# 四. 随机变量的独立性

1.随机变量独立性定义

2.相互独立的随机变量的函数也独立

两个事件独立：**A,B**是两事件，若 $P(AB)=P(A)P(B)$ 则称**A**与**B**独立。

**1.定义** 设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ 分别是二维随机变量**(X,Y)**的分布函数和边际分布函数。若对所有的**x,y**有：

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y) \qquad x\in R, y\in R$$

即 $P(X\le x, Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$，则称随机变量**X**与**Y**独立。

称随机变量 **X** 与 **Y** 独立，指的是 **X** 的任意事件 **P(X≤x)**与 **Y** 的任意事件 **P(Y≤y)**都独立。 $(x,y$为任意实数$)$。

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y) \Leftrightarrow \begin{cases} p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j} & \text{对所有}i,j\text{成立。}\\ f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) & \text{对所有}x,y\text{成立。}\end{cases}$$

| $Y \backslash X$ | $x_1$(红) | $x_2$(兰) | $x_3$(黄) | |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$(长) | $\cancel{15/100}$ | $10/100$ | $12/100$ | $37/100$ |
| $y_2$(短) | $20/100$ | $18/100$ | $25/100$ | $63/100$ |
| | $35/100$ | $28/100$ | $37/100$ | 1 |

**二维离散型随机变量 *X* 与 *Y* 独立：**

**格子数等于行合计乘列合集对所有点都成立。**

| $X_1 \backslash X_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | 1/6 |
| 2 | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | 1/6 |
| 3 | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | 1/6 |
| 4 | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | 1/6 |
| 5 | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | 1/6 |
| 6 | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | $1/36$ | 1/6 |
| | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | |

二维均匀分布：

矩形域独立：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, \\ 0\end{cases}$ $f_X(x)=\dfrac{1}{b-a}$; $f_Y(y)=\dfrac{1}{d-c}$;

圆域不独立：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2; \\ 0, & 其他\end{cases}$ $f_X(x)=\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}$

二维指数分布，$X$与$Y$独立。

$$f(x,y)=\begin{cases}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & 其他\end{cases} \qquad f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

正态分布重要性质之一：$\boxed{\text{二维正态分布}X\text{与}Y\text{独立}\Leftrightarrow \rho=0}$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

$$f(x,y)\overset{(\rho=0)}{=}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}=f_X(x)f_Y(y)$$

反之，若$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$对所有$(x,y)$成立 则对$(\mu_1，\mu_2)$也成立。

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=f(\mu_1,\mu_2)\boxed{=}f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\Rightarrow\rho=0$$

**2. 定理：** 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立，$g(x)$，$h(y)$ 是 $X$ 与 $Y$ 的函数，则 $g(X)$ 与 $h(Y)$ 也独立。$X$与$Y$独立 $\Rightarrow X^2$与$Y^2$独立，反之不成立。

例1. 已知 $X$ 与 $Y$ 的边际分布列均为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$， 且$P(XY=0)=1$，

试求 (1) $X$ 与 $Y$ 的联合分布列；(2) $X$ 与 $Y$ 是否独立？(3)求$P(X+Y=1)$

解：(2) $P(X=-1,\ Y=-1)=0$

$$\nparallel \qquad X\text{与}Y\text{不独立}$$

$P(X=-1)P(Y=-1)=0.25^2$

(3) $P(X+Y=1)=P(X=1,\ Y=0)$

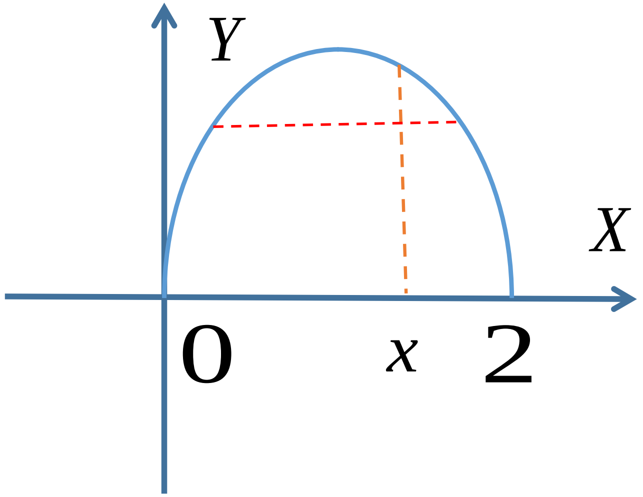
$+P(X=0,\ Y=1)=0.25+0.25=0.5$

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 0.25 | 0 | 0.25 |
| 0 | 0.25 | 0 | 0.25 | 0.5 |
| 1 | 0 | 0.25 | 0 | 0.25 |
| | 0.25 | 0.5 | 0.25 | |

