

电 磁 学

第 7 章 静电场和恒定电场

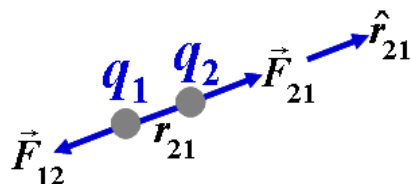
§ 1 静电场高斯定理

一 电荷

二 库仑定律

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \cdots + \vec{f}_n = \sum_i \vec{f}_i$$



三 电场强度及其叠加原理

1 电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{Q_0}$$

2 电场叠加原理

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{Q_0} = \frac{\vec{f}_1}{Q_0} + \frac{\vec{f}_2}{Q_0} + \cdots + \frac{\vec{f}_n}{Q_0} = \frac{1}{Q_0} \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{E}_i$$

3 电场强度的计算

(1) 点电荷的电场强度

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

(2) 点电荷系统的电场强度

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

(3) 连续分布电荷的电场强度

$$\vec{E} = \int_{(Q)} d\vec{E} = \int_{(Q)} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad dq = \begin{cases} \rho dV (\text{电荷体分布}) \\ \sigma dS (\text{电荷面分布}) \\ \lambda dL (\text{电荷线分布}) \end{cases}$$

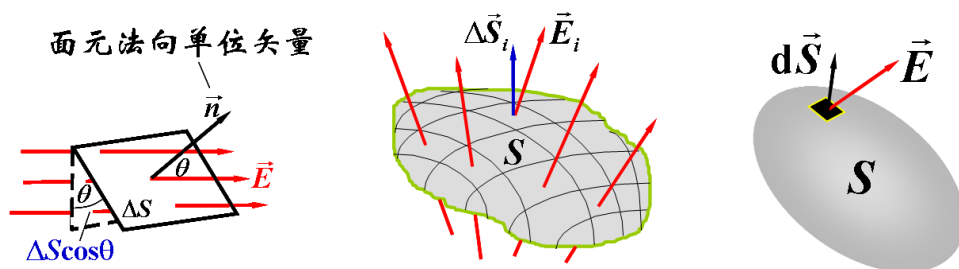
四 高斯定理

1 电场线

2 电通量

(1) 穿过面积元 ΔS 的电通量

定义面积元矢量 $\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{n}$ ，则



$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}, \quad d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

(2) 通过曲面 S 的电通量

$$\Phi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

(3) 通过闭合曲面 S 的电通量

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

3 高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S)} q_i \quad \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dQ$$

(1) 高斯面必须是封闭曲面。

高斯定理指出了：穿过闭合曲面的电通量所必须满足的方程。而不是穿过非闭合曲面，或闭合曲面某一部分的电通量所满足的方程。

(2) 穿过高斯面的电通量与面内电荷分布无关，与面外电荷无关。

高斯面内的电荷，既影响高斯面上的电场，也影响穿过高斯面的电通量；高斯面外的电荷，影响高斯面上的电场和穿过高斯面各个部分的电通量，但对穿过整个高斯面的电通量却没有影响。

(3) 高斯面上各点的场强是空间全部电荷产生的总场强。

场强不仅与高斯面内的电荷有关，还与高斯面外的电荷有关。

(4) 高斯定理给出了穿过高斯面的电通量与面内电荷的代数和的直接关系；不是高斯面上电场强度与面内电荷的代数和的直接关系。

既不能由穿过高斯面的电通量的大小来反映高斯面上的场强，也不能由穿过高斯面的电通量的大小来反映高斯面内电荷分布情况。因此，即使给定了高斯面内的电荷的总量（因而穿过高斯面的电通量随之确定），高斯面上各点的场强也是不能确定的。因为，在高斯面内的电荷的总量确定的情况下，电荷还可以有各种不同的分布，电荷的每一种分布，对应着高斯面上电场的不同分布。

4 高斯定理的应用

应用库仑定律与叠加原理，原则上可以计算任何静电场的场强，即解决全部的静电场问题。但实际上，由于受数学工具的限制，许多静电场的问题无法用场强叠加原理求解。

高斯定理为我们求解某些静电场问题，提供了一条简便的途径。即当电荷分布具有特殊对称性，从而电场分布（包括场强的大小和方向）具有相应的对称性，可以直接应用高斯定理求场强分布。

(1) 点对称。如：点电荷、均匀带电球面或球体、均匀带电同心球面。

(2) 轴对称。如：无限长均匀带电直线、无限长均匀带电圆柱体或圆柱面、无限长均匀带电同轴圆柱面。

(3) 面对称。如：均匀带电无限大平面或平板、若干个均匀带电无限大平行平面。

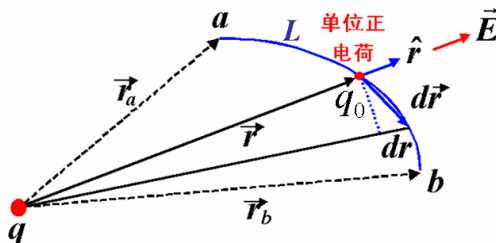
§ 2 场强环路定理 电势

一 静电场的保守性

1 静电场是保守场

(1) 点电荷的静电场是保守场

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{A_{a \rightarrow b}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$



由于 r_a 和 r_b 分别表示从点电荷 q 到试验电荷 q_0 运动的起点和终点的距离，所以此结果说明：

在静止的点电荷的电场中，电场强度的线积分只与积分路径的起点和终点有关，与移动的路径无关。

也可以说，在静止的点电荷的电场中，移动单位正电荷时，电场力所作的功只取决于被移动的单位正电荷的起点和终点的位置，而与移动的路径无关。

(2) 任意电荷体系的静电场是保守场

(3) 电荷连续分布的带电体的静电场是保守场

对于任何静电场，电场强度的线积分都只取决于起点和终点的位置，而与积分的路径无关。静电场的这一性质，称为静电场的保守性。

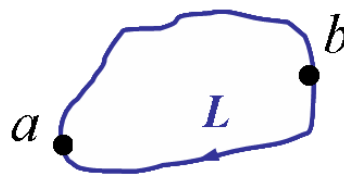
2 静电场的环路定理

静电场的保守性，还可以表述为另一种形式。在静电场中作一任意闭合路径 L ，

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{a(L_1)}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{b(L_2)}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

对于运动电荷所产生的电场，它不是保守场。

静电场的环路定理与静电场的高斯定理各自独立地反映了静电场性质的一个侧面，来源于不同的实验事实：前者来自点电荷静电场力的各向同性，后者来源于这种静电场力的平方反比关系。这两个定理合起来才能完整地描述静电场。



二 电势差和电势

1 电势差

$$U_a - U_b = \int_{a(L)}^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

2 电势

为了给出静电场中各点的电势值，需要预先选定一个参考位置，并指定它的电势为零。这一参考位置称为电势零点 P_0 ，则静电场中任意一点 P 的电势为

$$U(P) = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

当静电场中电势分布已知时，利用电势差的定义，可以很方便地计算出电荷 q_0 在静电场中移动时电场力作的功

$$A_{ab} = q_0 \int_{a(L)}^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0 (U_a - U_b)$$

计算静电场的电势，首先要选定电势零点。

对于场源电荷分布在有限范围内的静电场，一般选无穷远为电势零点，在实际问题中，通常选地球为无穷远电势零点。

$$U(p) = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

对于场源电荷分布到无限远时，电势零点不能选在无限远，要根据实际情况选择电势零点。

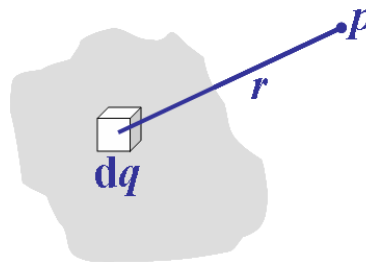
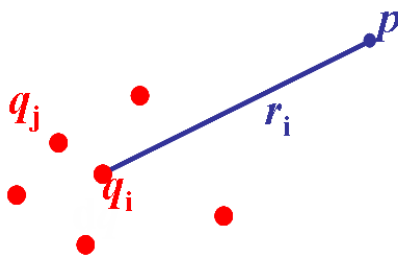
三 电势叠加原理

$$U(p) = \sum_i U_i(p)$$

这里要特别强调：各电荷的电势零点必须相同

对于点电荷体系，取无限远处电势为零，则空间中 p 点的电势为

$$U(p) = \sum_i U_i(p) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$



对于连续分布的电荷体系，可以看作由许多电荷元 dq 所组成，将每个电荷元都当成点电荷，则空间中 p 点的电势为

$$U(p) = \iiint_{(\text{电荷体系})} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

四 电荷在外电场中的静电势能

由于静电场是保守场，即在静电场中移动电荷时，静电场力做功与路径无关。正如物体在重力场中（保守力场）具有重力势能一样，电荷在静电场中也具有势能。这一势能称为静电势能。

