（三）极值分布

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{X_{(1)}} \le X_{(2)} \le \cdots & \boxed{X_{(n)}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \le 3 \le \cdots & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \le 2 \le \cdots & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \le 5 \le \cdots & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$X_{(1)} = \min\left(X_1, X_2 \cdots X_n\right) \qquad X_{(n)} = \max\left(X_1, X_2 \cdots X_n\right)$$

(1) 极大值分布：已知 (X,Y) 的分布，求 $Z=\max(X,Y)$的分布

以掷骰子为例，一枚骰子掷两次，分别用X,Y表示两次出现的点数，用 Z 表示两次点数大者 $Z=\max(X,Y)$，求 Z 的分布。

解：显然 Z 的取值与 X,Y 取值相同。

$Z=\max(X,Y)$	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

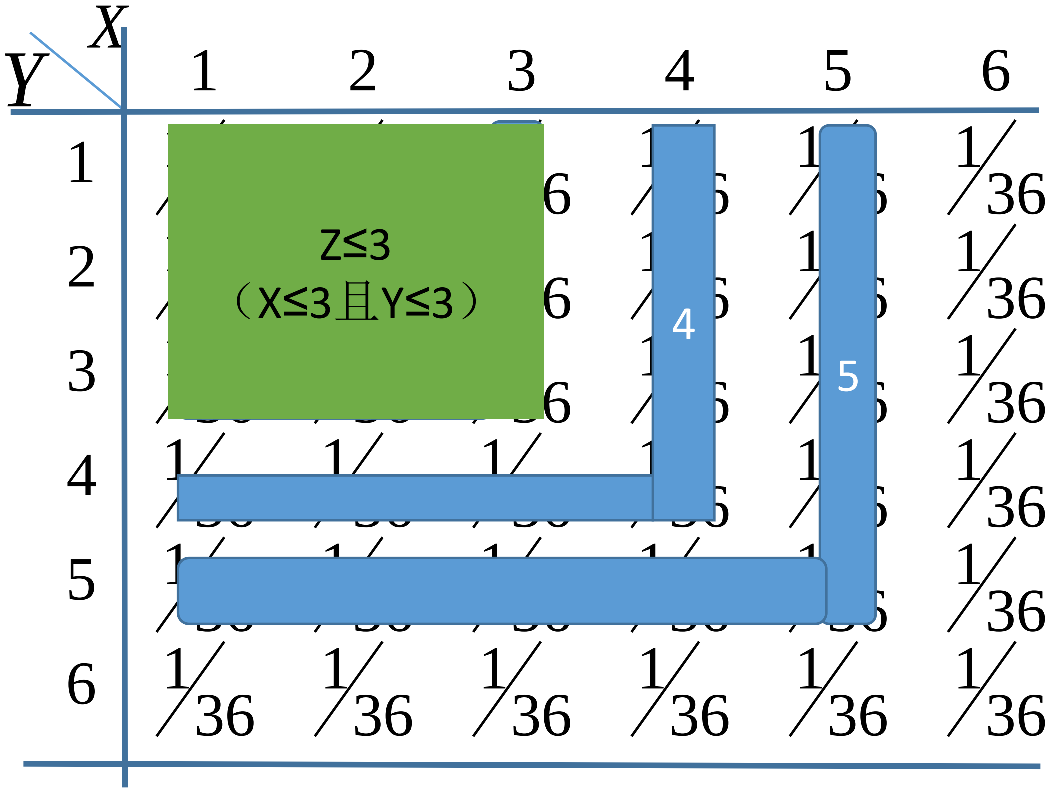
通过此例找一般规律：已知 (X,Y) 分布，求 $Z=\max(X,Y)$的分布函数$F_Z(z)$

$Z=\max(X,Y)$的分布函数

$$F_Z(3)=P(Z\le 3)=P(\max(X,Y)\le 3)=P(X\le 3,Y\le 3)$$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)\\&=P(\max(X,Y)\le z)\\&=P(X\le z,Y\le z)=F(z,z)\end{aligned}$$

