

二. 二维随机变量的分布函数

1. 联合分布函数

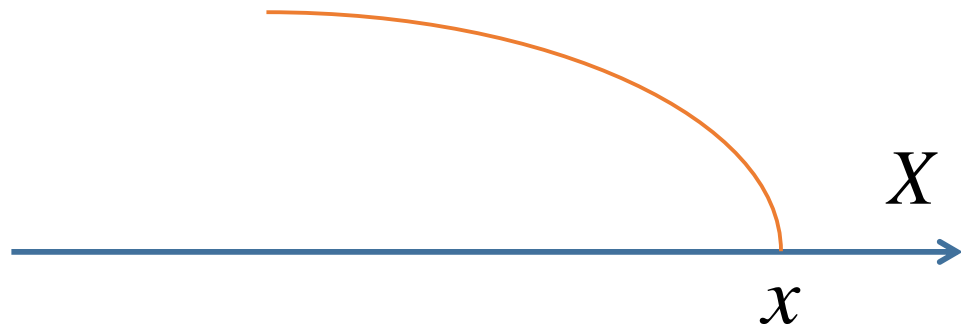
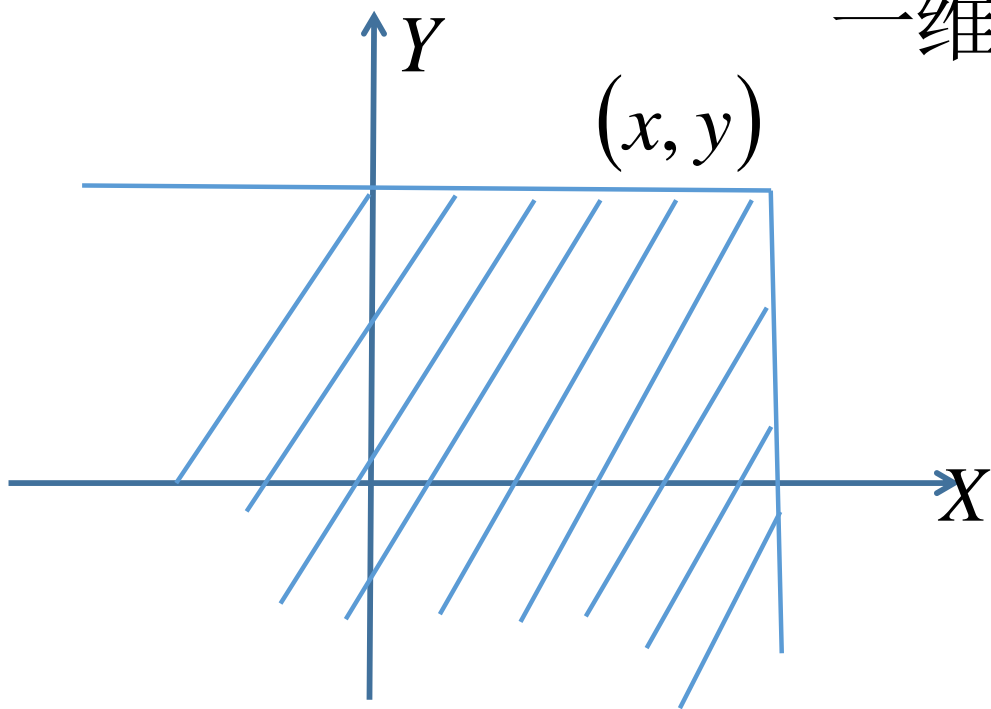
2. 边际分布函数

3. 条件分布函数

1.联合分布函数

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P((X \leq x) \cap (Y \leq y)); \quad x \in R, y \in R$$

一维分布函数: $F(x) = P(X \leq x)$



$F(x)$ 的性质:

