# 三．两个中心极限定理

1.独立同分布中心极限定理

2.棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

**任意试验，经独立大量的重复，叠加在一起，均服从正态分布**

**1. 独立同分布中心极限定理：** 设$X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$是独立同分布的随机变量列，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2, i=1,2\ldots$，则对任意的$x\in R$，有：

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to+\infty}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2);\qquad \overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to+\infty}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(证明略)

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right\}=\Phi(x)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=n\mu$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=n\sigma^2$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^* \underset{n\to+\infty}{\sim} N(0,1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^* \le x\right)=\Phi(x)$$

## 2. 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理： （二项分布的极限分布是正态分布）

$X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$是独立同分布的随机变量列，$X_i \sim B(1, p)$ $i = 1, 2, \cdots n$。

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{(\text{精确分布})}{\sim} B(n, p) \qquad EX = p, DX = p(1-p)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n_A \quad \overline{X}_n = \frac{n_A}{n} \qquad E\left(\frac{n_A}{n}\right) = E\left(\overline{X}\right) = p, \quad D\overline{X}_n = \frac{p(1-p)}{n}$$

则：$$\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to+\infty}{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right); \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to+\infty}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$B(n, p) \underset{n\to+\infty}{\sim} N(np, np(1-p)); \qquad \frac{n_A}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right);$$

$$B(n,p)\underset{n\to+\infty}{\sim}\begin{cases}P(\lambda) \\ N(np,np(1-p))\end{cases}$$

**$p$,(1-$p$)在0,1附近**

**$p$,(1-$p$)在1/2附近效果更好，**

**$p$,(1-$p$)在0,1附近需要n很大。**

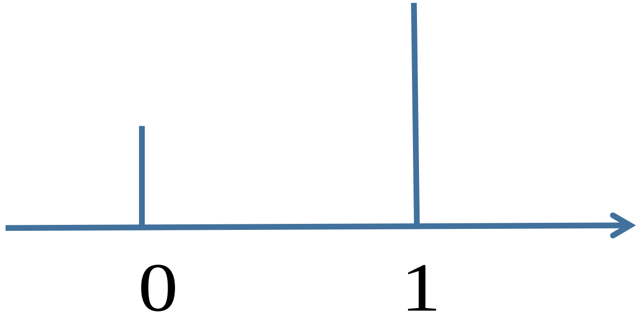
**例1.某保险公司2500人投保，每人保费120元，每年每人死亡的概率0.02，若投保人一年内死亡，保险公司赔偿2万元，问：（1）保险公司亏本的概率。（2）保险公司获利至少10万的概率。**

**解：设$X$表示2500人中的死亡人数，令：**$X_i=\begin{cases}0\ ,\text{第}i\text{人没死亡} & i=1,2\ldots2500\\ 1,\ \text{第}i\text{人死亡} & X_i\sim B(1,0.02),\end{cases}$

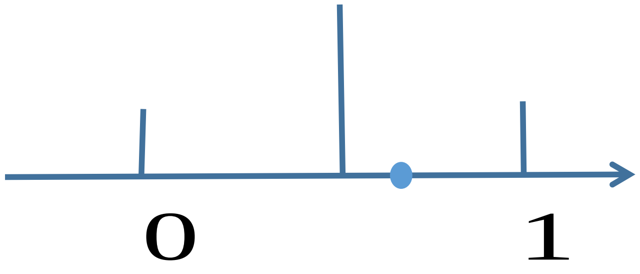
$$X=\sum_{i=1}^{2500}X_i\sim B(2500,0.02)\underset{(\text{近似})}{\sim}N(2500\times0.02,2500\times0.02\times0.98)=N(5,4.99)$$

$$(1)P(X\geq15)=\sum_{i=15}^{2500}C_{2500}^{i}0.02^{i}0.98^{2500-i}\approx1-\Phi\left(\frac{15-5}{\sqrt{4.99}}\right).\quad(2)P(X\leq10)$$

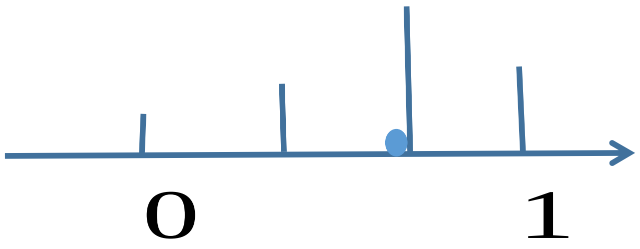
$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$



