三. 二维连续型随机变量及其分布

1.联合分布密度

2.边际分布密度

3.条件分布密度

4.常用的二维连续型分布

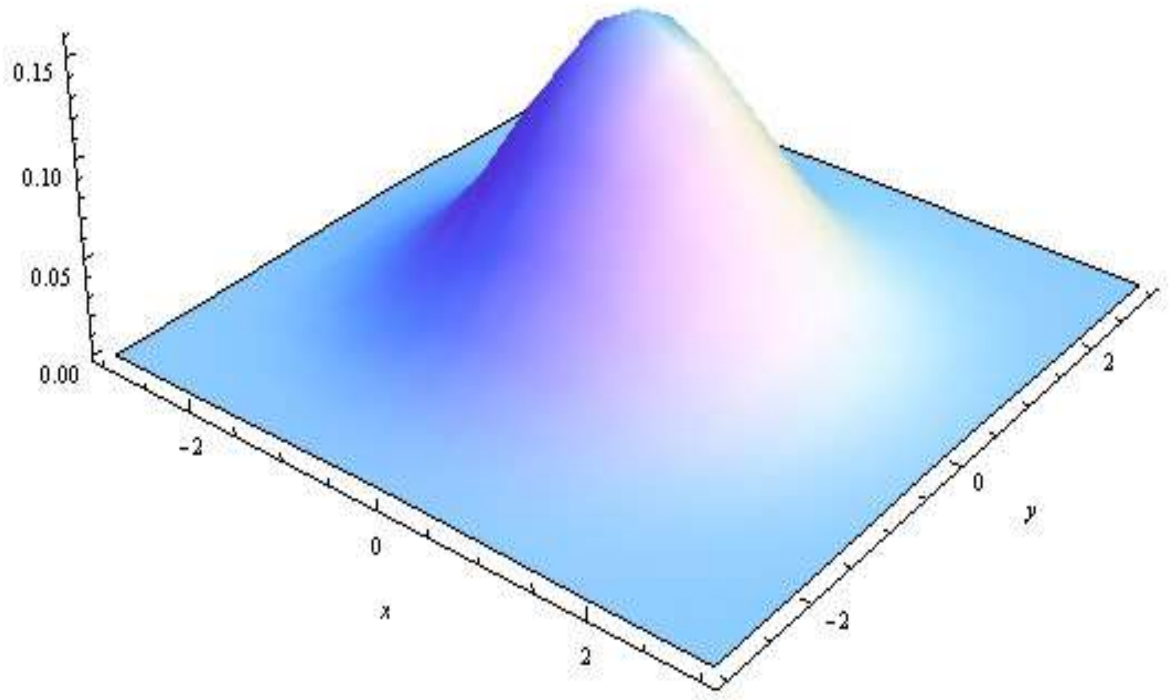
1.联合分布密度

定义：设 **(*X*,*Y*)** 为二维随机变量，

***F*(*x*,*y*)** 是它的分布函数，

若存在非负函数 ***f*(*x*,*y*)**

使得对任意的 $x, y \in R$ 有



$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$

则称 **(*X*,*Y*)** 为二维连续性随机变量，***f*(*x*,*y*)** 为 **(*X*,*Y*)**的联合分布密度。

性质：(i)非负性：$f(x,y)\geq 0(x,y\in R)$

(ii)归一性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$\Leftrightarrow f(x,y)$是联合密度函数