以 W_1 和 W_2 分别表示电荷 q_0 在静电场中 P_1 和 P_2 点时具有的静电势能。由功能原理，电

荷 q_0 由 P_1 点移动到 P_2 点的过程中，电场力所做的功等于静电势能的减少：

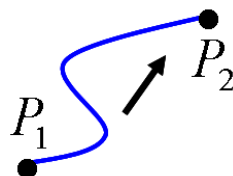
$$A_{12} = W_1 - W_2$$

由前面有关电势的讨论，电荷 q_0 由 P_1 点移动到 P_2 点的过程中，电场力所做的功为：

$$A_{12} = q_0(U_1 - U_2) = q_0U_1 - q_0U_2$$

因此，有

$$W_1 - W_2 = q_0U_1 - q_0U_2$$



可见，电势能也是静电场中的空间点函数，但它不仅是静电场的函数，还与静电场中的电荷有关。一般取

$$W = q_0U$$

作为静电势能的定义。即：一个电荷在外电场中某点的电势能等于它的电量与电场中该点的电势的乘积。或者说，一个电荷在外电场中某点的电势能，在量值上等于把电荷从该点移动到电势能零点时，静电力所做的功。

注意，电势、电势能的大小与选定的标准状态(0 势状态)有关，一旦标准状态选定，系统不同状态的电势、电势能也就确定了。选取电势、电势能的零点不同，电场中某确定点的电势不同，电荷在该确定点的电势能不同。但是，电势、电势能的零点不同，静电场中两个确定点的电势差是相同的，电荷在静电场中两个确定点的电势能是相同的。

应该指出，一个在外电场中某点的电势能是属于该电荷与产生电场的电荷系所共有的，是电荷与外电场之间的相互作用势能。这是近代物理学的重要概念。

五 场强与电势的微分关系

1 等势面

2 电势梯度

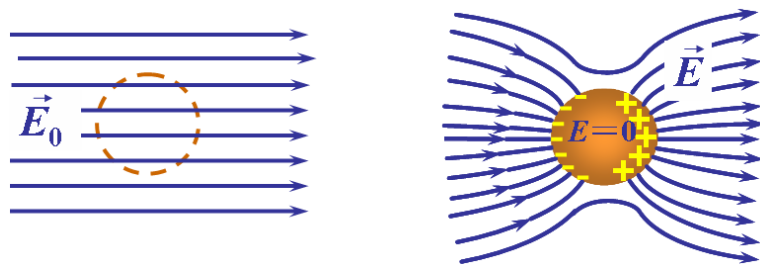
$$\vec{E} = -\text{grad}U \equiv -\nabla U$$

§ 3 静电场中的导体

1 静电平衡状态

金属导体的电结构特征是，在它内部有可以自由移动的电荷（自由电子）。将金属放在静电场中，它内部的自由电子将受静电场的作用而产生定向运动。这一运动将改变导体上的电荷分布。电荷分布的改变，有将反过来改变导体内部和周围的电场分布。这种电场与电场相互影响，将一直改变到导体达到静电平衡为止。

所谓导体的静电平衡状态是指导体内部和表面都没有电荷宏观定向移动的状态。



2 静电平衡状态和条件

$$\vec{E}_{\text{内}}=0, \quad \vec{E}_{\text{表面}} \perp \text{表面}$$

二 处于静电平衡时导体上的电荷分布规律

1 导体静电平衡时电荷分布在表面

1 导体静电平衡时电荷分布在表面

导体处于静电平衡时，其内部各处无净电荷，电荷只能分布在表面(几个原子层厚度)。假如导体内部某处有净电荷，那么它附近的场强就不可能为零。由于静电平衡时导体内部场强处处为零，根据高斯定理也可以很容易地证明上面的结论。

(1) 实心导体

因为静电平衡导体，其内部电场强度为零： $\vec{E}_{\text{内}}=0$ ，由高斯定理

处于静电平衡的实心导体，导体内部净电荷为零。导体如果带电，其电荷只能分布在导体表面。

(2) 导体壳内没有电荷

在导体中包围空腔选取高斯面 S ，由于静电平衡的导体，导体内部电

场强度为零： $\vec{E}_{\text{导内}}=0$ ，则穿过高斯面 S 的电通量为零

$$\oint_S \vec{E}_{\text{导内}} \cdot d\vec{s} = 0$$

由高斯定理，高斯面 S 包围的电荷的代数和为零。同时，由于静电平衡的导体内部没有净电荷分布，腔内又没有电荷，高斯面 S 如果包围电荷，也只能分布在导体壳内表面。因此，导体壳内表面的电荷的代数和为零

$$\oint_{S_{\text{内}}} \sigma_{\text{内}} ds = 0$$

虽然导体壳内表面的电荷的代数和为零，但可能还有正负之分，即导体壳内表面的电荷分布 $\sigma_{\text{内}}$ 有的地方为正，有的地方为负。如果是这样，在腔内肯定存在电场 \vec{E} ，而且电场线从正电荷到负电荷。这样，如果沿着电场线由正电荷到负电荷对电场强度线积分不会为零，因此，导体壳内表面正电荷、负电荷处就会有电势差，这违反了“静电平衡时，导体表面是等势面”的规律。因此，导体壳内表面没有净电荷分布

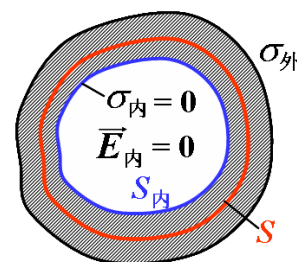
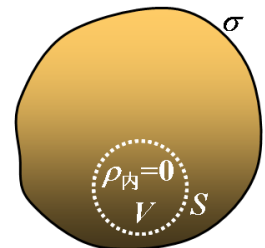
$$\sigma_{\text{内}} = 0$$

同时，腔内无电场线，腔内无电场

$$\vec{E}_{\text{内}} = 0$$

(3) 导体壳内有电荷

如果导体壳腔内有电荷 q ，在导体中包围空腔选取高斯面 S ，由于静电平衡的导体，

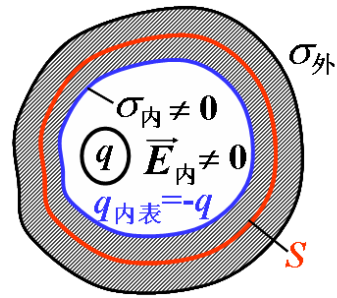


导体内部电场强度为零： $\vec{E}_{\text{导内}} = 0$ ，则穿过高斯面 S 的电通量为零

$$\oint_S \vec{E}_{\text{导内}} \cdot d\vec{s} = 0$$

由高斯定理，高斯面 S 包围的电荷的代数和为零。同时，由于静电平衡的导体内部没有净电荷分布，腔内又有电荷，高斯面 S 如果包围电荷，也只能分布在导体壳内表面。因此，导体壳内表面的电荷与腔内电荷的代数和为零

$$\oint_S \vec{E}_{\text{导内}} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0}(q + q_{\text{内表}}) = 0, \quad q_{\text{内表}} = -q$$



即，导体壳内表面的电荷量（正负电荷代数和）与腔内电荷等值反号。腔内存在电场。

2 表面场强与面电荷密度的关系

在导体表面取小面积元 ΔS ，设此处电荷面密度为 σ 。以小面积元 ΔS 处表面的法线方向为轴，以小面积元 ΔS 为上下底，作一个小扁柱体，扁柱体的一个底在导体内，扁柱体的另一个底在导体外。以这个小扁柱体的表面作为高斯面。

由于静电平衡时，导体内部的电场强度为零，导体外部的电场强度与导体表面垂直，同时，小面积元 ΔS 很小，认为在 ΔS 处，电场强度 \vec{E} 是均匀的，则穿过高斯面的电通量为：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{\text{表}} \cdot \Delta S$$

同样，由于小面积元 ΔS 很小，认为在 ΔS 处的电荷分布是均匀的，则高斯面包围的电荷为：

$$Q = \sigma \Delta S$$

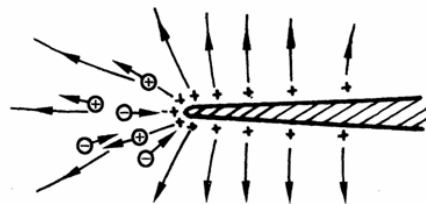
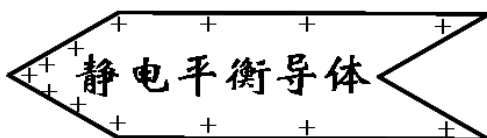
这样，由高斯定理，得到小面积元 ΔS 处表面的电场强度

$$E_{\text{表}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \vec{E}_{\text{表}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_n$$

