四、 高斯定理

（一）. 电力线(电场线)

用一族空间曲线形象描述场强分布

通常把这些曲线称为电场线(electric field line)或电力线 (electric line of force)

1. 规定

方向：电力线上每一点的切线方向表示该点场强的方向

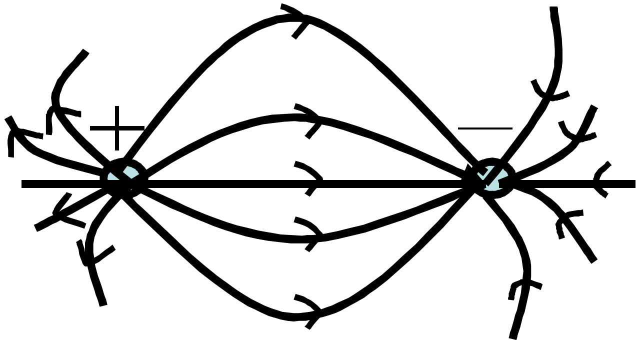
大小：电力线的疏密表示场强的大小。

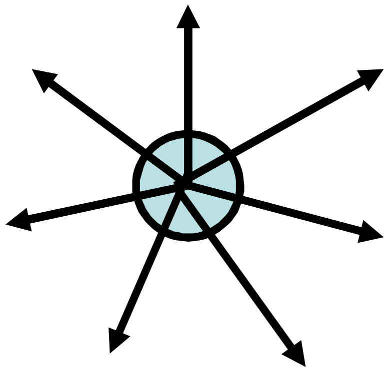
在电场中任一点，取一垂直于该点场强方向的面积元，使通过单位面积的电力线数目，等于该点场强的量值。

