准备工作：

一.定义基本概念（1.总体，2.样本）

构造统计量（4.统计量） $\Rightarrow$ $\begin{cases} \mu \xleftarrow{P} \overline{X} \\ \sigma^2 \longleftarrow S^2 \\ \mu_1-\mu_2 \leftarrow \overline{X}-\overline{Y} \\ \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leftarrow S_1^2/S_2^2 \end{cases}$

3. 样本的联合分布

$\bar{x}=7.9$

μ在7.9左右

$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

二.定义统计量的分布 $\begin{cases} N(0,1)\text{分布}(\sigma\text{已知}) \\ \chi^2(n)\text{分布} \\ t(n)\text{分布}(\sigma\text{未知}) \\ F(n,m)\text{分布} \end{cases}$

三.推导抽样分布 $\begin{cases} \overline{X}\text{的分布} \\ S^2\text{的分布} \\ \overline{X}-\overline{Y}\text{的分布} \\ S_1^2/S_2^2\text{的分布} \end{cases}$

二.常用统计量的分布

1.标准正态分布$N(0,1)$

2. $\chi^2(n)$分布

3.t分布

4.F统计量

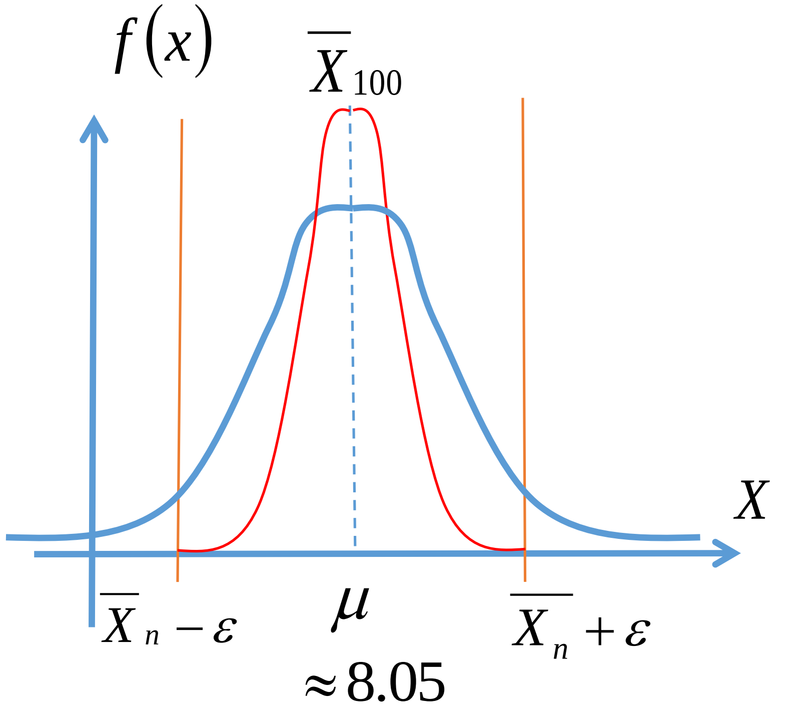
关于统计量的分布

例：电视机寿命值 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 由大数定律，对任意的容许误差 $\varepsilon > 0$，

一定能找到一个**n**，使得： $P\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$

抽取容量为**n=100**的样本，$(7.8, 8.5, \cdots 7.9)$

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(7.8 + 8.5 + \ldots + 7.9) = 8.05$$



则 μ 在**8.05**左右，一般地，

μ 的估计精度区间应该为：

$$\overline{X_n} - \varepsilon < \mu < \overline{X_n} + \varepsilon \qquad 8.05 - \varepsilon < \mu < 8.05 + \varepsilon$$

统计的基本原理（小概率事件原理）

若事件A发生的概率 $P(A)\le\alpha$ 则统计认为A在一次抽样下不发生。我们只抽样一次 $\overline{x}_n$用来估计**μ**，

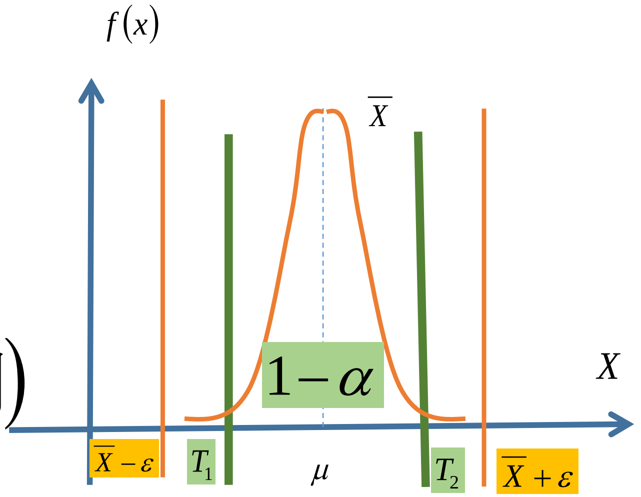
于是**μ**的估计区间应该为：$(T_1,\ T_2)$(两端小概率抽不到)

