第五次课学习任务

结合PPT，观看平台上的视频7.18、7.19，按时完成签到、讨论、测试、作业等教学活动。要求掌握以下内容：

1、掌握电容的定义、物理意义、影响电容的因素；

2、会计算平行板、球形、柱形电容器的电容；

3、领会电容器储能公式并会进行简单计算；

4、掌握电场能量体密度定义，知道电场能量空间分布特点。

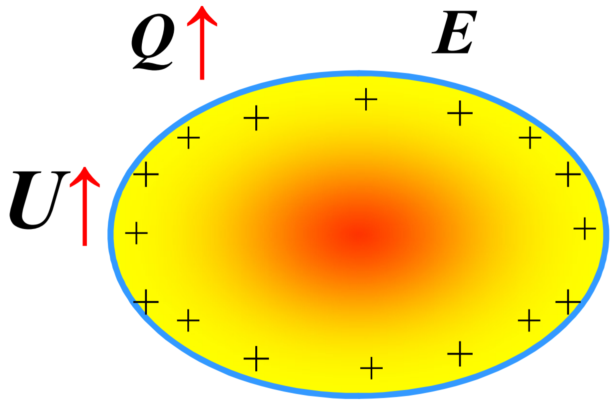
§1-5 电容；电容器；静电场的能量

§1-5-1 电容、电容器

§1-5-2 静电场的能量

§1-5-1 电容、电容器

一．孤立导体的电容



孤立导体的电势 $U \propto Q$

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

孤立导体的电容

单位：法拉(F)　　常用单位：微法(μF)和皮法(pF)

电容的物理意义：

反映了导体储存电荷和电能的能力大小

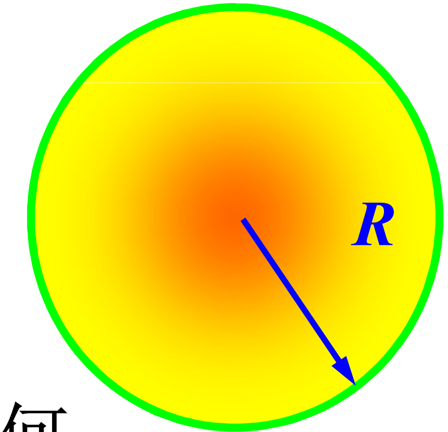
一．孤立导体的电容

求半径为R的孤立导体球的电容.

解：设该导体球表面所带电荷为Q，则有

电势为 $$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

电容为 $$C=\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R$$



结论：孤立导体的电容只与导体的几何形状和介质有关，与导体是否带电无关

二. 电容器的电容

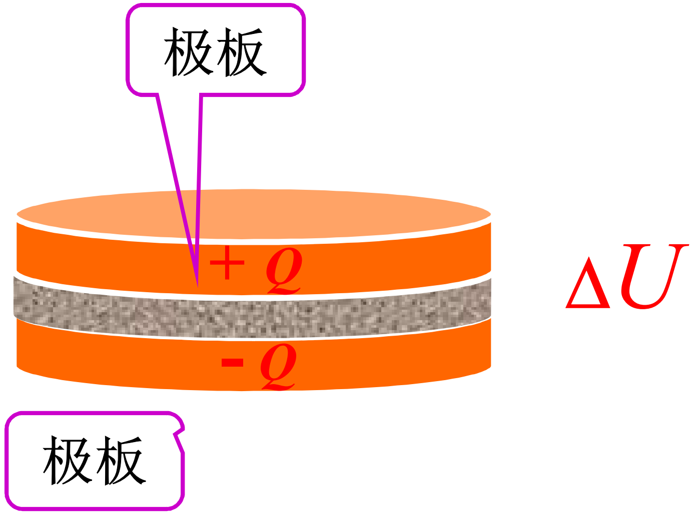
通常，彼此绝缘相距很近的两导体构成电容器。

使两导体极板带电 $\pm Q$

两导体极板的电势差 $\Delta U \propto Q$

电容器的电容

$$\boxed{C=\frac{Q}{\Delta U}}$$



- 电容器的应用：

储能、振荡、滤波、移相、旁路、耦合等。

- 电容器的分类

形状：平行板、柱形、球形电容器等

介质：空气、陶瓷、涤纶、云母、电解电容器等

用途：储能、振荡、滤波、移相、旁路、耦合电容器等。

70

厘米

高压电容器**(20kV 5~21μF)**

(提高功率因数)