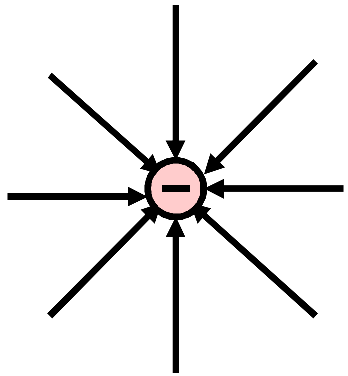
2. 电力线的性质

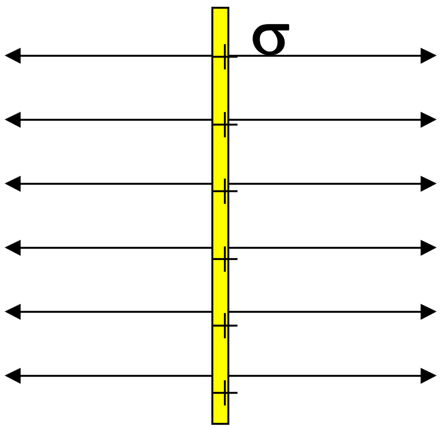
1) 电力线起始于正电荷(或无穷远处)，终止于负电荷，不会在没有电荷处中断；

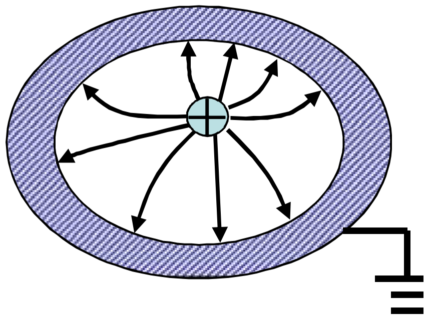
2) 两条电场线不会相交；电力线不会形成闭合曲线。









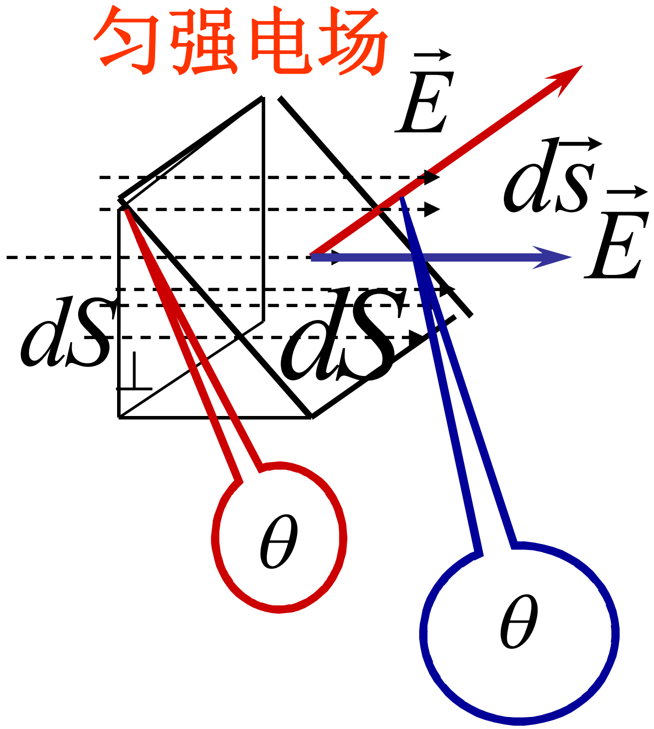


3.电力线与场强关系

$$E = \frac{d\phi}{dS_\perp} \qquad d\phi = Eds_\perp$$

若面积元不垂直电场强度，

电场强度与电力线条数、面积元的关系怎样？



由图可知　通过　ds和 $ds_\perp$　电力线条数相同

$$d\vec{s} = ds\hat{n}$$

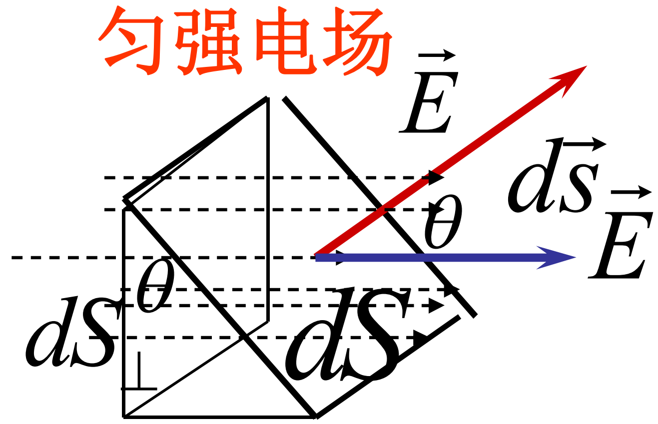
$$d\phi_e = Eds_\perp = Eds\cos\theta \Longrightarrow \boxed{d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

（二.）电通量

藉助电力线认识电通量

通过任一面的电力线根（条）数

即为通过此面元的电通量



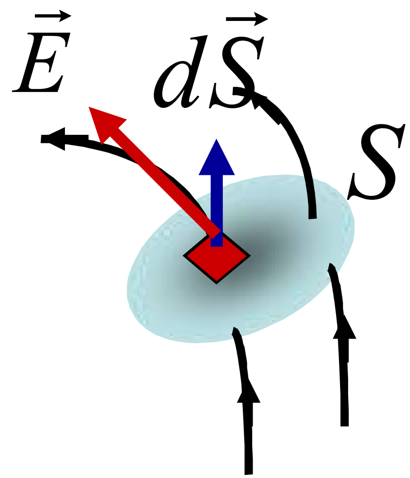
$$d\phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

通过任意曲面的电通量:

把曲面分成许多面积元

每一面元处视为匀强电场

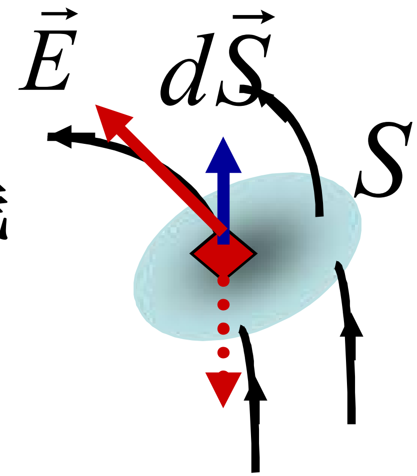
$$\phi_e = \int_S d\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



讨论

正与负

取决于面元的法线方向的选取



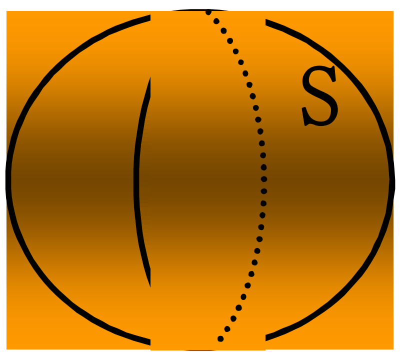
1. $d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

如前图　知　$\vec{E} \cdot d\vec{s} > 0$　$\theta < \frac{\pi}{2}$

若如红虚箭头所示　则　$\vec{E} \cdot d\vec{s} < 0$　$\theta > \frac{\pi}{2}$

2. 通过闭合面的电通量

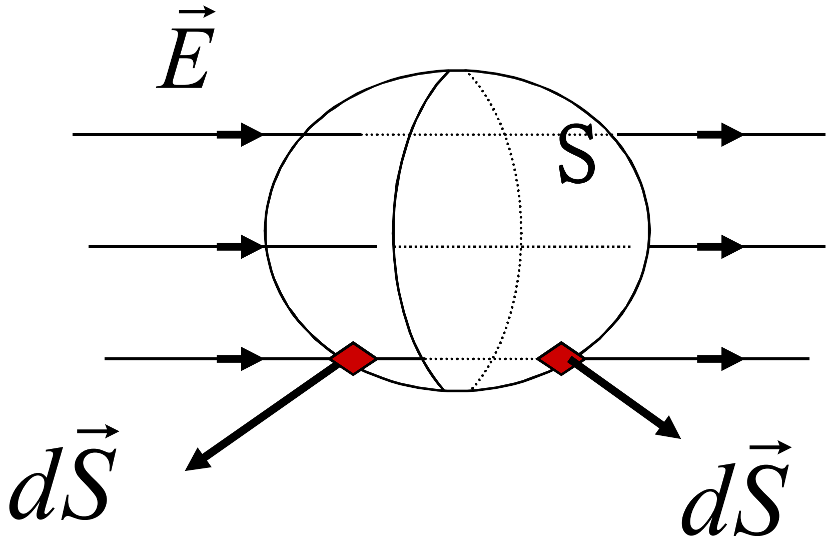
$$\boxed{\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$



