1、已知事件 A 与 B 独立，$P(A)=0.6, P(B)=0.4$，则 $P(A-B)=$ 0.36 。

2、设事件 A_i = {第 i 件产品为正品}, i=1,2,3，则事件 $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$ 表示"三件产品中 只有二件 为正品"。

3、已知 $X\sim b(100,p)$，当 $p=$ 1/2 时，DX 值最大。

4、设 $X\sim N(0,4)$，Y～$\chi^2(4)$，且 X 与 Y 独立，则 Z=$\frac{X}{\sqrt{Y}}$～ t(4)

5、 已知随机变量 $X\sim\pi(2)$, Y 服从参数为 2 的指数分布(记为 Y～E(2))，且 X 与 Y 独立，则 $E(X^2-XY)=$ 5 。

6、假设检验中犯第 II 类错误指的是"H_0 不真，接受 H_0"。

二、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1、已知 X 的均值 E(X)=2 和方差 D(X)=1，用契比雪夫不等式估计得 $P\{0<X<4\}\ge$（ C ）。

（A）$\frac{1}{4}$ （B）$\frac{1}{3}$ （C）$\frac{3}{4}$ （D）$\frac{1}{2}$

2、设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(1,3), Y\sim N(0,9)$，则 $X-2Y+8\sim$（ C ）。

（A）$N(1,2)$ （B）$N(9,2)$ （C）$N(9,39)$ （D）$N(1,39)$

3、设 0<P(A)<1, P(B)>0，且 P(B|A)=P(B)，则 A 与 B 之间的关系为（ C ）。

（A）互不相容 （B）互逆（对立关系）

（C）相互独立 （D）不能确定

4、设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是来自总体 X 的一组样本，$EX=\mu$，则下列 μ 的无偏估计量中，最有效的是（ B ）。

（A）$\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ （B）$\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$

（C）$\frac{X_1+X_2}{3}+\frac{X_3+X_4}{6}$ （D）$\frac{X_3+X_4}{2}$

5、设 $X\sim N(0,1)$，则 $P\{u_{0.95}\le X\le u_{0.01}\}=$（ D ）。

（A）0.99 （B）0.96 （C）0.95 （D）0.94

四、计算解答题（本大题共 4 小题，共计 28 分）

1、（5 分）有朋友自远方来访，他乘火车、汽车、轮船、飞机来的概率分别为 0.3、0.2、0.1、0.4。如果他乘火车、汽车、轮船来的话，迟到的概率分别为 $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{12}$，而乘飞机则不会迟到，问这位朋友迟到的概率有多少？

$A=\{$朋友迟到$\}$ $B_1=\{$乘火车$\}$. $B_2=\{$乘汽车$\}$. $B_3=\{$乘轮船$\}$. $B_4=\{$乘飞机$\}$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)$$
$$=0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times 0$$
$$=\frac{3}{40}+\frac{2}{30}+\frac{1}{120}=\frac{3}{20}$$

2、（6 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且都服从参数 $p=1/3$ 的"0-1"分布，求 $\max(X,Y)$ 的分布律

$X,Y\sim b(1,\frac{1}{3})$, $Z=XY$.

Z的可能取值为0，1.

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$
$$P(Z=1)=1-P(Z=0)=\frac{5}{9}$$

Z	0	1
概	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

另: $P(Z=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+(\frac{1}{3})^2=\frac{5}{9}$$

3、（10 分）已知连续型随机变量 X 的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(1) $a\in(0,1)$

$$\int_0^a 2x\,dx=\int_a^1 2x\,dx$$

求 a；（2）求 $Y=1+\frac{1}{2}X$ 的概率密度 $f_Y(y)$。 $y\in(1,\frac{3}{2})$

4、（7分）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{\theta^3}x(\theta-x), & 0<x<\theta \\ 0\ , & 其它\end{cases}$，

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自总体 X 的样本，试求θ的矩估计量$\hat{\theta}$，并判断$\hat{\theta}$是否为无偏估计量？

$E(X) = \int_0^\theta x \frac{6}{\theta^3} x(\theta - x)\,dx = \int_0^\theta \frac{6}{\theta^2}x^2 - \frac{6}{\theta^3}x^3\,dx$

$= \left(\frac{2}{\theta^2}x^3 - \frac{3}{2\theta^3}x^4\right)\Big|_0^\theta = 2\theta - \frac{3}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta$　令 $\bar{X}_n = EX$

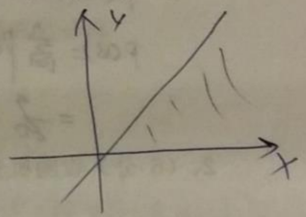
$\hat{\theta}_{矩} = 2\bar{X}_n$

$E(\hat{\theta}) = 2E(\bar{X}_n) = 2EX = \frac{1}{2}\theta \times 2 = \theta$　无偏估计量.