12

厘米

聚丙烯电容器

(单相电机起动和连续运转)

2.5

厘米

涤纶电容

(250V0.47μF)

陶瓷电容器

(20000V1000pF)

2.5

厘米

电解电容器

(160V470 μ F)

三、典型电容器电容的计算

基本步骤：
- 1、已知或设电容器两极板分别带 $\pm Q$ 电荷；
- 2、计算极板间的场强分布，进而计算极板间电势差ΔU；
- 3、根据定义式求出电容C 。

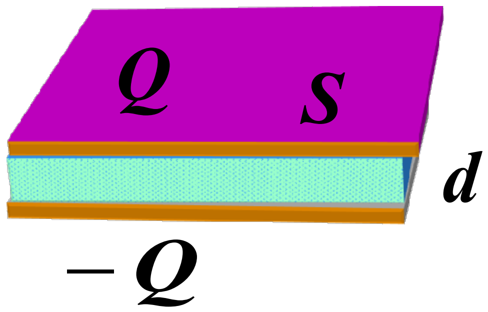
例题　求平板电容器的电容　（极板面积S、间距d 、充电介质介电常数 ε）。

解　设两极板分别带 ±Q 电荷

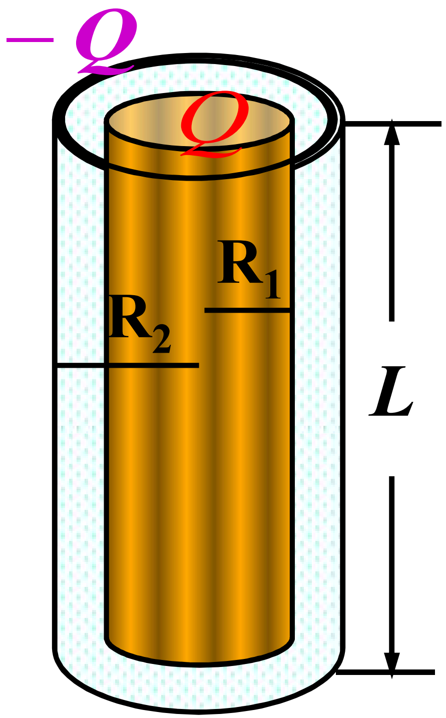
$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{Q}{\varepsilon S}$$

$$\Delta U=Ed=\frac{Qd}{\varepsilon S}$$

$$C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{\varepsilon S}{d}$$



例题　求圆柱形电容器的电容　（筒长L、内外半径分别为R_1、R_2，且$L>>(R_2-R_1)$，充电介质介电常数 ε）。



解　设两极板分别带 $\pm Q$ 电荷

因为$L>>(R2-R1)$，所以由高斯定理可得

两极板间距离中轴r处电场强度为

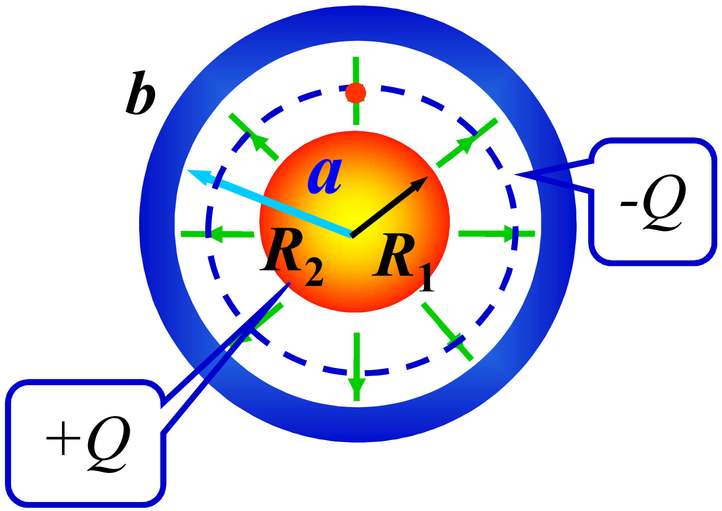
$$E=\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon Lr}$$

$$\Delta U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon Lr}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