即**μ**的估计区间应该为：$\boxed{\overline{X}_n}\sim\boxed{N\left(\mu,\sigma^2/n\right)}$

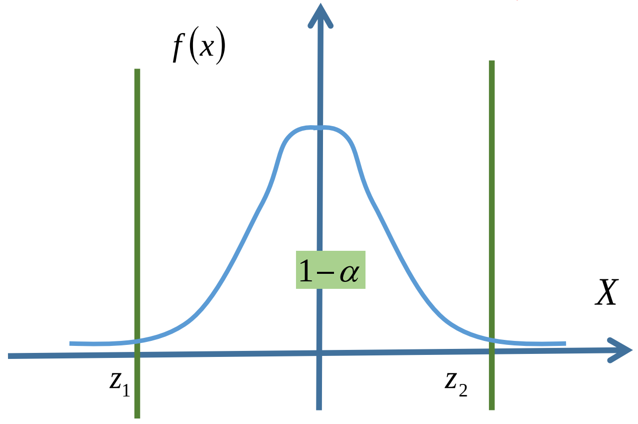
的非小概率区间端点值 $\boxed{\left(T_1\ ,\ T_2\right)}$

$$P\left(T_1<\overline{X}_n<T_2\right)=1-\alpha;\qquad \frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1);$$

$$P\left(z_1<\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_2\right)=1-\alpha\qquad \boxed{\overline{X}_n-z_i\,\sigma/\sqrt{n}}<\mu<\boxed{\overline{X}_n+z_i\,\sigma/\sqrt{n}}\ (\sigma\text{已知})$$



$\cancel{8.05-\varepsilon<\mu<8.05+\varepsilon}$



$$\mu \xrightarrow{\text{构造估计量}} \overline{X} \xrightarrow{\overline{X}\text{分布}} \text{正态} \xrightarrow{\text{去掉未知参数}} \begin{cases} N \\ t \end{cases} \xrightarrow{\text{求出}} (T_1, T_2)$$

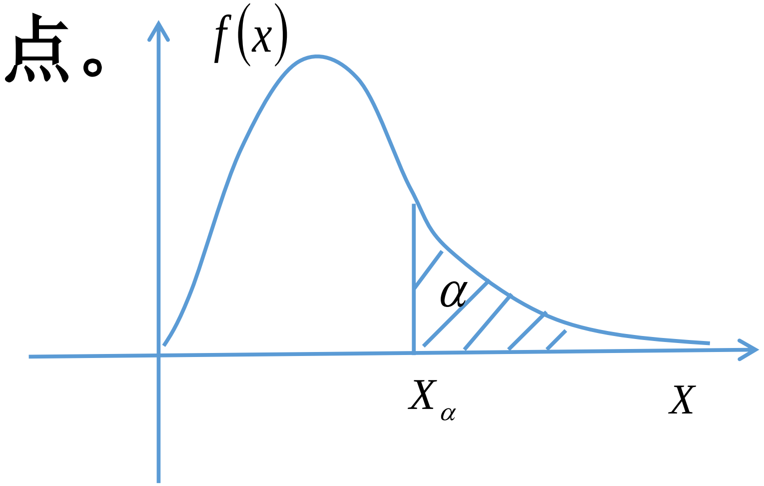
$$\mu_1 - \mu_2 \xrightarrow{\text{构造估计量}} \overline{X} - \overline{Y} \xrightarrow{\overline{X}-\overline{Y}\text{分布}} \text{正态}$$

$$\sigma^2 \xrightarrow{\text{构造估计量}} S^2 \xrightarrow{S^2\text{分布}} \chi^2 \xrightarrow{\text{求出}} (T_1, T_2)$$

$$\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \xrightarrow{\text{构造估计量}} S_1^2 / S_2^2 \xrightarrow{S_1^2/S_2^2\text{分布}} F \xrightarrow{\text{求出}} (T_1, T_2)$$

分位点：（小概率事件区间与非小概率事件区间的分界点T_1, T_2）

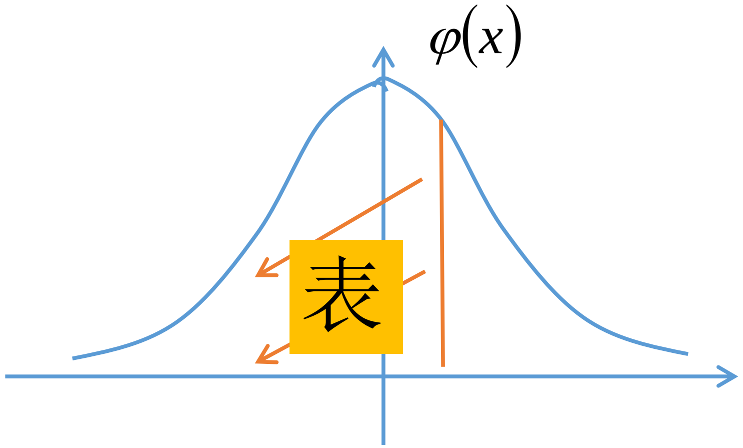
$P(X > X_\alpha) = \alpha$　X_α称为随机变量X 的 $\boldsymbol{\alpha}$ 分位点。