$Z=\max(X,Y)$	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$



例1.已知(X,Y)的联合密度为 $f(x,y)=1(0<x<1,0<y<1)$，求

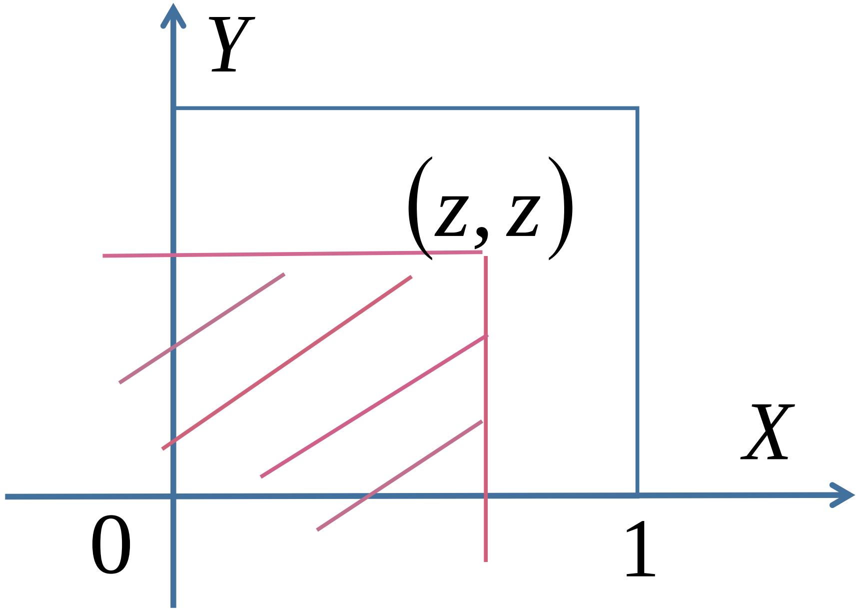
$Z=\max(X,Y)$的分布密度。

解：显然$0<z<1$,　当$z\le 0, F_Z(z)=0$, 当$z>0$,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\max(X,Y)\le z)=P(X\le z, Y\le z)$$

$$=F(z,z)=\int_0^z\int_0^z 1dxdy=z^2$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



(i)已知(X,Y)的分布函数$F(X,Y)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)=F(z,z)$$

(ii) X与Y独立，分布函数$F_X(x)$, $F_Y(y)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=F(z,z)=F_X(z)F_Y(z)$$

(iii) X与Y独立同分布,分布函数$F(x)$,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=F(z,z)=F_X(z)F_Y(z)=\{F(z)\}^2$$

iv）已知 X 的分布函数为 $F(x)$，$X_1, X_2 \ldots X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，与 X 有相同的分布（称为独立同分布的随机变量）

$Z = \max(X_1, X_2 \ldots X_n)$ 则Z的分布函数为：

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\{\max(X_1, X_2 \ldots X_n) \le z\}$$

$$= P(X_1 \le z, X_2 \le z \ldots X_n \le z) = P(X_1 \le z)P(X_2 \le z)\ldots P(X_n \le z)$$

$$= P(X \le z)P(X \le z)\ldots P(X \le z) = \{P(X \le z)\}^n = \{F(z)\}^n$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \left[\{F(z)\}^n\right]' = n\{F(z)\}^{n-1} f(z)$$

例2. 已知随机变量$X_1, X_2 \cdots X_n$相互独立，且$X_i \sim U(0,1), i = 1,2\cdots n$,

求$Z = \max\left(X_1, X_2 \cdots X_n\right)$的分布密度。

解：显然$0 < z < 1$，　当$z \le 0, F_Z(z) = 0$,当$z > 0$,

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(\max\left(X_1, X_2 \cdots X_n\right) \le z\right)$$

$$= P\left(X_1 \le z, X_2 \le z \cdots X_n \le z\right)$$

$$= P\left(X_1 \le z\right)P\left(X_2 \le z\right)\cdots P\left(X_n \le z\right) = P\left(X \le z\right)^n = F^n(z)$$