例题 求球形电容器的电容 两个半径分别为R_1 和R_2的同心金属球壳就构成一个球形电容器，设两球壳间为空气或真空。



解 设两极板分别带 ±Q 电荷

则由高斯定理可以求出两球壳间的场强分布

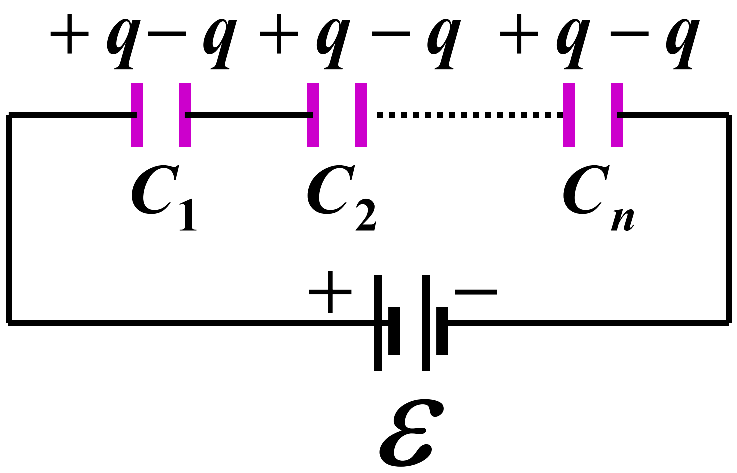
$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\Delta U = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

