（二）连续型：已知 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$, 求 $Z=g(X,Y)$ 的密度。

$Z=g\left(X_1,X_2\cdots X_n\right)$ 无论n为何值Z都是一维随机变量。

一般方法：

（1）由X,Y的取值，以及 $Z=g(X,Y)$ 的函数形式确定Z的取值。

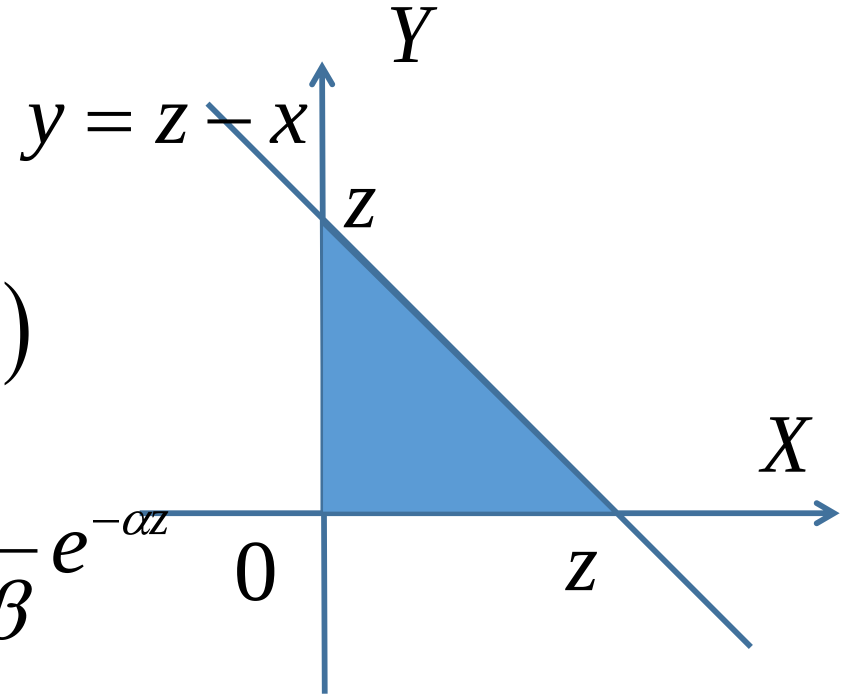
(2) $F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(g(X,Y)\le z\right)=\iint\limits_{g(X,Y)\le z} f(x,y)\,dxdy$

(3)求出上面的积分再求导，得到Z的密度 $f_Z(z)=F_Z'(z)$

例1. $X \sim e(\alpha), Y \sim e(\beta)$, X与Y独立，求：$Z_1 = X + Y; Z_2 = \dfrac{Y}{X}; Z_3 = \dfrac{Y}{X+Y}$

