高等数学 2014 级下学期期末试卷

A 卷

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1、$(\frac{1}{9},\frac{-2}{9},\frac{2}{9}),\frac{1}{3}$；2、$2(x-1)+2(y-1)+(z-2)=0$，$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{x-2}{1}$；

3、$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\bullet x+f_2'\bullet y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x(f_{11}''y+f_{12}''x)+f_2'+y(f_{21}''y+f_{22}''x)$ 或

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy(f_{11}''+f_{22}'')+(x^2+y^2)f_{12}''+f_2'$；4、$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，$S(99)=0$；5、$2\pi$ 。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1、B；2、C；3、D；4、B；5、A。

三、1、(**高数**)已知两直线 L_1：$\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$，$L_2$：$\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$。

(1)证明 L_1，L_2 为异面直线；(2)求经过 L_2 且与 L_1 平行的平面方程。

解：(1) $\vec{s_1}=(1,-2,1),\vec{s_2}=(-1,1,2),M_1=(0,-2,1),M_2=(2,0,-1)$ 。

$\left[\vec{s_1},\vec{s_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-1&1&2\\2&2&-2\end{vmatrix}=-14\neq 0$，$L_1$，$L_2$ 为异面直线。（4 分）

（2）平面过点 $M_2=(2,0,-1)$，法向量 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}i&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&1\\-1&1&2\end{vmatrix}=(-5,-3,-1)$，平面点法式方程：$-5(x-2)-3(y-0)-(z+1)=0$ 。

即　$5x+3y+z-9=0$　（10 分）

2、(**工科**)求微分方程 $y''-3y'+2y=-e^x$ 的通解。

解：特征方程 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1,r_2=2$

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}$　（4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=Axe^x$　（7 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$A=1$，所以 $y^*(x)=xe^x$，

∴通解 $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^x$ 。　（10 分）

3、（**微积分**）求二重积分 $I=\iint\limits_{D}\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$。

解: 由对称性知 $\iint\limits_{D}\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$，（4 分）

$I=\iint\limits_{D}\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$ （10 分）

四、**已知**幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$，求:1、收敛域；2、和函数。

解： 1、**收敛半径** $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{1}{n+1}}{(-1)^{n+1}\frac{1}{n+2}}\right|=1$，

左端点 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，发散。

右端点 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$，收敛。

收敛域 $\left(-1,1\right]$ （4 分）

2、令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, x\in(-1,0)\cup\left(0,1\right]\\ 0, x=0\end{cases}$

令 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$S_1'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{-x}{1+x}$

$\int_0^x S_1'(x)dx=\int_0^x\frac{-x}{1+x}dx$，解得 $S_1(x)=\ln(1+x)-x$

既：$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(\ln(1+x)-x), x\in(-1,0)\cup\left(0,1\right]\\ 0, x=0\end{cases}$ （10 分）

五、计算曲线积分 $I=\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-x)dy$。已知 L 是从点 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$ 的有向曲线。

解：设$B(0,1)$，加有向弧段$\overline{AB}$，其参数方程为$\begin{cases}x=x(\text{参数})\\y=1\end{cases}$，再加有向弧段$\overline{BO}$，其参数方程为$\begin{cases}x=0\\y=y\text{（参数）}\end{cases}$，　　　（2分）

利用格林公式得：

$$I=\oint\limits_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}-\int\limits_{\overline{AB}}-\int\limits_{\overline{BO}}\qquad\text{（5分）}$$

$$=\iint\limits_{D}-\int\limits_{\overline{AB}}-\int\limits_{\overline{BO}}=(1-\int_0^1 x^2dx)-\int_1^0(e^x\sin 1-2)dx-\int_1^0\cos ydy$$

$$=\frac{2}{3}-(\sin 1\bullet e^x-2x)\Big|_1^0-\sin y\Big|_1^0=e\bullet\sin 1-\frac{4}{3}\qquad\text{（10分）}$$

六、求曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+y^2dzdx+z\bullet\sin xdxdy$，其中曲面Σ：$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\le z\le 2)$，取上侧。

解：设Σ_1：$\begin{cases}z=2\\x^2+y^2\le 4\end{cases}$，取下侧，$\Sigma_2$：$\begin{cases}z=1\\x^2+y^2\le 1\end{cases}$，取上侧，则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}\qquad\text{（5分）}$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2y+\sin x)dV-\iint\limits_{\Sigma_1}2\sin xdxdy-\iint\limits_{\Sigma_2}\sin xdxdy$$

$$=-\int_1^2 z^2dz\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le z^2}dxdy+\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 4}2\sin xdxdy-\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}\sin xdxdy$$

$$=-\int_1^2\pi z^4dz+0-0=-\pi\frac{z^5}{5}\Big|_1^2=-\frac{31}{5}\pi\qquad\text{（10分）}$$