结论：电容器电容的大小只取决于极板的形状、大小、相对位置以及极板间的电介质情况。

四、电容器的串并联

1、电容器的串联

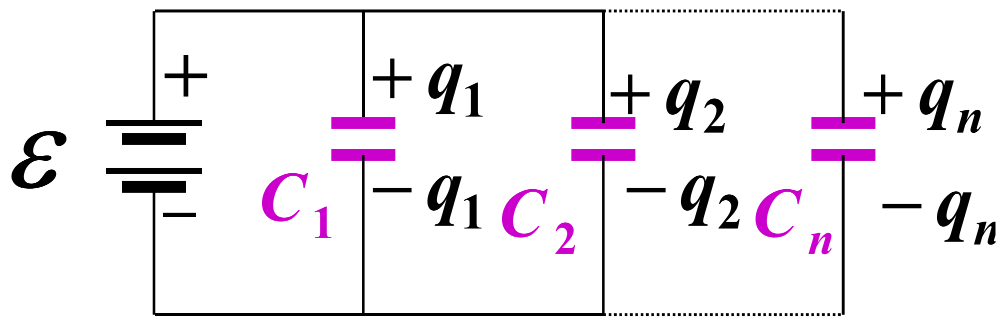


$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q$$

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_n}$$

2、电容器的并联

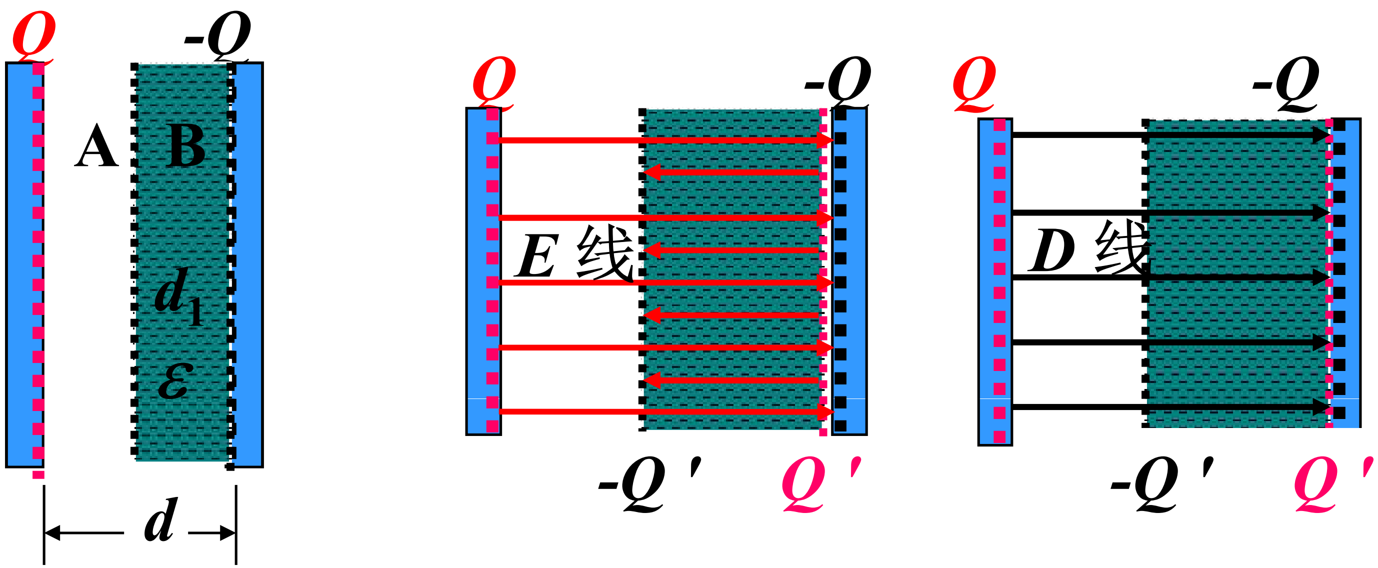


$$U_1 = U_2 = \cdots = U_n = U$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$$

$$C = C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n$$

例题　平板电容器，两极板间距d、带电量$\pm Q$，中间充一层厚度为d_1、介电常数为 ε 的均匀介质，　　求：电场分布、极间电势差和电容；画出$\mathbf{E}$ 线与D 线。



解

$$E_A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad E_B = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad C \equiv \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\sigma S}{\Delta U}$$

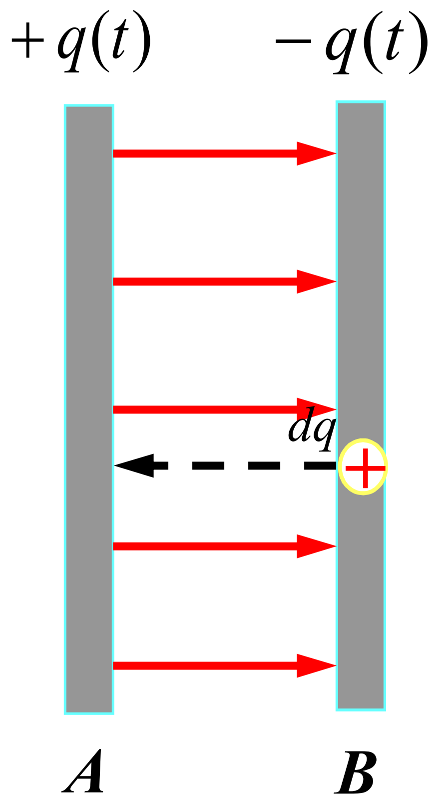
$$\Delta U = E_A (d - d_1) + E_B d_1 \qquad = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_r}{\varepsilon(d-d_1)+\varepsilon_0 d_1}$$

§ 1-5-2 静电场的能量

一. 电容器的能量

设在时间 t 内，从 B 板向 A 板迁移了电荷 $q(t)$

$$u(t)=\frac{q(t)}{C}$$



若将 dq 从 B 板迁移到 A 板外力需作功

$$\mathrm{d}A=u(t)\mathrm{d}q=\frac{q(t)}{C}\mathrm{d}q$$

极板上电量从 0 —Q 作的总功为

$$A=\int \mathrm{d}A=\int_0^Q\frac{q(t)}{C}\mathrm{d}q=\frac{Q^2}{2C}$$

电容器储存的能量

$$W_e = A = \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q=CU} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

二．电场能量和电场能量密度

忽略边缘效应，对平行板电容器有

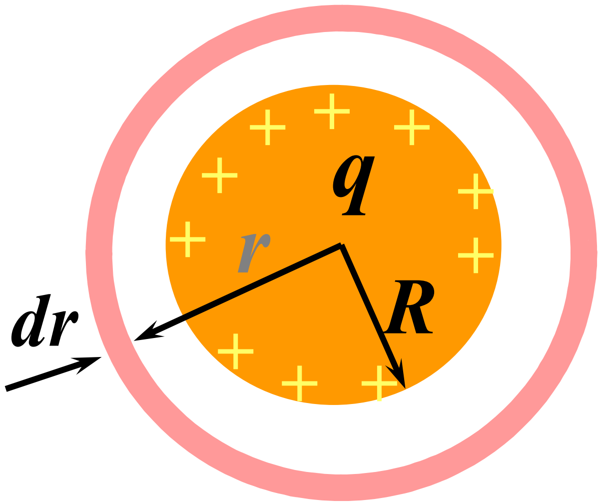
$$U = Ed \qquad C = \frac{\varepsilon s}{d}$$

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V$$

能量密度 $\boxed{w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2} = \frac{1}{2}DE$（适用于所有电场）

