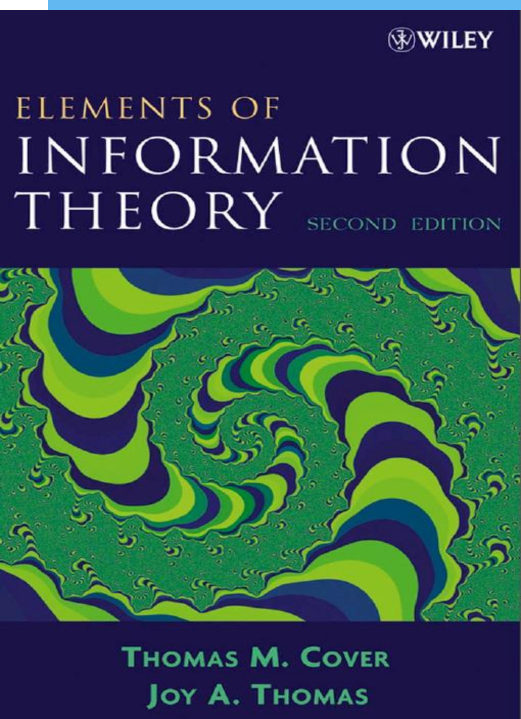
信息论

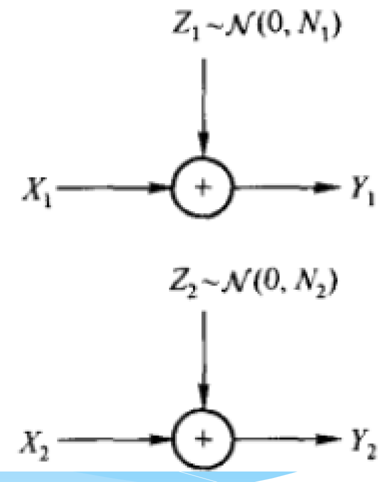
信号传输与处理的理论基础

Gauss信道 - 习题



第九章习题

* 习题9.8 考虑如图的并联Gauss信道



其中 $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$ 与 $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2)$ 是独立高斯随机变量，而 $Y_i = X_i + Z_i$。我们希望将功率分配给两个并联信道。选取固定的 β_1 和 β_2，考虑全部代价的约束条件 $\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 \leqslant \beta$，其中 P_i 是分配到第 i 个信道的功率而 β_i 是在该信道中单位功率的代价。于是，$P_1 \geqslant 0$，$P_2 \geqslant 0$ 的选取受到代价 β 的约束。

(a) β 取何值时信道停止单信道角色而开始起到双信道的作用？

时

(b) 估计信道容量，求出在 $\beta_1 = 1$，$\beta_2 = 2$，$N_1 = 3$，$N_2 = 2$ 以及 $\beta = 10$ 是达到信道容量的 P_1 和 P_2。

* 求解概要：
* 第一步 该问题等价于求非负的最优值P_1^*和P_2^*使【为什么？】
* $$C = \max \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_1}{N_1}\right)+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_2}{N_2}\right) \quad \text{s.t.} \quad \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 \le \beta$$

第九章习题

* 习题9.8（续）

* 求解概要：
* 第二步 用乘子算法求解最优值，对下式微分（λ是乘子）

$$J(P_1, P_2) = \sum \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_i}{N_i}\right) + \lambda(\sum \beta_i P_i)$$

* 得到 $$\beta_i P_i = (\nu - \beta_i N_i)^+$$
* 第三步 将上述解的表达式代回约束式计算乘子λ【请写出计算λ的方程】。
* 第四步 运用上述结果进行分析：
* (a) 在双子信道情形，$\beta_1\beta = \beta_2 N - 2 - \beta_1 N_1$ 确定β 的临界值。
* (b) 答案： $C = \frac{1}{2}\log(1+7/3) + \frac{1}{2}\log(1+3/2)$

【请完成完整的计算】

第九章习题

* 习题9.9 噪声非独立的并行Gauss信道：一种有用的分析方法

向量高斯信道。考虑向量高斯噪声信道 $Y=X+Z$，其中 $X=(X_1,X_2,X_3)$，$Z=(Z_1,Z_2,Z_3)$，$Y=(Y_1,Y_2,Y_3)$，$E\|X\|^2\leqslant P$，且

$$Z\sim N\left(0,\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}\right)$$

* 求信道的容量。
* 求解概要：上述模型相当于三个并行的Gauss子信道，但注意子信道上的
* Gauss噪声存在相关（噪声非独立），例如$E[Z_1Z_3]=1$, $E[Z_2Z_3]=1$。
* 在噪声非独立的情形，不能直接应用前面关于并行（独立）Gauss信道的容量和功率分配算法，但能用以下方法，将非独立信道变换为噪声独立
* 的并行子信道。以下的分析对任何m个子信道均成立
* 设m维接收向量 $Y=X+Z$，Gauss噪声向量Z（均值0）有协方差矩阵R：
* $$R=E[ZZ^T]$$
* R是对称正定矩阵，因此恒有对角分解结构$R=U^T diag[N_1,\ldots,N_m]U$, U是正交
* 矩阵，即$U^{-1}=U^T$，并且$N_1\geq 0,\ldots,N_m\geq 0$.

