§19-5 实物粒子的波粒二象性

实践呼唤着物理学家对旧量子论进行彻底的改造，建立起完整的微观物质世界的理论。

在从旧量子论向量子理论前进的过程中，迈出决定性一步的是法国青年物理学家德布罗意。

德布罗意提出：

光(波)具有粒子性，

那么实物粒子具有波动性吗?

从而掀起了一场物理学革命！

一　德布罗意假设

L.V. de Broglie （ 法国人，**1892 – 1987** ）

从自然界的对称性出发，认为：

既然光(波)具有粒子性，
那么实物粒子也应具有波动性。

1924.11.29德布罗意把题为
“量子理论的研究”
的博士论文提交给了巴黎大学。

他在论文中指出：

一个能量为E、动量为 p 的实物粒子，同时也具有波动性，它的波长λ、频率ν和 E、p的关系与光子一样：

$$E = h\nu \qquad \nu = \frac{E}{h}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{h}{p}$$

$$\left.\begin{array}{l} \nu = \dfrac{E}{h} \\ \lambda = \dfrac{h}{p} \end{array}\right\} \text{德布罗意关系}$$

与粒子相联系的波称为物质波或德布罗意波，

λ — 德布罗意波长（**de Broglie wavelength**）

路易.德布罗意

Louis.V.de Broglie

法国人

1892 — 1987

1929年获诺贝尔物理奖

提出电子的波动性

经爱因斯坦的推荐，物质波理论受到了关注。

在论文答辩会上，佩林问：

“这种波怎样用实验来证实呢？”

德布罗意答道：

“用电子在晶体上的衍射实验可以做到。”

电子的波长：$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0 E}}$ （电子$v << c$）

设加速电压为U（单位为伏特）

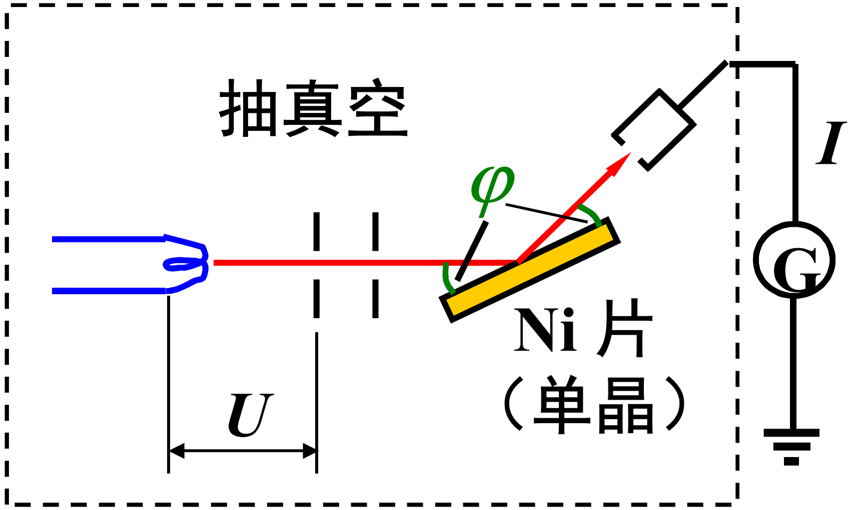
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}} \approx \frac{1.225}{\sqrt{U}}(\mathrm{nm})$$

U=150V时，λ=0.1nm —— X射线波段

二　电子衍射实验

d 为晶格常数

●戴维孙(Davisson)革末(Germer)实验(1927)



$$E_K = eU = \frac{P^2}{2m}$$

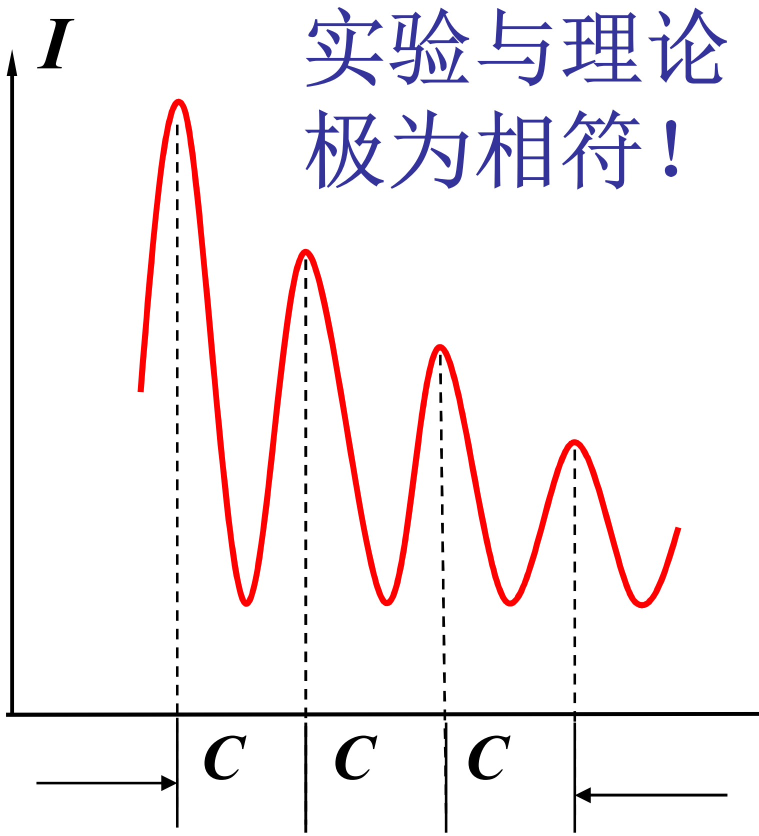
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}}$$