$$= z^n$$

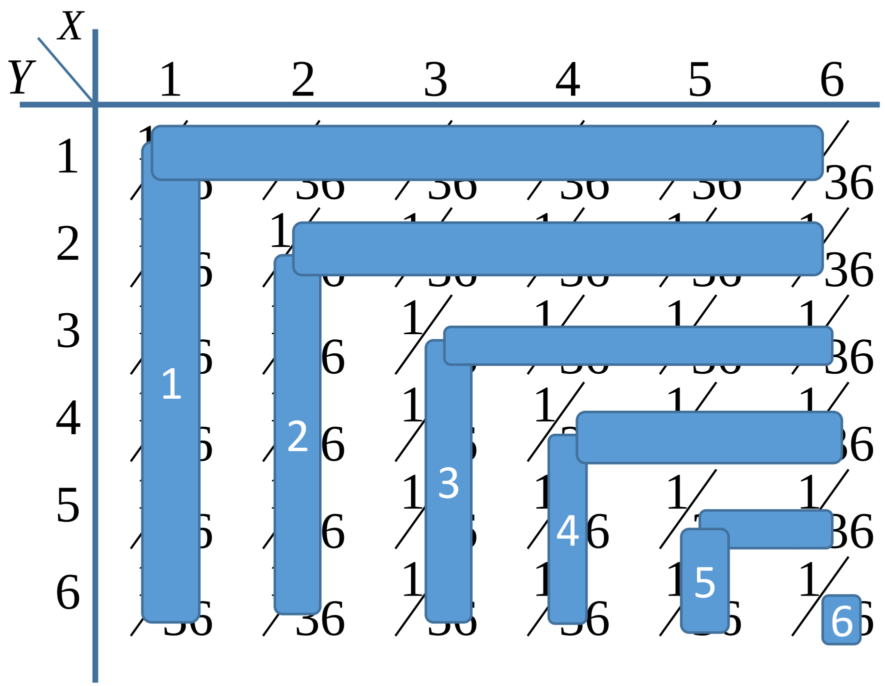
$$f_Z(z) = \left[F^n(z)\right]' = nF^{n-1}(z)f(z) = nz^{n-1}\ (0 < z < 1)$$

(2) 极小值分布　　已知(X,Y)的分布，求$Z=\min(X,Y)$的分布。

以掷骰子为例，一枚骰子掷两次，分别用*X,Y*表示两次出现的点数，用 Z 表示两次点数小者 Z=min(*X,Y*)，求 Z 的分布。

解：显然Z的取值与*X,Y*的取值相同

$Z=\min(X,Y)$	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$



通过掷骰子找 一般规律：已知 (*X,Y*) 的分布函数 $F(x,y)$，求 Z=min(*X,Y*)的分布数 $F_Z(z)$

$Z=\min(X,Y)$的分布函数

$$F_Z(3)=P(Z\le 3)=P(\min(X,Y)\le 3)=1-P(X>3,Y>3)$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\min(X,Y)\le z)=1-P(X>z,Y>z)$$