规定：对闭合曲面，面元正方向由闭合面内指向面外

外法线

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



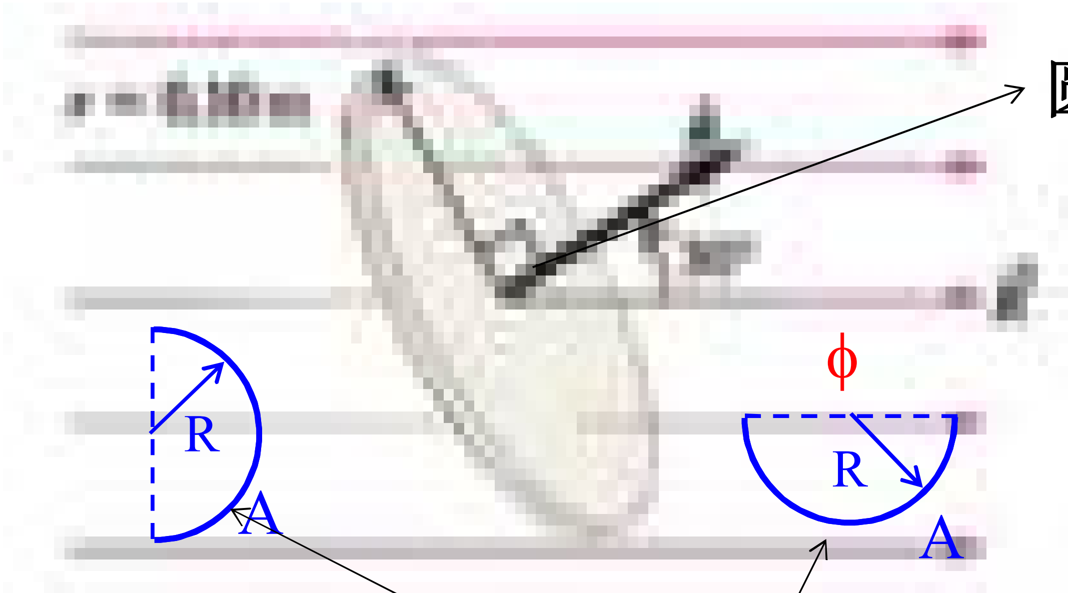
$\vec{E} \cdot d\vec{s} < 0$ 电力线穿入

$\vec{E} \cdot d\vec{s} > 0$ 电力线穿出

$$\phi_e \begin{cases} > 0 & \text{穿出的电力线条数大于穿进的电力线条数 多正电荷} \\ = 0 & \text{穿出的电力线条数等于穿进的电力线条数 无多余电荷} \\ < 0 & \text{穿出的电力线条数小于穿进的电力线条数 多负电荷} \end{cases}$$

均匀电场 $E=2.0\times10^{3}$ N/C

圆平面



半球面 R=0.05m

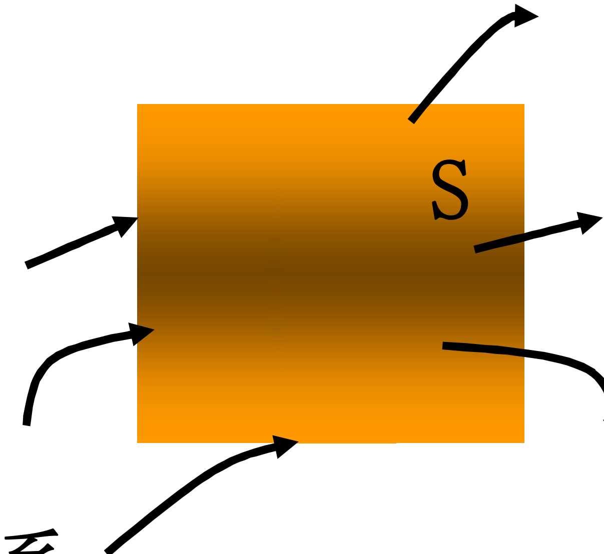
求通过各面的电通量。

（三）.静电场的高斯定理(Gauss theorem)

1. 表述

在真空中的静电场内，任一闭合面的电通量等于这闭合面所包围的电量的代数和除以ε_0。

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0}$$



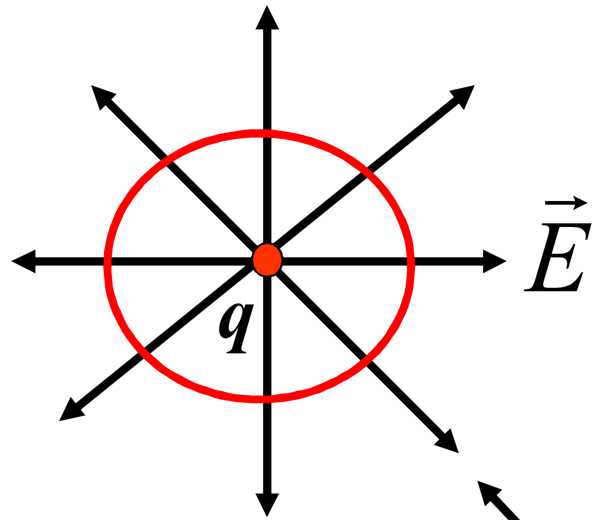
用电通量表示电场和场源电荷关系

利用电通量概念、库仑定律、场叠加原理

2、高斯定理的证明

(1) 电点荷的场

点电荷在闭合球面中心时

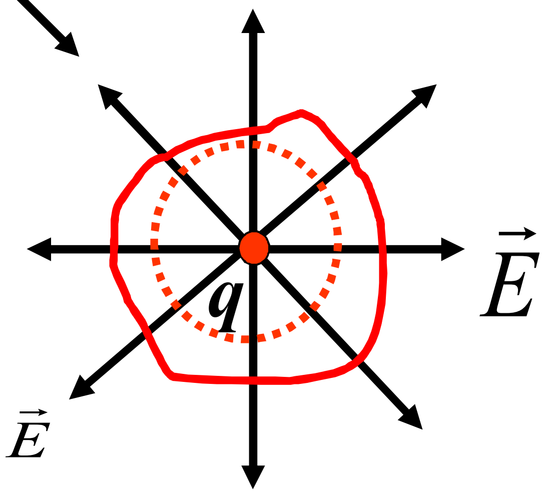


$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} ds$$

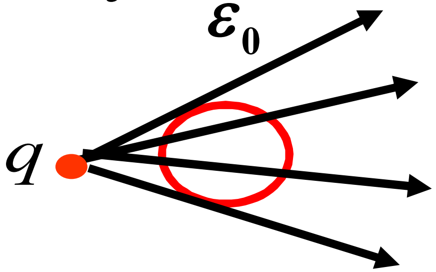
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_s ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