例3. 向区域 $D=\{(x,y)|y\le 2x-x^2, y\ge 0\}$上随机掷点，用**X,Y**分别表示点的纵横坐标的值，求(1) $f_X(x), f_Y(y)$，**(2) X与Y是否独立?** (3) $f_{Y|X}(y|x)$。

解：$(X,Y)$在$D=\{(x,y)|y\le 2x-x^2, y\ge 0\}$上服从均匀分布。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3}{4} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



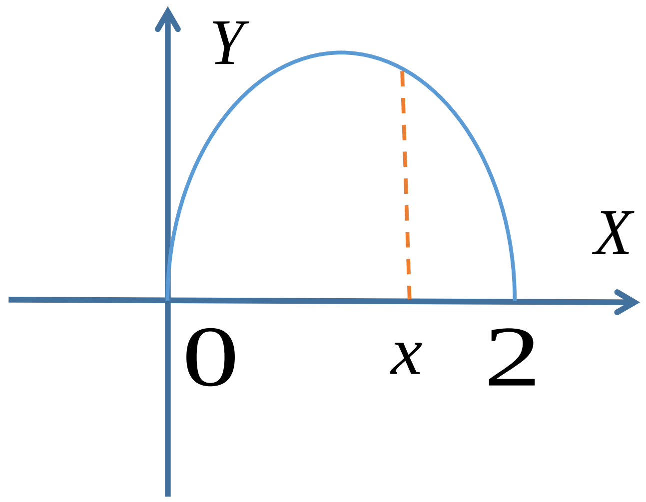

$$(1)\ f_X(x)=\int_0^{2x-x^2}\frac{3}{4}dy=\frac{3}{4}(2x-x^2),\ (0\le x\le 2)$$

$$f_Y(y)=\int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}}\frac{3}{4}dx=\frac{3}{2}\sqrt{1-y},(0\le y\le 1)\quad\left(S(D)=\int_0^2 2x-x^2dx=\frac{4}{3}\right)$$

(2) $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, $X$与$Y$不独立。

(3) $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{3/4}{\frac{3}{4}(2x-x^2)}$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(2x-x^2)} & 0 < y < 2x-x^2 (0 < x < 2) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



**例2.** 设某医院每天出生的婴儿总数 $X \sim P(14)$，其中出生的婴儿为男婴的概率为0.51，以 $Y$ 表示每天在该医院出生的男婴的个数，求 (1) $(X,Y)$ 的联合分布列，(2) $Y$ 的边际分布列，(3) $X$与$Y$是否独立？

解：(1) $X \sim P(14)$为医院每天出生的婴儿总数。

每天出生$n$个婴儿的概率为：$P(X=n)=\dfrac{14^n}{n!}e^{-14}, n=0,1,2\cdots$

此$n$个婴儿中有$m$个男婴的概率为：

$$P(Y=m \mid X=n)=C_n^m 0.51^m 0.49^{n-m}, m=0,1,2\ldots n$$

**$(X,Y)$的联合分布列为：**

$$P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m|X=n)$$

$$=\frac{14^n}{n!}e^{-14}\,C_n^m 0.51^m 0.49^{n-m}$$

$$=\frac{1}{n!}e^{-14}\,C_n^m(0.51\times 14)^m(0.49\times 14)^{n-m}$$

$$=\frac{1}{n!}e^{-14}C_n^m 7.14^m 6.86^{n-m} \qquad n=0,1\ldots;m=0,1\ldots n$$

(2) $Y$的边际分布列:

$$P(Y=m)=\sum P(X=n,Y=m) = \sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n!}e^{-14}C_n^m 7.14^m 6.86^{n-m}$$

$$= e^{-14}\frac{(7.14)^m}{m!}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{(6.86)^{n-m}}{(n-m)!} \overset{t=n-m}{=} e^{-14}\frac{(7.14)^m}{m!}\boxed{\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{(6.86)^t}{t\,!}}$$

$$= e^{-14}\frac{(7.14)^m}{m!}e^{6.86} = e^{-7.14}\frac{(7.14)^m}{m!}, m=0,1\ldots \quad Y\sim P(7.14)$$

(3) 显然 $P(X=n,Y=m)\neq P(X=n)P(Y=m)$, $X$与$Y$不独立

例5. $f(x,y)=\begin{cases} k(3x^2+xy), & 0<x<1, 1<y<3 \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$，求:(1) $k$. (2) $f_X(x), f_Y(y)$.