当满足$2d\sin\varphi = n\lambda$， $n= 1,2,3,\ldots$时，应观察到电流 I 为极大。

若固定φ 角，
连续改变加速电压时，
光电流极大的条件

$$\sqrt{U} = n\frac{h}{2d\sin\varphi\sqrt{2em_0}} = nC$$

实验结果



理论预言：
在固定 φ 角，
（C 为常数）
连续改变电压，
出现光电流
极大的条件

$$\sqrt{U} = nC$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

当 $\sqrt{U} = C$，**2C，3C…时，**

实验观察到 I 为极大！

戴维逊(Cliton Joseph Davisson, 1881-1958)

1937年诺贝尔物理奖

戴维孙—革末实验中

当加速电压为 $U = 54V$

在衍射角为 $\phi = 65^0$ 的方向上

散射的电子束出现了一个明显的极大

利用布拉格公式:

$$\boldsymbol{2d\ sin\phi = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3\cdots)}$$

将k=1 $\phi = 65^0$ $d = 9.1\times10^{-11}m$代入

$$\lambda = \mathbf{0.165}nm = \mathbf{1.65\,\overset{0}{A}}$$

当 $v \ll c$ 时，

$$\left.\begin{aligned} E_k = eU = \frac{P^2}{2m_e} \\ P = \frac{h}{\lambda} \end{aligned}\right\} \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = \frac{1.225}{\sqrt{U}} nm$$