不均匀电场中 $\mathrm{d}W_e = w_e \mathrm{d}V$ $\boxed{W_e = \iiint_V \mathrm{d}W_e = \iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V}$

例题　计算均匀带电导体球及均匀带电球体的电场能量



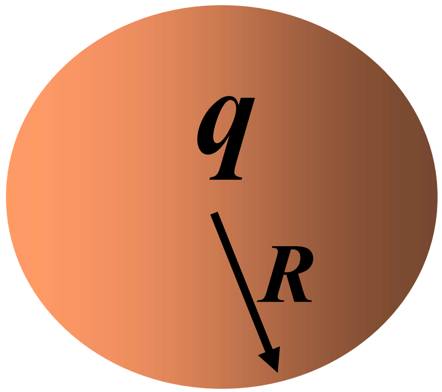
导体球　$\boldsymbol{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$

$$W_e = \iiint_V w_e \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$$

$$= 0 + \int_R^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

均匀带电球体

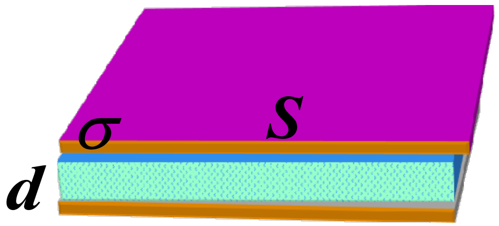
$$E=\begin{cases}\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3} & r<R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$



$$W_e=\int_0^R\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_R^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q^2}{40\pi\varepsilon R}+\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

例 平板电容器电荷面密度为σ 面积为S 极板相距d。问：不接电源将介电常数为ε的 均匀电介质充满其中，电场能量、电容器的电容各有什么变化？



解：不充电介质时

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad W_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} E_1^2 V = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} V$$

充入电介质后

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad W_2 = \frac{\varepsilon}{2} E_2^2 V = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} V$$

$$U_1 = \varepsilon_r U_2$$

$$C_2 = \frac{Q}{U_2} = \varepsilon_r C_1 \qquad \Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) Sd$$

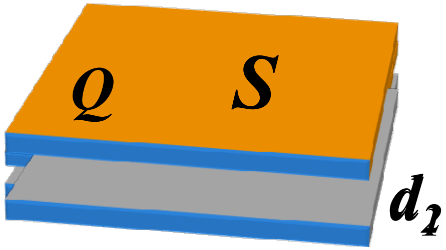
$$C_2 = \frac{\varepsilon C_1}{\varepsilon_0}$$

能量减少了——电场力作功！

电容增大了——可容纳更多的电荷！

例面积为S，带电量为$\pm Q$的平行平板。忽略边缘效应，问：将两板从相距d_1拉到d_2外力需要作多少功?

解：分析，外力作功= 电场能量增量



$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 V$$

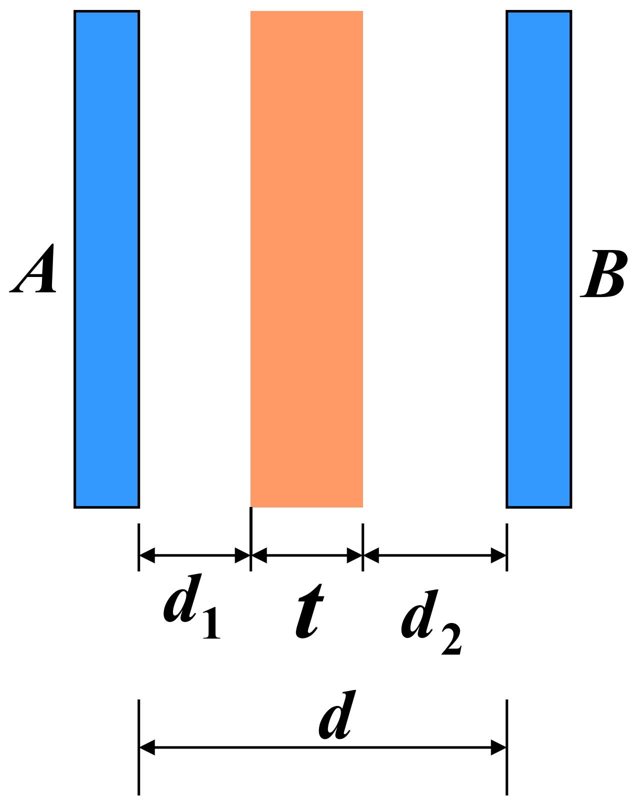
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \qquad \Delta V = S(d_2 - d_1)$$

