-27}kg\times(3\times10^8 m/s)^2$$

$$= 0.356\times10^{-12}J = 2.23\times10^6 eV = 2.23MeV$$

例 9 太阳的辐射能来自其内部的核聚变反应。太阳每秒钟向周围空间辐射出的能量约为 $5\times10^{26}J/s$，由于这个原因，太阳每秒钟减少多少质量？

解：太阳每秒钟减少多少质量为

$$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^2}=\frac{5\times10^{26}J/s}{(3\times10^8m/s)^2}=5.6\times10^9kg/s$$

讨论：太阳每秒钟燃烧月 5600000 吨。太阳目前的质量约为$2\times10^{30}kg$。如果太阳质量全部燃烧，还能燃烧

$$t=\frac{2\times10^{30}kg}{5.6\times10^9kg/s}\approx3.5714\times10^{20}s$$

这相当于 10000 亿年（每年约 3153600 秒）。当然，太阳的寿命计算，不会全部燃烧。

例 10　氢弹利用了聚变反应，在该反应中，各氢原子核的中子聚变成质量较大的核，每用$1g$氢，约损失$0.006g$静止质量。求在这种反应中释放出来的能量与同量的氢燃烧成水时释放出来的能量的比值。已知氢被燃烧时，$1g$氢释放1.3×10^5J的能量。

解：每用$1g$氢释放出来的能量为

$$\Delta E_1=\Delta mc^2=0.006\times10^{-3}\times9\times10^{16}=5.4\times10^{11}J/g$$

ΔE_1与同量的氢燃烧成水时释放出来的能量ΔE_2的比值为

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2}=\frac{5.4\times10^{11}}{1.3\times10^5}=4.15\times10^6$$