U（V）	λ（nm）
54	0.167
150	0.100
10^4	0.012

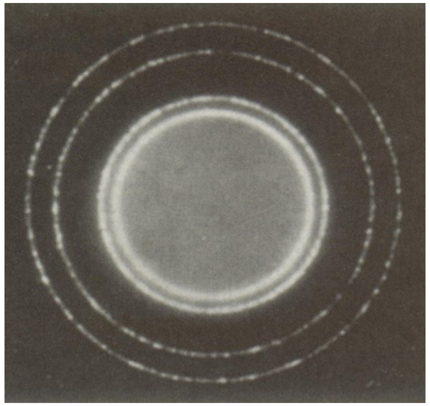
相当于
X 射线

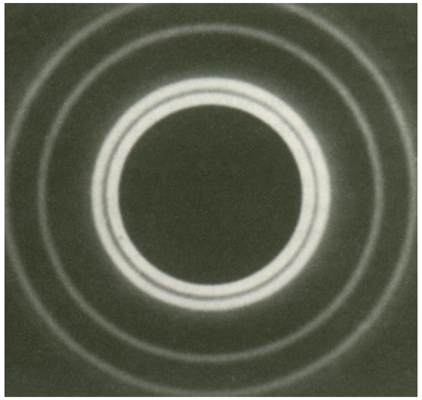
理论和实验值很接近，说明德布罗意的假说是正确的。

物质波的实验验证：

1. 戴维孙—革末电子散射实验(1927年)，观测到电子衍射现象

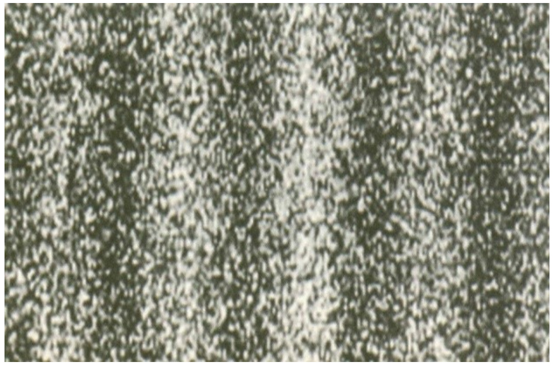
电子束



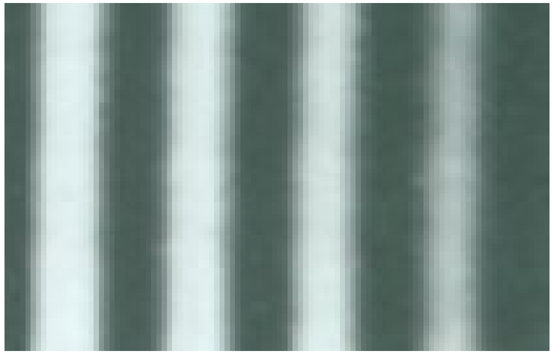


X射线

衍射图样（波长相同）



电子双缝干涉图样

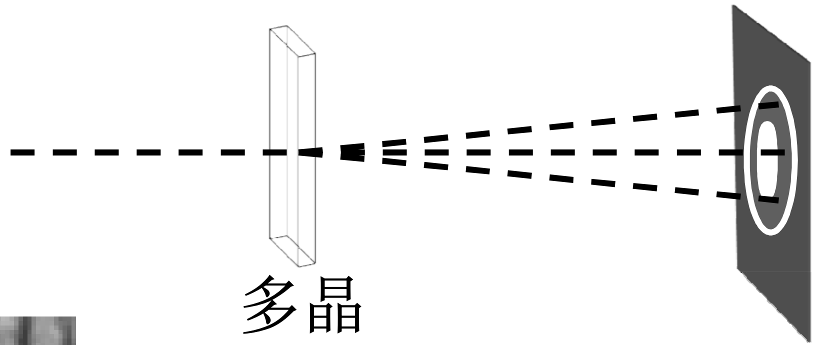


杨氏双缝干涉图样

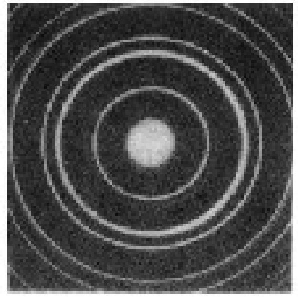
2. 汤姆逊（1927）电子衍射实验

电子束穿过多晶薄膜，

与X射线通过多晶薄膜后产生的衍射图样极为相似的衍射图样



多晶
铝箔



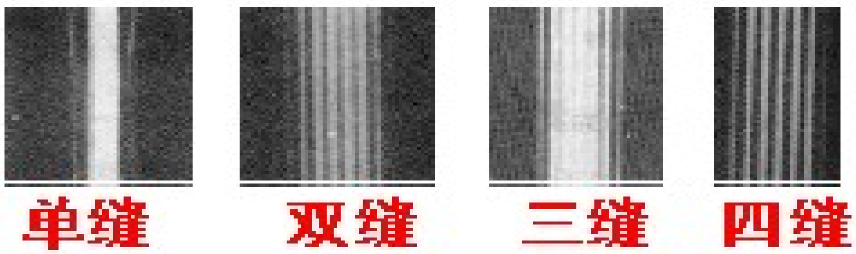
衍射图象

汤姆逊(**George** Paget Thomson, 1892-1975)

1937年诺贝尔物理奖

3. 约恩逊（1961）电子衍射实验

电子的单缝、双缝、三缝和四缝衍射实验图象



更加直接地说明了电子具有波动性

波动是所有物质的客观属性。

质子、中子、原子、分子...也有波动性。

德布罗意公式对这些粒子同样正确

一切微观粒子都具有波粒二象性，
德布罗意公式就是
描述微观粒子波粒二象性的基本公式。

$$\lambda=\frac{h}{m\upsilon}\propto\frac{1}{m},\ m\uparrow\rightarrow\lambda\downarrow$$

宏观粒子 m 大，$\lambda\rightarrow 0$，表现不出波动性。

1993年，克罗米（M.F.Crommie）等美国科学家，
用扫描隧道显微镜技术，把蒸发到铜（111）表面上的
铁原子排列成了半径 $7.13nm$ 的圆环形量子围栏，
用实验观测到了在围栏内形成的同心圆状的驻波，
直接地证实了电子的波动性。

