总结：

1. 联合分布（已知）： $P\left(X=x_i, Y=y_j\right)=p_{ij},\quad f(x,y)$

$$2.P\left(X=x_i, Y=y_j\right) \longrightarrow \begin{cases} P\left(X=x_i\right) \\ P\left(Y=y_j\right) \end{cases}, i, j=0,1\cdots$$

$$f(x,y) \longrightarrow f_X(x), f_Y(y) \quad \left\{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right\}$$

$$3.P\left(Y=y_j \mid X=x_i\right)=\frac{P\left(X=x_i, Y=y_j\right)}{P\left(X=x_i\right)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \qquad j=1,2\ldots$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$4.\ P(X=x_i, Y=y_j)=\begin{cases}\boxed{P(X=x_i)P(Y=y_j)\quad \textbf{X与Y独立}} \\ P(X=x_i)P(Y=y_j \mid X=x_i)\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\boxed{f_X(x)\,f_Y(y)\quad \textbf{X与Y独立}} \\ f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y)\end{cases}$$

5.已知 $f(x,y)$，求$Z=g(X,Y)$的分布密度。

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right).$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=\iint\limits_{g(X,Y)\le z} f(x,y)\,dy\,dx \qquad f_Z(z)=F_Z'(z)$$

概率：联合分布⇨边际分布 统计：联合分布⇦边际分布

1. 总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 抽取容量为**n**的样本 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ （独立同分布）

(1) $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ $(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 发生的可能性

$$=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma}\right)^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$P(X_1=x_i,\cdots X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)$$

（会求常用分布的联合分布列或密度）

$$(2)\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(n\mu,n\sigma^2) \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(\mu,\sigma^2/n) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$$

第三章　习题

1. $\left(P_{91-2}\right)$**设 (X,Y) 的联合密度为：** $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy), & -1<x,y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

证明 X 与 Y 不独立，但 X^2**与** Y^2**独立。**

证明： $f_X(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)dy=\frac{1}{2}$; $f_Y(y)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)dx=\frac{1}{2}$ **X与Y不独立**

$$P\left(X^2\le\xi\right)=P\left(-\sqrt{\xi}\le X\le\sqrt{\xi}\right)=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{\xi}}^{\sqrt{\xi}}\frac{1}{4}(1+xy)dxdy=\sqrt{\xi}$$

$$P\left(X^2\le\xi,Y^2\le\eta\right)=P\left(-\sqrt{\xi}\le X\le\sqrt{\xi},-\sqrt{\eta}\le Y\le\sqrt{\eta}\right)\quad(0<\xi,\eta<1)$$

$$=\int_{-\sqrt{\xi}}^{\sqrt{\xi}}\int_{-\sqrt{\eta}}^{\sqrt{\eta}}\frac{1}{4}(1+xy)dydx=\sqrt{\xi\eta}$$ 同理 $P\left(Y^2\le\eta\right)=\sqrt{\eta}$ X^2与Y^2独立

2. $\left(P_{91-3}\right)$ 设 (X,Y) 的联合密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),\quad x,y\in R$$

证明：(1) X 与 Y 都服从标准正态分布，但（X,Y)不是二维正态。

证明：(2) X 与 Y 不独立，但 $|X|$ 与 $|Y|^2$ 独立

奇函数对称区间积分为0

$$(1)\ \ f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)dy$$

$=\sqrt{2\pi}$ （标准正太密度归一性）

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\left\{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy}+\sin x\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\sin ydy}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$X \sim N(0,1)$, 同理$Y \sim N(0,1)$，但（**X,Y**)不是二维正态。

(2) 由 $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ 知 **X** 与 **Y** 不独立。

下面证$|X|$与$|Y|^2$独立：

对任意$a,b>0$, $P(|X| \leq a) = P(-a \leq X \leq a)$

$$= \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$P\left(|Y|^2 \leq b\right) = P\left(-\sqrt{b} \leq Y \leq \sqrt{b}\right) = \int_{-\sqrt{b}}^{+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{b}}^{+\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$P\left(|X| \le a, |Y|^2 \le b\right) = P\left(-a \le X \le a, -\sqrt{b} \le Y \le \sqrt{b}\right)$$

$$= \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \left(1 + \sin x \sin y\right) dx dy$$

$$= \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{-a}^{+a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$= P\left(|X| \le a\right) P\left(|Y|^2 \le b\right)$， $|X|$与$|Y|^2$独立。