五、（10分）设随机变量(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=e^{-x},(0<y<x)$，求：

1）边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$，并判定 X 与 Y 是否独立；

2）$P(Y>2\mid X=3)$



① $f_X(x) = \int_0^x e^{-x}\,dy = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_y^{+\infty} = \begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & y<0 \end{cases}$

$f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$　X与Y不独立

② $P(Y>2\mid X=3) = \dfrac{P(X=3,\ Y>2)}{P(X=3)} = 1-\dfrac{P(X=3,\ Y\le 2)}{P(X=3)} = 1-\int_0^2 \dfrac{f(3,y)}{f_X(3)}\,dy$

$= 1-\int_0^2 \dfrac{e^{-3}}{3e^{-3}}\,dy = 1-\frac{1}{3}\times 2 = \frac{1}{3}$

六、（12 分）某工厂生产的某种型号的电池，其使用寿命 X(千小时) ~ $N(\mu, 4)$，生产过程中工厂随时对产品进行监测，现从中抽取容量为 25 的样本，算得样本均数 $\bar{x} = 21.5$，样本方差 $s^2 = 5.5$。（1）试确定产品均值 μ 的置信水平为 95%的置信区间；（2）试推断产品寿命的方差较以往是否有显著性差异？（ $\alpha = 0.05$ ）

① μ: $\bar{X}_n \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} = 21.5 \pm 1.96 \times 2/\sqrt{25} = 21.5 \pm 1.96 \times \frac{2}{5}$

$\mu \in [20.716 \quad 22.284]$

② $H_0: \sigma^2 = 4$

$H_1: \sigma^2 \neq 4$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{24 \times 5.5}{4} = 33$

~~拒绝域~~：$(\chi^2_{0.975}(24) \quad \chi^2_{0.025}(24)) = (12.401 \quad , 39.364)$

接受 H_0 σ^2 不显著差异

七、（5 分）已知总体 $X \sim N(0,1)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的样本容量为 n 的样本，$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 及 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 分别为样本均值和样本方差，且

$T = n\bar{X}^2 + S^2$，

证明：$D(T) = \frac{2n}{n-1}$。

$D(T) = D(n\bar{X}^2 + S^2) - n^2 D(\bar{X}^2) + D(S^2)$

$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ $\quad D(\chi^2) = 2(n-1)$ $\quad D(\chi^2) - D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$

$= \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} D(S^2) = 2(n-1)$

$\sigma^2 = D(X) = 1$ $\quad D(S^2) = \frac{2}{n-1}$

~~$D(\bar{X}^2) =$~~ $\quad \bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$ $\quad \frac{\bar{X} - 0}{\sqrt{1/n}} = \sqrt{n}\bar{X} \sim N(0,1)$

$D(n\bar{X}^2) = 2.$ $\quad n\bar{X}^2 \sim \chi^2(1)$

$D(T) = D(n\bar{X}^2 + S^2) = D(n\bar{X}^2) + D(S^2) = 2 + \frac{2}{n-1} = \frac{2n}{n-1}.$

一、（8 分）设两两独立的三个事件 A,B,C 满足 $ABC=\phi$，$P(A)=P(B)=P(C)<1/2$，且 $P(A\cup B\cup C)=9/16$，求 $P(A)$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{9}{16}$

设 $P(A)=x$　A、B、C两两独立．$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$

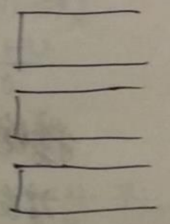
$3x-3x^2+0=\frac{9}{16}$　$x^2-x+\frac{3}{16}=0$　$x=\frac{1}{4}$ 或 $x=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$（舍）

$P(A)=x=\frac{1}{4}$

二、（8 分）一个人将 6 根绳子紧握在手中，仅露出绳子的头和尾。然后请另一个人将 6 个头两两相接，6 个尾两两相接。求放开手后，6 根绳子恰巧连成一个环的概率。

另一头任意接　$\frac{C_6^1C_4^1C_4^1C_2^1}{C_6^1C_5^1C_4^1C_3^1C_2^1}=\frac{6\times4\times4\times2}{6\times5\times4\times3\times1}$

$=\frac{8}{15}$



三、（8 分）某工厂的车床、钻床、磨床、刨床台数之比为 9:3:2:1，它们在一段时间内需要修理的概率之比为 1:2:3:1，当有一台机床需要修理时，求这台机床是车床的概率。

假设分为车床、钻床、磨床、刨床各为 A_1 A_2 A_3 A_4

$B=$（机床需维修）．　$P(A_1)=\frac{9}{15}$　$P(A_2)=\frac{3}{15}$　$P(A_3)=\frac{2}{15}$　$P(A_4)=\frac{1}{15}$

$P(B|A_1)=\frac{1}{7}$　$P(B|A_2)=\frac{2}{7}$　$P(B|A_3)=\frac{3}{7}$　$P(B|A_4)=\frac{1}{7}$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{9}{15}\times\frac{1}{7}}{\frac{9}{15}\times\frac{1}{7}+\frac{3}{15}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{15}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{15}\times\frac{1}{7}}$$

$=\frac{9}{22}$

四、（8 分）设随机变量 $X\sim N(b,b)$，且 $Y=aX+b\sim N(0,1)$，求 a,b

$E(aX+b)=aEX+b=ab+b=0$

$D(aX+b)=a^2D(X)=a^2b=1$

得 $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$

五．（12 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1/2 & -1<x<0\\ 1/4 & 0\le x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，令