可见，静电平衡导体的表面电荷密度，与当地表面紧邻处的电场强度的大小成正比。

3 孤立导体

孤立导体处于静电平衡时，所带电荷的面密度与表面的曲率有关。凸表面的曲率越大处，表面电荷的面密度 $|\sigma|$ 越大；凹表面上曲率越大处，表面电荷的面密度 $|\sigma|$ 越小。



例如，对于一个形状为正四面体的带电导体，四个顶点上的电荷最多。这可以由电荷同性相斥的性质来推断，也可以通过比较导体表面附近处和较远处的等势面的形状来推想。孤立的无限大带电平板，由于其曲率半径为无限大，面电荷是均匀分布的；孤立的带电球面、球壳、球体，由于其曲率半径相等，面电荷是均匀分布的。

尖端上电荷过多时，带电的尖端电场强，使附近的空气电离，会引起尖端放电现象。为防止尖端放电，高电压器件的表面必须做得光滑并且常常做成球面。利用尖端放电的例子有避雷针、电子点火器和火花放电设备中的电极。

§ 4 静电场中的电介质

一 电介质对电场的影响

二 电介质的极化机理

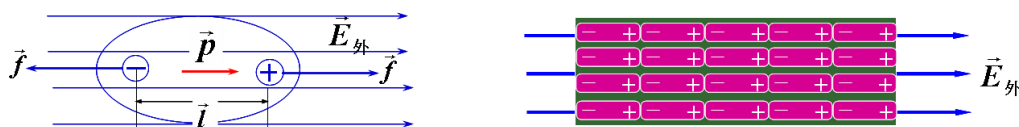
极性分子和非极性分子

电介质的极化

(1) 无极性分子的位移极化

无极性分子虽然无固有电矩，但在外电场的作用下，无极性分子的电荷重心会分开，因而具有了电偶极矩，这种电偶极矩称为感应电矩。感应电矩的方向与外加电场同向。这种现象称为无极性分子的位移极化。无极性分子位移极化的效果是，在均匀电介质内部仍是电中性，其表面出现了一定的电荷分布。

分子处在不太强的电场中， \vec{p} 与 \vec{E} 近似成正比。感应电矩与温度无关，其大小比极性分子的固有电矩小得多，约为后者的万分之一。



(2) 有极性分子的取向极化

对于极性分子，存在固有电矩。无外电场时，电介质中固有电矩热运动，混乱分布，介质不带电。但如果受外电场的作用，固有电矩的方向趋同于外电场的方向。这种现象称为极性分子的取向极化。有极性分子的取向极化的效果是，在均匀电介质内部仍是电中性，其表面出现了一定的电荷分布。

4 电极化强度

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$$

5 各向同性、线性电介质的极化规律

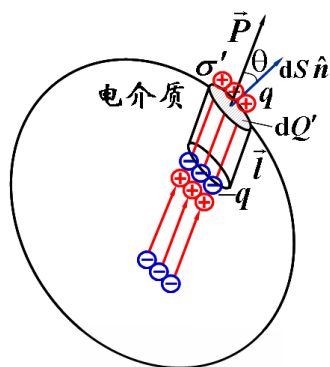
$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

6 束缚电荷面密度与极化强度的关系

电介质在电极化状态中，内部电极化强度 \vec{P} 不为零，并且表面出现了极化电荷面密度 σ' 。下面我们以非极性分子电介质为例，求出 σ' 与 \vec{P} 的关系。

在电介质表面取小面元 $d\vec{s}$ ，
设想极化过程中负电荷不动，正电
荷的重心相对负电荷移了 \vec{l} ， $\vec{l} \parallel$

$\vec{P} \parallel \vec{E}$ ，如图所示，作一斜高为 l ，
底面积 ds 的斜柱体体积元 dV 。
由于电介质的极化， dV 内的所有
分子的正电荷重心都将移出 ds ，
从而成为极化电荷。极化电荷的总
电量为



n —分子数密度

\hat{n} —面元外法线
单位矢量

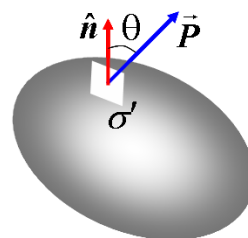
$$dQ' = n \cdot (ds \cdot l \cdot \cos\theta) q = nql \cos\theta \cdot ds = np_{\text{分子}} \cdot \cos\theta \cdot ds = P \cdot \cos\theta \cdot ds$$

式中 q 表示一个分子的正电荷， n 表示电介质的分子数密度。注意： $\vec{p} = q\vec{l}$ 、 $\vec{P} = n\vec{p}$ 。进
而，极化电荷面密度为

$$\sigma' = dQ' / ds = P \cos\theta = P_n = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

即，束缚电荷面密度，等于电极化强度法向分量。这里， \hat{n} 为表
面该点外法线方向单位矢量。

当 θ 为锐角时，电介质表面上出现一层正极化电荷；当 θ 为钝角
时，表面上出现一层负极化电荷。



考虑到 \vec{P} 的定义，电极化强度 \vec{P} 相当于对于 ΔV 内所有分子的极化状态的平均描述，

三 电介质中的电场分析和高斯定理

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

电位移矢量

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

电位移矢量的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum q_0$$

各向同性、线性介质 \vec{D} 、 \vec{E} 、 \vec{P} 的关系

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

四 电介质中的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

§ 5 电容和电容器

一 孤立导体的电容

$$C = \frac{Q}{U}$$

电容的单位是法拉(F)。由于真空中带电量为 Q 的孤立导体球的电势为

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以，真空中的孤立导体球的电容为

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

二 电容器

$$C = \frac{Q}{U_1 - U_2}$$

三 几种典型电容器电容的计算

1 平板电容器

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

2 圆柱电容器

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

3 球形电容器

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

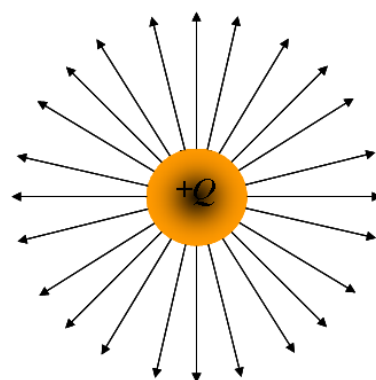
四 电容器的串联与并联

1 电容器串联

$$\frac{1}{C} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}$$

2 电容器并联

$$C = \sum_i^n C_i$$



§ 6 静电场的能量

场是物质存在的一种形态，它具有能量和动量。本节所讨论的静电场的能量，与其它场一样也是贮存于场中的。为了讨论的方便，我们先来考虑电容器电场中贮存的能量。

一 电容器的能量

电容器极板电量分别为 $\pm Q$ ，相应的电势差为： $U_1 - U_2$ 。

根据在充电过程中外力克服电场力对电荷做的功，来计算电容器贮存的能量。设想在电容器充电过程中，外力不断把微小电荷元 $+dq$ 从电容器的负极迁移到正极。设某一时刻极板所带电量为 $\pm q$ ，则板间的电压为

$$u = u_1 - u_2 = \frac{q}{C}$$

如图所示，在迁移 $+dq$ 的过程，外力做功

$$dA = (u_1 - u_2) dq = \frac{q}{C} dq$$

充电从 $q_1 = 0$ 开始，到 $q_2 = Q$ 结束，外力所做的总功为

$$A = \int dA = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

根据能量守恒定律，这个功即为贮存在电容器内的能量

$$W_e = A = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}$$

电容器的能量可以认为储存在电容器内的电场之中。

二 电场能量和电场能量密度

为了找到电容器能量和场强的关系，我们以平板电容器为例来展开讨论。对平板电容器，其内部场强均匀，因为

$$U = Ed, \quad Q = \sigma S, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad Sd = V$$

所以，带电量为 $\pm Q$ 的平板电容器所储存的电场能量为

$$W_e = \frac{QU}{2} = \frac{E\sigma Sd}{2} = \frac{E^2 \epsilon Sd}{2} = \frac{\epsilon}{2} E^2 V = \frac{DE}{2} V$$

式中 V 为两极板间电场所占空间的体积，所以电场的能量密度为

$$w_e = \frac{\epsilon}{2} E^2 = \frac{DE}{2}$$

电场中贮有能量的观念，是关于电场概念的一个重要结论。虽然上式是从平板电容器的匀强电场这一特例导出的，但是可以证明，其结论是在更广泛的情况下普遍成立的。

在各向同性的介质中，电场的能量密度可以写成

$$w_e = \frac{\epsilon}{2} E^2 = \frac{DE}{2} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2}$$

静电场的能量可以写成

$$W_e = \iiint \frac{DE}{2} dV = \iiint \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} dV$$