点电荷在任意闭合曲面内时

$$\Phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



点电荷在任意闭合曲面外时



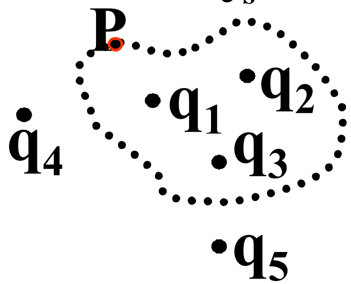
$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

(2) 电荷系的场中任一闭合曲面

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_s \vec{E}_1\cdot d\vec{s} + \oint_s \vec{E}_2\cdot d\vec{s} + \cdots \oint_s \vec{E}_n\cdot d\vec{s}$$

$$= \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \cdots \Phi_{en}$$

$$\boxed{\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{i内}}$$



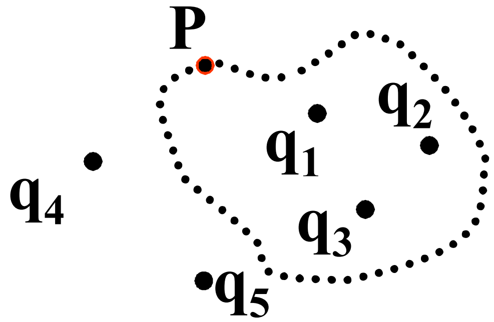
(3) 任意场中任一闭合曲面

$$\boxed{\Phi_e = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{内} dq}$$

讨论高斯定理

1. 对任意形状的闭合曲面都成立

$$\boxed{\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{i内}}$$



2. 电场强度***E***是由闭合曲面内、外的所有电荷决定的,

但对电通量 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}$ 来说 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{q_1+q_2+q_3}{\varepsilon_0}$

只有闭合面内的电荷对电通量有贡献

3. 高斯定理是描述静电场性质的基本方程 有源场

4. 高斯定量的微分形式

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV$$ 数学高斯公式 $$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{E}\,dV$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$ 散度

（四）．高斯定理在解场方面的应用

对 Q 的分布具有某种对称性的情况下利用高斯定理解 E 较方便，一般解题步骤：

1、根据电荷分布的对称性分析电场分布的对称性

常见的电量分布的对称性：

	球对称	柱对称	面对称
均匀带电的	球体	无限长	无限大
	球面	柱体	平板
	(点电荷)	柱面	平面
		带电线	

2、选择合适的封闭积分曲面(常叫高斯面)

1）使电场强度 E 的矢量处处垂直于高斯面，且在此面上处处相等。

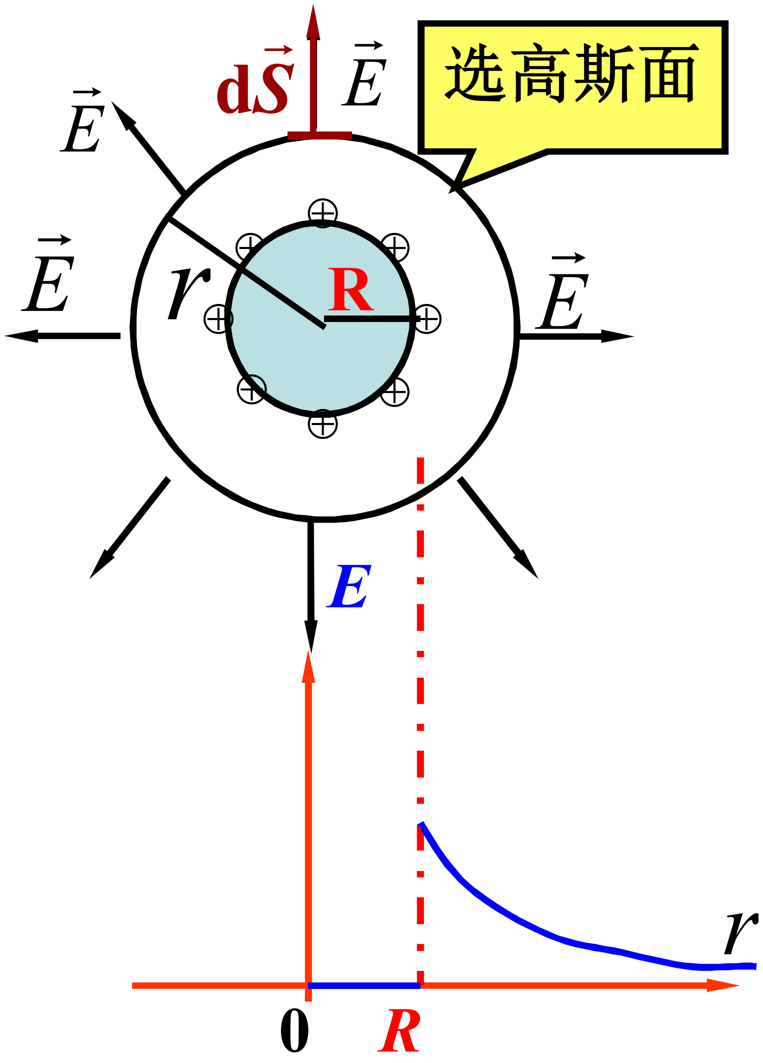
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\oint ds = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