$Y=X^2$，$F(x,y)$ 为 X,Y 的分布函数，求 1）Y 的概率密度；2）~~$F(-1/2,4)$~~ $F(2,4)$

$-1<X<2$　$y=x^2$　y取值：$(0,4)$.　$0<y<1$　$|x|<1$

当 $-1<x<1$　$0<y<1$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=\cancel{P[(\frac{1}{2}<y)\cup(\frac{1}{4}<y)]}=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{\sqrt{y}}{2}+\frac{\sqrt{y}}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{y}$

当 $1<x<2$时　$1<y<4$时

$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(1<X^2\le y)=\cancel{P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})}=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{1}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{4}dx$

$=P(1<X^2<\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(1)$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=\cancel{\frac{f_Y(\sqrt{y})}{2}+\frac{f_Y(\sqrt{y})}{4}}=$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}} & 0<y\le 1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}} & 1<y\le 4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$F(2,4)=P(X\le 2,\ X^2\le 4)$

$=P(X\le 2,\ -2\le X^2\le 2)=P(-2\le X\le 2)=F_X(2)-F_X(-2)=1$

六．（10 分）把数字 1~n 任意排成一列，如果数字 k 恰好出现在第 k 个位置上，则称有一个匹配，求匹配数的数学期望。

$X_i=\begin{cases}0 & \text{第}i\text{位不匹配}\\ 1 & \text{第}i\text{位匹配}\end{cases}$

$\sum X_i$ 为匹配总数

$E(\sum X_i)=\sum_{i=1}^{n}EX_i=nEX_i=1$

$EX_i=P(X_i=1)=\frac{1}{n}$

七．（10 分）设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 中任意两个的相关系数均为 ρ，试证：$\rho\ge-\frac{1}{n-1}$

$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{cov}(X_i,X_j)$

(1 2) (1,3) … (1 n)

(2,3) … (2 n)

…

(n-1,n)

$=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\rho_{X_iX_j}\sqrt{D(X_i)}\sqrt{D(X_j)}$

$(a-b)^2\ge 0$

$a^2+b^2-2ab\ge 0$

$2ab\le a^2+b^2$

$\le\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+\rho\sum_{1\le i<j\le n}(D(X_i)+D(X_j))$

$=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+\rho\sum_{i=1}^{n}D(X_i)(n-1)$

$n\ \ .D(n-1)$

有 $\rho\ge-\frac{1}{n-1}$

$= 2y^2 - \frac{8}{3}y^3 \big|_0^1 = \frac{2}{3}$

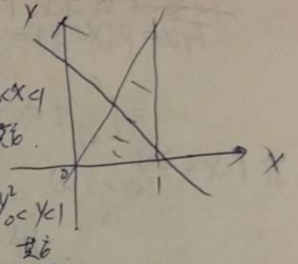
八. （12 分）已知随机变量 (X,Y) 的联合密度为

2) $P(X+Y<1) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_y^{1-y} 8xy\,dx\,dy = \frac{1}{6}$

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & 0<x<1, 0<y<x \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

求：1）边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 的是否相关；

2）$P(X+Y<1)$；



1. $f_X(x) = \int_0^x 8xy\,dy = 4x \cdot y^2 \big|_0^x = \begin{cases} 4x^3 & 0<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_y^1 8xy\,dx = 4x^2y \big|_y^1 = \begin{cases} 4y - 4y^3 & 0<y<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ X与Y不独立，则X与Y相关

又. $cov(x,y) = EXY - EXEY = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{8}{15} \neq 0$ X与Y相关

$EXY = \int_0^1 \int_y^1 8x^2y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{8}{3} y^2(1-y^3)\,dy = \frac{8}{9}y^3 - \frac{2}{3}y^4 \big|_0^1 = \frac{4}{9}$

$EX = \int_0^1 \int_y^1 8x^2y\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{8}{3}(1-y^3)y\,dy = \frac{4}{3}y^2 - \frac{2}{3}y^4 \big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$EY = \int_0^1 \int_y^1 8xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 4(1-y^2)y^2\,dy = \frac{4}{3}y^3 - \frac{4}{5}y^5 \big|_0^1 = \frac{8}{15}$

九.（14 分）（10 分）某产品指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今抽取一个容量为 26 的样本，

计算的样本均值为 1637，样本标准差为 120，

1）若 $\sigma^2=100$，求置信度为 95%的 μ 置信区间的的长度。

2）问在 5%的显著水平下，是否可以认为这批产品的期望值不大于 1600。

① $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ μ 置信区间：$\bar{X}_n \pm z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$

$= 1637 \pm 1.96\, {100}/{\sqrt{26}}$

长度：$2 z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} = 2 \times 1.96 \frac{100}{\sqrt{26}}$

2). $H_0: \mu \leq 1600$

$H_1: \mu > 1600$

$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1637-1600}{100/\sqrt{26}} = 1.88 < 1.96$

七、（10 分）设一袋子中装有黑、白两种球若干，其比例为 θ，θ 为未知参数。现有放回地摸出 n 次球，其中摸出黑球的次数为 Y 次。试证明：$\dfrac{Y}{n-Y}$ 为 θ 的极大似然估计量。