解: (1) 由X,Y的取值范围$x > 0, y > 0$, 知$z > 0$。

当$z \le 0$时， $F_{Z_1}(z) = 0$; 当$z > 0$时，

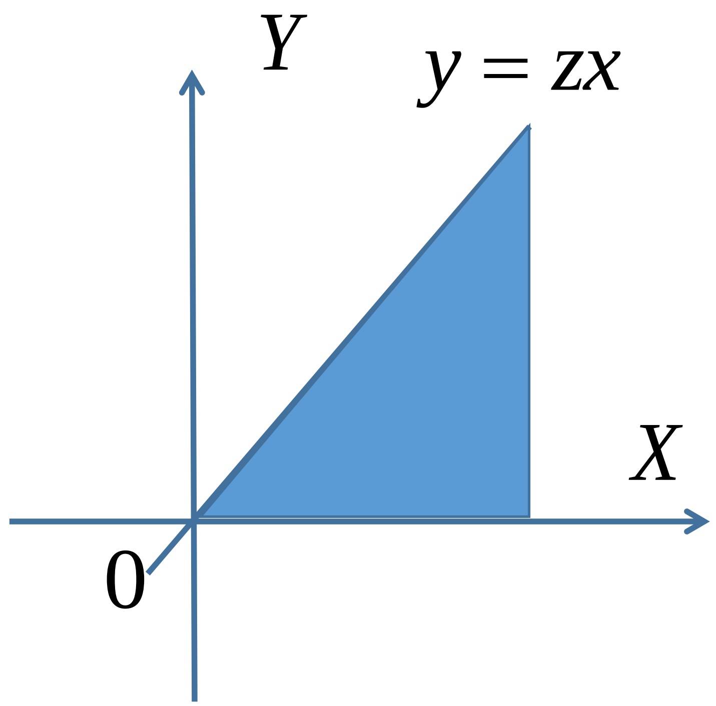


$$F_{Z_1}(z) = P(Z_1 \le z) = P(X + Y \le z) = P(Y \le z - X)$$

$$= \int_0^z \int_0^{z-y} \alpha\beta e^{-(\alpha x + \beta y)} dy dx = 1 - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} e^{-\beta z} + \frac{\beta}{\alpha - \beta} e^{-\alpha z}$$

$$f_{Z_1}(z) = F'_{Z_1}(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}\left(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z}\right) & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

(2) 由X,Y的取值$x>0,y>0$知，$Z_2=\dfrac{Y}{X}$的取值 $z>0$



当$z\le 0$时，$F_{Z_2}(z)=0$；　当$z>0$时，

$$F_{Z_2}(z)=P(Z_2\le z)=P\left(\frac{Y}{X}\le z\right)=P(Y\le zX)$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{zx}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dydx$$

$$=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\left(1-e^{-\beta zx}\right)dx=\int_0^{+\infty}\left(\alpha e^{-\alpha x}-\alpha e^{-(\alpha+\beta z)x}\right)dx=\frac{\beta z}{\alpha+\beta z}$$

$$f_{Z_1}(z)=F_{Z_2}^{'}(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta z)^2} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

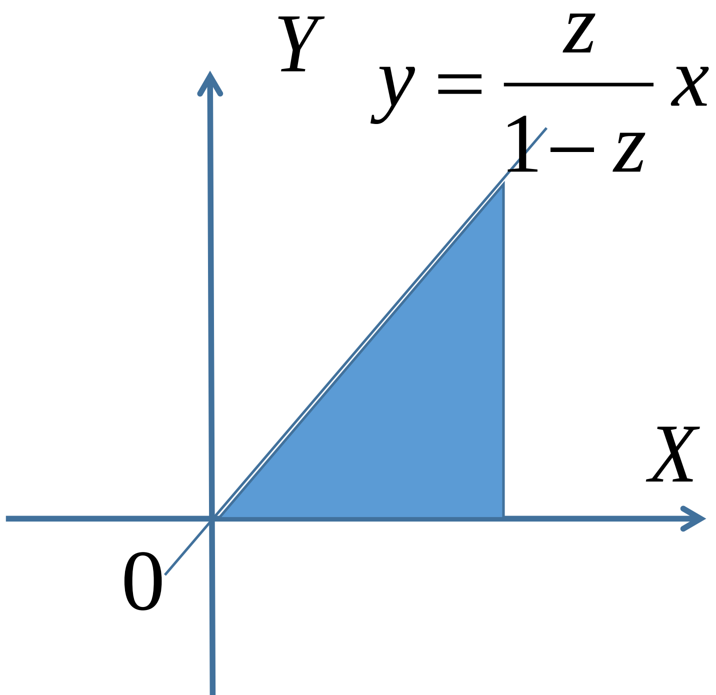
(3). 由$Z_3=\dfrac{Y}{X+Y}$ 有$Y=\dfrac{Z_3}{1-Z_3}X$，而X,Y的取值$x>0, y>0,$

则$\dfrac{Z_3}{1-Z_3}>0$，得Z_3的取值：$0<z<1$, 当$z\le 0$时。$F_{Z_3}(z)=0$；

当$0<z<1$时，$F_{Z_3}(z)=P(Z_3\le z)=P\left(\dfrac{Y}{X+Y}\le z\right)$

$$=P\left(Y\le\frac{z}{1-z}X\right)=\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{z}{1-z}x}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dydx$$

$$=\frac{\beta z}{\alpha(1-z)+\beta z}$$



$$f_{Z_1}(z)=F'_{Z_3}(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha(1-z)+\beta z)^2} & 0<z<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

例2. $D=\{(x,y) \mid 0<y<2, 0<x<2\}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求：$Z_1 = X-Y, Z_2 = XY$的密度函数。