(1) $F(x)$ 为 x 的右连续函数。

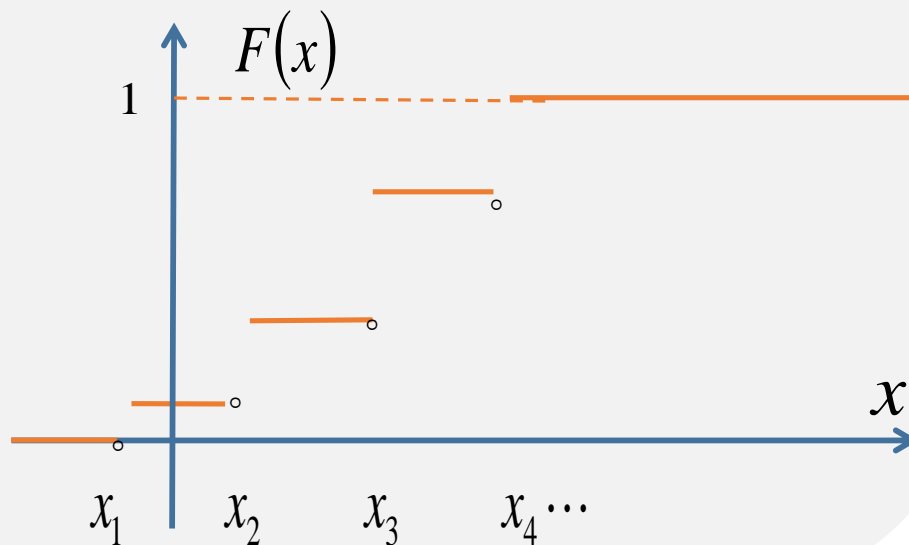
(2) $F(x)$ 为 x 的单调不减函数。

(3) $F(x)$ 满足非负有界性: $0 \leq F(x) \leq 1$

$F(x)$ 满足(1)(2)(3) $\leftrightarrow F(x)$ 是分布函数。

$$(4) P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \end{cases}$$



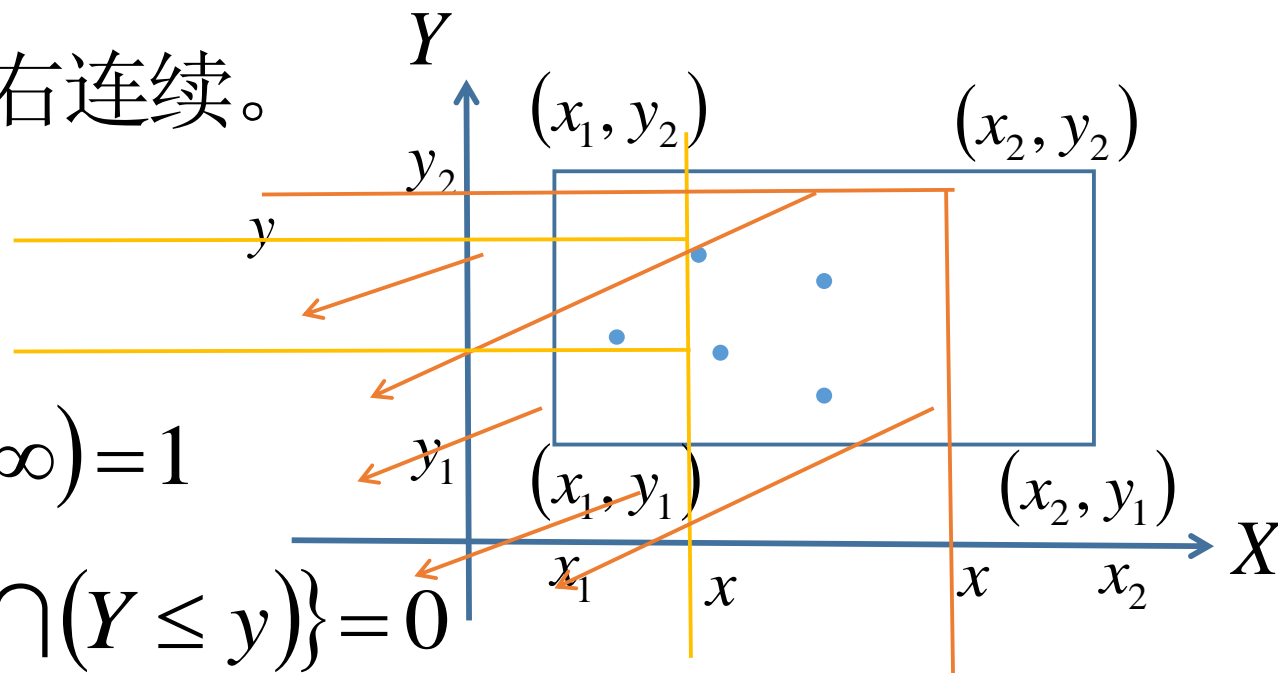
$F(x, y)$ 的性质: (i) $F(x, y)$ 分别关于 x, y 单调不减。

(ii) $F(x, y)$ 分别关于 x, y 右连续。

(iii) $0 \leq F(x, y) \leq 1$,

$F(x, -\infty) = 0$; $F(+\infty, +\infty) = 1$

$F(-\infty, y) = P\{(X \leq -\infty) \cap (Y \leq y)\} = 0$



(iv) (矩形法则)对任意的 x, y 有: $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2)$