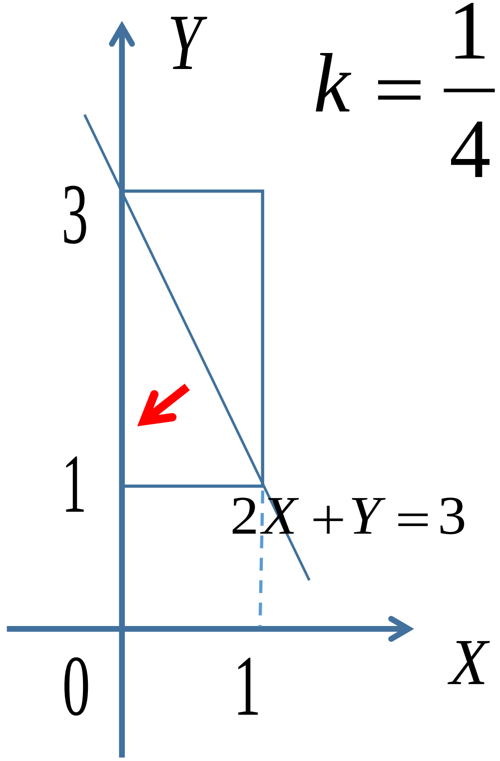
(3) $P(2X+Y<3)$. (4) $P(X<0.5 | Y<2)$. (5) $P(X<0.5 | Y=2)$

解: (1) $1=\int_0^1\int_1^3 k(3x^2+xy)dydx=\int_0^1 6kx^2+4kxdx=4k$ , $k=\dfrac{1}{4}$

(2) $f_X(x)=\int_1^3\dfrac{1}{4}(3x^2+xy)dy=\dfrac{3}{2}x^2+x$ , $(0<x<1)$

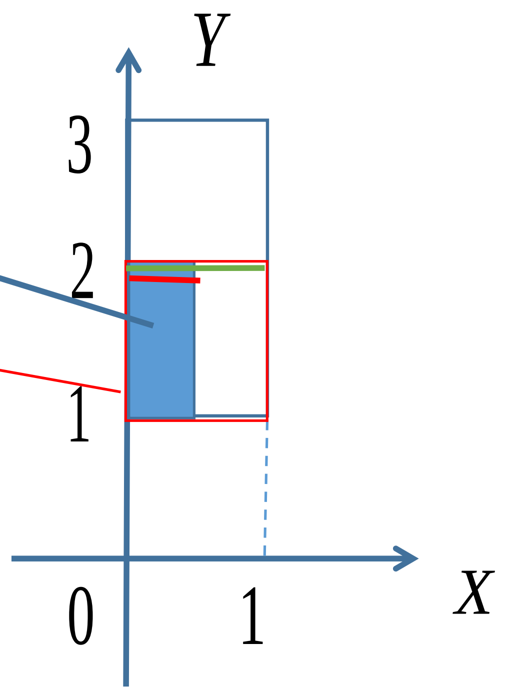
$f_Y(y)=\int_0^1\dfrac{1}{4}(3x^2+xy)dx=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}y$ , $(1<y<3)$

(3) $P(2X+Y<3)=\int_0^1\int_1^{3-2x}\dfrac{1}{4}(3x^2+xy)dydx=\dfrac{1}{4}$



$$(4)\ P(X<0.5|Y<2)=\frac{P(X<0.5,Y<2)}{P(Y<2)}$$

$$=\frac{\int_0^{0.5}\int_1^2\frac{1}{4}\left(3x^2+xy\right)dydx}{\int_1^2\frac{1}{4}+\frac{1}{8}ydy}=\frac{5}{28}$$




$$(5)\ P(X<0.5|Y=2)=\frac{P(X<0.5,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{0}{0}$$

条件分布函数:

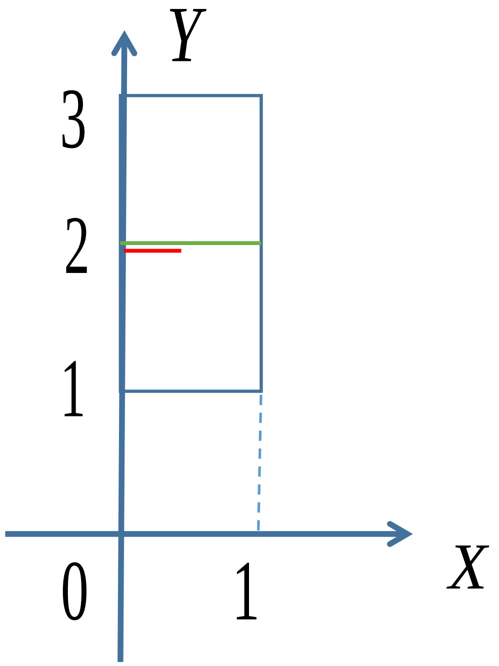
$$F_{X|Y}(x|y)=\frac{P(X\le x, Y=y)}{P(Y=y)};\ \ x\in R.$$