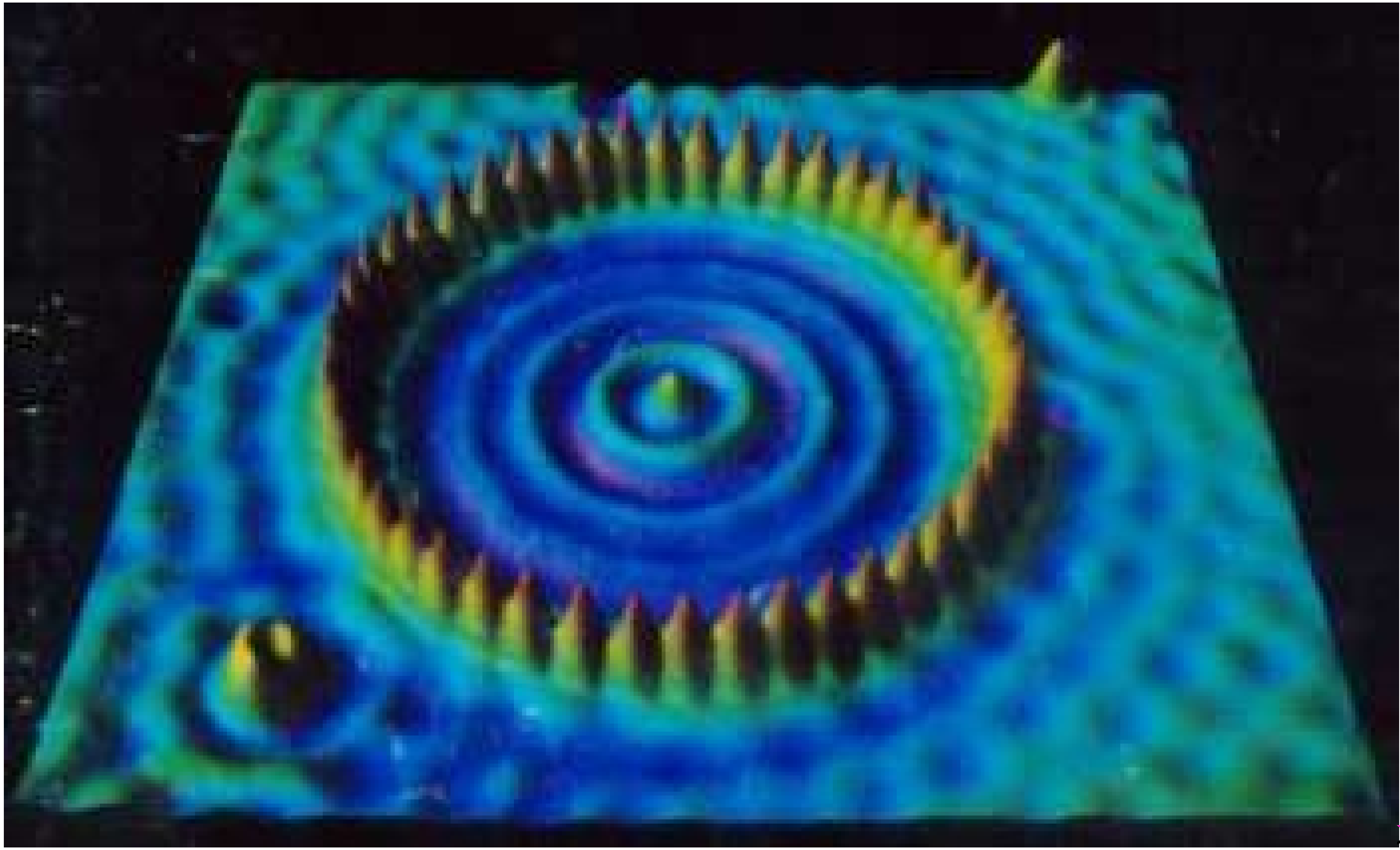
"量子围栏"

48个铁原子排列在
铜表面

证明电子的波动性

1993年美国科学家移动铁原子，

铁原子距离**0.9**纳米



粒子的波动性已有很多的重要应用。

由于低能电子波穿透深度较X光小，
所以低能电子衍射被广泛地用于
固体表面性质的研究。

由于中子易被氢原子散射，
所以中子衍射就被用来研究含氢的晶体。

电子显微镜利用了电子的波动性，
由于电子的波长可以很短，
电子显微镜的分辨能力可以达到0.1 nm。

例 $19-5$

（1）质量为 $100g$ 的子弹，以 $100m\cdot s^{-1}$ 的速度运动，按德布罗意公式计算其波长；

（2）计算电子经过 $U_1=100V$ 和 $U_2=10000V$ 的电压加速后的德布罗意波。

解：（1）应用非相对论公式，计算子弹的德布罗意波长

$$\lambda=\frac{h}{mV}=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.1\times100}=6.63\times10^{-35}(m)$$

对于宏观物体来说，普朗克常数极其微小，其德布罗意波长在实验中难以测量。

（2）此时，电子的速度仍然远远小于光速，
仍然可以应用非相对论公式

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU_1}} \approx \frac{1.225}{\sqrt{U_1}} = 0.1225(nm)$$

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU_2}} \approx \frac{1.225}{\sqrt{U_2}} = 0.01225(nm)$$

这都与X射线的波长相当。
可见一般实验中电子波的波长是很短的，
正是因为这个缘故，
观察电子衍射时就需要利用晶体。

h极小 $\rightarrow$ 宏观物体的波长小得实验难以测量

$\rightarrow$ “宏观物体只表现出粒子性”

两把自然尺度： c 和 h

$c \rightarrow \infty$ ： 相对论 $\longrightarrow$ 牛顿力学

$h \rightarrow 0$ ： 量子物理 $\longrightarrow$ 经典物理

§19-6 量子物理基本原理

德布罗意提出的物质波的物理意义是什么呢?

