五. 二维随机变量函数的分布

（一）二维离散型随机变量函数分布的求法

（二）二维连续型随机变量函数分布的求法

（三）极值分布

复　习

关注产品寿命值　（随机现象）

比较两厂寿命均值　（存在-未知）

估计两厂寿命均值（然后比较）

随机抽取*n*个产品测寿命值

（9.3, … 8.1）

合理？

$\left(\bar{x} = \frac{\cdots}{n} = 7.9\right)$

（甲厂寿命均值在7.9年左右）

（9.3…8.1）是一个样本点

概率统计研究：寻求理论支持

第一章：确定研究对象（随机试验）

第二章：建立随机变量

电视机寿命值　总体分布　$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

独立重复n次

第三章：二维随机变量（推广*n*维）

1. 样本的分布 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 联合分布

2. 二维随机变量函数　样本函数分布　$\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\left(X_1,\ X_2\ \cdots\ X_n\right) \qquad \overline{X}_n$$

$$\begin{array}{ll} (9.3,\ 6.9\ldots.\ 8.1) & 7.9 \\ (8.3,\ 9.1\ldots.\ 7.8) & 8.0 \\ (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) & \vdots \\ (6.3,\ 6.9\ldots.\ 8.2) & 8.1 \\ (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) & \vdots \end{array}$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots X_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \sim 分布？$$

$$\left(X_1 + X_2\right) \sim ? \qquad 令\ Z = X + Y$$

只要求出**$Z=X+Y$的分布**，$\overline{X}_n$很容易求出。

更一般地： 已知（X,Y）的联合分布，求 $Z=g(X,Y)$ 的分布

二维随机变量函数的分布

（一）离散型：已知(X,Y)的分布列，求$Z=g(X,Y)$的分布列.

例1. 掷两次骰子，求两次骰子点数和的分布列。

$$\boxed{Z=X+Y} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & 12 \\ 1/36 & 2/36 & 3/36 & \cdots & 1/36 \end{pmatrix}$$

1. $P(Z=k)=\sum P\{g(X,Y)=k\}$

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. 当 X,Y 取值为自然数，且 $Z=X+Y$ 时，

有规律性： $P(Z=k)=P(X+Y=k)$

$$=\sum_{m=1}^{k}P(X=m,Y=k-m)$$

3. $Z=g(X_1,X_2\cdots X_n)$是一维随机变量。

例1. 二维随机变量（X,Y）的分布列为：

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	0.1	0.1	0.1
2	0.2	0.3	0.2

求：$Z_1 = X + 2Y; Z_2 = X^2 Y;$

$$Z_3 = X/Y; Z_4 = \min(X, Y)$$

解：

Z_1	-1	1	2
-1	$(-1-2)$	1	3
2	0	4	6

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Z_2	-1	1	2
-1	-1	1	2
2	$2^2(-1)$	4	8

$$Z_2 \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	0.1	0.1	0.1
2	0.2	0.3	0.2

$$Z_3 = X/Y$$

Z_3	-1	1	2
-1	1	-1	$-1/2$
2	-2	2	1

$$Z_4 = \min(X, Y)$$

$$Z_3 \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Z_4	-1	1	2
-1	-1	-1	-1
2	-1	1	2

$$Z_4 \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

1. 泊松分布具有可加性: $P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{m=0}^{k}P(X=m,Y=k-m)\quad k=0,1\ldots$

$$X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2),$$ **X与Y独立，** 则 $:X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2).$

证明： $X\sim P(\lambda_1),\ P(X=m)=\dfrac{\lambda_1^{\,m}}{m!}e^{-\lambda_1}\quad m=0,1,2\ldots.$ **令Z=X+Y，Z取值：*k*=0,1,2...**

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{m=0}^{k}P(X=m,Y=k-m)\overset{(X与Y独立)}{=}\sum_{m=0}^{k}P(X=m)P(Y=k-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda_1^{\,m}}{m!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{\,k-m}}{(k-m)!}e^{-\lambda_2}=\sum_{m=0}^{k}\boxed{\frac{k!}{m!(k-m)!}}\lambda_1^{\,m}\lambda_2^{\,k-m}\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

$$=\boxed{\sum_{m=0}^{k}C_k^m\ \lambda_1^{\,m}\lambda_2^{\,k-m}}\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\qquad 则\,Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$k=0,1,2\cdots$$

2.二项分布具有可加性

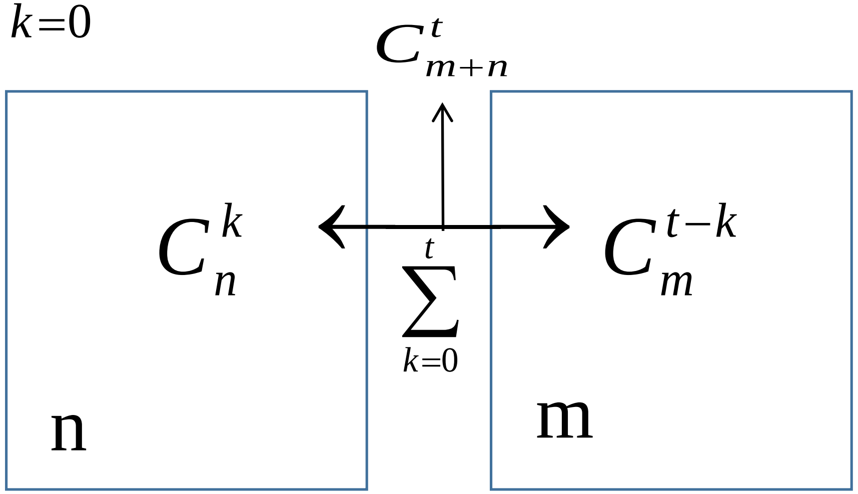
$X \sim B(n, p), Y \sim B(m, p)$, X与Y独立，则：$X + Y \sim B(m+n, p)$.

证明：$X \sim B(n, p)$, $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad k = 0,1,2\dots n$

$$P(X+Y=t) = \sum_{k=0}^{t} P(X=k, Y=t-k) = \sum_{k=0}^{t} P(X=k)P(Y=t-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{t} C_n^k p^k q^{n-k} \, C_m^{t-k} p^{t-k} q^{m-(t-k)}$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{t} C_n^k C_m^{t-k}} p^t q^{m+n-t} = \boxed{C_{m+n}^t} p^t q^{m+n-t}$$



$t = 0,1,2 \cdots m+n$ 则：$X + Y \sim B(m+n, p)$.

推论：$X_1, X_2 \cdots X_n$相互独立，　$X_i \sim B(1, p)$，$i = 1, \cdots n$

则 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$。

反之，若 $X \sim B(n, p)$，则 X可看成n个相互独立的$(0,1)$分布的和。

即 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$　　$X_i \sim B(1, p)$，$i = 1, \cdots n$，且相互独

（一）已知 离散型(X,Y)的分布列，求 $Z = g(X,Y)$ 的分布列。

1.当 X,Y 取值为自然数，且 $Z=X+Y$ 时有规律性

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{m=0}^{k}P(X=m,Y=k-m) \quad k=0,1,2\cdots$$

(1) 泊松分布具有可加性 （2）二项分布具有可加性