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

$$P(X<0.5|Y=2)=\frac{P(X<0.5, Y=2)}{P(Y=2)}=F_{X|Y}(0.5|2)$$

$$=\int_{0}^{0.5}\frac{f(u,2)}{f_Y(2)}du$$

$$(5)\ P\left(X<0.5 \middle| Y=2\right)=\frac{P\left(X<0.5, Y=2\right)}{P\left(Y=2\right)}=F_{X|Y}\left(0.5 \middle| 2\right)$$




$$\left\{F_{X|Y}\left(x \middle| y\right)=\frac{P\left(X \le x, Y=y\right)}{P\left(Y=y\right)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f\left(u,y\right)}{f_Y\left(y\right)}du\right\}$$

$$F_{X|Y}\left(0.5 \middle| 2\right)=\int_{0}^{0.5}\frac{f\left(u,2\right)}{f_Y\left(2\right)}du=\int_{0}^{0.5}\frac{\frac{1}{4}\left(3u^2+uy\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}y}du$$

$$=\int_{0}^{0.5}\frac{\frac{1}{4}\left(3u^2+u\times 2\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times 2}du=0.1875$$

# 一.离散型随机变量：

1.联合分布列 $P\left(X=X_i, Y=y_j\right)=p_{ij}, i, j=1,2\cdots$

2.边际分布列 $P\left(X=X_i\right)=\sum_{j=1}^{+\infty} P\left(X=X_i, Y=y_j\right)=p_{i\bullet}\ , i=1,2\cdots$

3.条件分布列 $P\left(Y=y_j \middle| X=X_i\right)=\dfrac{P\left(X=X_i, Y=y_j\right)}{P\left(X=X_i\right)}, j=1,2\cdots$

$\left(i=1,2\cdots\right)$

$$P\left(X=X_i, Y=y_j\right)=\begin{cases} P\left(Y=y_j \middle| X=X_i\right) P\left(X=X_i\right) \\ P\left(X=X_i\right) P\left(Y=y_j\right) & \textbf{\textit{X}与\textit{Y}独立} \end{cases}$$

## 二. 随机变量的分布函数：

1.联合分布函数 $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y),x,y\in R$

2.边际分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=P(X\le x,Y\le +\infty),\quad x\in R$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=P(X\le +\infty,Y\le y),\ y\in R$$

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\quad \textbf{\textit{X}与\textit{Y}独立}$$

3.条件分布函数 $F_{Y|X}(y|x)=\dfrac{P(X=x,Y\le y)}{P(X=x)},y\in R(x\in R)$

## 三.二维连续型随机变量

**1.联合分布密度 $f(x,y)$**

**2.边际分布密度** $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx,$

**3.条件分布密度** $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ ; $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$f(x,y)=\begin{cases} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y) \\ f_X(x)\,f_Y(y) & \textbf{\textit{X}与\textit{Y}独立} \end{cases}$$

$f(x,y)$ $\Rightarrow$ $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ $\Leftarrow$ $X$与$Y$独立 $f_X(x),\ f_Y(y)$

二维分布 $\underset{X与Y独立}{\overset{唯一确定}{\rightleftarrows}}$ 两个一维分布 （离散型同理）

**例如：总体** $X\sim N(\mu,\sigma^2)$**，独立的抽取*n*个值（9.3,6.9,7.2....8.1）**

$(X_1,\ X_2\ \cdots\ X_n)$ **的分布？**

$X,Y$独立同分布，$X$，$Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$f\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

**本章的主要目的：总体**$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$**，独立的抽取*n*个（9.3,6.9,....8.1）**

$\left(X_1,\ X_2\ \cdots\ X_n\right)$ $X_i$与总体同分布，

$$\boxed{f\left(x_1,x_2\cdots x_n\right)=f_{X_1}\left(x_1\right)f_{X_2}\left(x_2\right)\cdots f_{X_n}\left(x_n\right)=f_X\left(x_1\right)f_X\left(x_2\right)\cdots f_X\left(x_n\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$