2) 使高斯面的一部分与电场平行，则电力线不穿过高斯面的此部分。

$$\int_{s_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \underbrace{\int_{s_2} \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{=0} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

例1 求电量为Q、半径为R的均匀带电球面的场强分布。☆

解： 源球对称 ⟹ 场球对称



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r > R) \end{cases}$$

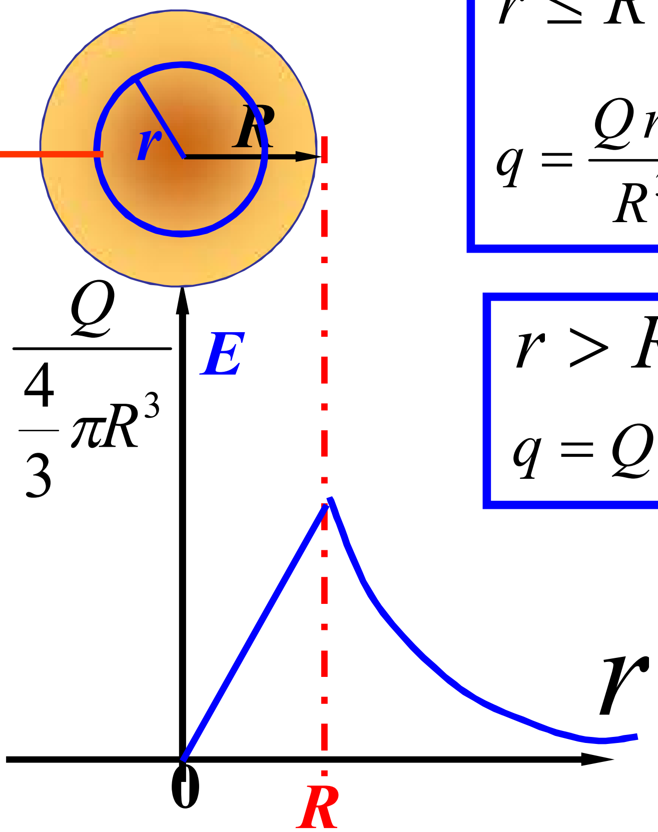
$$= E\oint_S \mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2$$

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

例2 求：电量为Q、半径为R的均匀带电球体的场强分布。☆

解： 选择高斯面——同心球面

$$\Delta Q=\frac{Qr^3}{R^3}$$



$$\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$r\le R$

$$q=\frac{Qr^3}{R^3}$$

$r>R$

$$q=Q$$

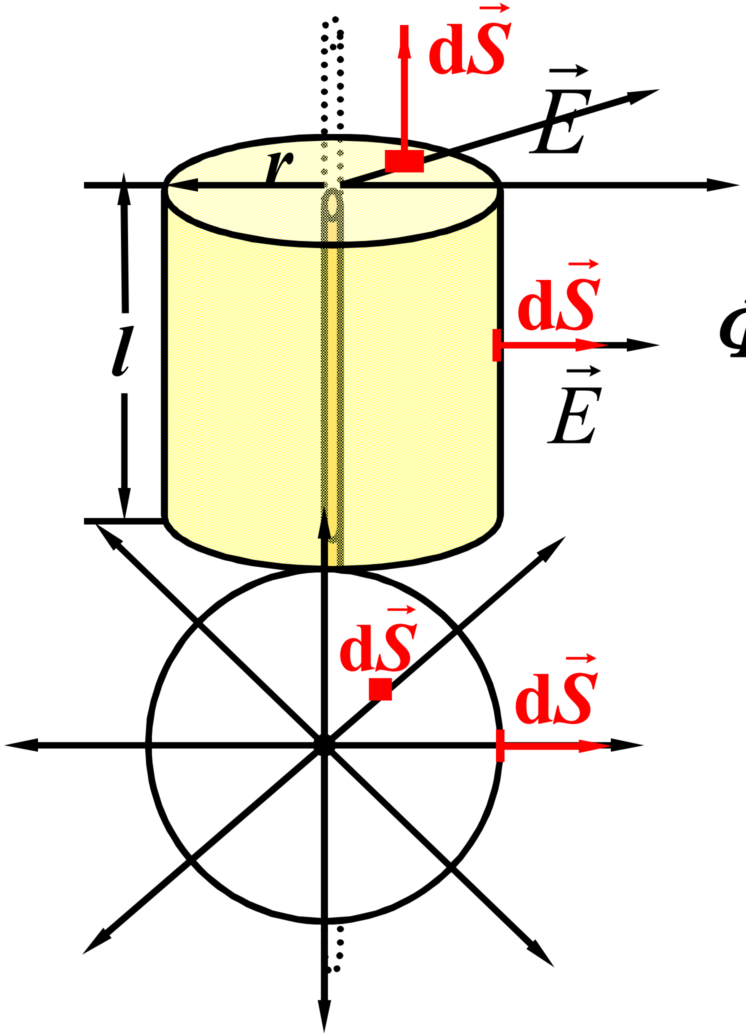
$$\Phi_e=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\begin{cases}\dfrac{Qr^3}{\varepsilon_0R^3} & (r<R)\\[2ex] \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r>R)\end{cases}$$

$$=E\oint_S dS=E\cdot4\pi r^2$$

$$E=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0R^3} & (r\le R)\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2} & (r>R)\end{cases}$$

