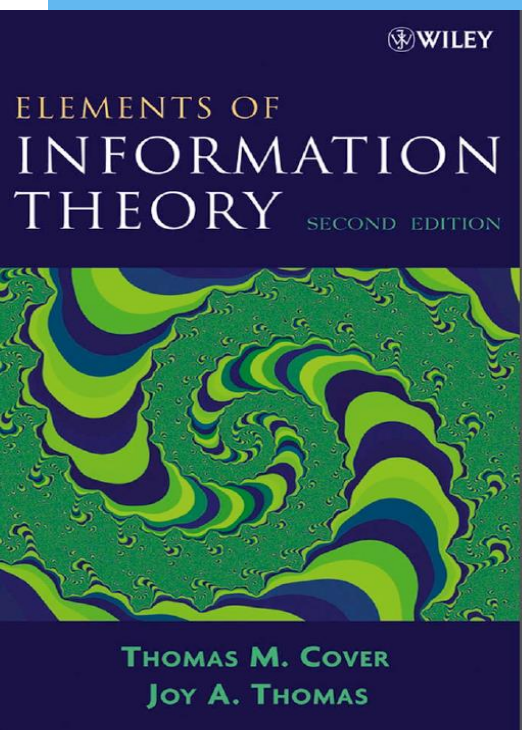
信息论
信号传输与处理的理论基础

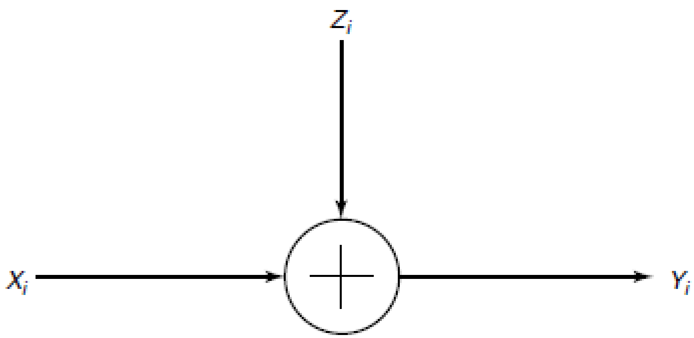
Gauss信道 （教程9.1,9.3~9.5）

Gauss信道容量的基本公式
有限带宽Gauss信道的容量公式
更多的容量公式和性能优化



Gauss信道模型和基本性质

* 基本Gauss信道是这样一个线性传输系统，具有以下特征：
* (1) Y = X + Z；X、Y是发送和接收信号。
* (2) 噪声Z是Gauss随机变量，其概率密度 $p(z) = \frac{1}{(2\pi N)^{1/2}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2N}}$



* 【注】线性系统意味着该信道上的信号可以线性叠加；
* 在噪声分布的基本参数中，方差N的物理含义是噪声的功率密度，
* 均值m则可以设为0而不失去普遍性（e.g.,不影响熵、互信息量等的计算）。

Gauss信道容量的基本公式（1）

* 有限功率P的Gauss信道的容量（定义）

$$C = \max_{f(x): EX^2 \le P} I(X;Y).$$

* Gauss信道容量的计算公式
* 第一步：根据互信息量的基本性质做展开：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) && (9.9)\\ &= h(Y) - h(X+Z|X) && (9.10)\\ &= h(Y) - h(Z|X) && (9.11)\\ &= h(Y) - h(Z), && (9.12)\end{aligned}$$

* 第二步：代入噪声的熵表达式 $h(Z) = \frac{1}{2}\log 2\pi e N$. 注意该项与信号X的概率密度无关。
* 第三步：计算max h(Y)，为此注意到Y应满足的约束（即Y的概率密度应满足的约束）是

$$EY^2 = E(X+Z)^2 = EX^2 + 2EXEZ + EZ^2 = P + N, \qquad (9.13)$$

* 根据定理8.6.5（回顾第二章），Y在上述约束下的最大熵= $\frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N)$ 并且在
* Y具有Gauss分布的情况下达到该最大值。
* 第四步：注意到当x具有Gauss分布时，Y也具有Gauss分布，因此
*

$$C = \max_{EX^2 \le P} I(X;Y) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N}\right), \qquad (9.17)$$

Gauss信道容量的基本公式（2）

* 有限功率P的Gauss信道的容量（定义 $C = \max_{f(x):E X^2 \le P} I(X;Y).$
* Gauss信道容量的计算公式
* $C(P) = (\frac{1}{2})\log(1+\frac{P}{N})$
* Gauss信道容量的本质涵义：
* Gauss信道的Shannon定理（定理9.1.1）
* Gauss信道容量公式的推广：
* Y = HX + Z；H是信道的传输增益系数，这时有
* $\boxed{C(P, H) = (\frac{1}{2})\log(1+|H|^2\frac{P}{N})}$