在真空中，静电场的能量密度为

$$w_e = \frac{DE}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

静电场能量与静电势能是两个不同的概念。静电场能量是指静电场本身所具有的能量；静电势能是指某电荷在其他电场中所具有的势能。

§ 7 恒定电场

本节我们研究恒定电场，即电荷运动，但是场的空间分布不随时间变化的电场。前面所讨论的静电场也不随时间变化，而且还要求电荷不流动，所以静电场可以看成恒定电场的特例。为了揭示恒定电场、电荷分布以及电流之间的相互制约关系，我们先讨论恒定电流并引入电流密度的概念。

1、恒定电流

$$I = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

这就是电流的连续性方程，它表示单位时间流出 S 面的电流等于 S 面内电量的减少率。

对于恒定电流来说，电流场是不随时间变化的。容易证明此时有

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

式称为电流的恒定条件。它表明在恒定条件下，通过任意闭合曲面一侧流入的电流，必等于从另一侧流出的电流，即电流线必是闭合曲线，它们不可能在任何地方中断。

2、恒定电场

由不随时间变化的运动电荷产生的电场。

稳恒电场同静电场一样，也是保守力场，可以引入电势概念，它遵守高斯定理与场强环路定理等基本规律。由于导体内部存在电流，导体内部场强不为零，导体不是等势体。

导体内部任意一点的电流密度 \vec{J} 与该点场强 \vec{E} 有如下关系：

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

式中 γ 为电导率。也称欧姆定律的微分形式

3、电源的电动势

$$\mathcal{E} = \frac{A_{ne}}{q} = \int_{-}^{+} \vec{E}_{ne} \cdot d\vec{l} \quad (\text{电源内部})$$

第 8 章 恒定磁场

一切电磁现象都起因于电荷及其运动。在运动电荷周围除了存在电场外，还存在磁场。运动电荷之间的相互作用是通过电场和磁场来传递的。

一 磁现象

二 磁场与磁感应强度

在物理学上，用磁感应强度矢量 \vec{B} 来描述磁场这种物质。在磁场中，磁感应强度矢量 \vec{B} 是空间函数 $\vec{B}(x, y, z)$ ，它的大小反映该点磁场的强弱，它的方向为该点磁场的方向。

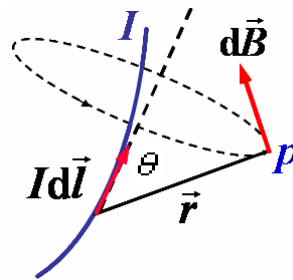
在国际单位制中，磁感应强度 \vec{B} 的单位为 T (特斯拉)。

三 毕奥—萨伐尔定律

毕奥和萨伐尔在实验的基础上总结出电流元产生的磁感应强度的表达式，称为毕奥—萨伐尔定律(Biot—Savart law)。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (8-1-1)$$

式中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 为真空磁导率， \vec{r} 是电流元 $Id\vec{l}$ 到场点 P 的矢径。由此可知，电流元 $Id\vec{l}$ 在真空中任一点 P 所产生的磁感应强度 $d\vec{B}$ 的大小与电流元的大小成正比，与电流元 $Id\vec{l}$ 图 8-1-1 电流元的磁场



和 \vec{r} 的夹角的正弦成正比，而与电流元到 P 点的距离 r^2 成反比。即磁感应强度 $d\vec{B}$ 的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (8-1-2)$$

$d\vec{B}$ 的方向垂直于 $Id\vec{l}$ 和 \vec{r} 所组成的平面，并沿矢积 $Id\vec{l} \times \vec{r}$ 方向。

由毕奥—萨伐尔定律及叠加原理就可求出任一载流导线在空间任一给定场点 P 点的磁感应强度

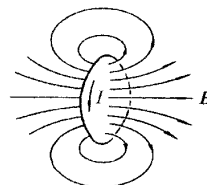
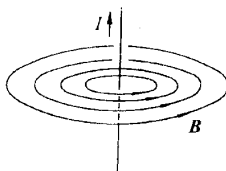
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (8-1-3)$$

若空间存在若干载流导线，每一导线在 P 点所产生的磁感应强度为 \vec{B}_i ，则 P 点的磁感应强度为

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i \quad (8-1-4)$$

由毕奥—萨伐尔定律及磁场的叠加原理原则上可求出任意形状载流导线所产生的磁场的分布。

§ 2 磁场的高斯定理



一 磁感应线与磁通量

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad \Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

磁通量的单位是韦伯，用 Wb 表示， $\text{Wb} = 1\text{Tm}^2$ 。

二 磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8-2-2)$$

其微分形式为

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8-2-3)$$

§3 安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

这是恒定磁场的基本规律之一，称为安培环路定理，它可表述为：在恒定电流的磁场中，磁感应强度 \vec{B} 沿任意闭合环路 L 的线积分等于环路 L 所包围的电流强度的代数和的 μ_0 倍。

安培环路定理表明，磁感应强度 \vec{B} 的环路积分不为零，因此，磁场是（非保守场）有旋场。在磁场中不存在象静电场中电势一样的磁势。

这里要注意，磁感应强度 \vec{B} 是全部电流产生的磁感应强度的矢量和；而电流和仅仅是闭合环路 L 所包围的电流强度的代数和。

安培环路定理写为如上形式，对电流的正负要求：当环路积分的方向与电流方向成右手螺旋关系时，电流为正；反之，电流为负。环路积分的方向反向时，积分值反号；同时，电流的正负也反号。

在静电场中，我们利用高斯定理可以方便地计算一些有对称性的带电体的电场分布，这里也同样可以用安培环路定理计算出某些具有对称性的载流导线的磁场分布。

用安培环路定理计算载流导线的磁场分布时，首先要根据电流的对称性分析磁场分布的对称性，然后再由安培环路定理计算磁感应强度的大小和方向。其中重要的是如何选取合适的闭合环路作为 \vec{B} 的积分路径，以使积分中的 \vec{B} 能以标量的形式从积分号里提出来。

§4 带电粒子在磁场中的运动

一 磁场作用在带电粒子上的洛伦兹力

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

称为洛伦兹力。该式表明洛伦兹力始终与运动电荷的速度垂直，所以洛伦兹力作的功恒为零，洛伦兹力只改变电荷的运动方向而不改变其速度的大小。

若运动电荷所在空间既有磁场又有电场，则作用在该电荷上的力是电场力与磁场力的矢量和，表示为

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

上式是电磁学的基本公式之一，它表明静电场对电荷的作用力与电荷的运动速度无关，这已经为实验所验证。

二 带电粒子在均匀磁场中的运动

设一带电粒子 q 以初速度 \vec{v} 进入磁场中，它受到洛伦兹力的作用，在磁场中的运动与其速度有关。

(1) $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ，则带电粒子不受磁场的作用力，仍以原来的速度作匀速直线运动。

(2) $\vec{v} \perp \vec{B}$, 则带电粒子受到大小不变的力 $F_m = qvB$ 的作用, 在垂直于 \vec{B} 的平面内作匀速圆周运动。洛伦兹力充当带电粒子匀速圆周运动的向心力, 有

$$F_m = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

则带电粒子作圆周运动的半径为

$$R = \frac{mv}{qB}$$

运动的周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

这表明, 带电粒子的运动周期与其运动速率及半径无关。

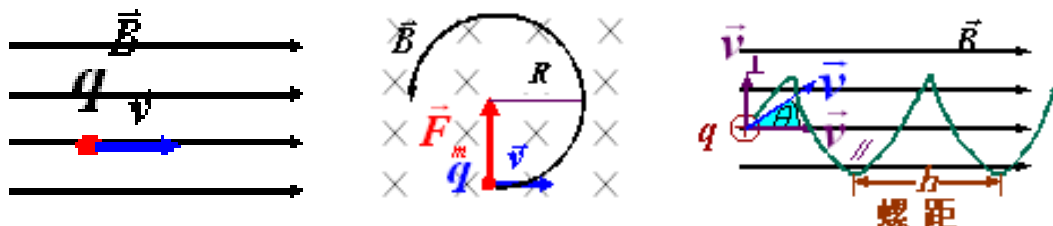


图 8-4-1 带电粒子在均匀磁场中运动

(3) \vec{v} 与 \vec{B} 有一夹角 θ , 则可将 \vec{v} 分解为

$$v_{\parallel} = v \cos \theta, \quad v_{\perp} = v \sin \theta$$

两个分量, 它们分别平行和垂直于 \vec{B} 。若只有分量 v_{\perp} , 带电粒子将在垂直于 \vec{B} 的平面内作匀速圆周运动; 若只有分量 v_{\parallel} , 带电粒子将沿 \vec{B} 方向作匀速直线运动。当两个分量同时存在时, 带电粒子的轨迹将是一条螺旋线, 回旋半径

