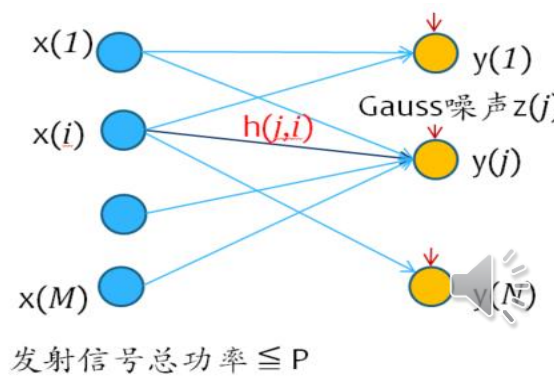
信息论

信息传输与处理的理论基础

第八讲：MIMO信道容量（Telatar公式）

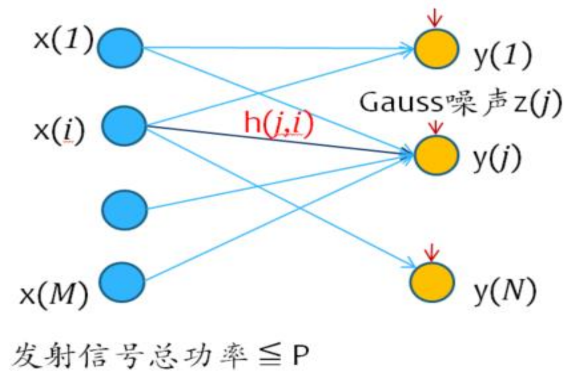
MIMO信道模型与容量(1)

* 带Gauss噪声的MIMO信道模型(一)
* <u>基本变量和参数</u>:
*   M=发射机上的天线数量，N=接收机上的天线数量；
*   x(*i*) = 第*i*个发射天线上发送的信号(随机实数)，总功率≦P；
*   y(*j*) = 第*j*个接收天线上的接收信号(随机实数)；
*   z(*j*) = 第*j*个接收天线上的接收噪声(随机实数)，
*   具有Gauss分布：z(*j*) ~ N(0, σ^2)
*   h(*j,i*) =第*i*个发射天线到第*j*个接收天线传输路径的链路增益。
* <u>基本传输方程</u>:
* $$y(j) = \sum_{i=1}^{M} h(j.i)x(i) + z(j)$$
* j=1,2,…,N　每条链路的带宽相同且为W。



MIMO信道模型与容量(2)

* 带Gauss噪声的MIMO信道模型(二)
* 信道的等价形式:
* $\mathbf{y = Hx + z}$
* **y**是以y(*j*) 为分量的N维随机向量;
* **x**是以x(*i*) 为分量的M维随机向量;
* **z**是以z(*j*) 为分量的N维Gauss随机向量,
* 假设不同的分量z(*j*)概率独立, 则$z \sim N(0, \sigma^2 I_N)$.
* **H**是以 *h*(*j*,*i*) =为矩阵元的N行M列矩阵。



* 容量计算: 求 $max_{p(x)}$ **I(x;y)**, 其中
* I(x,y) = x和y的互信息量=H[x]+H[y]-H[x,y], H表示信息熵。

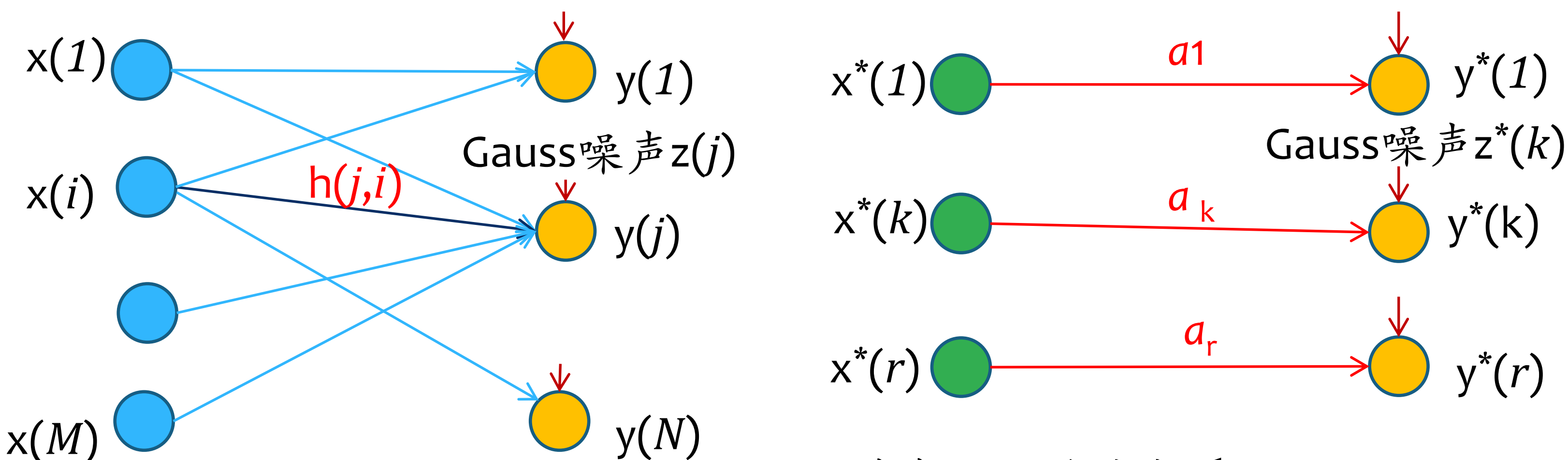
MIMO信道模型与容量(3)