(iii)$F(x,y)$是二元连续函数

(iv)在$f(x,y)$的连续点处有：$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

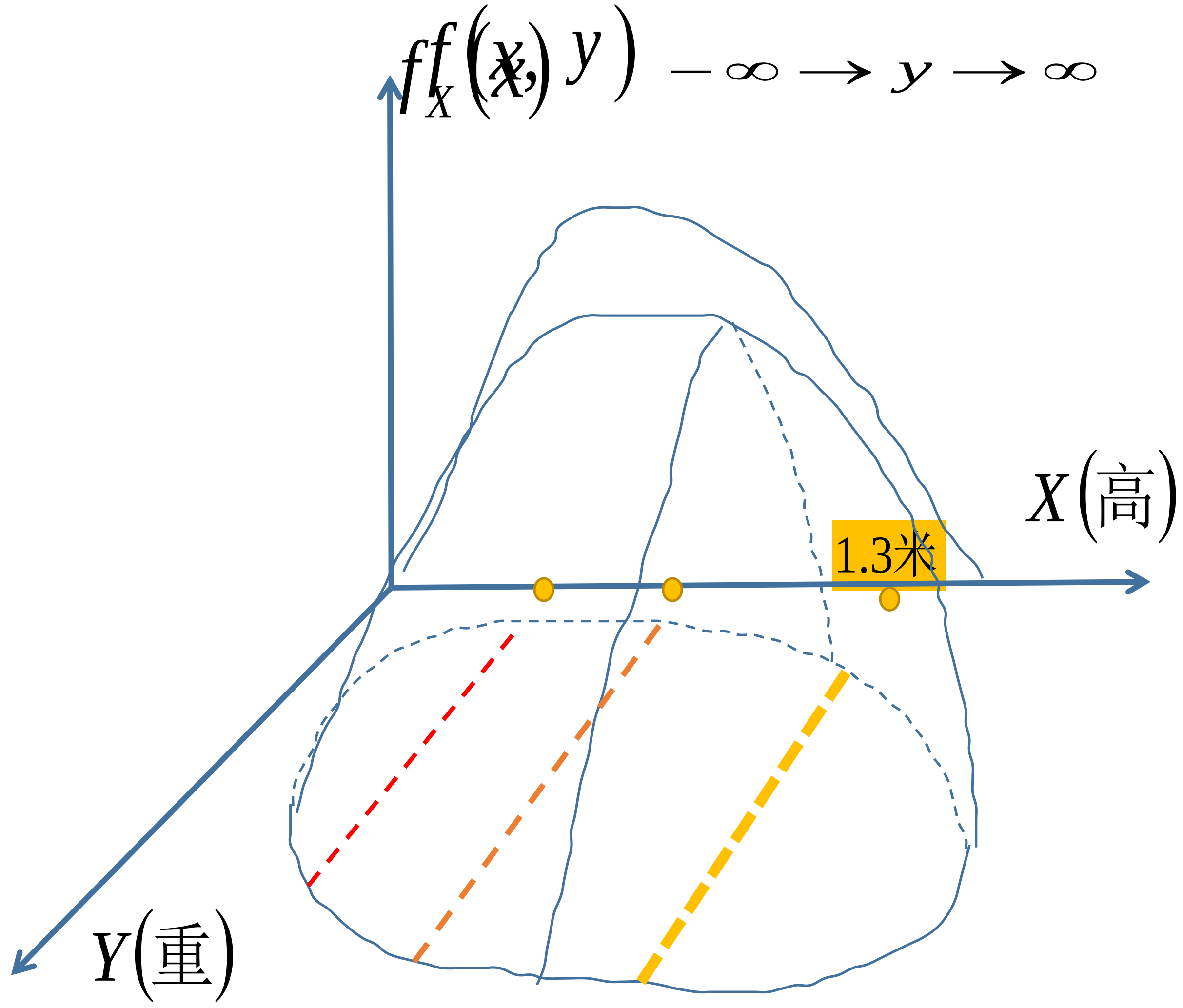
(v)$P(x_1<X\leq x_2,y_1<Y\leq y_2)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dydx$

概率微分：$P(x<X\leq x+\Delta x,y<Y\leq y+\Delta y)$

$$=\int_{x}^{x+\Delta x}\int_{y}^{y+\Delta y} f(u,v)dvdu\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$$