他本人曾认为那种与粒子相联系的波是

引导粒子运动的“导波”,

并由此预言了电子的双缝干涉的实验结果。

对这种波的本质是什么,

他并没有给出明确的回答,

只是说它是虚拟的和非物质的。

在经典力学中，所谓“粒子”，
就意味着该客体既具有一定的质量和电荷等属性，
此即物质的“颗粒性”或“原子性”，
又具有一定的位置和一条确切的运动轨道，
即在每一时刻有一定的位置和速度(或动量)

所谓“波动”，就意味着某种实在的物理量的空间分布
在作周期性的变化，
并呈现出干涉和衍射等反映相干叠加性的现象。

在经典概念下，
粒子性和波动性很难统一到一个客体上去。

近代物理实验已经表明，
不但电磁波，而且象电子这样的物质粒子，
都具有粒子性和波动性这两个方面的性质。

量子力学的创始人之一薛定谔在**1926**年曾说过，
电子的德布罗意波描述了电量在空间的连续分布。
他曾把电子波看成是电子的某种实际结构，
即三维空间中连续分布的某种物质波包，
波包的大小就是电子的大小，
波包的群速就是电子的运动速度。

按照这种看法，由于色散，
组成波包的不同频率成分的行进速度各不相同，
物质波包必然要扩散，在电子衍射时，
在空间不同方向上观测到的会是物质波包的一部分，
即电子的一部分。
显然，这些都是与现有的实验结果矛盾的。

与物质波包的看法相反，
有人认为电子的波动性来源于大量电子分布
　　在空间中所形成的疏密波。

这种看法也是与实验结果矛盾的。
电子可以产生与光波完全类似的双缝衍射图样。
而且，电子双缝衍射实验还表明，
即使入射电子流极其微弱，
以致电子几乎是一个一个地通过双缝，
短时间内底片上记录下来的只是
　一些分布不规律的点子，
但是只要时间足够长，
　底片上仍将呈现出有规律的衍射图样。
由此可见，单个电子就具有波动性。

电子既不是经典的粒子，也不是经典的波。

电子所呈现出来的粒子性，
只是具有所谓“颗粒性”或“原子性”，
即总是以具有一定的质量和电荷等属性的客体
出现在实验中，具有集中的能量和动量。
但并不与“粒子有确切的轨道”的概念有什么联系；

而电子呈现的波动性，
也只不过是波动性中最本质的东西——波的叠加性，
可以干涉、衍射、偏 振，具有波长和波矢
但并不一定与某种实在的物理量在空间的波动
联系在一起。