用右尾面积的大小标注 分位点的位置所在。

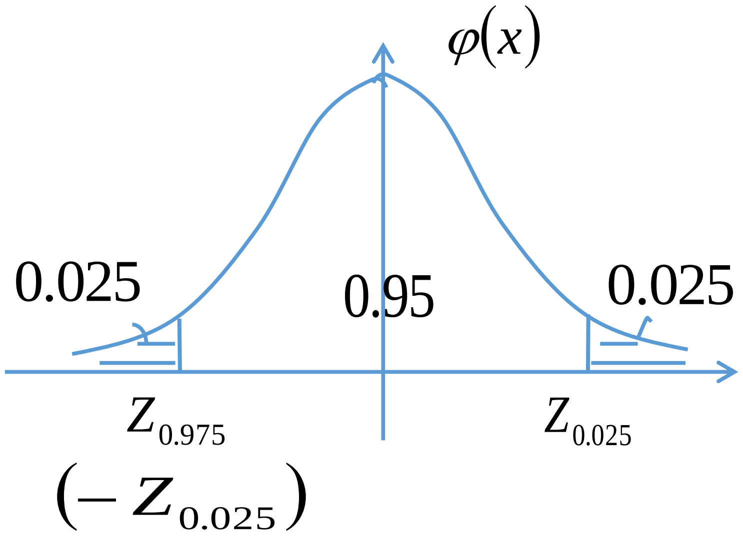
1.标准正态分布 $Z \sim N(0,1)$

（1）定义：$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < \infty$



（2）性质：关于Y轴对称

（3）分位点：（以α=0.05维离）



1）双侧分位点：$Z_{0.975}=-Z_{0.025}$ 及 $Z_{0.025}$

非小概率事件区间：$\left(-Z_{0.025}, Z_{0.025}\right)$

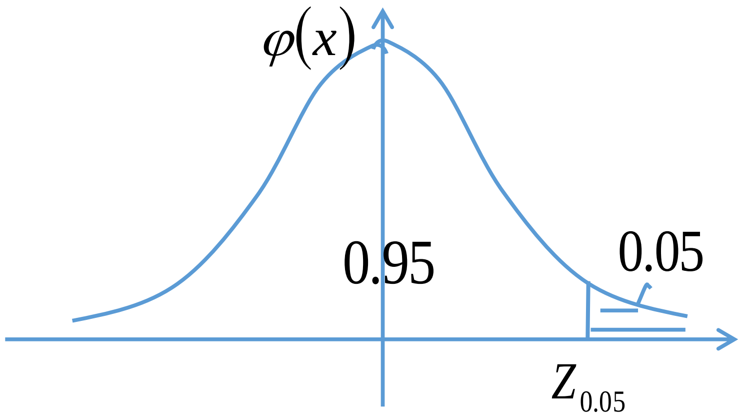
小概率事件区间：$\left(-\infty, -Z_{0.025}\right)\cup\left(Z_{0.025}, +\infty\right)$

2）单侧分位点：

单侧上限分位点（过高异常）：$Z_{0.05}$

非小概率事件区间： $\left(-\infty, Z_{0.05}\right)$

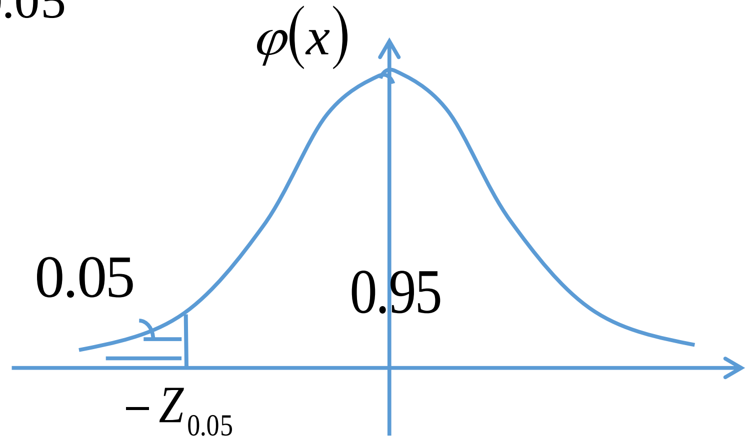
小概率事件区间： $\left(Z_{0.05}, +\infty\right)$



单侧下限分位点（过低异常）：$Z_{0.95} = -Z_{0.05}$

非小概率事件区间： $\left(-Z_{0.05}, +\infty\right)$

小概率事件区间： $\left(-\infty, -Z_{0.05}\right)$



例1.（1）当α=0.05，求 $X \sim N(0,1)$双侧分位点。

（2）当α=0.01，求 $X \sim N(0,1)$单侧上限分位点。

（3）当α=0.1，求 $X \sim N(0,1)$单侧下限分位点。

解：α=0.05，双侧分位点 $\pm Z_{0.025} = \pm 1.96$

α=0.01，单侧上限分位点 $Z_{0.01} = 2.33$

α=0.1，单侧下限分位点 $-Z_{0.1} = -1.28$