二维连续型随机变量在一点和一条线上的概率均为0

猜边际密度： $f_X(x)$



$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$i=1,2,3\cdots$$

$Y \backslash X$	x_{1}(红)	x_{2}(兰)	x_{3}(黄)	
y_{1}(长)	$15/100$	$10/100$	$12/100$	
y_{2}(短)	$20/100$	$18/100$	$25/100$	
	$35/100$	$28/100$	$37/100$	1

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$$

2.边际分布密度 $\left\{求 f_X(x)\right\}$

$\left(已知 f(x,y), 且知道 F(x,y) 与 f(x,y) 及 F_X(x) 的关系\right)$

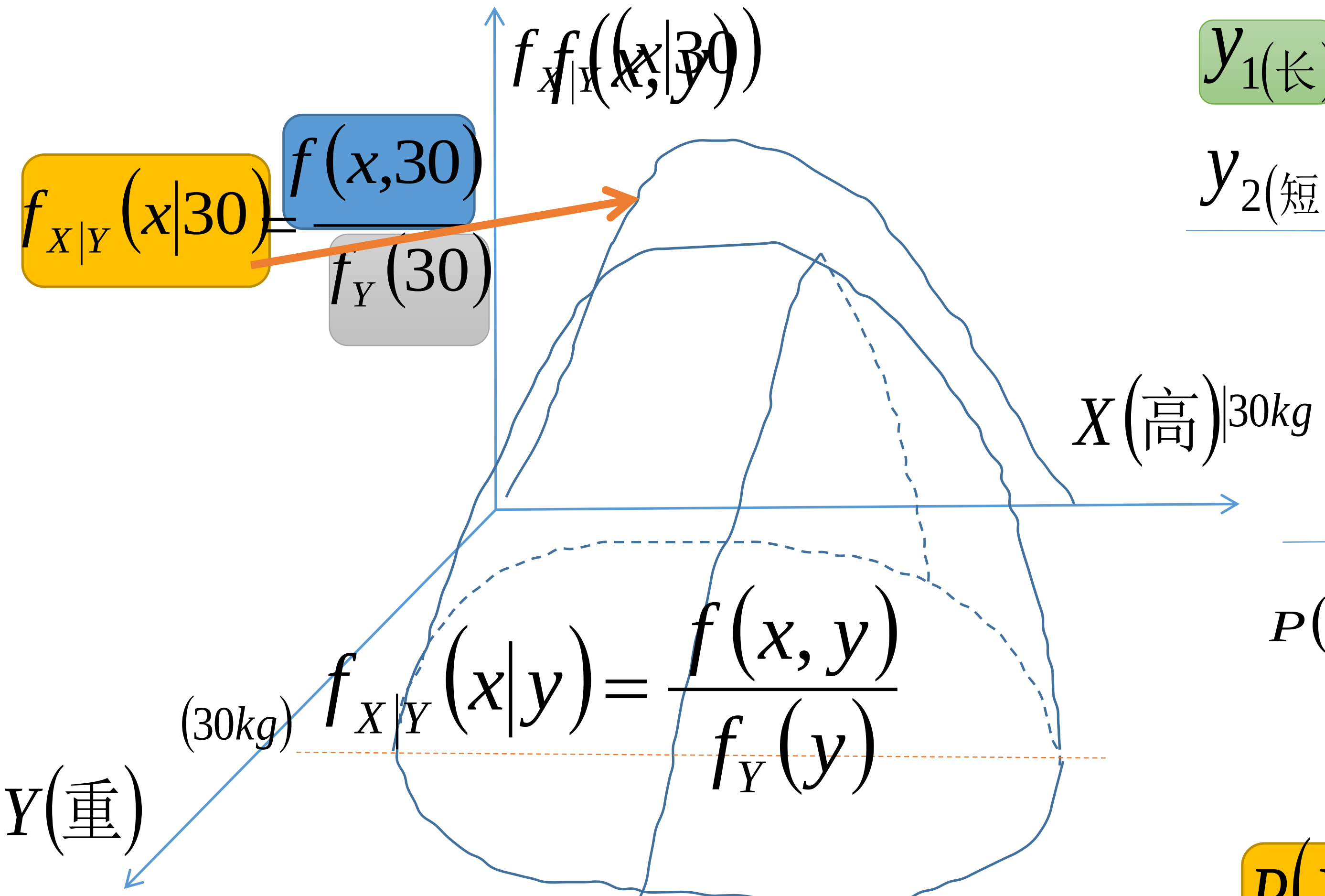
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dydx$$

