高数、工科和微积分 2013 级下学期期末试题解答

A 卷

一、**1**、$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$，$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$；2、$10,(4,2,3)$

3、$(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}),\dfrac{8}{\sqrt{3}}$；4、$-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2}{9\pi}$；5、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

二、B，C，C，A，D

三、函数 $z=f(x+y,x-y,xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+y\cdot f_3'$ （4 分）

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{12}''+xf_{13}''+f_{21}''-f_{22}''+xf_{23}''+f_3'+y(f_{31}''-f_{32}''+xf_{33}'')$ （10 分）

四、（工科，盘锦）设曲线积分 $\int_l \left(-2f'(x)-f(x)+xe^x\right)ydx+f'(x)dy$ 在整个 xOy 平面内与路径无关，其中函数 $f(x)$ 二阶连续可导，求函数 $f(x)$ 的通解。

解：由于曲线积分 $\int_l\left(-2f'(x)-f(x)+xe^x\right)ydx+f'(x)dy$ 与路径无关，所以

$f''(x)=-2f'(x)-f(x)+xe^x$，即 $f''(x)+2f'(x)+f(x)=xe^x$ （2 分）

特征方程 $r^2+2r+1=0$，特征根 $r_1=r_2=-1$，齐次方程通解

$Y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}$ （4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x$ （6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$4ax+4a+4b=x$，所以有 $4a=1,4a+4b=0$，解得 $a=\dfrac{1}{4},b=-\dfrac{1}{4}$，$\therefore$ 通解 $y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}+(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4})e^x$。 （10 分）

（高数）已知两直线 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2$：$\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$。

(1)证明 L_1，L_2 为异面直线；

(2)求 L_1 与 L_2 之间的夹角。

解：(1) $\overrightarrow{s_1}=(1,0,-1),\overrightarrow{s_2}=(0,1,1),M_1=(1,2,3),M_2=(-2,1,0)$。

$\left[\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-3&-1&-3\end{vmatrix}=-5\neq 0$，$L_1$，$L_2$为异面直线。（5 分）

（2）$\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{s_1}\bullet\overrightarrow{s_2}\right|}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$。（10 分）

（微积分）计算$\iint\limits_D\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D：$-1\le x\le 1,0\le y\le 1$。

解: 原式$=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$（4 分）

$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(y-x^2)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}(x^2-y)dy=\dfrac{11}{15}$（10 分）

五、已知L是<u>第一象限</u>中从点$O(0,0)$沿圆周$y=\sqrt{2x-x^2}$到点$A(2,0)$，再沿圆周$y=\sqrt{4-x^2}$ 到点 $B(0,2)$ 的有向曲线。计算曲线积分$I=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x+2y)dy$。

解：设所补直线L_1为$x=0(0\le y\le 2)$，方向向下，其参数方程为$\begin{cases}x=0\\y=y\end{cases}$，利用格林公式得：（2 分）

原式$=\int\limits_{L+L_1}3x^2ydx+(x^3+x+2y)dy-\int\limits_{L_1}3x^2ydx+(x^3+x+2y)dy$（6 分）

$=\iint\limits_D(3x^2+1-3x^2)dxdy-\int_2^0 2ydy=\dfrac{\pi}{2}+4$（10 分）

六、（1）写出函数$f(x)=\sin x$在$x=0$处的幂级数及收敛域；

（2）求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$的和函数及收敛域。

解：1、$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)$（3 分）

2、$R^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{(2n+1)!}}{\frac{n+2}{(2n+3)!}}=+\infty$，$R=+\infty$，收敛域$(-\infty,+\infty)$（6 分）

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{x}{2}\sin x$$

$\therefore\quad S(x)=\left(\frac{x}{2}\sin x\right)'=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)\qquad x\in(-\infty,\ +\infty)$ （10 分）

七、求曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R$ 和 $z=-R(R>0)$ 所围立体全表面的外侧。

解：设 Σ_1，Σ_2，Σ_3 依次为 Σ 的上、下底和圆柱面部分，设 Σ_4，Σ_5 依次为 Σ_3 被平面 $x=0$ 所截的前部曲面和后部曲面，则

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=0$$ （4 分）

$$\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_4}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_5}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=\frac{\pi^2}{2}R$$ （10 分）

B 卷

一、**1**、$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$；2、$5,(4,1,-1)$

3、$(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}),\frac{-8}{\sqrt{3}}$；4、$-\frac{\pi}{2},\frac{2}{25\pi}$；5、$8\sqrt{2}\pi$

二、**C，B，D，C，A**

三、函数 $z=f(xy,x-y,x+y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+f_2'+f_3'$ （4 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-f_{12}''+f_{13}'')+xf_{21}''-f_{22}''+f_{23}''+xf_{31}''-f_{32}''+f_{33}''$$ （10 分）

四、（工科，盘锦） 设曲线积分 $\int_l \left(-2f'(x)-f(x)+2xe^x\right)ydx+f'(x)dy$ 在整个 xOy 平面内与路径无关，其中函数 $f(x)$ 二阶连续可导，求函数 $f(x)$ 的通解。

解： 由于曲线积分 $\int_l \left(-2f'(x)-f(x)+2xe^x\right)ydx+f'(x)dy$ 与路径无关，所以

$f''(x)=-2f'(x)-f(x)+2xe^x$，即 $f''(x)+2f'(x)+f(x)=2xe^x$ （2 分）

特征方程 $r^2+2r+1=0$，特征根 $r_1=r_2=-1$，齐次方程通解

$Y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}$ （4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x$ （6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$4ax+4a+4b=2x$，所以有 $4a=2,4a+4b=0$，

解得 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$，$\therefore$ 通解 $y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}+(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})e^x$。 （10 分）

（高数） 已知两直线 L_1：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$，$L_2$：$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$。

(1)证明 L_1，L_2 为异面直线；

(2)求 L_1 与 L_2 之间的夹角。

解： (1) $\overrightarrow{s_1}=(2,1,1),\overrightarrow{s_2}=(-1,1,1),M_1=(1,2,1),M_2=(2,1,3)$。

$$\left[\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&1&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=9\neq 0$$，L_1，L_2 为异面直线。 （5 分）

（2） $\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{s_1}\bullet\overrightarrow{s_2}\right|}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=0$，$\theta=\frac{\pi}{2}$。 （10 分）

（微积分） 计算 $\iint\limits_D\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D：$0\le x\le 1,0\le y\le 1$。

解: 原式$=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （4 分）

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 (y-x^2)dy+\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy=\frac{11}{30}$$ （10 分）

五、已知 L 是**<u>第一象限</u>**中从点 $O(0,0)$ 沿圆周 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 到点 $A(0,2)$，再沿圆周 $y=\sqrt{4-x^2}$ 到点 $B(2,0)$ 的有向曲线。计算曲线积分 $I=\int_L (y^3+y-2x)dx+3xy^2dy$。

解：设所补直线 L_1 为 $y=0(0\le x\le 2)$，方向向左，其参数方程为 $\begin{cases} y=0 \\ x=x \end{cases}$，利用格林公式得： （2 分）

$$\text{原式}=\int\limits_{L+L_1}(y^3+y-2x)dx+3xy^2dy-\int\limits_{L_1}(y^3+y-2x)dx+3xy^2dy$$ （6 分）

$$=-\iint\limits_D (3y^2-3y^2-1)dxdy-\int_2^0(-2x)dx=\frac{\pi}{2}-4$$ （10 分）

第六题和第七题同 A 卷