解:(1) 由$0<x<2, 0<y<2$知$Z_1 = X-Y$的取值范围为$-2<z<2$,

当$z\le -2$时，$F_{Z_1}(z)=0$ 当$-2<z<0$时，

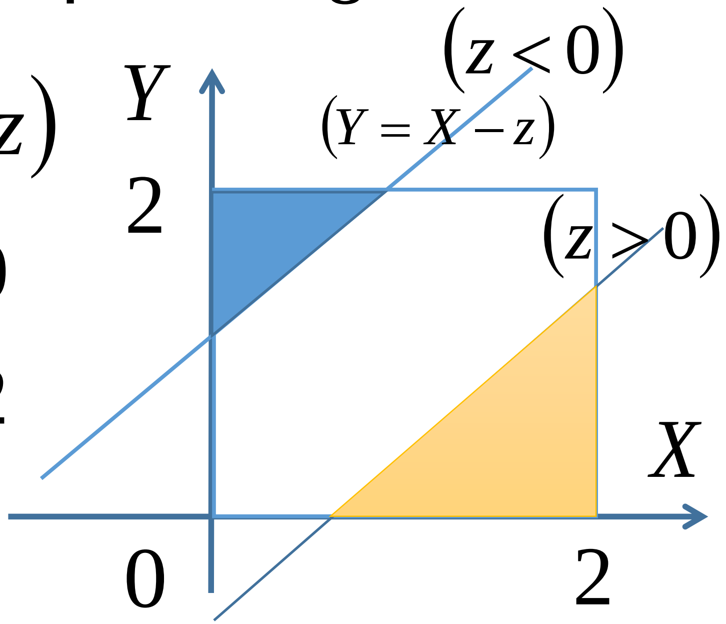
$$F_{Z_1}(z)=P(X-Y\le z)=P(Y\ge X-z)=\int_0^{2+z}\int_{x-z}^{2}\frac{1}{4}dydx=\frac{1}{8}(2+z)^2$$

当$0\le z<2$, $F_{Z_1}(z)=P(X-Y\le z)=P(Y\ge X-z)$

$$=1-\int_z^2\int_0^{x-z}\frac{1}{4}dydx$$

$$=1-\frac{1}{8}(2-z)^2$$

$$f_{Z_1}(z)=\begin{cases}(2+z)/4 & -2<z<0\\ (2-z)/4 & 0\le z<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



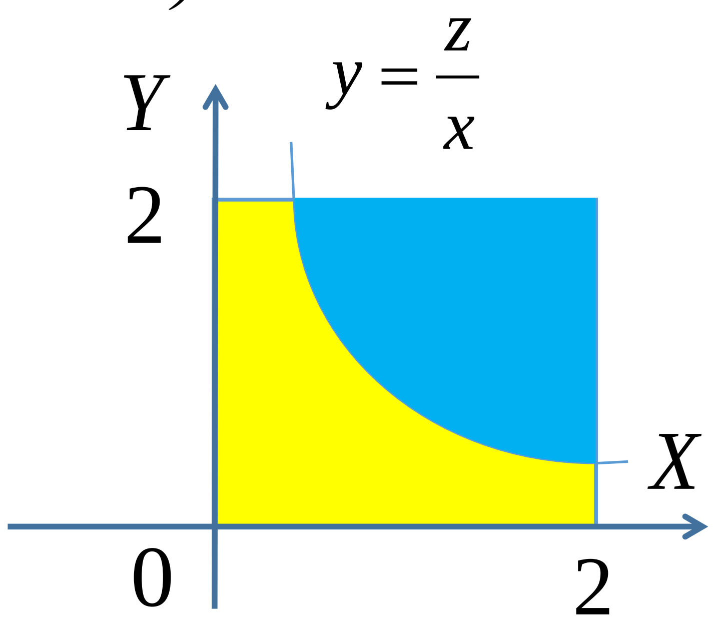
(2) 由 **0<*x*<2 , 0<*y*<2** 知 $Z_2 = XY$ 的取值范围为: $0 < z < 4$