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dydu=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dy\right)du$$

$$f_X(x)=F_X{}'(x)=\left\{\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dy\right)du\right\}'=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$\boxed{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}$ 同理 $\boxed{f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}$

猜条件密度：$f_{X|Y}(x|y)$



$$f_{X|Y}(x|30)=\frac{f(x,30)}{f_Y(30)}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

30*kg*体重上的身高的分布密度

Y \ X	$x_{1(红)}$	$x_{2(兰)}$	$x_{3(黄)}$	
$y_{1(长)}$	0.15	0.1	0.12	0.37
$y_{2(短)}$	0.2	0.18	0.25	0.63
	0.35	0.28	0.37	1

X	x_1	x_2	x_3
$P(X=x_i\|Y=y_1)$	$\frac{0.15}{0.37}$	$\frac{0.1}{0.37}$	$\frac{0.12}{0.37}$

$$P(X=x_i|Y=y_1)=\frac{P(X=x_i,Y=y_1)}{P(Y=y_1)}$$

3.条件分布密度 $\left(求 f_{X|Y}(x|y)\right)$

(已知 $f(x,y)$，且知道 $F(x,y)$ 与 $f(x,y)$ 及 $F_{X|Y}(x)$ 的关系)

$$F_{X|Y}(x|y)=\frac{P(X\le x, Y=y)}{P(Y=y)}\approx\frac{\int_y^{y+\Delta y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv}{\int_y^{y+\Delta y} f_Y(v)dv}\approx\frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\Delta y dx}{f_Y(y)\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\Delta y dx}{f_Y(y)\Delta y}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

$$f_{X|Y}(x|y)=F_{X|Y}'(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

同理：$\boxed{f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}}$

$$\boxed{f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)}$$

例1. 设 二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为: $\left(\text{其中} A>0\right)$

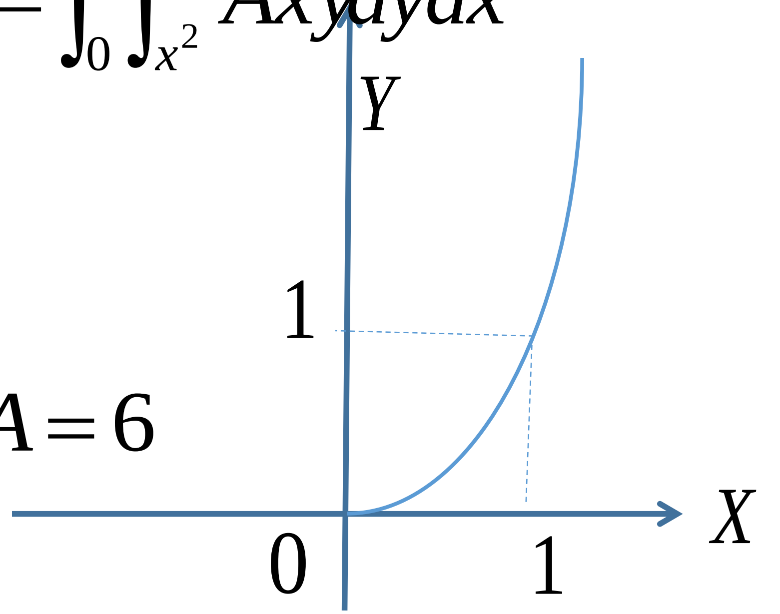
$$f(x,y)=\begin{cases} Axy, & 0<x<1, x^2<y<1; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