波粒二象性指的是，
把微观粒子的“原子性”与波的“叠加性”统一起来。

就是说，在量子概念下，电子既是粒子，也是波。

普遍而言，量子粒子和量子波是同一的，
粒子的量子化必定具有波动性，
波的量子化必定具有粒子性，
粒子是波的量子。

在不同的实验条件下，
　客体可以呈现出不同的性质。
在光的干涉和衍射实验中，主要呈现出波动性；
而在康普顿散射实验中，主要呈现出粒子性。

微观粒子在某些条件下表现出粒子性，在另一些条件下表现出波动性，而两种性质虽寓于同一客体中，却不能同时表现出来。

少女？老妇？

两种图象不会同时出现在你的视觉中。

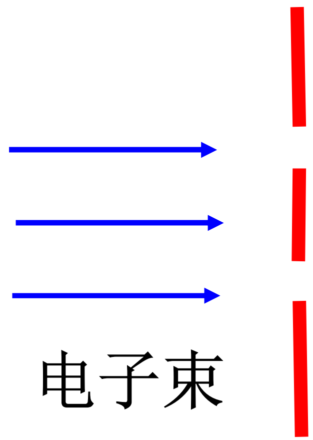
一　概率波

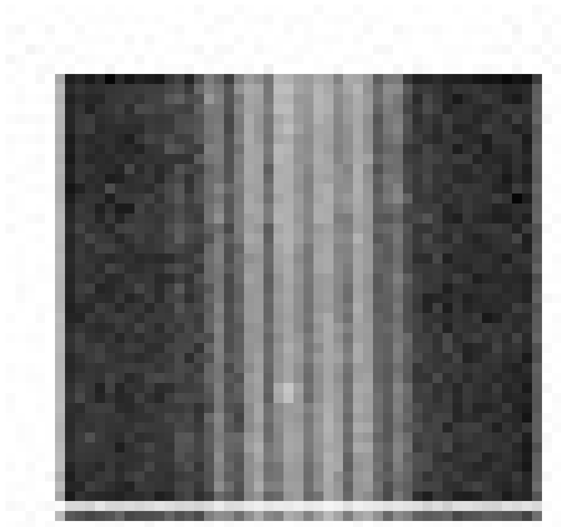
玻恩（Max Born,　1882－1970）
1954年诺贝尔物理学奖

玻恩(M. Born)在1926年提出：
物质波描述了粒子在各处被发现的概率。
这就是说，德布罗意波是概率波。

玻恩的概率波概念
可以用电子双缝衍射的实验结果来说明。

电子双缝衍射实验

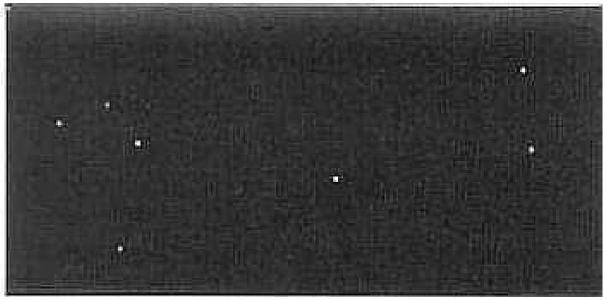




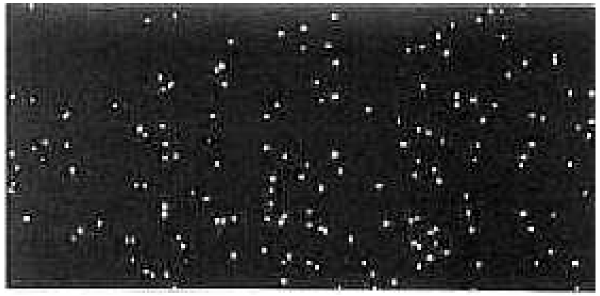
电子双缝衍射图样与光的双缝衍射图样完全一样，
显示不出粒子性，
更没有什么概率那样的不确定特征。