【习题】仿原始公式的推导，推导上述带增益的容量公式。

Gauss信道容量的基本公式（3）

* 有限功率P的Gauss信道的容量（定义）$C = \max_{f(x): E X^2 \le P} I(X;Y).$
* 带增益因子的容量公式
* $$C(P, H) = \left(\frac{1}{2}\right)\log\left(1+|H|^2\frac{P}{N}\right)$$

关于容量公式的更多讨论

(1) 容量C随增益因子的幅度|H|增加而增加；

(2) 容量C不直接依赖于发送功率P和噪声功率N，而是依赖于信噪比SNR=P/N：$C(P, H) = (1/2)\log(1+|H|^2 SNR)$. 这意味着，(100P,100N)和(0.001P,0.001N)两个信道上的容量相同。

(3) 在低信噪比SNR<<1的情形下，$C \approx (1/2)|H|^2 SNR$;

在高信噪比SNR>>1的情形下，$C \approx (1/2)\log(|H|^2 SNR)$;

【思考】以上性质的工程含义是什么？

有限带宽Gauss信道和基本性质（1）

- 有限带宽Gauss信道是这样一个线性传输系统，具有以下特征：

- （1） $Y(t) = h(t)*X(t) + Z(t) = \int_0^{+\infty} d\tau\, h(\tau)X(t-\tau) + Z(t)$；
- t表示时间，X、Y是发送和接收信号。
- （2）信道的响应函数h(t)具有有限带宽2W，即信道的幅频特性
- $$H(\omega) = 0,\ |\omega|>W$$
- （3）噪声Z(t)是Gauss随机变量，其概率密度
- $$p[Z(t)=z] = \frac{1}{(2\pi N)^{1/2}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2N}}$$

（4）Z(t)是白噪声过程，即任何不同时刻的$Z(t_1)$和$Z(t_2)$概率独立。

- 【注】W称为信道的基带截止频率。
- 有限带宽信道的例：语音信道的带宽≈20KHz，光纤带宽1GHz~10THz。

有限带宽Gauss信道和基本性质（2）

- 有限带宽信号的普遍性质：Nyquist-Kotelnikov公式


- 对任何带宽2W的有限带宽信号f(t), 根据Fourier变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega,$$

- 将被积函数中的F(ω)看做周期为4πW的周期信号，将其展开为Fourier
- 级数，其第n个Fourier系数 $= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega)e^{i\omega\frac{n}{2W}}\,d\omega.$ = f(n/2W)，因此

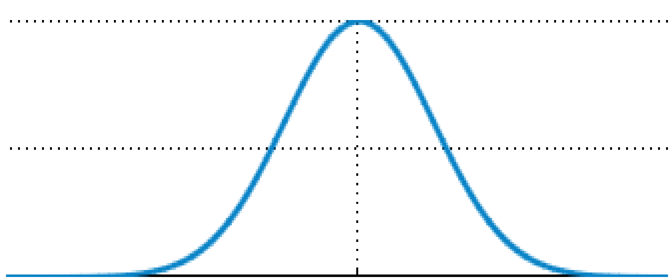
$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right)\operatorname{sinc}\left(t-\frac{n}{2W}\right)}$$

- 其中 $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt}.$
- Nyquist公式的含义：有限带宽2W的信号总可以通过2W频率的离散
- 采样{f(n/2W: n=…,-1,0,+1,…}被精确地重构。

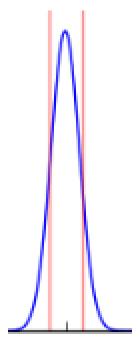
有限带宽Gauss信道和基本性质（3）

* 关于带宽有限信号的补充注记
* (1) Nyquist公示表明，带宽2W的信号具有2W/秒个自由度，即：
* 带宽有限信号也是有限自由度速率的信号。
* (2) 带宽有限信号f(t) 一定是在时间域上无限延伸的信号。
* (3) 在通信工程领域，实用的信号是“几乎有限带宽和几乎有限时宽类信号：这类信号在频域上的绝大部分功率分布在有限带宽2W内，同时和在时域上的绝大部分功率分布在有限时宽2T内。

  根据*Slepian-Landau-Pollak*理论，这类信号具有≈2WT的维数。



f(t)



F(ω)

有限带宽Gauss信道和基本性质（4）

* 有限带宽Gauss信道容量公式
*
* 若Gauss信道带宽为2W，每次传输信号的最高功率为P，
* 由Nyquist公式，信号不失真传输的最高速率是每秒2W次，因此在Gauss信道上每单位时间的传输容量
* $$C_W = 2W\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{P}{N}\right) = W\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

注(1) C_W的单位：每秒比特(bps)

注(2) 噪声功率N通常表达为噪声功率密度$N_0/2$乘以带宽的形式，即$N=WN_0$。

注(3) 如果带宽很大，则有近似式$C_W \approx P/N_0$.