$X \sim B(1, \frac{\theta}{\theta+1})$ X: 黑球个数 $P(X=1) = P(摸黑) = \frac{\theta}{\theta+1}$

$P(X=0) = P(摸白) = \frac{1}{\theta+1}$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{x_i} \left(\frac{1}{\theta+1}\right)^{1-x_i} = \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{\sum x_i} \left(\frac{1}{\theta+1}\right)^{n-\sum x_i}$$

$$\ln L(\theta) = \sum x_i \left[\ln\theta - \ln(\theta+1)\right] - (n-\sum x_i)\ln(\theta+1)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{\sum x_i}{\theta+1} - \frac{n-\sum x_i}{\theta+1} \quad 令 \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0.$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n-\sum x_i}$$ 而 $\sum x_i$ 为摸黑球的次数.

$$\hat{\theta} = \frac{Y}{n-Y}.$$

一．（8分）设 A,B 是两独立的事件，$P(A)+P(B)=1$，证明：$P(A\cup B)\ge 3/4$

$P(A)+P(B)=1$ $\quad P(A)\cdot P(B)\le\left(\frac{P(A)+P(B)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$

$=P(A)+1-P(A)-P(A)(1-P(A))$ $\cancel{\ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}}$ $=P^2(A)-P(A)+1=\left(P(A)-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$

二．（8分）设每次设计的命中率为 0.2，则至少必须进行多少次独立射击才能是至少击中一次的概率达到 0.9

$\cancel{X\sim B(1,0.2)}$ $\quad Y\sim B(n,0.2)\quad P(Y\ge 1)\ge 0.9$

$P(Y\ge 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-C_n^0\,0.2^0\,0.8^n\ge 0.9$

$n\ge 10.32\quad n=11.$

三．（8分）有 a,b,c 三个盒子，a 盒中有 1 个白球 2 个红球，b 盒中有 2 个白球 1 个红球，c 盒中有 3 个白球 3 个红球。今掷一颗骰子已决定选盒，出现 1、2、3 点则选 a，出现 4 点则选 b，出现 5、6 点则选 c。在选出的盒中任选一球若取出的是白球，求此球来自 a 盒的概率

$A_i=$（取出球来自 i 盒）$i=1,2,3$（a、b、c） $\quad B=$（所取为白球）

$P(A_1)=\frac{3}{6}\quad P(A_2)=\frac{1}{6}\quad P(A_3)=\frac{2}{6}$

$P(B|A_1)=\frac{1}{3}\quad P(B|A_2)=\frac{2}{3}\quad P(B|A_3)=\frac{1}{2}$

$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$

$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}}{4/9}=\frac{3}{8}$

四．（8分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & 其它\end{cases}$，

求：1）A；2）分布函数 $F(x)$；3）$P(0.5<X<1.5)$

① $1=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 Ax\,dx+\int_1^2 (2-x)\,dx=\frac{A}{2}x^2\Big|_0^1+2x\Big|_1^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^2\Rightarrow A=1$

② $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}+2x-\frac{1}{2}x^2-2+\frac{1}{2} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

五.（12 分）设随机变量 $X\sim e(1)$，证明 $Y=\Phi^{-1}(1-e^{-X})\sim N(0,1)$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\Phi^{-1}(1-e^{-X})\le y)=P(1-e^{-X}\le\Phi(y))$

$=P(e^{-X}\ge 1-\Phi(y))=P(-X\ge\ln(1-\Phi(y)))=P(X\le-\ln(1-\Phi(y)))$

$=P(X\le-\ln(1-\Phi(y)))=F_X(-\ln(1-\Phi(y)))=1-e^{\ln(1-\Phi(y))}$

$=\Phi(y)$　　$Y\sim N(0,1)$.　对的！

六.（10 分）设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim N(0,1),Y\sim N(1,1)$，则 $P(X>Y)$

$X-Y\sim N(-1,2)$　　$P(X>Y)=P(X-Y>0)=1-P(X-Y\le 0)$

$=1-\Phi\left(\frac{0+1}{\sqrt2}\right)=1-\Phi\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$

七.（12 分）设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	1	2	3			
1	$\frac{1}{15}$	p	$\frac{1}{5}$	0	−3	−8
2	q	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	3	0	−5

③

X^2-Y^2	−8	−5	−3	0	3
	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$

若随机变量 X 与 Y 相互独立，试求：（1）p 及 q 的值；　（2）P{X+Y<3}；

(3) 求 $Z=X^2-Y^2$ 的分布律。

① $\frac{1}{15}+p+\frac{1}{5}+q+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=1$

$(p+\frac{1}{5})\times(q+\frac{1}{5}+\frac{3}{10})=\frac{1}{2}$　　$p=\frac{2}{15}$　$q=\frac{1}{10}$

② $P(X+Y<3)=P(X=1\ Y=1)=\frac{1}{15}$

X^2 \ Y^2	1	4	9
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

③

Z	0	3	−3	−8	−5
	$\frac{1}{15}+\frac{2}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{10}$

八.（10 分）设随机变量 X,Y,Z 满足，$EX=EY=1, EZ=-1, DX=DY=DZ=4$，

$\rho_{XY}=0, \rho_{XZ}=1/2, \rho_{YZ}=-1/2$，求 $E(X+Y+Z), D(X+Y+Z)$

$E(X+Y+Z)=EX+EY+EZ=1+1-1=1$

$D(X+Y+Z)=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\operatorname{cov}(X,Y)+2\operatorname{cov}(X,Z)+2\operatorname{cov}(Y,Z)$

$=12+2\rho_{XY}\times 2\times 2+2\rho_{XZ}\times 2\times 2+2\rho_{YZ}\times 2\times 2$

$=12+2\times 0\times 4+2\times\frac{1}{2}\times 4-2\times\frac{1}{2}\times 4=12$.