但这是用大量的电子(或光子)做出的实验结果。

一个一个电子依次入射双缝的衍射实验：



7个电子



100个电子

这几幅图像说明电子确是粒子，

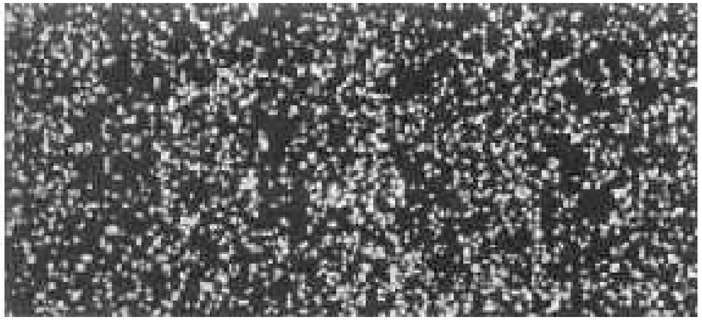
因为图像是由点组成的。

它们同时也说明，

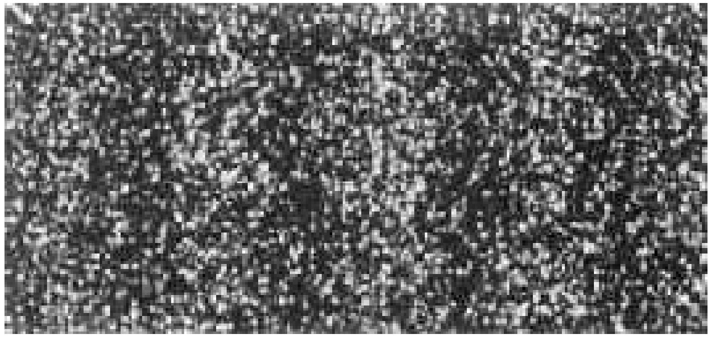
电子的去向是完全不确定的，

一个电子到达何处完全是概率事件。

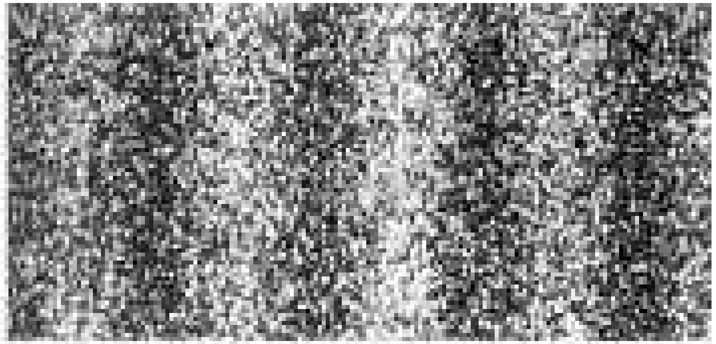
一个一个电子依次入射双缝的衍射实验：



3000

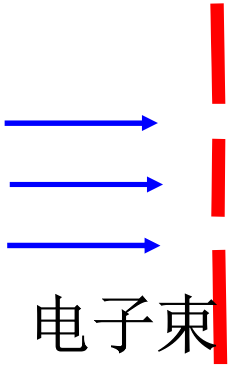


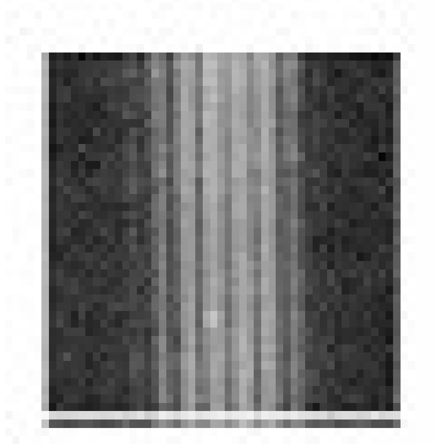
20000

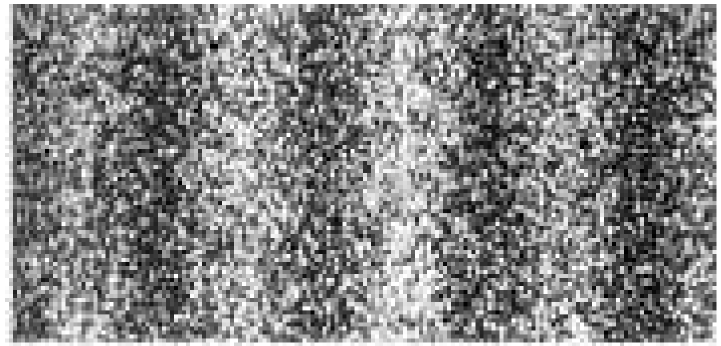


70000个电子

随着入射电子总数的增多，
电子的堆积情况逐渐显示出了条纹，
最后就呈现明晰的衍射条纹，
这条纹与大量电子短时间内
通过双缝后形成的条纹一样。







70000个电子

这些条纹把单个电子的概率行为完全淹没了。

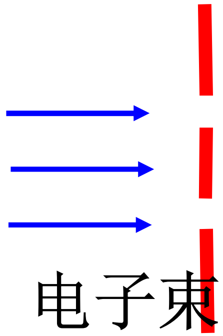
底片上出现一个个的点子，

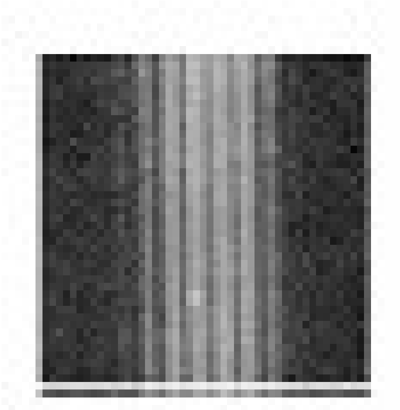
说明电子具有粒子性。

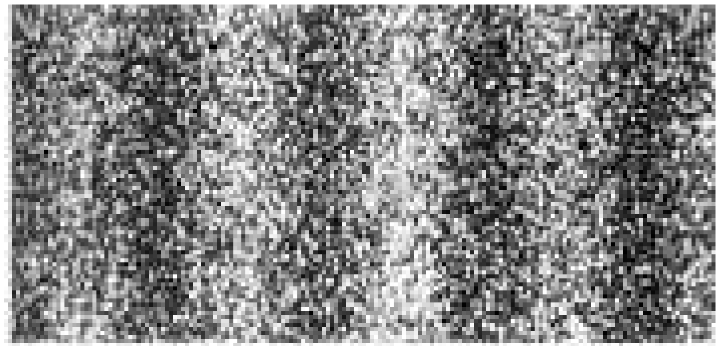
随着电子增多，逐渐形成衍射图样，

这来源于“一个电子”所具有的波动性，

而不是电子间相互作用的结果。







70000个电子

这又说明，尽管单个电子的去向是概率性的，但其概率在一定条件下还是有确定的规律的。这些就是玻恩概率波概念的核心。

德布罗意波并不像经典波那样是代表实在物理量的波动，而是描述粒子在空间的概率分布的“概率波”。