当$z \le 0$时， $F_{Z_2}(z) = 0$; 当$0 < z < 4$时，

$$F_{Z_2}(z) = P(Z_2 \le z) = P(XY \le z) = P\left(Y \le \frac{z}{X}\right) = 1 - \boxed{\int_{\frac{z}{2}}^{2}\int_{\frac{z}{x}}^{2} \frac{1}{4} dy dx}$$

$$= 1 - \int_{\frac{z}{2}}^{2} \frac{1}{4}\left(2 - \frac{z}{x}\right) dx = 1 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{z}{2}\right) + \frac{z}{4}\left(\ln 2 - \ln\frac{z}{2}\right)$$

$$= \frac{z}{4}\left(1 + \ln 2 - \ln\frac{z}{2}\right)$$



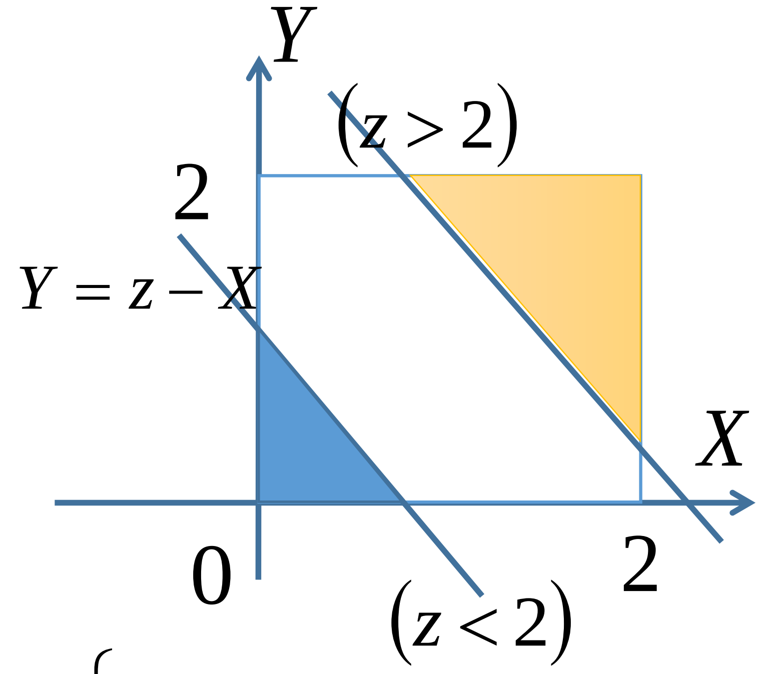
$$f_{Z_1}(z) = F'_{Z_2}(z) = \begin{cases} \dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{\ln z}{4} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

(3) 由 0<x<2 , 0<y<2 知 $Z_3 = X + Y$ **的取值范围为:** $0 < z < 4$

当 $z \le 0$ 时, $F_{Z_3}(z) = 0$;　当 $0 < z < 2$ 时,

$$F_{Z_3}(z) = P(Z_3 \le z) = P(X + Y \le z)$$

$$= P(Y \le z - X) = \int_0^z \int_0^{z-x} \frac{1}{4} dy dx = \frac{1}{8} z^2$$



当 $2 \le z < 4$ 时,　$F_{Z_3}(z) = P(Z_3 \le z)$

$$= P(Y \le z - X) = 1 - \frac{1/2(4-z)^2}{4}$$

$$f_{Z_3}(z) = F_{Z_3}'(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{4} & 0 < z < 2 \\ 1 - \dfrac{z}{4} & 2 \le z < 4 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

(均匀分布不具有可加性)