九.（14 分）设某支股票的价格服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今有一股民想购买此种股票，他对该股票过去16天的价格做了统计，得出样本均值为18元/每股，样本方差为3.77^2。当显著性水平 $\alpha=0.05$ 时，1) 试问：该股民是否有理由认为该股票的每股平均价格低于 20 元？（$\alpha=0.05$）

2) 求每股平均价格的置信度为 95%的置信区间。

① $H_0: \mu=20$.

$H_1: \mu<20$

~~$t=\frac{|\bar{X}_n-\mu_0|}{S/\sqrt{n}}=\frac{|18-20|}{3.77/\sqrt{16}}=2.1\ 2.764$ 接受 H_0.~~

$t=\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{18-20}{3.77/\sqrt{16}}=-2.1<-1.753\quad -t_{0.05}(15)=-1.753$.

拒绝 H_0. 可以认为低于20元.

② μ: $\bar{X}_n\pm t_{\alpha/2}(15)\,S/\sqrt{n}=18\pm 2.131\ \frac{3.77}{4}$.

十.（10 分）设 $X_1,X_2\cdots X_n$ 是来自总体 $X\sim U(0,\theta)$ 的简单随机样本，其中参数 θ 为未知参数。求参数 θ 的极大似然估计量，并判定其是否是无偏估计量。

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}=\theta^{-n}\qquad \frac{dL(\theta)}{d\theta}=-n\frac{1}{\theta^{n+1}}$

$L(\theta)$ 越大 θ 越小 但 $0<X_1\cdots X_n<\theta$

$0<X_{(1)}<X_{(2)}\cdots<X_{(n)}<\theta\qquad \hat{\theta}=\max(X_1\cdots X_n)=X_{(n)}$

$E(\hat{\theta})=E\max(X_1\cdots X_n))=EZ\qquad Z=\max(X_1\cdots X_n)$

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X_1\le z\cdots X_n\le z)=P^n(X\le z)=(\frac{z}{\theta})^n$

一.（8 分）设 $P(A|H) \ge P(B|H)$，$P(A|\overline{H}) \ge P(B|\overline{H})$，试证明：$P(A) \ge P(B)$

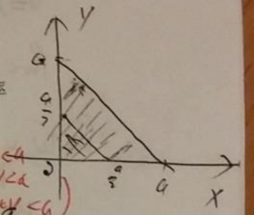
$P(A)=P(A|H)\cdot P(H)+P(A|\overline{H})\cdot P(\overline{H})$　　$(P(A)=P(AH)+P(A\overline{H}))$

$P(B)=P(B|H)P(H)+P(B|\overline{H})P(\overline{H})$

$P(A|H)\ge P(B|H)$

$P(A|\overline{H})\ge P(B|\overline{H})$　　故有 $P(A)\ge P(B)$

二.（8 分）将线段 $[0,a]$ 任意折成三折，试求这三折线段能构成三角形的概率



分别用 x y $a-x-y$ 表示三角形三边长度

则 $0<x<a$　$0<y<a$　$0<x+y<a$　（样本空间 Ω：$\begin{cases}0<x<a\\0<y<a\\0<x+y<a\end{cases}$）

构成三角形的条件 $\begin{cases}0<a-x-y<x+y\\0<x<a-x\\0<y<a-y\end{cases}$　整理得 $\begin{cases}0<x<\frac{a}{2}\\0<y<\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}<x+y<a\end{cases}$ 三角形区域

$S_\Omega=\frac{a^2}{2}$　$S_A=\frac{a^2}{8}$　$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a^2}{2}}=\frac{1}{4}$

三.（8 分）某种动物从出生活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.4，若已知这种动物现年为 20 岁，求能活到 25 岁的概率。

$P(X>20)=0.8$　　$P(X>25)=0.4$

$P(X>25|X>20)=\frac{P[(X>20)\cap(X>25)]}{P(X>20)}=\frac{P(X>25)}{P(X>20)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$

四.（8 分）$X_1,X_2\cdots X_n$ 为相互独立的连续型随机变量，且 X_i 的分布函数为 $F_i(x_i), i=1,2,\ldots,n$. 试证明：随机变量 $Y=-2\sum_{i=1}^{n}\ln F_i(X_i)$ 服从自由度为 $2n$ 的 χ^2 分布。