试求:(1) A; (2) $f_X(x), f_Y(y)$; (3) $f_{Y|X}(y|x)$; (4) $P(X>Y)$

解: (1) $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_{x^2}^1 f(x,y)dydx=\int_0^1\int_{x^2}^1 Axydydx$

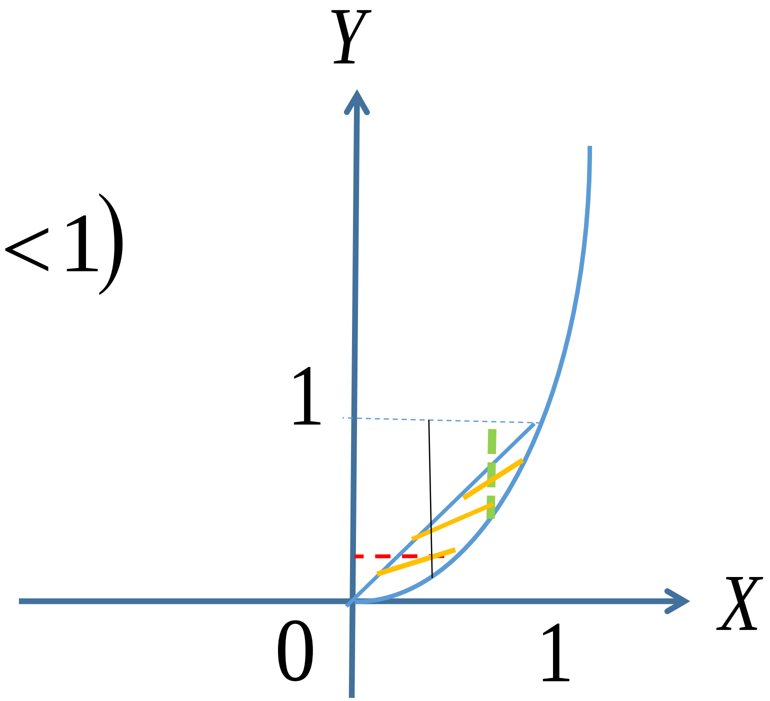
$$=\int_0^1 Ax\frac{1}{2}\left(1-x^4\right)dx=A\int_0^1\frac{1}{2}\left(x-x^5\right)dx$$

$$=A\int_0^1\frac{1}{2}\left(x-x^5\right)dx=A\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)=A\frac{1}{6};\quad A=6$$



$$(2)\ f_X(x)=\int_{x^2}^{1}6xydy=3x\left(1-x^4\right);(0<x<1)$$

$$f_Y(y)=\int_0^{\sqrt{y}}6xydx=3y(y-0)=3y^2;\ (0<y<1)$$



$$(3)\ f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{6xy}{3x\left(1-x^4\right)}=\frac{2y}{1-x^4}$$