例3. 设(X,Y)服从区域$\{(x,y)|0<x<1,0<y<2-2x\}$ 上的二维均匀分布，

求 $Z=Y+2X$ 的密度函数。

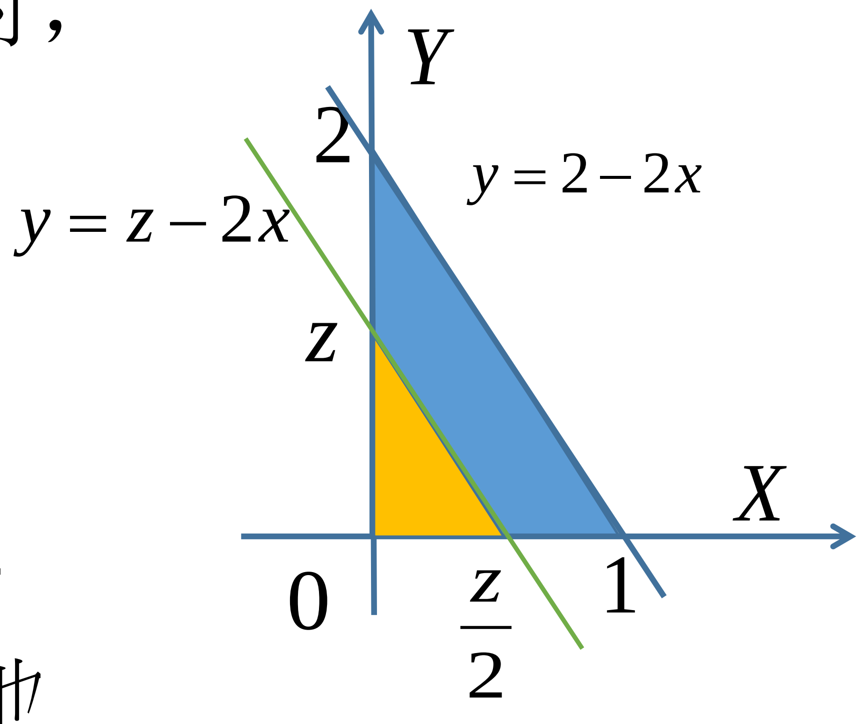
解：由$0<x<1,0<y<2-2x$知$Z=Y+2X$ 的取值取值范$(0,2)$

当$z\le 0$时， $F_Z(z)=0;$ 当$0<z<2$时，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(Y+2X\le z)$$

$$=P(Y\le z-2X)=\frac{z^2}{4}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{2} & 0<z<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

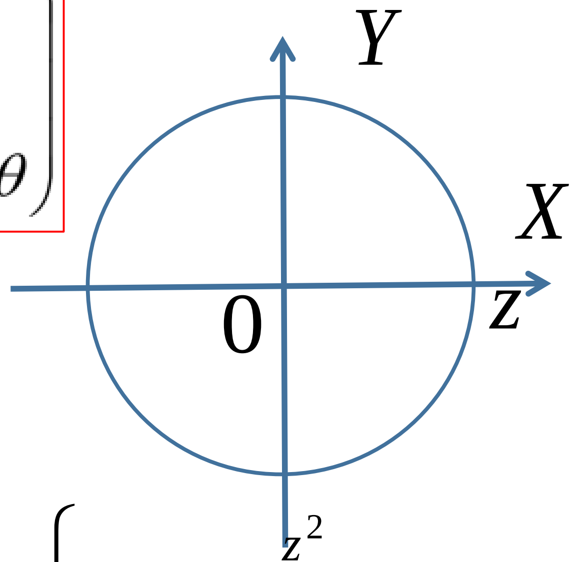


例4. 设随机变量 (X,Y) 相互独立，且都服从正态分布 $N\left(0,\sigma^2\right)$，

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的密度。

解：由 $-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$ 知 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 取值范围 $[0,+\infty)$

$$\begin{pmatrix} x=r\sin\theta \\ y=r\cos\theta \\ dxdy=rdrd\theta \end{pmatrix}$$



当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；　当 $z\geq 0$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\leq z\right)$$

$$=P\left(X^2+Y^2\leq z^2\right)=\iint\limits_{X^2+Y^2\leq z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$

$$=\int_0^z\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}rd\theta dr=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

例5. 设$X \sim U(0,1), Y \sim e(1), X$与$Y$独立，求$Z = X + Y$.