七、已知函数$f(x,y)=x+y+xy$，曲线$L:x^2+y^2+xy=3$，求函数$f(x,y)$在曲线L上的最大方向导数。

解：函数$f(x,y)$在曲线L上任一点(x,y)处的最大方向导数是梯度$gradf=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=(1+y,1+x)$的模$|gradf|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$。故由题意，可求函数$g(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$的最大值，其中$x,y$满足条件$x^2+y^2+xy=3$。令

$L(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$ （5 分）

$$\begin{cases} L_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0 \\ L_y=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}$$

由前 2 个方程得 $y=x$ 或 $y=1-x$，分别代入第 3 个方程，得解

$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-1 \end{cases}$，$\begin{cases} x_3=2 \\ y_3=-1 \end{cases}$和$\begin{cases} x_4=-1 \\ y_4=2 \end{cases}$。

代入得最大方向导数$|gradf|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}=3$ （10 分）

B 卷

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1、$(\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9}),\frac{1}{3}$；2、$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，$S(99)=0$；

3、$2(x-1)+2(y-1)+(z-2)=0$，$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{x-2}{1}$；4、$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\bullet x+f_2'\bullet y$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x(f_{11}''y+f_{12}''x)+f_2'+y(f_{21}''y+f_{22}''x)$ 或 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy(f_{11}''+f_{22}'')+(x^2+y^2)f_{12}''+f_2'$；

5、2π 。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1、D；2、B；3、C；4、A；5、B。

三、1、(**高数**)已知两直线 L_1：$\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$，$L_2$：$\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$。

(1)证明 L_1，L_2 为异面直线；(2)求经过 L_1 且与 L_2 平行的平面方程。

解：(1) $\overrightarrow{s_1}=(1,-2,1),\overrightarrow{s_2}=(-1,1,2),M_1=(0,-2,1),M_2=(2,0,-1)$。

$\left[\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-14\neq 0$，$L_1$，$L_2$ 为异面直线。 （4 分）

（2）平面过点 $M_1=(0,-2,1)$，法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix} i & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(-5,-3,-1)$，平面

点法式方程：$-5(x-0)-3(y+2)-(z-1)=0$。

即 $5x+3y+z+5=0$ （10 分）

2、（**工科**）**五**、求微分方程 $y''-3y'+2y=-e^{2x}$ 的通解。

解：特征方程 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1, r_2=2$

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}$ （4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=Axe^{2x}$ （7 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$A=-1$，所以 $y^*(x)=-xe^{2x}$，

$\therefore$ 通解 $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^{2x}$。 （10 分）

3、（**微积分**）求二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1+2xy}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$。

解: 由对称性知 $\iint\limits_D \frac{2xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$， （4 分）

$$I=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$$ （10 分）

四、**已知**幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，求:1、收敛域；2、和函数。

解： 1、**收敛半径** $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}}\right|=1$，

左端点 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$，收敛；

右端点 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，发散。收敛域 $[-1,1)$ 。 （4 分）

2、令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}, x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0, x=0\end{cases}$，令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$S_1'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

$\int_0^x S_1'(x)dx=\int_0^x\frac{x}{1-x}dx$，解得 $S_1(x)=-\ln(1-x)-x$

既：$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(-\ln(1+x)-x), x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0, x=0\end{cases}$　　（10 分）

五、计算曲线积分 $I=\int_L(e^x\sin y-3y)dx+(e^x\cos y-x)dy$。已知 L 是从点 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$ 的有向曲线。

解：设 $B(0,1)$，加有向弧段 $\overline{AB}$，其参数方程为 $\begin{cases}x=x(\text{参数})\\ y=1\end{cases}$，再加有向弧段 $\overline{BO}$，其参数方程为 $\begin{cases}x=0\\ y=y（\text{参数}）\end{cases}$，　　（2 分）

利用格林公式得：

$$I=\oint_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}}$$　　（5 分）

$$=2\iint_D-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}}=2(1-\int_0^1x^2dx)-\int_1^0(e^x\sin1-3)dx-\int_1^0\cos ydy$$

$$=\frac{4}{3}-(\sin1\bullet e^x-3x)\Big|_1^0-\sin y\Big|_1^0=e\bullet\sin1-\frac{5}{3}$$　　（10 分）

六、求曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}xz^2dydz+y^4dzdx+z\bullet\sin ydxdy$，其中曲面 Σ：$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\le z\le2)$，取下侧。

解：设Σ_1：$\begin{cases}z=2\\ x^2+y^2\le4\end{cases}$，取上侧，$\Sigma_2$：$\begin{cases}z=1\\ x^2+y^2\le1\end{cases}$，取下侧，则

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}$$　　（5 分）

$$=\iiint_{\Omega}(z^2+4y^3+\sin y)dV-\iint_{\Sigma_1}2\sin ydxdy-\iint_{\Sigma_2}\sin ydxdy$$

$$=\int_1^2z^2dz\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le z^2}dxdy-\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le4}2\sin ydxdy+\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le1}\sin ydxdy$$

$$=\int_1^2\pi z^4dz+0-0=\pi\frac{z^5}{5}\Big|_1^2=\frac{31}{5}\pi$$　　（10 分）

七、同 A 卷。