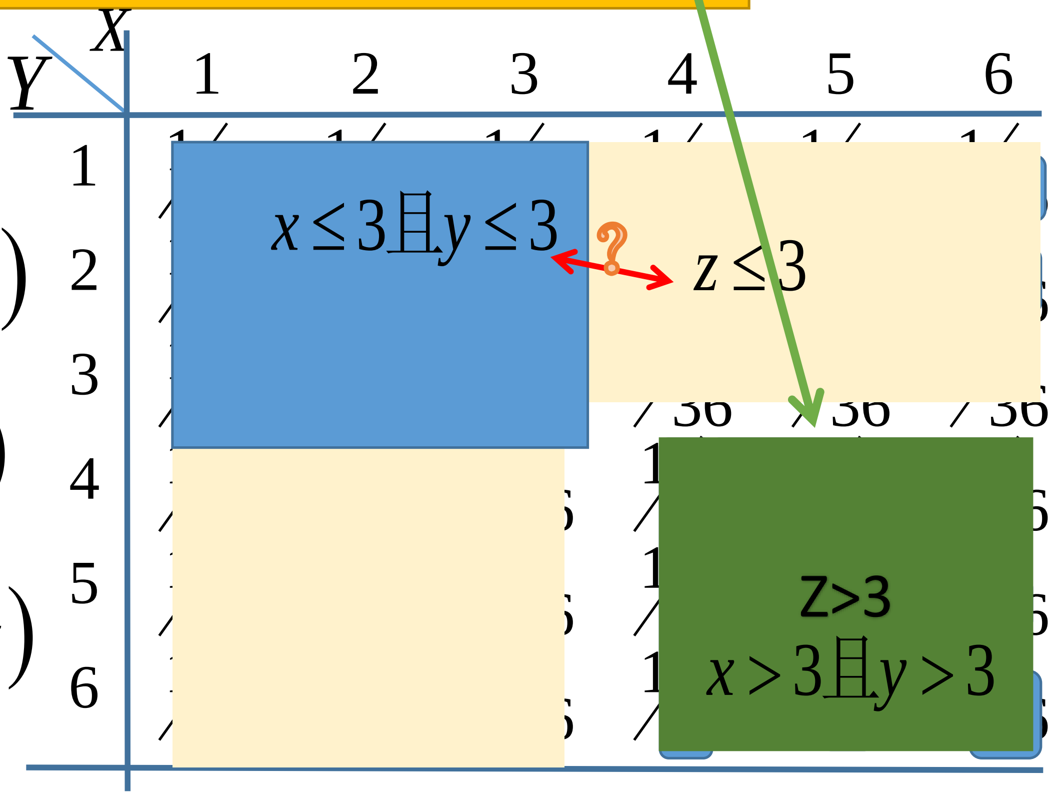
(i) 已知 (X,Y) 的分布函数 $F(X,Y)$。

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(X>z,Y>z)$$

(ii) X与Y 独立，分布函数 $F_X(x)$, $F_Y(y)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z)$$



$$=1-\{1-F_X(z)\}\{1-F_Y(z)\}$$

$(\text{iii})\ X$与Y独立同分布，分布函数$F(x)$,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)P(Y>z)$$

$$=1-\{1-F(z)\}\{1-F(z)\}=1-\{1-F(z)\}^2$$

（iv）已知 X 的分布函数为 $F(x)$, $X_1, X_2 \ldots X_n$是相互独立的，与 X 有相同分布的 n 个独立同分布的随机变量。$Z=\min(X_1, X_2\ldots X_n)$，则 Z 的分布函数为：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{\min(X_1, X_2\ldots X_n)\le z\}$

$$=1-P(X_1>z, X_2>z\ldots X_n>z)=1-P(X>z)P(X>z)\ldots P(X>z)$$

$$=1-\{P(X>z)\}^n=1-\{1-P(X\le z)\}^n=1-\{1-F(z)\}^n$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\left[1-\{1-F(z)\}^n\right]'=n\{1-F(z)\}^{n-1}f(z)$$

例3. 设随机变量$X_1, X_2 \ldots X_n$ 相互独立,$X_i \sim U[0,1]$ $i=1,2\cdots n$ 。求

$Y=\min(X_1, X_2\cdots X_n)$ 的密度函数。

解： $X_i \sim U[0,1]$ $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ $F(x)=x$ $(0\le x\le 1)$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{\min(X_1, X_2\ldots X_n)\le y\}$$

$$=1-P(X_1>y, X_2>y\ldots X_n>y)=1-P(X>y)P(X>y)\ldots P(X>y)$$

$$=1-\{P(X>y)\}^n=1-\{1-P(X\le y)\}^n=1-\{1-F(y)\}^n=1-\{1-y\}^n$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\left[1-\{1-y\}^n\right]'=n\{1-y\}^{n-1}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}n(1-y)^{n-1} & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

例4. 设随机变量 $X_1, X_2 \ldots X_n$ 相互独立，$X_i \sim e(\lambda) \quad i=1,2\cdots n$ 。求