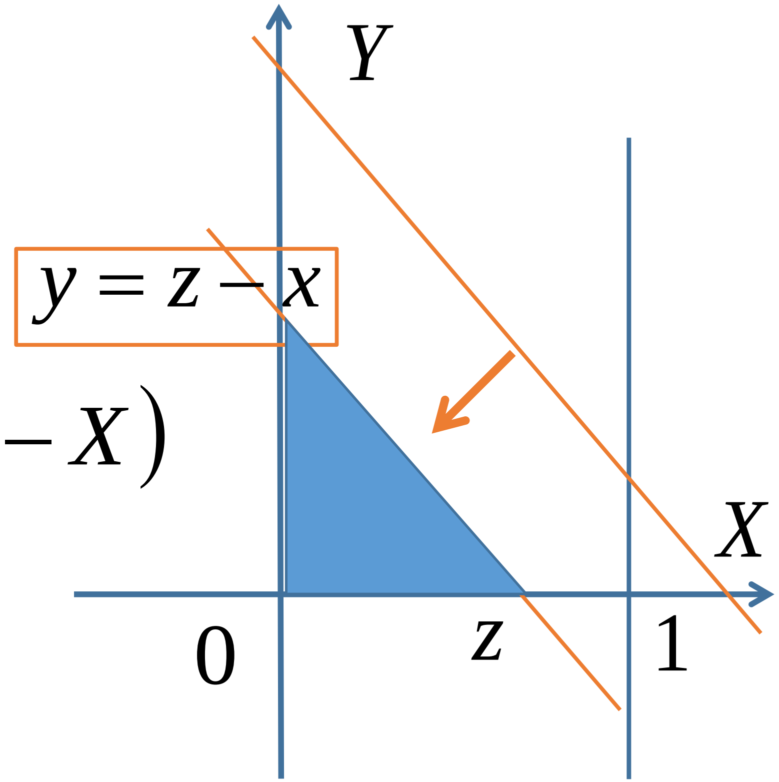
解 由$0<x<1$，$y>0$知 $Z > 0$

当$z \le 0$时，$F_Z(z) = 0$; 当$0 < z \le 1$时，

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = P(Y \le z - X)$$

$$= \int_0^z \int_0^{z-x} f_X(x) f_Y(y) dydx = \int_0^z \int_0^{z-x} e^{-y} dydx$$

$$= z - 1 + e^{-z}$$



当$z > 1$时，

$$F_Z(z) = \int_0^1 \int_0^{z-x} e^{-y} dydx$$

$$= 1 + e^{-z} - e^{1-z}$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z} & 0 < z \le 1 \\ e^{1-z} - e^{-z} & z > 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

例6. 设离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=\frac{1}{3}, i=1,2,3$，连续型随机变量$Y\sim U(0,1)$，且$X$与$Y$独立，求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

解：由x=1,2,3及0<y<1得Z的取值范围 $[1,4]$

当$z<1$时，$F_Z(z)=0$； 当$z\geq 1$时，

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z)=P(Y\leq z-X)$$

A_1, A_2, A_3

是一个划分，

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iB)$$

事件$(X=1)\cup(X=2)\cup(X=3)=S$，且互不相容，

由全概公式有：$P(Y\leq z-X)=P\{(Y\leq z-X)\cap S\}$

$$=\sum_{i=1}^{3}P\{(Y\leq z-X)\cap(X=i)\}=\sum_{i=1}^{3}P(X=i)P(Y\leq z-X|X=i)$$

$$F_Z(z)=P(Y\le z-X)=\sum_{i=1}^{3}P(X=i)P(Y\le z-X\,|\,X=i)$$

$$=P(X=1)P(Y\le z-1)+P(X=2)P(Y\le z-2)+P(X=3)P(Y\le z-3)$$

$$=\frac{1}{3}\{F_Y(z-1)+F_Y(z-2)+F_Y(z-3)\}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{3}\{f_Y(z-1)+f_Y(z-2)+f_Y(z-3)\}\quad=\begin{cases}1/3 & 1\le z\le 4\\ 0 & 其他\end{cases}$$

因为$Y\sim U(0,1)$ 所以y取值必须满足$0<y<1$，而$1\le z\le 4$,

当$1\le z<2$, $f_Y(z-1)=1$, $f_Y(z-2)=0$, $f_Y(z-3)=0$

当$2\le z<3$, $f_Y(z-1)=0$, $f_Y(z-2)=1$, $f_Y(z-3)=0$ $\qquad Z\sim U[1,4]$

当$3\le z\le 4$, $f_Y(z-1)=0$, $f_Y(z-2)=0$, $f_Y(z-3)=1$

例**7.** $\left(P_{91-7}\right)$ 设随机变量 X 与 Y 独立,其中 X 的概率分布为 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