例3 求：电荷线密度为λ 的无限长带电直线的场强分布。 ☆

解： 选择高斯面——同轴柱面



上下底面 $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{S}$

侧面 $\vec{E} \,//\, d\vec{S}$

且同一柱面上E 大小相等

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{l\lambda}{\varepsilon_0}$$

$$= \int_{侧} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

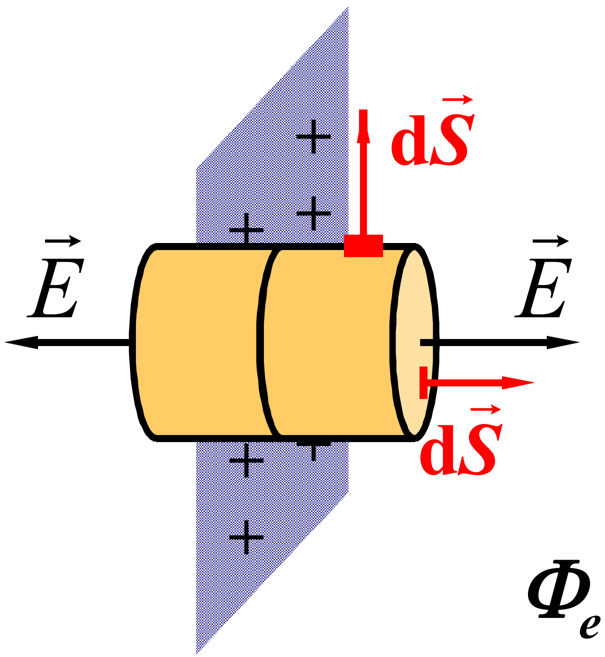
$$= E \cdot 2\pi r l \quad +0$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$\boxed{q = l\lambda}$$

例4

求：电荷面密度为σ的无限大均匀带电平面的场强分布。



解：选择高斯面——与平面正交对称的柱面

底面 $\vec{E} \uparrow\uparrow \mathrm{d}\vec{S}$ 且大小相等；

侧面 $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{S}$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

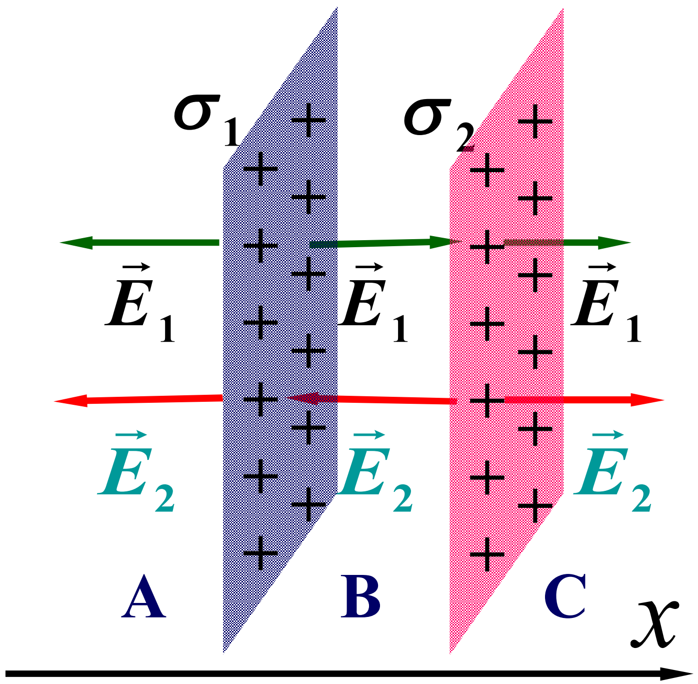
$$= 2\Delta S E$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{q = \Delta S \sigma}$$

当场源是几个具有对称性的带电体时，可用高斯定理分别求各带电体单独存在时的场强，再作矢量叠加。 ☆

例5 求：电荷面密度分别为σ_1 、σ_2 两个平行放置的无限大均匀带电平面的场强分布。



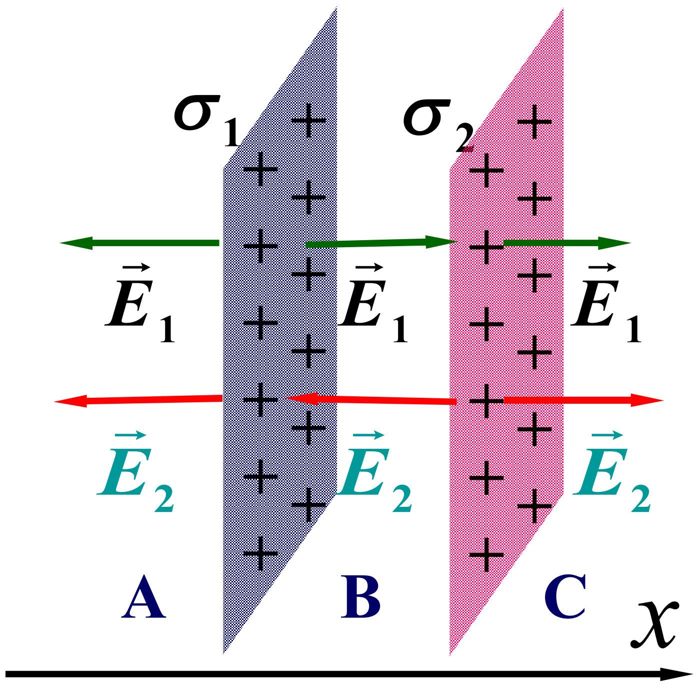
解：$E_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$　　$E_2 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_A = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_B = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

☆



$$\vec{E}_A = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_B = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