$Y=\min\left(X_1, X_2 \ldots X_n\right)$与$Z=\max\left(X_1, X_2 \ldots X_n\right)$ 的密度函数。

解： $X_i \sim e(\lambda)$， $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$； $F(x)=1-e^{-\lambda x} \quad (x>0)$

$$(1)\ F_Y(y)=P(Y \le y)=P\left\{\min\left(X_1, X_2 \ldots X_n\right) \le y\right\}$$

$$=1-P\left(X_1>y, X_2>y \ldots X_n>y\right)=1-P(X>y)P(X>y)\ldots P(X>y)$$

$$=1-\left\{P(X>y)\right\}^n=1-\left\{1-P(X \le y)\right\}^n=1-\left\{1-F_X(y)\right\}^n=1-\left\{e^{-\lambda y}\right\}^n$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\left[1-\left\{e^{-\lambda y}\right\}^n\right]'=n\lambda e^{-n\lambda y} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}n\lambda e^{-n\lambda y} & y>0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$(2)\, F_Z(z) = P(Z \le z) = P\{\max(X_1, X_2 \ldots X_n) \le z\}$$

$$= P(X_1 \le z, X_2 \le z \ldots X_n \le z) = P(X_1 \le z) P(X_2 \le z) \ldots P(X_n \le z)$$

$$= P(X \le z) P(X \le z) \ldots P(X \le z) = \{P(X \le z)\}^n = \{F(z)\}^n$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \left[\{F(z)\}^n\right]' = n\{F(z)\}^{n-1} f(z)$$

$$= n\{1 - e^{-\lambda z}\}^{n-1} \lambda e^{-\lambda z}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda z}\left(1 - e^{-\lambda z}\right)^{n-1} & z > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例5. 随机变量$X \sim G(p_1)$, $Y \sim G(p_2)$, X与Y独立，求 $Z=\min(X,Y)$的分布。

解：Z的取值与X,Y的取值相同，$P(X=k)=p_1(1-p_1)^{k-1}$, $k=1,2\ldots$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\min(X,Y)\le z)=1-P(X>z,Y>z)$$

$$P(Z\le m)=1-P(X>m,Y>m)=1-P(X>m)P(Y>m)$$

$$=1-\sum_{k=m+1}^{+\infty}p_1q_1^{k-1}\sum_{t=m+1}^{+\infty}p_2q_2^{t-1}=1-q_1^m q_2^m$$

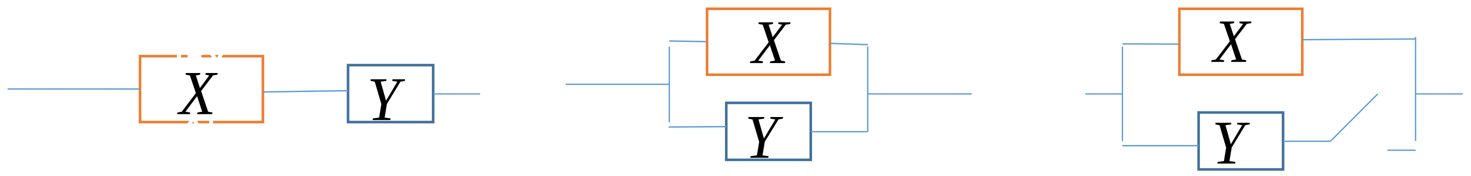
$$P(Z<m)=P(\min(X,Y)<z)=1-P(X\ge m,Y\ge m)$$

$$=1-\sum_{k=m}^{+\infty}p_1q_1^{k-1}\sum_{t=m}^{+\infty}p_2q_2^{t-1}=1-q_1^{m-1}q_2^{m-1}$$

$$P(Z=m)=P(Z\le m)-P(Z<m)=q_1^{m-1}q_2^{m-1}-q_1^m q_2^m=q_1^{m-1}q_2^{m-1}(1-q_1q_2)$$

$$(\text{令}p=1-q_1q_2=p_1+p_2-p_1p_2)\quad =p(1-p)^{m-1}\qquad Z\sim G(p)\qquad m=1,2\cdots$$