* 带Gauss噪声的MIMO信道模型(三)
* 根据矩阵H的奇异分解，恒可以将任意的MIMO信道变换为
* **等效的并行传输模型**。事实上：
* 设r是H的秩(因此$r \leqq \min(M,N)$)，H有奇异分解$\mathbf{H = V^T A U}$，其中：
* $\mathbf{V}$是$r \times N$阶矩阵且$\mathbf{VV^T=I_r}$；
* $\mathbf{U}$是$r \times M$阶矩阵且$\mathbf{UU^T=I_r}$；
* $\mathbf{A}$是$r \times r$阶对角矩阵且对角线元素为$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_r > 0$。
* 对发射信号**x**和接收信号**y**做变换：
* $$\mathbf{x}^* = Ux,\quad \mathbf{y}^* = Vy$$
* 则传输方程**y=Hx+z**变换为$\mathbf{y^*=Ax^*+z^*}$，其中等效的噪声$\mathbf{z}^* = Vz$ (将y=Hx+z
* 左乘以矩阵V得$y^*=VHx+Vz=\underline{VV^T}AUx+Vz=AUx+Vz=Ax^*+z^*$)。注意：
* (1) x^*、y^*和z^*均为r维随机向量。
* (2) x^*的最大总功率不变：$E[x^{*T}x^*] = E[x^TU^TUx] \leqq E[x^Tx] = P$。
* (3) z^*仍然是均值为零的Gauss随机向量，协方差矩阵不变：
* $$R = E[z^*z^{*T}] = VE[zz^T]V^T = \sigma^2VV^T = \sigma^2 I_N$$

MIMO信道模型与容量(4)

* 带Gauss噪声的MIMO信道模型(四)

* 根据上面的分析，带Gauss噪声的MIMO信道y=Hx+z **等价于**
* **带Gauss噪声的并行信道 $y^*=Ax^*+z^*$**，即：
* $$y^*_k = a_k x^*_k + z^*_k,\quad k = 1,2,\ldots,r$$



发射信号总功率≦P

(1) 原始MIMO信道

发射信号总功率≦P

(2) 等效的并行MIMO信道

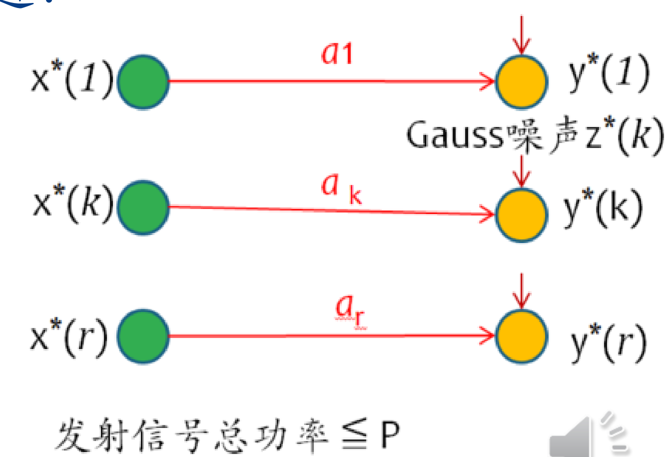
MIMO信道模型与容量(5)