令 $Y_i=-2\ln F_i(X_i)$　　$F_{Y_i}(y)=P(Y_i\le y)=P(-2\ln F_i(X_i)\le y)$

$Y_i\sim\chi^2(2)$　$(Y_i\sim e(\frac{1}{2}))$　　$=P(\ln F_i(X_i)\ge-\frac{y}{2})$

$\sum_{i=1}^{n}Y_i=-2\sum_{i=1}^{n}\ln F_i(X_i)$　　$=P(F_i(X_i)\ge e^{-\frac{y}{2}})$

$\sim\chi^2(2n)$　　$=P(X_i\ge F_i^{-1}(e^{-\frac{y}{2}}))$

$=1-P(X_i\le F_i^{-1}(e^{-\frac{y}{2}}))$

五.（12分）设随机变量$(X,Y)\sim N(1,1,4,4,1/2)$, $W=X+Y$, $V=X-2Y$，

求(W,V)的联合分布，并判定独立性。

$W=X+Y \quad EW=EX+EY=2 \quad D(W)=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=4+4+2\times2\times2\times\frac{1}{2}=12$

$V=X-2Y \quad EV=EX-2EY=1-2=-1 \quad D(V)=D(X)+4D(Y)-4\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=4+4\times4-4\times\frac{1}{2}\times2\times2=12$

$\rho_{W\cdot V}=\frac{\mathrm{cov}(W,V)}{\sqrt{DW}\sqrt{DV}}=\frac{\mathrm{cov}(X+Y,X-2Y)}{\sqrt{12}\sqrt{12}}=\frac{1}{12}(\mathrm{cov}(X,X)-2\mathrm{cov}(Y,Y)-\mathrm{cov}(X,Y))$

$=\frac{1}{12}(D(X)-2D(Y)-\mathrm{cov}(X,Y))=\frac{1}{12}(4-8-\frac{1}{2}\times2\times2)$

$=-\frac{1}{2}$

$(W,V)\sim N(2,-1,12,12,-\frac{1}{2})$

W与V不独立.

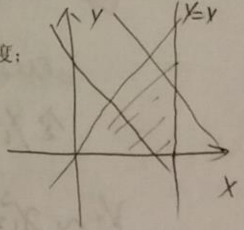
六.（10分）设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求$E(X^2+e^x)$

$EX^2=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_0^1 x^2(1-x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{2}$

$Ee^x=\int_{-1}^{0}e^x(1+x)dx+\int_0^1 e^x(1-x)dx=\int_{-1}^{0}e^x dx+\int_{-1}^{0}xe^x dx+\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 xe^x dx=e^{-1}+e^{1}$

$E(X^2+e^x)=e+e^{-1}-\frac{1}{2}$

七.（12分）设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=3x$；$0<y<x<1$



试求：（1）(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$；（2）$Z=X+Y$的概率密度；

(1) $f_X(x)=\int_0^x 3x\,dy=3xy\Big|_0^x=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_y^1 3x\,dx=\frac{3}{2}x^2\Big|_y^1=\begin{cases}\frac{3}{2}-\frac{3}{2}y^2 & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(2) $Z=X+Y. \quad 0<z<2.$

$0<z<1$时 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}3x\,dxdy=\int_0^{\frac{z}{2}}\int_y^{z-y}3x\,dxdy$

$=\frac{3}{8}z^3$

$1<z<2$时 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=1-P(X+Y>z)$

五. （12分）设随机变量 $(X,Y)\sim N(1,1,4,4,1/2)$, $W=X+Y$, $V=X-2Y$,

八. （10分）设随机变量 X,Y 相互独立， $X\sim N(0,\sigma^2)$, $Y\sim N(0,\sigma^2)$.

证明： $E[\min(X,Y)]=-\dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$

$$\min(x,y)=\begin{cases}x\\ y\end{cases}=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)=\begin{cases}x & x\le y\\ y & x>y\end{cases}$$

$$E\min(x,y)=\frac{1}{2}EX+\frac{1}{2}EY-\frac{1}{2}E|x-y|=-\frac{1}{2}E|x-y|$$

令 $Z=(X-Y)$ $\quad E|X-Y|=E|Z|$ $\quad Z\sim N(0,2\sigma^2)$

$$E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}dz=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}dz$$

$$=4\sigma^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}d\left(\frac{z^2}{4\sigma^2}\right)=\frac{-4\sigma^2}{2\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=+\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E\min(X,Y)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

九.（14分）已知某机器在正常状态下生产元件的重量服从正态分布 $N(14.30,2)$，某天为了检测机器是否正常工作，随机地从生产的元件中抽取 9 个，得样本均值为 15.82，得样本方差为 2，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 的条件下，问此机器是否正常工作.