• 例3. 两电阻寿命 $X \sim e(\alpha)$， $Y \sim e(\beta)$均服从指数分布，且X与Y独立，现用两电阻经过串联，并联，备用三种方式分别组成系统，求不同方式组成的系统寿命的分布。



解： $X \sim e(\alpha)$， $Y \sim e(\beta)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases} \qquad F_X(x)=1-e^{-\alpha x} \quad (x>0)$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y} \quad (x>0, y>0)$$

(1) 串联：设串联系统寿命为 Z_1，则 $Z_1=\min(X,Y)$

$$F_{Z_1}(z)=P(Z_1\le z)=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)P(Y>z)$$

$$=1-\{1-F_X(z)\}\{1-F_Y(z)\}=1-\{1-(1-e^{-\alpha z})\}\{1-(1-e^{-\beta z})\}$$

$$=1-e^{-(\alpha+\beta)z} \qquad Z_1\sim e(\alpha+\beta)$$

(2)并联：设并联系统寿命为Z_2,则 $Z_2=\max(X,Y)$

$$F_{Z_2}(z)=P(Z_2\le z)=P(\max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)=F_X(x)F_Y(y)$$

$$=(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z})=(1-e^{-\alpha z})(1-)=1-e^{-\beta z}-e^{-\alpha z}+e^{-(\alpha+\beta)z}$$

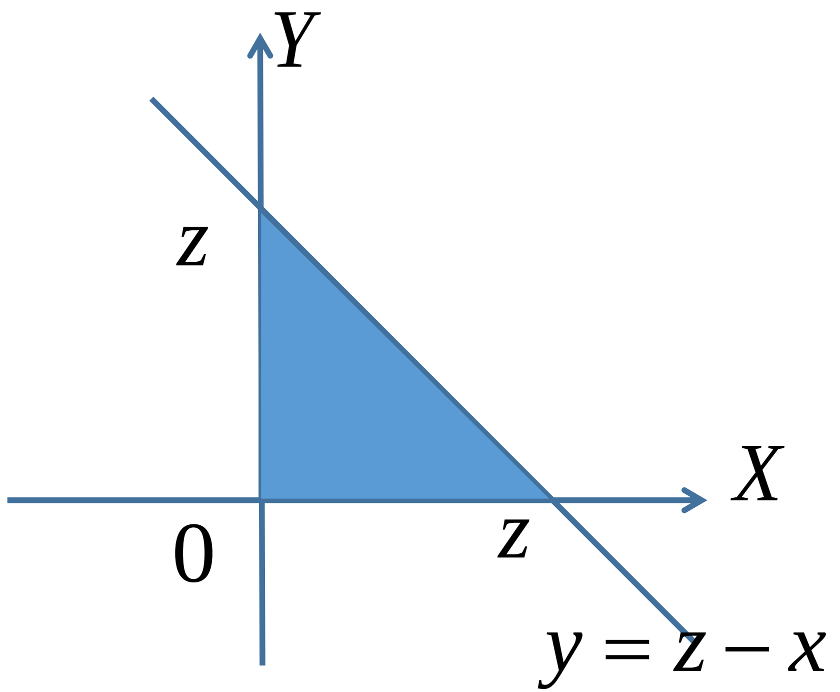
$$f_Z(z)=\begin{cases}\beta e^{-\beta z}+\alpha e^{-\alpha z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(3) 备用：设并联系统寿命为 Z_3，则 $Z_3 = X + Y$

$$F_{Z_3}(z) = P(Z_3 \le z) = P(X + Y \le z) = \int_0^z \int_0^{z-y} \alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)} dxdy$$

$$= \int_0^z \beta e^{-\beta y}\left(1-e^{-\alpha z+\alpha y}\right)dy$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} e^{-\beta z} + \frac{\beta}{\alpha-\beta} e^{-\alpha z}$$



$$f_{Z_1}(z) = F_{Z_1}^{'}(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z}\right) & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$