* 带Gauss噪声的MIMO信道容量公式（一）
* (1)根据等效的MIMO并行信道计算互信息量
* $\mathrm{I}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \mathrm{I}(x^*;y^*) = \sum_{k=1}^{r} I(x^*_k; y^*_k)$
* (2) 对$C_{MIMO}=max_{\,x的总功率\leq P}\, \mathrm{I}(x;y)$的分析：
* $max_{\,x的总功率\leq P}\, \mathrm{I}(x;y) = \max_{Q_1+\ldots Q_r\leq P} \sum_{k=1}^{r} I(x^*_k; y^*_k)$
* = 对每条链路应用Gauss信道的容量公式Wlog(1+SNR)，W:链路带宽
* $= max_{\,Q_1+\ldots Q_r\leq P} \sum_{k=1}^{r} W\log(1 + a_k{}^2 Q_k / \sigma^2)$ Q_k是x_k^*的功率
* (3) 将并行等效信道的分析结果变换回原始信道：
* 记Q_X=发射信号向量x的自相关矩阵，
* 功率约束$Q_1+\ldots Q_r\leq P$等价于【请验证】
* $tr(Q_X) \leq P$

于是 $C_{MIMO} = max_{\,tr(Q)\leq P}\, W\log\det(I_N + HQ_XH^T/\sigma^2)$

【完整的推导参见下一页】

det(.)表示矩阵的行列式，tr(.)表示矩阵的迹。



MIMO信道模型与容量(6)

带Gauss噪声的MIMO信道容量公式（二）

* (4)最后的推导步骤：
* $det(I_N+HQ_XH^T/\sigma^2)$ = 【根据H的奇异分解式】 $det(I_N+V^TAUQ_XU^TAV/\sigma^2)$
* = 【请检验】 $det(I_r+AUQ_XU^TA/\sigma^2)$
* = 【请检验】 $(1+a_1{}^2Q_1/\sigma^2)\ldots(1+a_r{}^2Q_r/\sigma^2)$

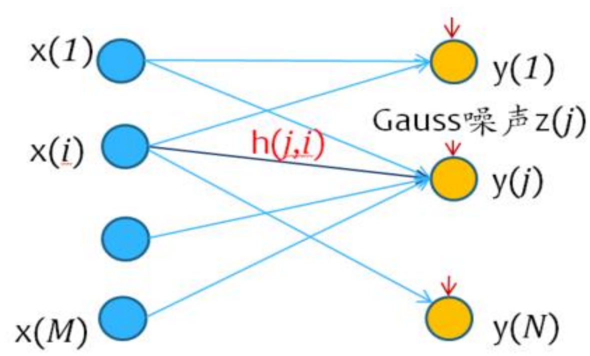
* (5) 小结 E.Telatar公式(1998)：
* $$\boxed{C_{MIMO} = max_{\ tr(Q)\leq P}\ Wlogdet(I_N+HQ_XH^T/\sigma^2)}$$
*

det(.)表示矩阵的行列式，tr(.)表示矩阵的迹。

P： 发射机总功率；

W： 每条链路的带宽；

σ^2： 每条链路的Gauss噪声功率。



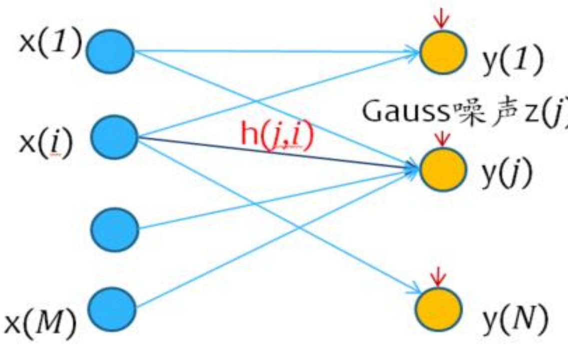
发射信号总功率≦P

MIMO信道模型与容量(7)

带Gauss噪声的MIMO信道容量公式（三）

*

* (6) 对Telatar公式更多的分析：
* 由行列式对数的微分公式 $\delta_R log(detR) = tr(R^{-1}\delta R)$ 结合极值问题的Lagrange乘子算法，得出最优自相关矩阵 Q_X^* 满足条件
* $$H^T(I_N+HQ_X^* H^T/\sigma^2)^{-1} H = \lambda I_M \qquad \text{(i)}$$
* 其中λ是乘子，由以下条件确定
* $$tr(Q_X^*) = P \qquad \text{(ii)}$$
* E.Telatar公式
* $$\boxed{C_{MIMO} = W log det(I_N+HQ_X^* H^T/\sigma^2)}$$



发射信号总功率≤P

* 方程(i)和(ii)给出C_{MIMO}的数值算法。
*

MIMO信道模型与容量

* 下一课：更多地认识MIMO容量公式