而 Y 的概率密度为 $f(y)$,求随机变量$Z = Y - X^2$的概率密度。

解: $F_Z(z) = P(Z \le z) = P(Y - X^2 \le z) = P(Y \le X^2 + z)$

$= P\{(Y \le X^2 + z) \cap (X = 1)\} + P\{(Y \le X^2 + z) \cap (X = 2)\}$

$= P(X = 1) P\{(Y \le X^2 + z) | (X = 1)\} + P(X = 2) P\{(Y \le X^2 + z) | (X = 2)\}$

$= 0.3P(Y \le 1 + z) + 0.7P(Y \le 4 + z) = 0.3F_Y(1 + z) + 0.7F_Y(4 + z)$

$f_Z(z) = F_Z'(z) = 0.3f(1 + z) + 0.7f(4 + z)$

已知 (X,Y) 的分布，求 $Z=g(X,Y)$ 的分布。

X,Y 取值为自然数

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{m=0}^{k}P(X=m,Y=k-m)\quad k=0,1,2\cdots$$

(1) 泊松分布具有可加性　　（2）二项分布具有可加性

（二）. 连续型：已知 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$, 求 $Z=g(X,Y)$ 的密度。

$Z = g(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 无论 n 为何值 Z 都是一维随机变量。

一般方法：

（1）由 X,Y 的取值，以及 $Z=g(X,Y)$ 的函数形式确定 Z 的取值。

(2) $F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z) = \iint\limits_{g(X,Y)\le z} f(x,y)dxdy$

(3)求出上面的积分再求导，得到 Z 的密度 $f_Z(z) = F_Z{'}(z)$

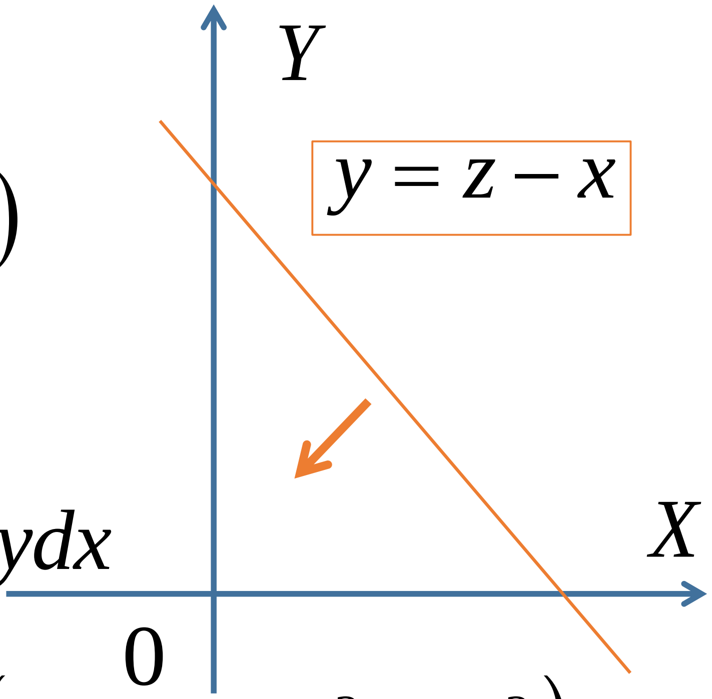
例8. $X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$, **X 与 Y 独立，求 Z=X+Y 的密度函数。**

解：Z的取值范围为: $-\infty < z < \infty$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = P(Y \le z - X)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)} dydx$$



$Z = X + Y \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$ 同理 $X \pm Y \sim N\left(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

更一般的, $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$, $X_i \sim N\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)$, 相互独立。

(正态分布重要性质之一：正态分布具有可加性)

二维正态分布的重要性质：

1. $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_{2,}, \sigma_1{}^2, \sigma_{,2}^2, \rho)$，则$X \sim N(\mu_1, \sigma_{,1}^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_{,2}^2)$

且均与ρ无关。

2.二维正态分布两个随机变量： X 与Y 独立$\Leftrightarrow \rho = 0$

3.二维正态分布具有可加性： $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2 \cdots n$，相互独立

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

抽取**n**个产品寿命值 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2).$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$(X_1, X_2, \cdots X_n)$联合分布密度： $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 发生的可能性

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$