$n=9.\quad \bar{x}=15.82\quad s^2=2$

$H_0:\ \mu=14.3$

$H_1:\ \mu\ne 14.3$

$$t=\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{15.82-14.3}{\sqrt{2}/3}\right|=3.22>$$

$H_0:\ \sigma^2=2.$

$H_1:\ \sigma^2\ne 2$

$$\chi^2=\frac{(9-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{(9-1)\times 2}{2}=8.$$

十.（10 分）. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的一组样本，且总体的密度函数为

$f(x)=\theta C\theta x^{-(\theta+1)}$, $x>C$，求 C 和 θ 的极大似然估计量

$$L(C,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta C\theta x_i^{-(\theta+1)}=\theta^{2n}C^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\theta+1)}$$

$$\ln L(C,\theta)=2n\ln\theta+n\ln C\theta-(\theta+1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$\frac{\partial\ln L(C,\theta)}{\partial\theta}=\frac{2n}{\theta}-\cancel{\theta\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)}\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)=0$$

五.（12分）甲乙两人各有赌本a元，约定谁先胜3局就赢得全部2a元赌本，假定两人在每局取胜的概率相等。现在已赌3局，结果甲是二胜一负，由于某种原因赌博终止，问如何分2a元赌本才合理。

一.（8分）设 A, B 是两独立的事件，$P(A)+P(B)=1$，证明：$P(A\cup B)\ge 3/4$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+1-P(A)-P(A)(1-P(A))$

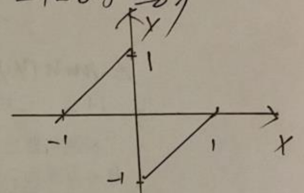
$=1-P(A)+P^2(A)=(P(A)-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$

二.（8分）设每次设计的命中率为0.2，则至少必须进行多少次独立射击才能是至少击中一次的概率达到0.9

设需n次独立射击，则n次中击中次数 $X\sim B(n,0.2)$

$P(X\ge1)=1-P(X=0)=1-C_n^0 0.2^0 0.8^{n-0}=1-0.8^n\ge0.9$

$n\ge\frac{\ln 0.1}{\ln 0.8}=11$.



三.（8分）已知随机变量 $X\sim U(-1,1)$，令 $Y=\begin{cases}X+1 & 若X<0\\ X-1 & 若X>0\end{cases}$，求 Y 的密度函数 $f_Y(y)$

当 $0<X<1$ 时 $-1<Y<0$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=\cancel{P(Y\le0)+P(0<Y\le y)=P(X-1\le y)=P(X\le y+1)-P(X\le0)}$ $=P(X-1\le y)$

$\cancel{=P(0<X-1\le y)-P(X\le0)}=P(0<X\le y+1)=P(X\le y+1)-P(X\le0)$

$=\frac{y+1+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{y+1}{2}$ $\quad f_Y(y)=\frac{1}{2}\quad -1<y<0$

当 $-1<X\le0$ 时 $0<Y<1$ $\quad F_Y(y)=P(Y\le y)=\cancel{P(X+1\le y)=P(X\le y-1)}$

$=P(Y\le0)+P(0<Y\le y)=\frac{1}{2}+P(X+1\le y)=\frac{1}{2}+P(X\le y-1)=\frac{1}{2}+\frac{y-1+1}{2}$

$=\frac{1}{2}+\frac{y}{2}$

$f_Y(y)=\frac{1}{2}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

四.（8分）设随机变量 $X\sim U(1,b)$，且方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根的概率为1/3，求 b

$\Delta=X^2-4\times1\times1=X^2-4$ $\quad P(X^2-4\ge0)=\frac{1}{3}$

$P(X^2-4\ge0)=P((X\le-2)\cup(X\ge2))=P(X\ge2)=\frac{b-2}{b-1}=\frac{1}{3}$

$b=\frac{5}{2}$

七.（8分）设A,B是两独立的事件，$P(A)+P(B)=1$，证明：$P(A\cup B)\geq 3/4$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+1-P(A)-P(A)(1-P(A))$

五.（12分）甲乙两人各有赌本 a 元，约定谁先胜 3 局就赢得全部 2a 元赌本，假定两人在美剧取胜的概率相等。现在已赌 3 局，结果甲是二胜一负，由于某种原因赌博终止，问如何分 2a 元赌本才合理。

均分对甲不合理： X: 甲获得钱先胜（赌本） Y: 乙最终得 2a 元（比赛赌本）

甲:乙 = 2:1 也不合理.

X	0	2a
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Y	0	2a
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

甲、乙

(++−) (−−+)

已赌 (++) (−−) 甲

(+−) (+−) 甲

(−−) (++) 乙

(−+) (−+) 甲

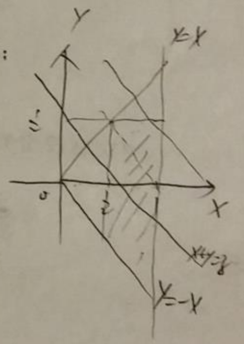
$EX=2a\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}a$ $EY=2a\times\frac{1}{4}=\frac{a}{2}$

六.（10分）已知随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,|y|<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求：1）边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 的独立性；

2）$P(X>\frac{1}{2}|Y<\frac{1}{2})$； 3）$Z=X+Y$ 的概率密度。



1) $f_X(x)=\int_{-x}^{x}1\,dy=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$-1<y<0$

$f_Y(y)=\int_{-y}^{1}1\,dx=x\Big|_{-y}^{1}=1+y$

$0<y<1$

$f_Y(y)=\int_{y}^{1}dx=x\Big|_{y}^{1}=1-y$

$f_Y(y)=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0\leq y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ $f(x,y)=1\neq f_X(x)f_Y(y)$

X与Y不独立.