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

运动周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

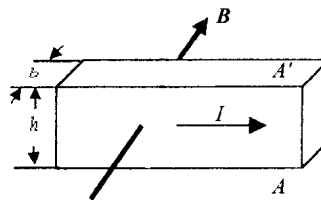
其螺距为

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}$$

带电粒子运动一周所前进的距离与 v_{\perp} 无关。

三、霍尔效应

1879 年霍尔发现, 若将一个导电板放在垂直于它的磁场中, 当有电流通过它时, 在导电板的 A 和 A' 两侧产生一个电势差 U_H , 如图 8-4-9 所示。这种效应称为霍尔效应, 产生的电势差称为霍尔电势差。实验表明在磁场不太强时, 霍尔电势差 U_H 的大小与电流强度 I 、磁感应强度 B 成正比, 而与导电板的厚度 b 成反比, 即



$$U_H = R_H \frac{IB}{b}$$

图 8-4-9 霍尔效应

式中的 R_H 叫做霍尔系数。

霍尔效应可用洛伦兹力来解释，当导电板中通有电流时，其中的载流子在稳恒电场的作用下做定向运动，

在磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中受到洛伦兹力 $F_m = qvB$ ，式中 v 为载流子定向运动的平均漂移速率。该力使导电板内的载流子产生偏转，所以在 A 、 A' 两侧分别积累正、负电荷，

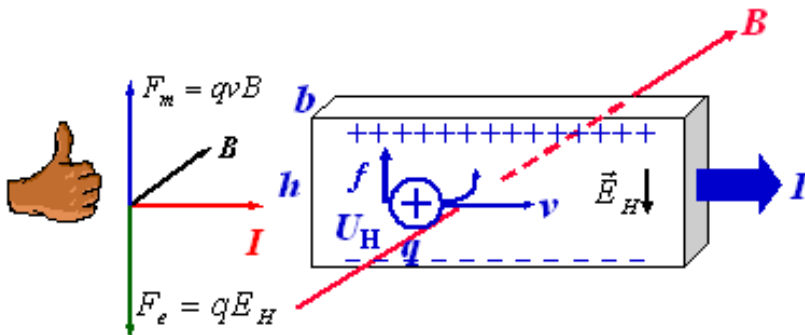


图 8-4-10 霍尔效应的解释

因而形成了一横向电场 \vec{E}_H ，从而在 A 、 A' 产生电势差。这时载流子又受到一个与洛伦兹力方向相反的电场力 $F_e = qE_H$ 。随着底部和顶部多余电荷的增多，这一电场也迅速地增大到它对电子的作用力与磁场对电子的作用力相平衡。这时电子将恢复原来水平方向的漂移运动而电流又重新恢复为恒定电流。此时，作用在载流子上的横向力为零：

$$f = F_e - F_m = qE_H - qvB = 0, \quad E_H = vB$$

由于横向电场 \vec{E}_H 的出现，在导体的横向两侧会出现电势差，这一电势差的数值为

$$U_H = E_H h = vBh$$

已经知道电子的漂移速度 v 与电流 I 有下述关系：

$$I = nbhqv$$

其中 n 为载流子浓度，即导体内单位体积内的载流子的数目。由此得到横向电势差

$$U_H = \frac{IB}{nqb}$$

即可得到霍尔系数

$$R_H = \frac{1}{nq}$$

对于金属中的电子导电来说，如图 8-4-9 所示，导体顶部电势高于底部电势。如果载流子带正电，在电流和磁场方向相同的情况下，将会得到正电荷聚集在底部而底部电势高于顶部电势的结果。因此通过电压的测定，可以确定导体中载流子所带的电荷的正负，这是方向相同的电流由于载流子种类的不同而引起不同效应的一个实际例子。

在磁场中的载流导体上出现横向电势差的现象是 24 岁的研究生霍尔(Edwin H. Hall)在 1879 年发现的，当时还不知道金属的导电机构，甚至还未发现电子。现在霍尔效应有多种应用，特别是用于半导体的测试。由测出的霍尔电压即横向电压的正负可以判断半导体的载流子种类(是电子或是空穴)，还可以计算出载流子浓度。用一块制好的半导体薄片通以给定的电流，在校准好的条件下，还可以通过霍尔电压来测磁场。这是现在测磁场的一个常用的比较精确的方法。

应该指出，对于金属来说，由于是电子导电，在如图 8-4-9 所示的情况下测出的霍尔电压应该显示顶部电势高于底部电势。但是实际上有些金属却给出了相反的结果，好像在这些金属中的载流子带正电似的。这种“反常”的霍尔效应，以及正常的霍尔效应都只能用金属中电子的量子理论才能圆满地解释。

§ 5 磁场对电流的作用

一 载流导线在磁场中受到的安培力

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

对一段导线 L ，在磁场中受到的安培力为 $\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$

如导线处在均匀磁场中，各电流元所在处的磁感应强度相同，则导线所受的磁力为

$$\vec{F} = I \left(\int_L d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

二 载流线圈在磁场中受到的力矩

定义载流平面线圈的磁矩为

$$\vec{m} = IS \vec{n}$$

式中 \vec{n} 为线圈平面的法线方向并与载流成右手螺旋关系的单位矢量，则平面线圈的力矩为

$$\vec{M} = I S \vec{n} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

此力矩力图使线圈平面转向与磁场垂直的方向，使其磁矩方向与磁场方向一致。

讨论：

(1) 线圈磁矩与磁场垂直， $M = ISB$ ，此时线圈受到的磁力矩最大；

(2) 线圈磁矩与磁场平行， $M = 0$ ，此时线圈不受磁力矩的作用。

以上结果虽从矩形线圈推出，但可以证明对任意形状的平面线圈都成立

§ 6 磁介质

一 磁介质对磁场的影响

二 磁介质的磁化

磁介质受外磁场作用呈现磁性的现象叫做磁化，也常常把不显示磁性的物体在磁场中获得磁性的过程称为磁化过程。在电场中的电介质因极化会产生附加电场。类似地，磁场中的磁介质也会因磁化而产生附加磁场。

1 磁化的机制

(1) 顺磁介质

(2) 抗磁介质

(3) 铁磁质



2 磁化强度矢量

可以用磁化强度来描述磁介质的磁化程度，磁化强度 \vec{M} 定义为

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}$$

三 H 的环路定理

定义磁场强度

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

则可以得到磁场强度环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

此式表明，在有磁介质的磁场中，沿任意闭合路径磁场强度的线积分等于该闭合路径所包围的自由电流的代数和。

由磁场强度的定义，以及 $\chi_m \equiv \mu_r - 1$ ，得到

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

面束缚电荷

$$j' = \frac{dI'}{dl} = \frac{d}{dl} \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = M = (\mu_r - 1)H = (\mu_r - 1)nI$$

§ 7 铁磁质

第 9 章 电磁感应

§ 1 法拉第电磁感应定律

一 法拉第电磁感应定律

一个导线回路所围曲面的磁感应通量发生变化时，回路中就会有电流产生，这种现象叫做电磁感应，在回路中所产生的电流叫做感应电流。回路中产生电流意味着回路中有电动势存在，这种由磁通量变化引起的电动势叫做感应电动势。

法拉第通过实验得出：当穿过闭合回路的磁通量发生变化时，回路中将产生感应电流或感应电动势。回路中感应电动势 ε 的大小

与穿过导体回路的磁通量的变化率 $\frac{d\Phi}{dt}$ 成正比，这一结论称为法拉

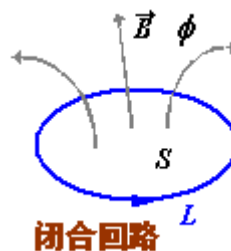
第电磁感应定律。在国际单位制中，其一般数学表达式为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

即感应电动势等于穿过回路的磁通量时间变化率的负值。

图 9—1—1 电磁感应

注意：上式中，电动势 ε 的正方向（闭合回路 L 的正方向），与电通量 Φ 的正方向（ $d\vec{S} = \vec{n}ds$ ）成右手螺旋关系。而电动势 ε 的实际方向，要根据具体的计算结果来判断，如果计算结果 $\varepsilon > 0$ ，则电动势 ε 的实际方向与闭合回路 L 的正方向一致；如果计算结果 $\varepsilon < 0$ ，则电动势 ε 的实际方向与闭合回路 L 的正方向相反。如图 9—1—2 所示。电动势的实际方向与选取的正方向无关，只与 $|\Phi|$ 的增减有关；但正方向的选取影响 ε 的计算结果。