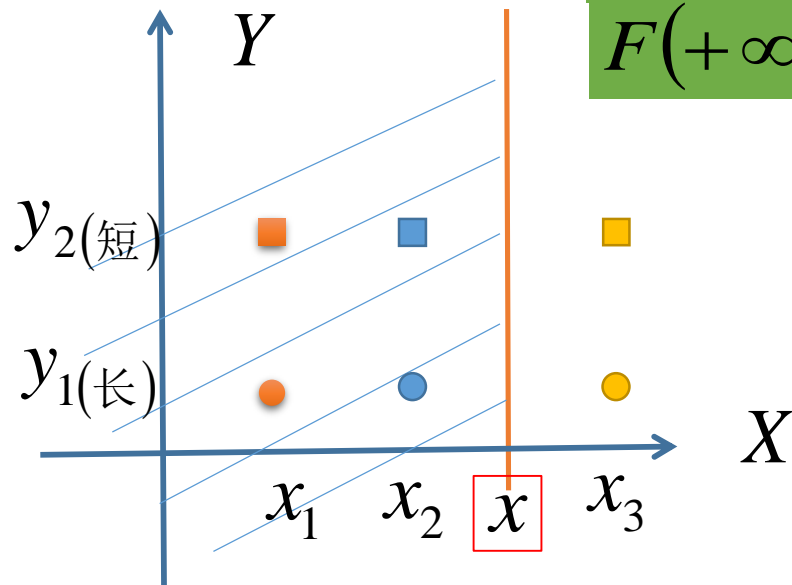
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

$F(x, y)$ 满足(i)(ii)(iii)(iv) $\Leftrightarrow F(x, y)$ 是分布函数

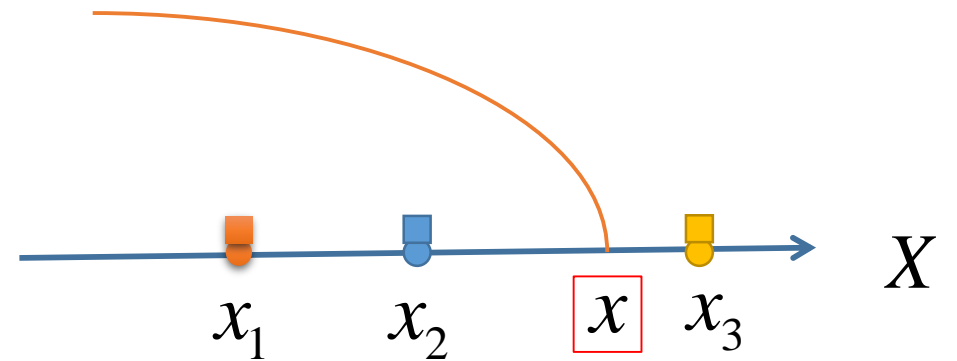
2. 边际分布函数

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq +\infty) = F(x, +\infty); x \in R$$

$$F_Y(y) = P(X \leq +\infty, Y \leq y) = F(+\infty, y) = P(Y \leq y); y \in R$$



$$\begin{aligned} F(-\infty, -\infty) &= 0 & F(x, -\infty) &= 0 & F_X(x) &= F(x, +\infty) \\ F(+\infty, +\infty) &= 1 & F(-\infty, y) &= 0 & F_Y(y) &= F(+\infty, y) \end{aligned}$$



猜想条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y = y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

| $Y \backslash X$ | $x_1(\text{红})$ | $x_2(\text{兰})$ | $x_3(\text{黄})$ | |
|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------|
| $y_1(\text{长})$ | 0.15 | 0.1 | 0.12 | 0.37 |
| $y_2(\text{短})$ | 0.2 | 0.18 | 0.25 | 0.63 |
| | 0.35 | 0.28 | 0.37 | 1 |

| X | x_1 | x_2 | x | x_3 |
|------------------------|-------|-------|------|-------|
| $P(X = x_i Y = y_1)$ | 0.15 | 0.1 | 0.12 | |
| | 0.37 | 0.37 | 0.37 | |

3.条件分布函数

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{P(X \text{ 红 } x, Y \leq y)}{P(X \text{ 红 } x)}; \quad y \in R.$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X \leq x, Y \text{ 黄 } y)}{P(Y \text{ 黄 } y)}; \quad x \in R.$$

若 X 表示球队队服的颜色, Y 表示款式, $F_{Y|X}(y|x)$ 表示为今晚比赛穿 x (红)色, x (红)色球服中各种款式的分布函数。

若 X 表示身高, Y 表示体重, $F_{Y|X}(y|x)$ 表示身高为 x (1.3)米孩子的体重的分布函数。

例6. 已知 $F(x, y) = A \left(B + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(C + \arctan \frac{y}{3} \right)$ 为 (X, Y) 的分布函数, 求 (1) A, B, C , (2) $F_X(x)$, (3) $F(2, 3)$ 。

解: (1) 由 $F(-\infty, y) = 0$, 有 $\left(B + \arctan \frac{-\infty}{2} \right) = 0$, 得 $B = \frac{\pi}{2}$;

由 $F(x, -\infty) = 0; F(+\infty, +\infty) = 1$ 得 $A = \frac{1}{\pi^2}; C = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} (2) F_X(x) &= F(x, +\infty) = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{+\infty}{3} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

$$(3) F(2, 3) = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{2}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{3}{3} \right) = \frac{9}{16\pi}$$