2). $P(X>\frac{1}{2}|Y<\frac{1}{2})=\frac{P[(X>\frac{1}{2})\cap(Y<\frac{1}{2})]}{P(Y<\frac{1}{2})}=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{-x}^{\frac{1}{2}}1\,dy\,dx}{\int_{-1}^{0}(1+y)dy+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-y)dy}=5/7.$

$0<z<1$

3) $F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z)=\int_{0}^{\frac{z}{2}}\int_{-x}^{x}1\,dy\,dx+\int_{\frac{z}{2}}^{1}\int_{-x}^{z-x}dy\,dx=\frac{z^2}{12}\ \frac{z^3}{6}+\frac{z^2}{2}-\frac{2}{3}$

$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z^2}{2}+z & 0<z<1\\ \frac{z}{2}-1 \ \ 2-1\end{cases}$

七. （10 分）设袋中装有红球、白球、黑球各一个，今从中有放回地摸取两次，每次取出一球，随机变量 X,Y 分别表示这两次摸取到的红球、白球个数。

试求：（1）X 与 Y 的联合分布律；（2）$P(Y=0|X=0)$。

Y \ X	0	1	2	
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
	4/9	4/9	1/9	

$P(X=0\ Y=0)=\cancel{P(X=0)\cdot P(Y=0)}=\cancel{\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}}\ \frac{1}{9}$

$P(X=1\ Y=0)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

$P(X=2\ Y=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$P(X=0\ Y=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

$P(X=1\ Y=1)=1/3\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

$P(X=2\ Y=1)=0$

$P(X=0\ Y=2)=P(Y=2)\cdot P(X=0|Y=2)=\frac{1}{9}\times 1=\frac{1}{9}$

$P(X=1\ Y=2)=0$

$P(X=2\ Y=2)=0$

$X\sim B(2,\frac{1}{3})$

$Y\sim B(2,\frac{1}{3})$

$$P(Y=0|X=0)=\frac{P[(X=0)\cap(Y=0)]}{P(X=0)}=\frac{1/9}{4/9}=\frac{1}{4}$$

八. （12 分）设随机变量 $X\sim P(2),Y\sim B(5,0.8),\rho_{XY}=1/2$，估计概率 ~~$P(0<X-Y<4)$~~ $P(0<Y-X<4)$

$P(0<Y-X<4)$

$\cancel{E(X-Y)=EX-EY}$ $\quad EX=2\quad EY=5\times0.8=4$

$E(Y-X)=EY-EX=4-2=2.\quad$ 取 $\varepsilon=2$

$$P(|Y-X-E(Y-X)|<\varepsilon)=P(0<Y-X<4)\geq 1-\frac{D(Y-X)}{\varepsilon^2}$$

$$D(Y-X)=D(X)+D(Y)-2\,cov(X,Y)=2+5\times0.8\times0.2-2\times\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5\times0.8\times0.2}$$

≈ 1.54

$$P(0<Y-X<4)\geq 1-\frac{1.54}{4}\approx 0.65$$

九、（14 分）（10 分）设枪弹的速度服从正态分布，为了比较两种枪弹的速度，在相同条 件下进行速度测定，枪弹甲测定了 110 次，样本均值为 2805，样本方差为 120，枪弹乙测定了 100 次，样本均值为 2680，样本方差为 105.

$n_1=110 \quad \bar{x}_1=2805 \quad S_1^2=120$

1）能否认为甲的速度明显大于乙的速度。（ $\alpha=0.05$ ）

$n_2=100 \quad \bar{y}=2680 \quad S_2^2=105$

2）试求两种枪弹的速度的方差比的置信水平近似为 95%的置信区间

1). $H_0: \mu_1=\mu_2$

$H_1: \mu_1>\mu_2$

大样本可直接替换 σ_1, σ_2

$$z=\frac{|(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}=\frac{2805-2680}{\sqrt{\frac{120^2}{110}+\frac{105^2}{100}}}=8.06>1.64$$

拒绝 H_0 接受 H_1，可以认为甲速度明显大于乙速度.

2)
$$P\left(F_{0.975}<\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{0.025}(109,99)\right)=1-\alpha=0.95$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}:\left(\frac{120^2/105^2}{1.45}, \quad 120^2/105^2\times 1.261\right)$$

十.（10 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, 0<x<\infty$. 试求参数 σ 的极大似然估计，并验证它是否是无偏的.

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}=\prod_{i=1}^{n}x_i\,\theta^{-n}e^{-\frac{1}{2\theta}\sum x_i^2}$$

$$\ln L(\sigma)=\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)-n\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum x_i^2$$

$$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\theta}+\frac{\sum x_i^2}{2}\frac{1}{\theta^2} \qquad 令 \frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=0$$

$$\hat{\theta}=\frac{\sum x_i^2}{2n} \qquad E\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}Ex_i^2=\frac{1}{2n}nEx_i^2=\frac{1}{2}Ex_i^2=\theta$$

无偏.

$$\cancel{Ex^2=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}x^3e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\frac{1}{2\theta}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx^2}$$

$$\cancel{=-\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2\theta}}d\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right)=-xe^{-\frac{x^2}{2\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx}$$