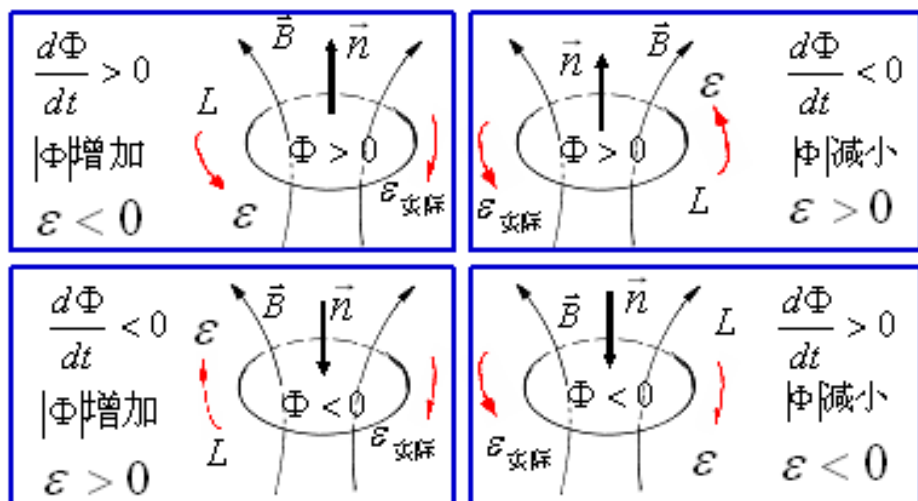


图 9-1-2

实际中用的线圈大多是多匝串联而成，对 N 匝线圈组成的回路，若每匝中穿过的磁通量分别为 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$ ，整个回路中的电动势等于各匝线圈电动势之和，即

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N = -\frac{d}{dt}(\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N) = -\frac{d\Psi}{dt}$$

式中 $\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N$ 是穿过各匝线圈的磁通量的总和，称为穿过线圈的全磁通。

若穿过各匝线圈的磁通量相等， N 匝线圈的全磁通为 $\Psi = N\Phi$ 叫做磁通匝链数，此时

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

三 楞次定律

楞次(H. F. E. kenz)从实验中考察了感应电流的方向，于 1834 年提出另一种判断感应电流方向的方法：导体回路中感应电流的方向，总是使感应电流所激发的磁场来阻止引起感应电流的磁通量的变化。这就是楞次定律。

楞次定律是能量守恒定律在电磁感应现象中的具体表现。在实际中用楞次定律来判断感应电动势的方向是很方便的。

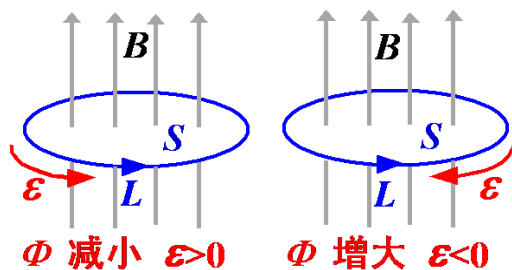


图 9-1-3

§ 2 动生电动势

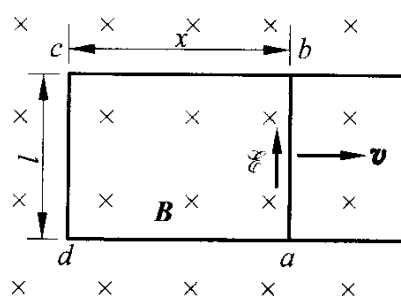
法拉第定律表明，穿过一个回路的磁通量发生变化时，回路中就有感应电动势产生。引起磁通量变化的原因通常有两种：一种是回路或其中的一部分在恒定磁场中有相对运动，另一种是回路在磁场中无相对运动，而磁场是在变化的。一般把前一种原因引起的感应电动势称为动生电动势，后一种原因引起的电动势称为感生电动势。

一 矩形回路中的动生电动势

如图 9-2-1 所示，长为 l 的导体棒与导轨构成一矩形回路 $abcd$ ，均匀磁场 B 垂直于导体回路。当导体棒 ab 以恒定速度 v 沿导轨向右滑动时，某时刻穿过回路所围面积的磁通量为

$$\Phi = BS = Blx$$

当导体棒不断滑动时，回路所围的面积扩大，穿过回路的磁通量发生变化，回路中产生感应电动势，



其大小为

$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(Blx) = Bl \frac{dx}{dt} = Blv$$

由楞次定律可判断感应电动势的方向为逆时针方向。由于只有导体棒 ab 运动，动生电动势也只在导体棒 ab 上产生，并且导体棒 ab 上的动生电动势的方向由 a 指向 b 。对矩形导体回路来说，导体棒 ab 相当于一个电源，所以在导体棒 ab 上， b 点电势高于 a 点电势。

图 9-2-1 动生电动势

二 产生动生电动势的非静电力场

动生电动势是由洛伦兹力引起的，非静电力就是洛伦兹力。当导体棒 ab 以速度 \vec{v} 向右运动时，棒内的自由电子也随之一起以速度 \vec{v} 向右运动。每个自由电子受到的洛伦兹力为

$$\vec{f} = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$$

这个作用力即为等效的“非静电场”的作用，对应的非静电场强为

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{f}}{(-e)} = \vec{v} \times \vec{B}, \quad \text{方向: } a \rightarrow b$$

由电动势的定义

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

可见，导体内是否产生电动势，与导体在磁场中的运动有直接关系。对图中的情况， $\vec{v} \perp \vec{B}$ ，所以 $|\varepsilon| = Blv$ 。若导体沿磁场方向运动， $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ，则 $|\varepsilon| = 0$ ，无电动势产生。因此可以形象地说，只有当导线切割磁感应线而运动时，导线中才产生动生电动势。

讨论：

(1) 由于只有运动电荷才能受洛伦兹力，因此，在如图的情况，除了导体棒 ab 段可以称为电源外，其他部分不能称为电源。因此，“非静电场” \vec{E}_k 的线积分必须沿着电源内部。

(2) 由于导体棒 ab 段被看作电源，所以，不论是否闭合，其上都有电动势。正如，电池不接通时也有电动势一样。导体棒 ab 段上的电动势，不受是否是回路影响。

(3) 在电源内部，电动势的方向由低电势指向高电势，因此， b 点电势高于 a 点电势

三 任意导体中的动生电动势

任意形状的导线 L ，在恒定磁场中运动或形变时，则可以先考虑一段以速度 \vec{v} 运动的导体元 $d\vec{l}$ ，在其中产生的动生电动势

$$d\varepsilon_{ab} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

整个导线中产生的动生电动势为各段导线元中产生的动生电动势之和

$$\varepsilon_{ab} = \int d\varepsilon_{ab} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

如果是闭合回路，则

$$\varepsilon = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

四 洛伦兹力不做功

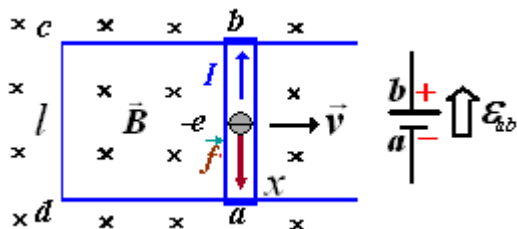


图 9-2-2

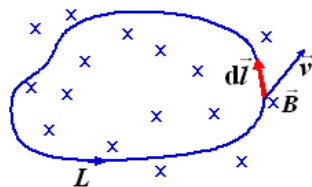


图 9-2-3

§ 3 感生电动势与感生电场

1 感生电场

实验表明：感生电动势与导体的性质及回路的形状无关，而仅取决于磁场的变化。鉴于这一实验事实，麦克斯韦(J. C. Maxwell)大胆地提出假设：变化的磁场在其周围空间激发一种新的电场，这种电场具有涡旋性，像水的涡旋一样，称之为感生电场或有旋电场，用 \vec{E}_i 表示。感生电流的产生正是这一电场作用于导体中自由电子的结果，产生感生电动势的非静电场也是这一电场。麦克斯韦还指出：在磁场变化时，不仅在导体回路中，而且在空间任一点都会产生感生电场。如果把带电粒子置于变化的磁场中，在感生电场的作用下，带电粒子会被加速而获得能量。

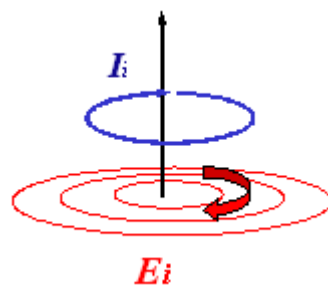


图 9-3-1

根据这个原理，后来制成了电子感应加速器，使麦克斯韦的假设得到实验证实。

感生电场与静电场的相同点是，它们都是一种客观存在的物质，它们对电荷都有作用力。与静电场的区别在于感生电场不是由电荷激发的，而是由变化的磁场激发的；其电场线是无头无尾的，即

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \neq 0, \quad \oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$$