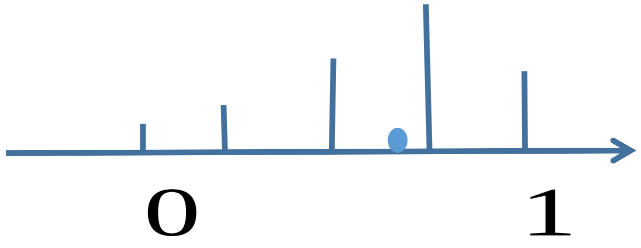

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{2}\boxed{\left(X_1 + X_2\right)} \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ & C_2^k p^k q^{2-k} & \end{pmatrix}$$




$$\overline{X}_3 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ & C_3^k p^k q^{3-k} & & \end{pmatrix}$$

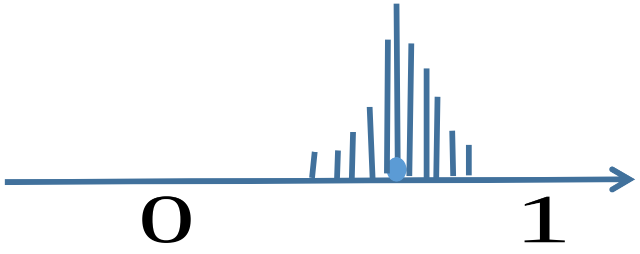



$$\overline{X}_4 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ & C_4^k p^k q^{4-k} & & & \end{pmatrix}$$




$\cdots$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & 1 \\ & C_n^k p^k q^{n-k} & & & \end{pmatrix}$$



若总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，抽样$(X_1, X_2,\cdots X_n)$，$X_1, X_2,\cdots X_n$独立同分布，

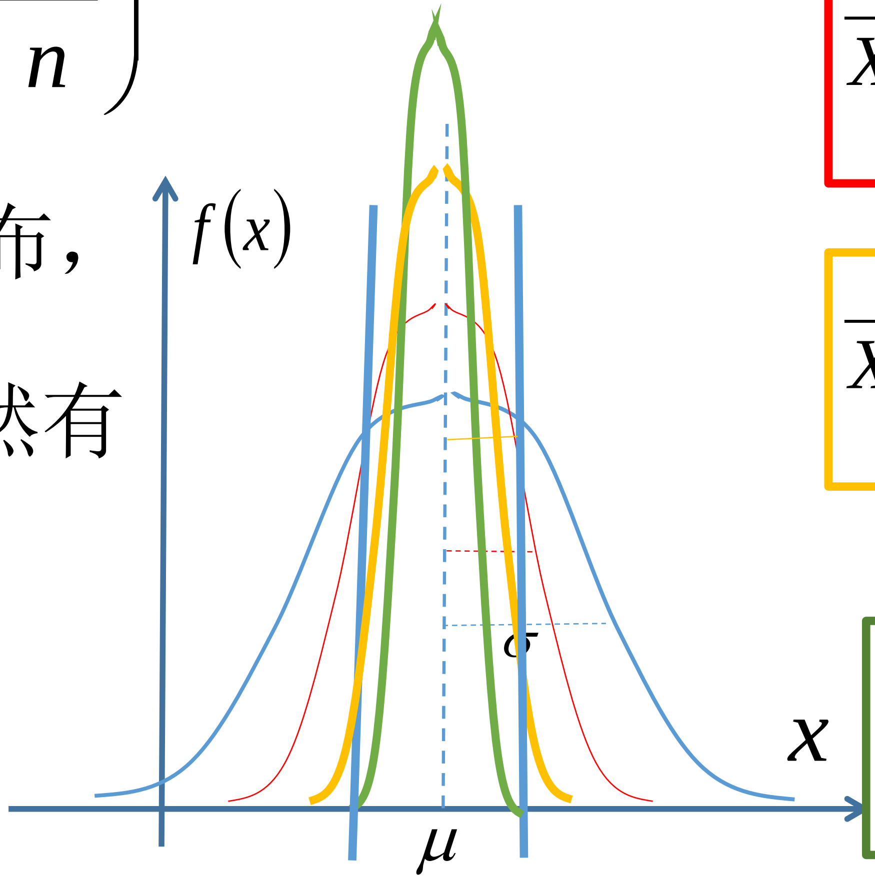
**由正态分布的可加性及线性变换性质有：**

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

若总体$X$不服从正态分布，

只要抽样$n$足够大，依然有

$$\overline{X}_n \underset{n\to\infty}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$




$$\boxed{\overline{X}_3 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{3}\right)}$$

$$\boxed{\overline{X}_5 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right)}$$

……

$$\boxed{\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

第五章只需理解本页内容，其他全部可忽略

总体$X$(分布不限)，期望$EX=\mu$存在，抽样$(x_1, x_2, \cdots x_n)$

$X_1, X_2, \cdots X_n$独立同分布，且$n$足够大，则由大数定律有：

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

由中心极限定理有：

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to+\infty}{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right);$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to+\infty}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$