【上述事实，可参阅课程开始的基础知识，或任何初等概率及线性代数课本】

第九章习题

* 9.9（续）
* 以上的分析适合于普遍的情形，即适合于任何噪声协方差矩阵R。
* 如果R是蜕化的，即至少存在一个特征值为零，例如$N_1=0$，这时
* 总容量$C = \infty$
* 【为什么？提示：根据前面的分析，这种情形意味着什么？】
* 回到习题9.9
* (1) 验证：噪声Z的协方差矩阵确实是退化的。
* (2) 验证：根据Z的协方差矩阵，有$Z_1+Z_2=Z_3$。
* (3) 验证：根据传输方程和噪声的上述关系，有
* $$Y_1+Y_2-Y_3 = X_1+X_2-X_3$$
* 【注】上述关系表明信息可以通过一种编码形式，在传输后得到精确的重构
* （因此容量确实为∞）。你能看出编码和译码算法吗？（不复杂，就蕴含
* 在上述方程里）
* 【注】协方差矩阵退化在实际应用中几乎不存在，但个别特征值远小于其他特
* 征值，是确实存在的情况。该习题对我们利用这类信道，有哪些有用的启示？

第九章习题

9.11 高斯互信息。假设(X, Y, Z)是联合高斯分布且 $X\to Y\to Z$ 形成一个马尔可夫链，令 X 和 Y 的相关系数为ρ_1，而 Y 和 Z 有相关系数为ρ_2。求 $I(X;Z)$。

<u>求解概要</u>：

不失一般性，设X、Y和Z的均值为0。

设信号X和随机向量Z的协方差矩阵是： $\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_z\rho_{xz} \\ \sigma_x\sigma_z\rho_{xz} & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$

于是【请完成详细的计算】

$$\begin{aligned} I(X;Z) &= h(X)+h(Z)-h(X,Z) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma_x^2\right)+\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma_x^2\right)-\frac{1}{2}\log\left(2\pi e|\Lambda|\right) \\ &= -\frac{1}{2}\log(1-\rho_{xz}^2) \end{aligned}$$

Λ的行列式

注意【应用概率知识Markov性质逐步验证】

$$\rho_{xz} = \frac{\mathrm{E}\{XZ\}}{\sigma_x\sigma_z} = \frac{\mathrm{E}\{\mathrm{E}\{XZ|Y\}\}}{\sigma_x\sigma_z} = \frac{\mathrm{E}\{\mathrm{E}\{X|Y\}\mathrm{E}\{Z|Y\}\}}{\sigma_x\sigma_z} = \frac{\mathrm{E}\{\left(\frac{\sigma_x\rho_{xy}}{\sigma_y}Y\right)\left(\frac{\sigma_z\rho_{zx}}{\sigma_y}Y\right)\}}{\sigma_x\sigma_z} = \rho_{xy}\rho_{zy}$$

* 即$\rho_{xz}=\rho_1\rho_2$，故
* $I(X;Z) = -(1/2)\log(1-(\rho_1\rho_2)^2)$

第九章习题

9.11(续) 高斯互信息。假设(X, Y, Z)是联合高斯分布且 $X \to Y \to Z$ 形成一个马尔可夫链，令 X 和 Y 的相关系数为ρ_1，而 Y 和Z 有相关系数为ρ_2。求 $I(X;Z)$。

一点扩展：

计算互信息量I(X;Y)有结果【仿照前面的方法计算】

$$I(X;Y) = -(1/2)log(1-\rho_{xy}^2) = -(1/2)\log(1-\rho_1^2)$$

因此【注意$-1 \leqq \rho_1, \rho_2 \leqq 1$】

$$I(X;Y) = -(1/2)log(1-\rho_1^2)$$
$$\geq -(1/2)log(1-(\rho_1\rho_2)^2) = I(X;Z)$$

这正是数据处理不等式（参见第二章）。

【习题】请计算I(Y,Z)，将表达式用ρ_1、ρ_2和来表示，然后验证$I(Y;Z) \geq I(X;Z)$。

下单元内容

MIMO信道和时空编码/译码

*