因而感生电场不是保守场，在感生电场中不能引入电势的概念。

2 感生电动势

沿着导线回路 L 的上述积分就是感应电动势，根据法拉第定律有

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

如果用磁感应强度 \vec{B} 来表示，上式可写成

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

式中 $d\vec{l}$ 表示空间任一静止回路 L 上的位移元， S 为该回路所限定的面积。

根据斯托克斯公式，感生电场的环路积分，或者说回路中的感生电动势，还可以写为

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}_i) \cdot d\vec{S}$$

由此得到

$$\nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

对一般的情况，空间既可能存在静电场 \vec{E}_c ，也可能同时存在感生电场 \vec{E}_i ，即总电场

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_i, \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

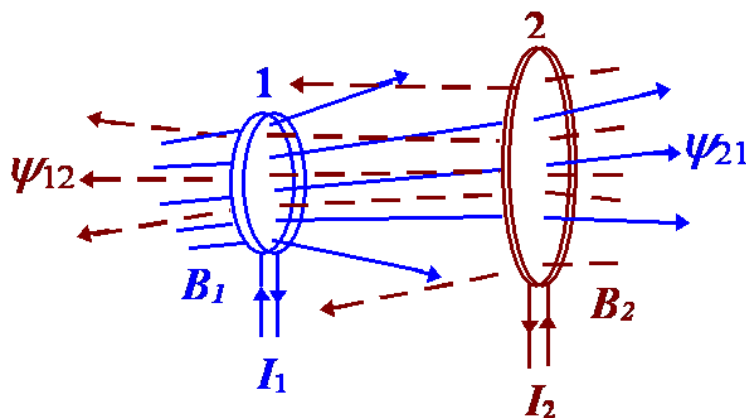
3 涡电流

§ 4 自感和互感

一 互感

当一个导体线圈中的电流随时间变化时，将在它周围空间激发变化的磁场，穿过它附近的另一个线圈的磁通量也随之发生改变，从而在后一线圈回路中产生感应电动势。这种现象称为互感现象，相应的电动势称为互感电动势。

显然，一个线圈中的



互感电动势不仅与另一个线圈中的电流变化的快慢有关,还与两个线圈的结构及它们的相对位置有关。

如图 9-4-1 所示,两个固定的闭合线圈 1 和 2,设线圈 1 所激发的磁场通过线圈 2 的全磁通为 Ψ_{21} ,如周围无铁磁质,由毕萨定律可知,它与线圈 1 的电流 I_1 成正比

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1$$

其中比例系数 M_{21} 称为回路 1 对回路 2 的互感系数。它与两线圈的结构、线圈的匝数和两线圈的相对位置及周围磁介质的分布有关,而与线圈 1 中的电流无关。在 M_{21} 一定的情况下,由电磁感应定律给出回路 2 中的感应电动势为

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

同理,设线圈 2 所激发的磁场通过线圈 1 的全磁通为 Ψ_{12} ,它与线圈 2 的电流 I_2 ,成正比

$$\Psi_{12} = M_{12} I_2$$

其中比例系数 M_{12} 称为回路 2 对回路 1 的互感系数。它与两线圈的结构、线圈的匝数和两线圈的相对位置及周围磁介质的分布有关,而与线圈 2 中的电流无关。在 M_{12} 一定的情况下,由电磁感应定律给出回路 1 中的感应电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

可以证明,对于给定的一对固定的导体回路 1 对 2,有

$$M_{12} = M_{21} = M$$

这样, M 就称为这两个导体回路的互感系数。它只与两线圈的结构、线圈的匝数和两线圈的相对位置及周围磁介质的分布有关,而与线圈 1 和 2 中的电流无关。两个回路中的感应电动势为

$$\varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}, \quad \varepsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

电动势的正方向穿过自身磁通量的正方向成右手螺旋关系。

在国际单位制中,互感的单位是亨利,记为 H :

$$1H = 1 \frac{V \cdot S}{A} = 1\Omega \cdot S$$

另外可以看出,当一个线圈中的电流随时间的变化率一定时,互感系数愈大,则在另一个线圈中产生的互感电动势愈大。所以,互感系数是两个电路耦合程度的量度。

互感系数一般由实验来测定,少数几种简单情形可用计算方法求得。

二 自感

当一个导体线圈中的电流随时间变化时,它所激发的磁场穿过线圈自身的磁通量也随之发生改变,从而在线圈自身回路中产生感应电动势,这种现象称为自感现象;相应的电动势称为自感电动势。

如图 9-4-2 所示,若线圈中通有电流 I ,导体线圈的大小和形状保持不变,并且周围无铁磁质的情况下,穿过线圈自身的全磁通 Ψ 与电流,成正比。即

$$\Psi = LI$$

式中比例系数 L 称为线圈的自感系数,简称自感。 L 与线圈中的电流无关,而仅与线圈的结构、线圈的匝数及它周围的磁介质的分布有关。在国际单位制中自感的单位也是亨利。

在 L 一定的条件下,由法拉第定律有

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

自感电动势 ε 的正方向取为电流 I 的方向。



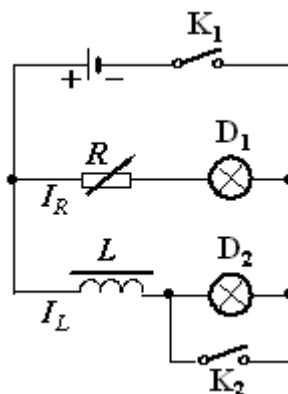
自感系数一般也由实验来测定，少数几种简单情形可用计算方法求得。

§ 5 磁场的能量

一 自感磁能

如图 9—5—1 所示的实验中，在 K_2 断开的情况下，接通 K_1 ： D_1 立刻亮， D_2 迟些亮； K_1 和 K_2 接通的情况下，再断开 K_1 ： D_1 闪亮后熄灭。这是因为“通电线圈中磁场具有能量”的缘故。

在 K_2 断开的情况下，接通 K_1 时，电路中的电流增大，在电路中产生的自感电动势的方向与电流的方向相反，因此自感电动势做负功。在电流建立的过程中，外电源除了要提供给电路中产生焦耳热的能量外，还须抵抗自感电动势做



功。以 $i(t)dt$ 表示在 dt 时间内，通过线圈的电荷量，则外电源在 dt 时间内抵抗自感电动势做功为

$$dA_L = (-\varepsilon_L)i(t)dt = L \frac{di}{dt} i(t)dt = Li(t)di$$

电流由 0 达到稳恒值 I 的过程中，外电源抵抗自感电动势做功 A_L 为

$$A_L = \int dA_L = \int_0^I Li(t)di = \frac{1}{2}LI^2$$

在这过程中，外电源抵抗自感电动势做的功 A_L ，转化成储存在线圈中的能量。所以在电流达到恒定值后，载流线圈中储存的能量为

$$W_m = A_L = \frac{1}{2}LI^2$$

K_1 和 K_2 接通的情况下，再断开 K_1 后，电流已不再向灯泡供给能量了，电路中的电流减小，在电路中产生的自感电动势的方向与电流的方向一致，因此自感电动势做正功。以 $i(t)dt$ 表示在 dt 时间内，通过线圈的电荷量，则在 dt 时间内线圈自感电动势做功为

$$dA_L = \varepsilon_L i(t)dt = -L \frac{di}{dt} i(t)dt = -Li(t)di$$

在电流从恒定值 I ，减小到零的过程中，自感电动势所做的功为

$$A_L = \int dA_L = \int_I^0 -Li(t)di = \frac{1}{2}LI^2$$

即切断电源后，线圈中储存的能量，通过自感电动势做功全部释放出来，转变为焦耳热。可见，线圈所释放出来的能量，就是原来储存在线圈中的能量。

载流线圈能够储存能量，这能量又以什么方式储存在什么地方？我们知道，电流的建立过程，也就是线圈周围的磁场的建立过程。因此，我们有理由认为：载流线圈中的能量是以磁场的方式储存在线圈中。或者说，载流线圈内存在磁场，磁场具有能量。

载流线圈中磁场能量为

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 VI^2 = \frac{1}{2}BHV$$

载流线圈中磁场能量密度

$$w_L = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$$

二 磁场的能量

上述磁场能量密度公式虽是从长直螺线管这一特例推出，可以证明，它对所有磁场均适

用。该式表明磁场中某一点的能量密度，只与该点的磁感应强度及磁介质的性质有关。

$$w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

在非均匀磁场中，可以利用磁场能量密度公式求出磁场所储存的总能量

$$W_m = \int w_m dV = \int_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

式中 V 包括磁场所在的全空间。

第 10 章 麦克斯韦方程组

§ 1 位移电流

恒定电流产生的恒定磁场遵从安培环路定理，对于非恒定的情况又如何呢？电容器充放电过程是一个典型的非稳恒过程。下面我们以此为例如来讨论安培环路定理。如图 10-1 所示，K 键合上，电容器开始充电，回路中有电流 I 但电容器两极板之间并无电流。在电容极板附近取一回路 L ，对于恒定磁场，安培环路定理为