当 $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$

$$E_A = E_C = 0$$

带电平板电容器间的场强

$$\boxed{E_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

例6．已知： 均匀带电球壳的ρ（或 q）及R_1、R_2

求： 电场强度的分布。

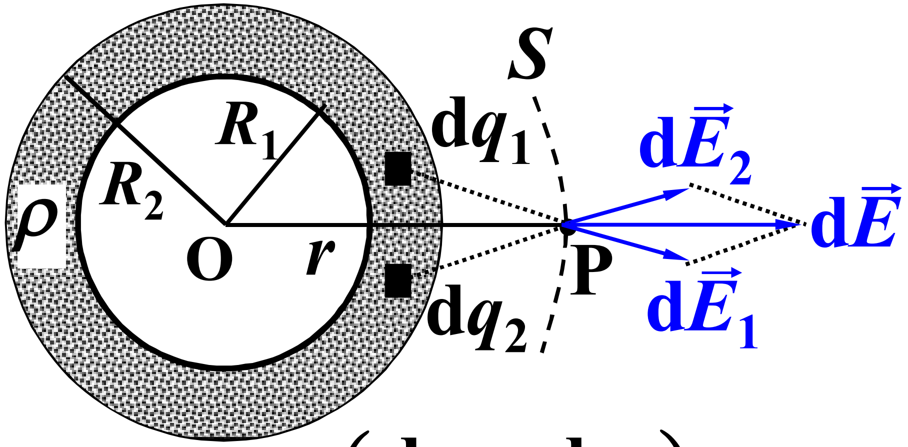
☆

解： 分析对称性

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$$

$$dE_1 = dE_2$$

方向是关于OP 对称的

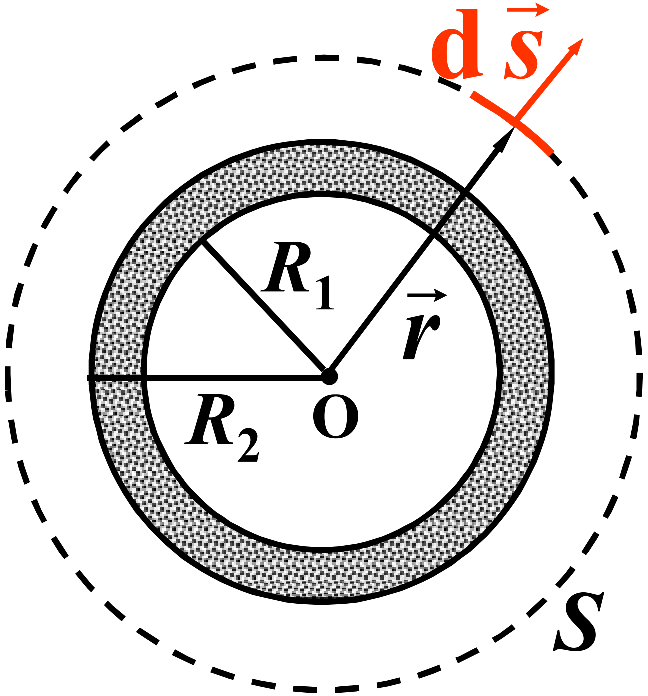


（q）　（$dq_2 = dq_1$）

球对称

$$\vec{E} = E(r) \cdot \hat{r}$$

选高斯面S为与带电球壳同心的球面 ☆



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E(r)\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

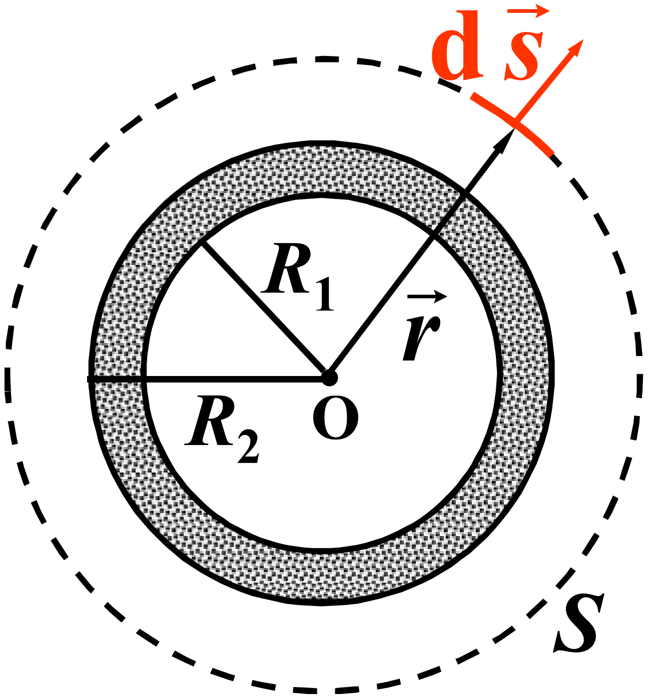
$$= \oint_S E(r)\,\mathrm{d}s \quad = E\oint_s ds$$

$$= 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

又 $$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_{内}}{\varepsilon_0}$$

所以 $$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$r < R_1,\ q_{内} = 0; \qquad E = 0$$