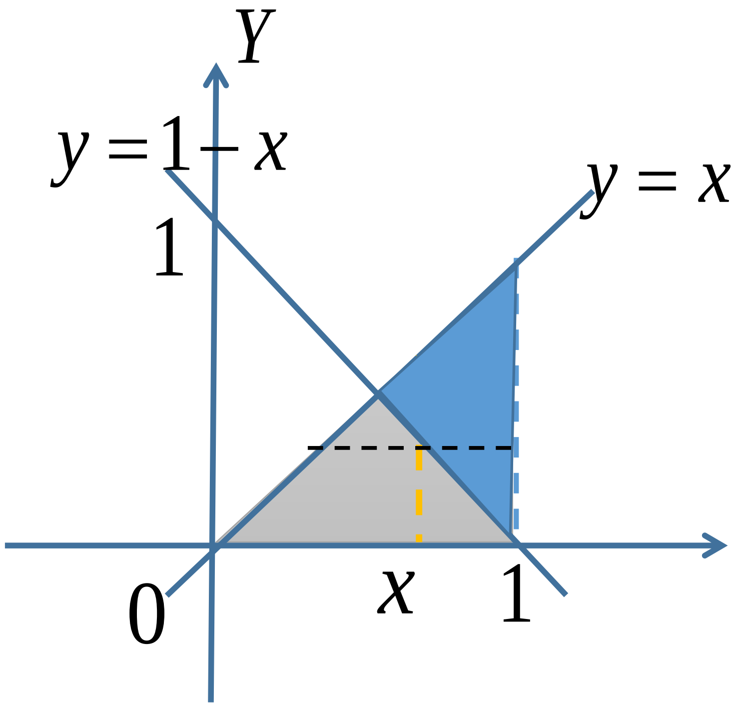
$$x^2<y<1;(0<x<1)$$

$$(4)\ P(X>Y)=\int_0^1\int_{x^2}^{x}6xydydx=\int_0^1 3x\left(x^2-x^4\right)dx$$

$$=\int_0^1 3x^3-3x^5dx=\frac{3}{4}-\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

例2. $X\sim U(0,1)$ 在 **X=x** 的条件下 $Y\sim U(0,\ x)$，

求 (1) $f_Y(y)$; (2) $P(X+Y>1)$。



解: (1) $X\sim U(0,1)$, $f_X(x)=1;(0<x<1)$

在 $X=x$ 的条件下 $Y\sim U(0,\ x)$

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & 0<y<x,(0<x<1)\\ 0 & \text{其他}\end{cases};$$

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\frac{1}{x}$$

$$(0<x<1,0<y<x)$$

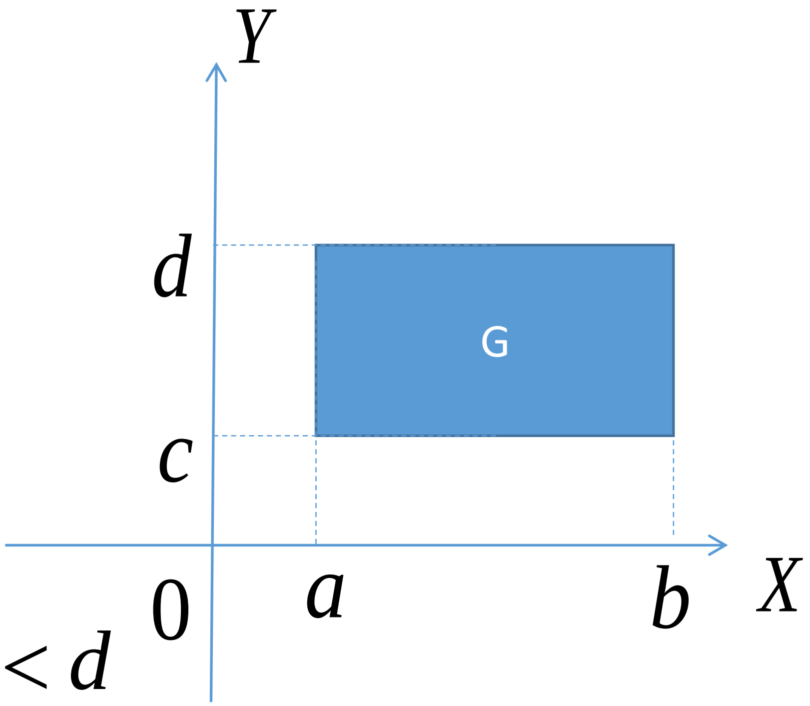
$$f_Y(y)=\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y\ (0<y<1)$$

$$(2)\ P(X+Y>1)=\int_{1/2}^1\int_{1-x}^x\frac{1}{x}dydx=\int_{1/2}^1\left(-\frac{1}{x}+2\right)dx=1-\ln 2$$

4.常用的二维连续型分布

(1) 二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{G\text{的面积}}, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$$