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \Delta V = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{S\varepsilon_0}\right)^2 S(d_2 - d_1)$$

$$\boxed{A = \Delta W = \frac{Q^2(d_2 - d_1)}{2\varepsilon_0 S}}$$

例题.平行板电容器

已知 :S、d插入厚为t的铜板



求:

（1）C

（2）充电到U_0抽出铜板，求外力的功A

（3）将铜板换为ε_r的介质，再作计算

（1）求C

设$\pm q$　　场强分布

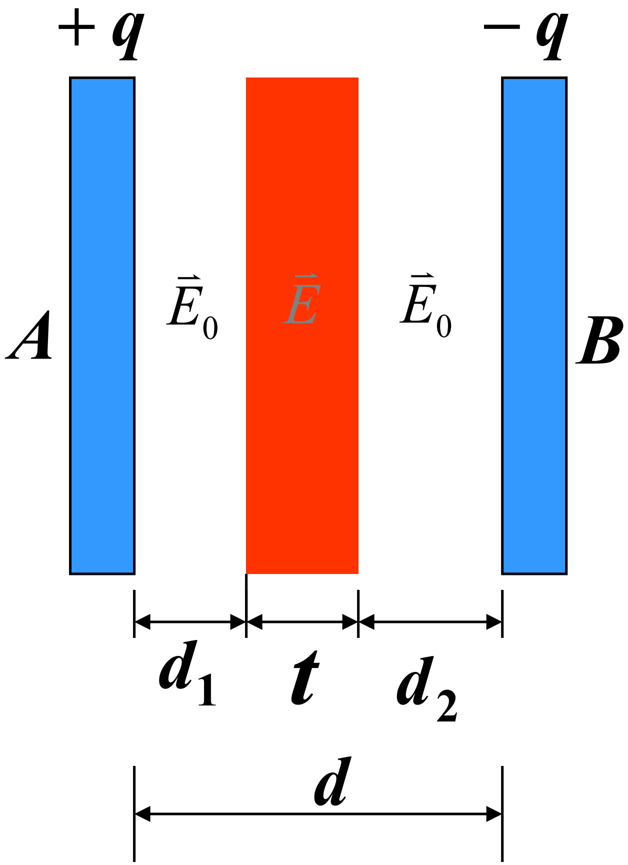
$$E=0 \qquad E_0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

电势差

$$U_A-U_B=E_0d_1+Et+E_0d_2$$

$$=E_0(d_1+d_2)=\frac{q}{\varepsilon_0 S}(d_1+d_2)$$

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1+d_2}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$$



（2）充电到U_0抽出铜板，求外力 的功A

$$A=\Delta W=W_2-W_1$$

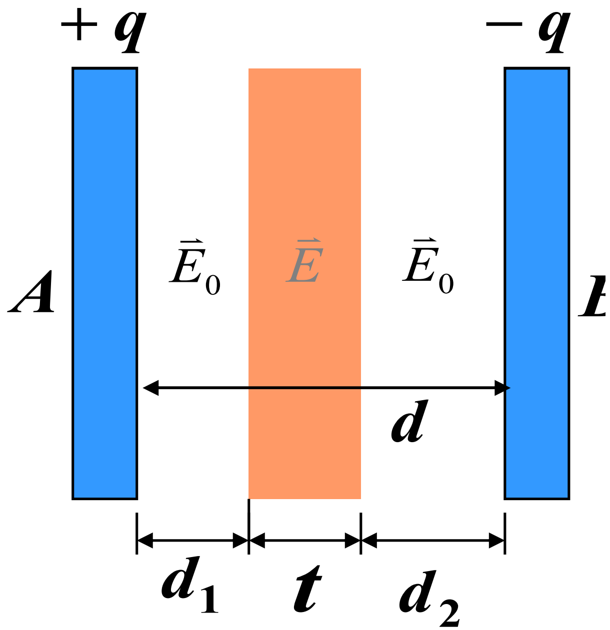
$$W_1=\frac{1}{2}CU_0^{\ 2}=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}U_0^{\ 2}$$