☆

$$R_1 < r < R_2,$$

$$q_{内} = \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)\rho,$$

有 $$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\hat{r}$$

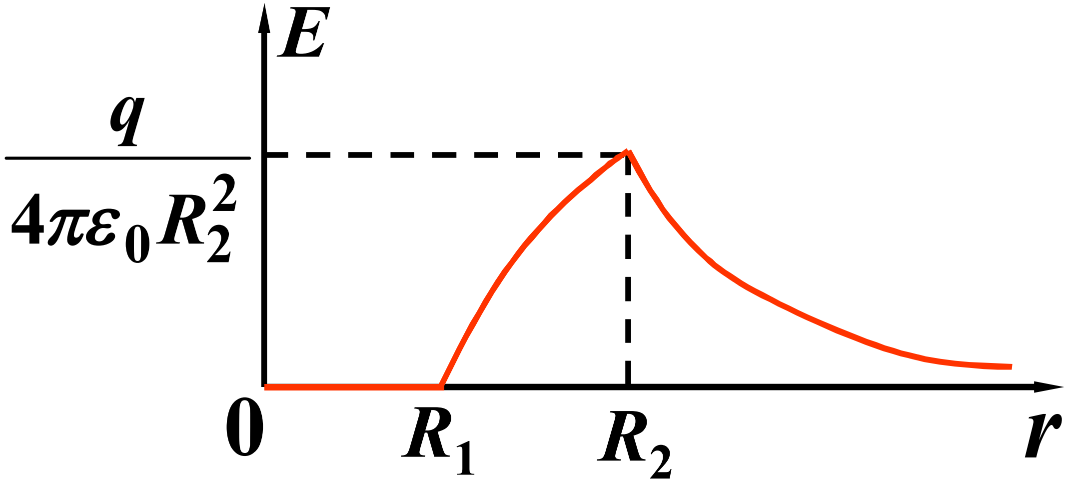
$$r > R_2,\quad q_{内} = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho = q,$$

有 $$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$ （同点电荷的电场）

☆

讨论

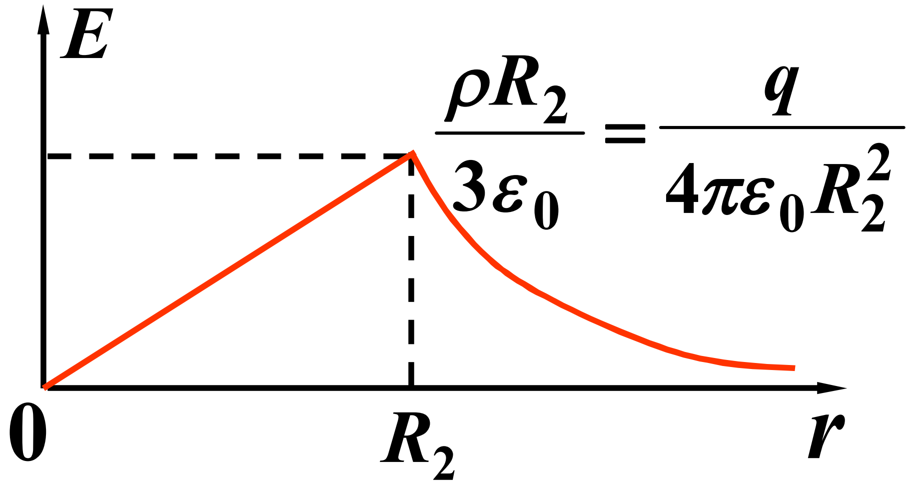
1. E 的分布



2. 特殊情况

1）令$R_1=0$，得均匀带电球的情形：

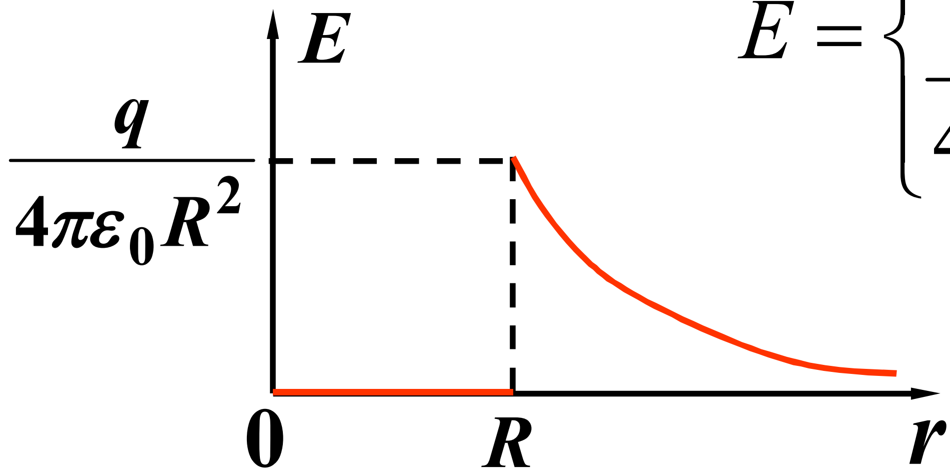
$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon_0} & （球内）\\[2ex] \dfrac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & （球外）\end{cases}$$



2）令$R_1 = R_2 = R$，且 q 不变，☆

得均匀带电球面的情形：

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \quad , & （球面内） \\ \dfrac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & （球面外） \end{cases}$$



在 $r = R$ 处 E 不连续，

这是因为忽略了电荷厚度所致。

$\boxed{\text{小结}}$ 应用高斯定理求场强的要点： ☆

适用对象：有球、柱、平面对称的某些电荷分布。

方法要点：（1）分析 $\vec{E}$ 的对称性；

（2）选取高斯面的原则：

1）需通过待求 $\vec{E}$ 的区域；

2）在 S 上待求 $\vec{E}$ 处，$\vec{E} \,/\!/\, \mathrm{d}\vec{s}$ 且等大，

使得 $\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = E\int \mathrm{d}s$，

其余处必须有 $\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \begin{cases} \text{或} \quad E = 0, \\ \text{或} \ \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{s} \text{。} \end{cases}$