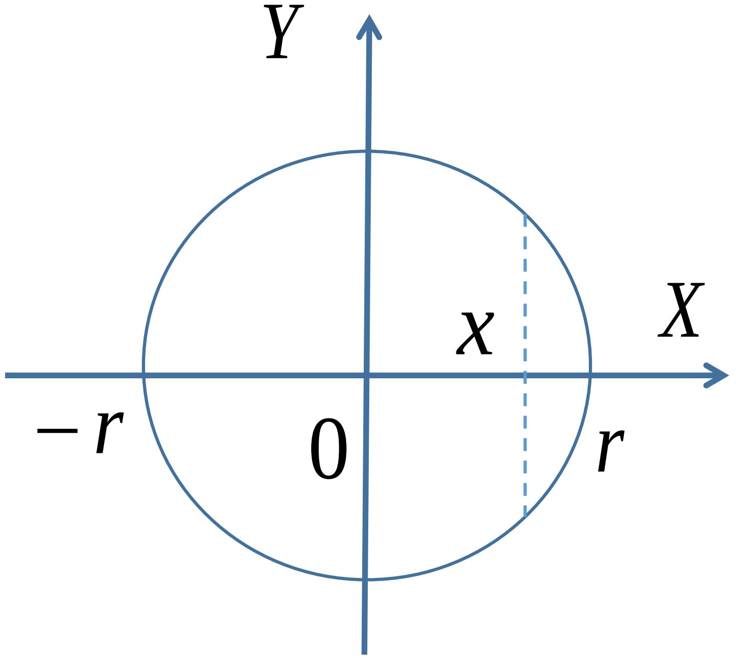


$$\text{矩形域}: f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, a<x<b c<y<d\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$$

$$\text{边际密度：} f_X(x)=\frac{1}{b-a};(a<x<b) \quad f_Y(y)=\frac{1}{d-c};(c<y<d)$$

$$\text{条件密度：} f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{d-c};(c<y<d)$$

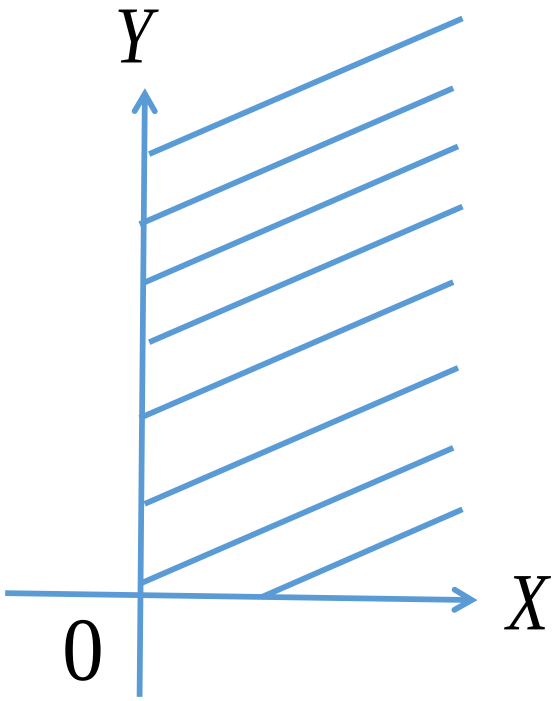
圆域：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2;\\ 0, & 其他\end{cases}$



$$f_X(x)=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2} & -r<x<r\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} & -\sqrt{r^2-x^2}<y<\sqrt{r^2-x^2}\\ & (-r<x<r)\\ 0 & 其他\end{cases}$$

(2) 二维指数分布 $(\alpha>0,\beta>0)$



$$f(x,y)=\begin{cases}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

边际密度： $f_X(x)=\int_0^{+\infty}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dy=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

同理： $f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}dx=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

条件密度： $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

同理 $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

(3) 二维正态分布：$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

边际密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad -\infty<x<+\infty$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad -\infty<y<+\infty$$

正态分布重要性质之一：

$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_{,,},\sigma_1^2,\sigma_{,2}^2,\rho\right)$，则 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_{,1}^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_{,2}^2\right)$ 且与 ρ 无关。