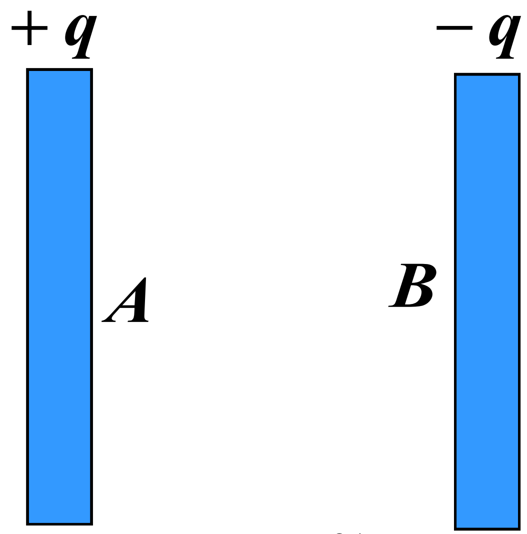
抽出铜板前后 q 不变　　$q=CU_0$

C 改变　　$C'=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$

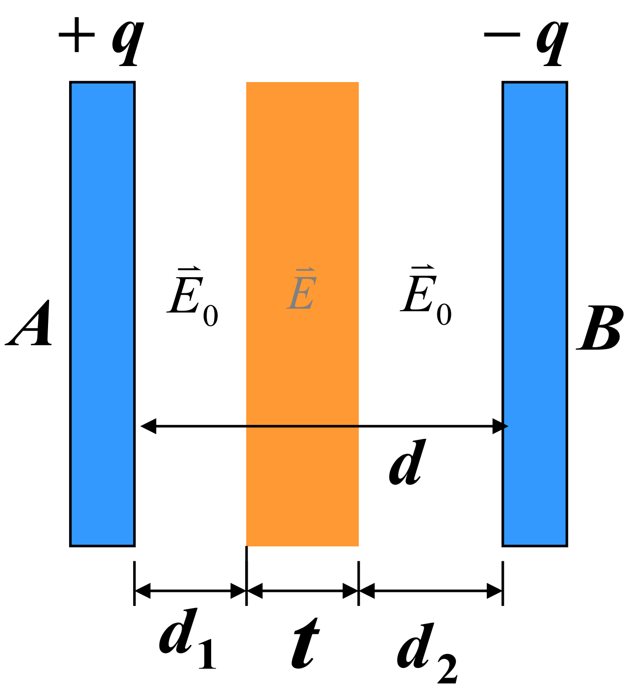
$$W_2=\frac{q^2}{2C'}=\frac{C^2U_0^{\ 2}}{2C'}=\frac{1}{2}\frac{d}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}\right)^2U_0^{\ 2}$$

$$\therefore A=\frac{\varepsilon_0 St}{2(d-t)^2}U_0^{\ 2}$$





（3）将铜板换为ε_r的介质，再作计算



$$U_A - U_B = E_0 d_1 + Et + E_0 d_2$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d - t) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} t$$

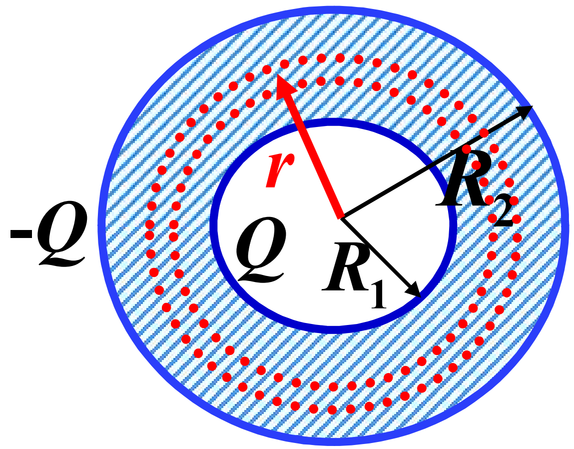
$$C'' = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\varepsilon_r d - t(\varepsilon_r - 1)}$$

充电到 U_0 $\quad W_1'' = \frac{1}{2} C'' U_0^2$ $\qquad$ q 不变 $q = C'' U_0$

抽出介质 $\quad W_2'' = \frac{q^2}{2C'}$ $\qquad C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

$$A' = \Delta W' = W_2'' - W_1''$$

例 计算球形电容器(R_1、R_2 、ε_r、Q)的总能量及电容



解：　　电容器外　　$E=0$

两球间的电场强度 $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \quad \text{取小体积元？} \quad E \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$W_e=\int \mathrm{d}W_e = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \boxed{=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$