3. $\left(P_{91-4}\right)$设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立，且具有相同的分布函数 ***F*(*x*)**和密度函数 ***f*(*x*)**，试求 $Z=\max\left(X_1, X_2, \cdots X_n\right)-\min\left(X_1, X_2, \cdots X_n\right)$的密度。

解：令 $S=\max\left(X_1, X_2, \cdots X_n\right), T=\min\left(X_1, X_2, \cdots X_n\right)$，$\left(S, T\right)$分布函数

$F(s,t)=P(S\le s, T\le t)$，而 $P(S\le s, T\le t)+P(S\le s, T>t)=P(S\le s)$

则 $F(s,t)=P(S\le s, T\le t)=P(S\le s)-P(S\le s, T>t)$

$=P\left(X_1\le s,\cdots X_n\le s\right)-P\left(X_1\le s,\cdots X_n\le s, X_1>t,\cdots X_n>t\right)$

$=P\left(X_1\le s,\cdots X_n\le s\right)-P\left(t<X_1\le s,\cdots t<X_n\le s\right)$

$=\{F(s)\}^n-\{F(s)-F(t)\}^n$

$$f(s,t)=\frac{\partial F^2(s,t)}{\partial x\partial y}=n(n-1)\{F(s)-F(t)\}^{n-2}f(s)f(t),\ t<s$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(S-T\le z)=\iint_{S-T\le z}f(s,t)dsdt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{t+z}f(s,t)dsdt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{t+z}f(s,t)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{t+z}n(n-1)\{F(s)-F(t)\}^{n-2}f(s)f(t)ds$$

$$f_Z(z)=F^{'}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}n(n-1)\{F(t+z)-F(t)\}^{n-2}f(t+z)f(t)dt$$

5. $\left(P_{91-5}\right)$已知**(*X*,*Y*)**的联合分布列为$P\left(X=n,Y=m\right)=\dfrac{(p\lambda)^m(q\lambda)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}$

其中$\lambda>0,q=1-p,n=0,1,\cdots,m=0,1,\cdots n.$

(1) 求 $Z=X-Y$的分布列；**(2)** 证明 ***Z*** 与 ***Y*** 独立。

解：**(1)** 由***X***，***Y*** 的取值以及***Z*=*X*-*Y***知 ***Z*** 的取值为$k=0,1\cdots.$

$$P\left(Z=k\right)=P\left(X-Y=k\right)=\sum_{n=k}^{+\infty}P\left(X=n,Y=n-k\right)$$

$$=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(p\lambda)^{n-k}(q\lambda)^k}{(n-k)!k!}e^{-\lambda}=\frac{(q\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(p\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(q\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{p\lambda}$$

$$=\frac{(q\lambda)^k}{k!}e^{-q\lambda},k=0,1\cdots.\qquad Z\sim P(q\lambda)$$

(2) 证明： $P(Y=m)=\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{(p\lambda)^m(q\lambda)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}=\frac{(p\lambda)^m}{m!}e^{-\lambda}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{(q\lambda)^{n-m}}{(n-m)!}$

$$=\frac{(p\lambda)^m}{m!}e^{-p\lambda},m=0,1\cdots \qquad Y\sim P(p\lambda)$$

$$P(Z=k,Y=m)=P(X-Y=k,Y=m)=P(X=k+m,Y=m)$$

$$=\frac{(p\lambda)^m(q\lambda)^k}{m!k!}e^{-\lambda}=\left\{\frac{(q\lambda)^k}{k!}e^{-q\lambda}\right\}\left\{\frac{(p\lambda)^m}{m!}e^{-p\lambda}\right\}$$

$$=P(Z=k)P(Y=m)$$

X与Y独立

$$P(X=n,Y=m)=\frac{(p\lambda)^m(q\lambda)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}$$

$$n=0,1,\cdots,m=0,1,\cdots n.$$