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i \quad (10-1-1)$$

即磁场强度沿 L 的线积分，等于正向穿过以 L 为边界的任意曲面的电流的代数和。本例中，若取曲面 S_2 ，则 $\sum_i I_i = I$ ；若取曲面 S_1 (在电容器二极

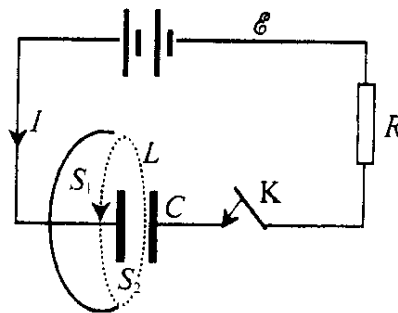


图 10-1 电容器充电过程

板之间)，则 $\sum_i I_i = 0$ 。显然，某一确定时刻，空间各点的磁场强度是确定的，其对于确定

回路的线积分必有惟一确定的值。矛盾的出现使麦克斯韦认识到，关键在于有什么物理量被忽略了。他意识到，充放电的过程中传导电流虽然在电容器的两极板间中断了，但是，其间却存在一个变化的电场（充电过程中，电荷增加，电场增强），这个“变化的电场将在周围空间激发磁场”，这就是麦克斯韦第二基本假设。

设电容器极板的面积为 S ，某时刻极板上电荷面密度为 σ ，则电位移 $D = \sigma$ ，忽略边缘效应，二极板间的电位移通量

$$\Phi_D = \vec{D} \cdot \vec{S} = \sigma S = Q \quad (10-1-2)$$

在充放电过程中， Φ_D 、 D 、 σ 、 Q 都随时间变化，变化率

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (10-1-3)$$

根据电流的定义，上式中右边的正是导线中传导电流

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (10-1-4)$$

由此可见，穿过 S_2 曲面的物理量 $\frac{d\Phi_D}{dt}$ 与穿过 S_1 曲面的传导电流 I 等值。麦克斯韦把 $\frac{d\Phi_D}{dt}$

称为位移电流，用 I_D 表示，即

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} \quad (10-1-5)$$

如果空间电位移分布不均匀, 则电位移通量

$$\Phi_D = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (10-1-6)$$

则位移电流为

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right] = \oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (10-1-7)$$

式中, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 称为位移电流密度, 即 $\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 。

引入了位移电流的概念以后, 在电容器极板处中断了的传导电流 I , 可由位移电流 I_D 接上, 在整个电路中保持电流连续不断。把传导电流与位移电流之和称为全电流, 即使是在非恒定的电路中, 全电流 $I + I_D$ 也是保持连续的。于是, 麦克斯韦提出安培环路定理应修正为

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_D \quad (10-1-8)$$

上式称为全电流安培环路定理。

实验证实了定理的正确性: 就产生磁场而言, 变化的电场(位移电流)与传导电流是等价的。图 10-2 表明变化的电场在其周围空间所激发的磁场分布, 位移电流的引入又一次深刻揭示了电与磁的统一性。

麦克斯韦的“位移电流”假说, 是对人类的巨大贡献。揭示出, 变化的电场可以产生电流, 而电流的存在, 就意味着磁场的存在。因此, 变化的电场可以产生磁场。

应该注意, 位移电流与传导电流是两个不同的物理概念, 仅仅在产生磁场方面, 二者是等效的。

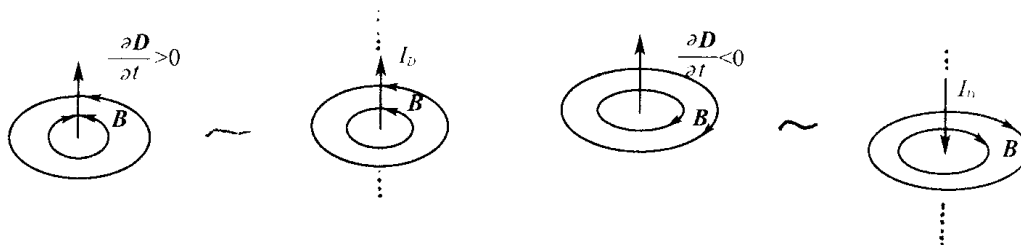


图 10-2 位移电流

位移电流的特点:

(1) 大小与电位移对时间的变化率 $\frac{\partial D}{\partial t}$ 相关。只要电场随时间变化, 就有相应的位移电流。在无传导电流的介质中的位移电流 I_D 与回路导线段的传导电流 I 相等; 在导体中, 低频时 $I_D \ll I$, 可忽略; 高频时不可忽略。

(2) 位移电流与传导电流是完全不同的概念, 仅在产生磁场方面二者等价。传导电流有电荷流动, 通过导体会产生焦耳热。位移电流无电荷流动。高频时介质也发热, 那是分子反复极化造成。

§2 麦克斯韦方程组

$$(1) \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i \quad (10-2-10)$$

$$(II) \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (10-2-11)$$

$$(III) \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (10-2-12)$$

$$(IV) \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \sum_i I_i + I_D \quad (10-2-13)$$

上述四式称为麦克斯韦方程组的积分形式。

麦克斯韦方程组的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (10-2-14)$$

§ 3 电磁波

19 世纪下半叶, 麦克斯韦通过建立完整的电磁场理论, 预言了电磁波的存在。他提出电磁场、电磁信号是以波的形式传播的, 并且断言光就是(一定频率范围内的)电磁波。现在, 我们在麦克斯韦方程组的基础上, 对电磁波的产生和传播进行一些讨论。

在本篇第 8 章介绍过运动的电荷会激发磁场, 所以其周围电、磁场并存, 但作匀速直线运动的电荷并不辐射电磁波。其它形式的电荷运动才会辐射电磁波。例如: 交变电流、开放振荡电路、原子和原子核辐射、电子的回旋辐射和韧致辐射等。天线辐射电磁波的问题用经典电磁理论能够完全解决, 而原子、分子等量子系统的辐射问题需应量子理论来解决。

对于电磁波的传播, 讨论空间无电荷 ($\rho = 0$)、无传导电流 ($\vec{J} = 0$)、 μ 和 ϵ 均为常量的情况。

电磁波的性质

理论和实践, 证实和总结了电磁波具有下述的一般性质:

(1) 电磁波是横波, 即电磁波中的电场 \vec{E} 和磁场 \vec{B} 的方向都与传播方向垂直。

(2) 以最简单的电磁波即简谐电磁波(其中电场和磁场都做简谐变化的电磁波)为例, 其电场方向和磁场方向也相互垂直, 传播方向、电场方向和磁场方向三者形成右手螺旋关系。如图 10-3 所示。

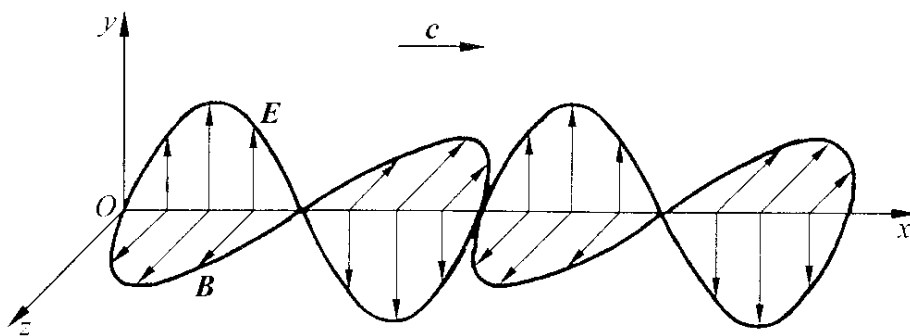


图 10-3 电磁波中电场和磁场的变化

(3) 电磁波中电场和磁场的变化是同相位的, 即 \vec{E} 和 \vec{B} 同时达到各自的极大值(也见图 10-3)。对于平面电磁波, \vec{E} 和 \vec{B} 的大小有下列关系:

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H \quad (10-3-5)$$

(4) 电磁波具有能量。在真空中的电磁波的单位体积内的能量(能量密度)为

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}ED + \frac{1}{2}BH = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \quad (10-3-6)$$

可以证明，在真空中

$$w = 2w_e = 2w_m = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad (10-3-7)$$

利用麦克斯韦方程组，从理论上还可以证明，电磁波的能流密度是

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (10-3-8)$$

式中， \vec{S} 称为坡印亭矢量。能流密度的大小为

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = cw \quad (10-3-9)$$

可见，电磁波以速度 c 传播时，其中的能量也随电磁波以同样的速度传播。

平面电磁波：

$$E_y = E_{y0} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right] \quad H_z = H_{z0} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

4 电磁波谱

电磁波谱，按频率递减（波长递增）排列，依次为

γ 射线、 X 射线、紫外线、可见光、红外线、无线电波等。