二 波函数及其统计解释

1、波函数

量子力学假定：

微观粒子的状态用波函数表示。

概率波波函数（一般为复数）：

一维 $\Psi(x,t)$，三维 $\Psi(\vec{r},t)=\Psi(x,y,z,t)$

在量子力学中，波函数是最重要的基本概念之一，它完全可以描述一个体系的量子态。
在经典物理学中，并没有与之对应的物理量。

2、波函数的统计解释

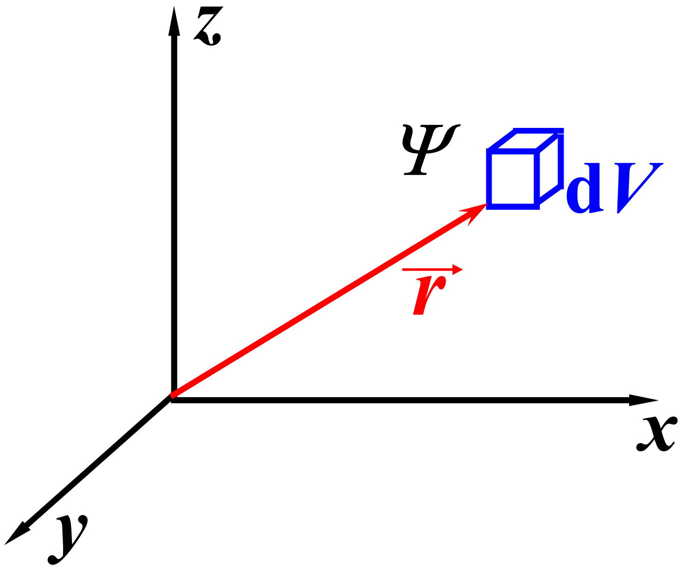
玻恩对Ψ的统计解释(1926)：

波函数Ψ是描述粒子在空间概率分布的“概率振幅”。

其模方 $$\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2=\Psi(\vec{r},t)^*\Psi(\vec{r},t)$$

称为“概率密度”。

代表 t 时刻，在坐标 $\vec{r}$ 附近单位体积中发现一个粒子的概率。



在t时刻，在$\vec{r}$附近$\mathrm{d}V$内发现粒子的概率为：

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2\,\mathrm{d}V$$

在空间Ω发现粒子的概率为：

$$\int_{\Omega}|\Psi(\vec{r},t)|^2\,\mathrm{d}V$$

$\Psi(\vec{r},t)$不同于经典波的波函数，

它无直接的 物理意义，

有意义的是$|\Psi|^2$和波函数的相位。

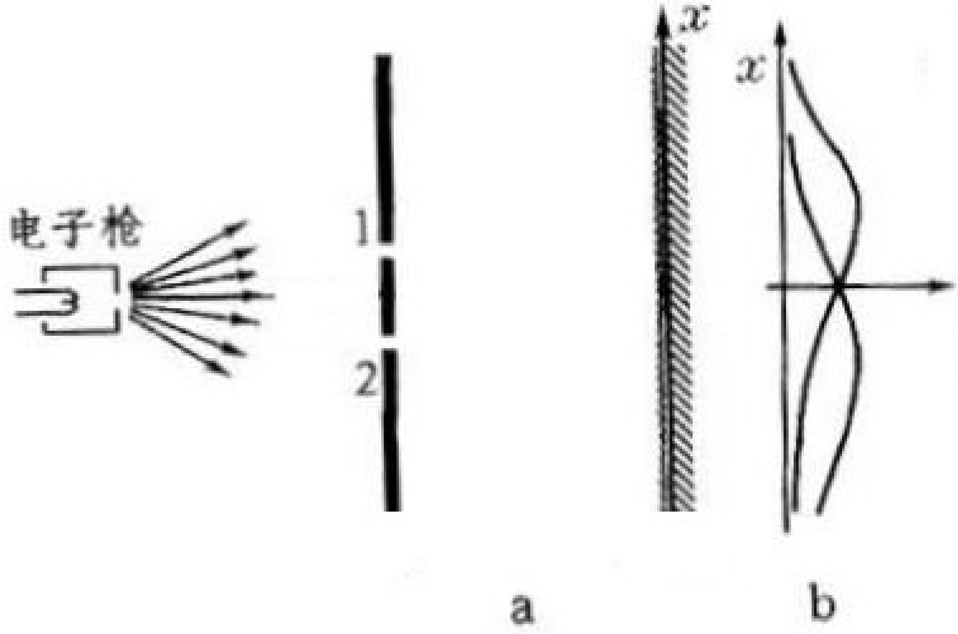
对单个粒子：$|\Psi|^2$给出粒子概率密度分布；

对大量粒子：$N|\Psi|^2$给出粒子数的分布；

概率波的概念正确地把物质粒子的
波动性和粒子性统一了起来，
已经为大量实验事实所证实。

3 用电子双缝衍射实验说明概率波的含义

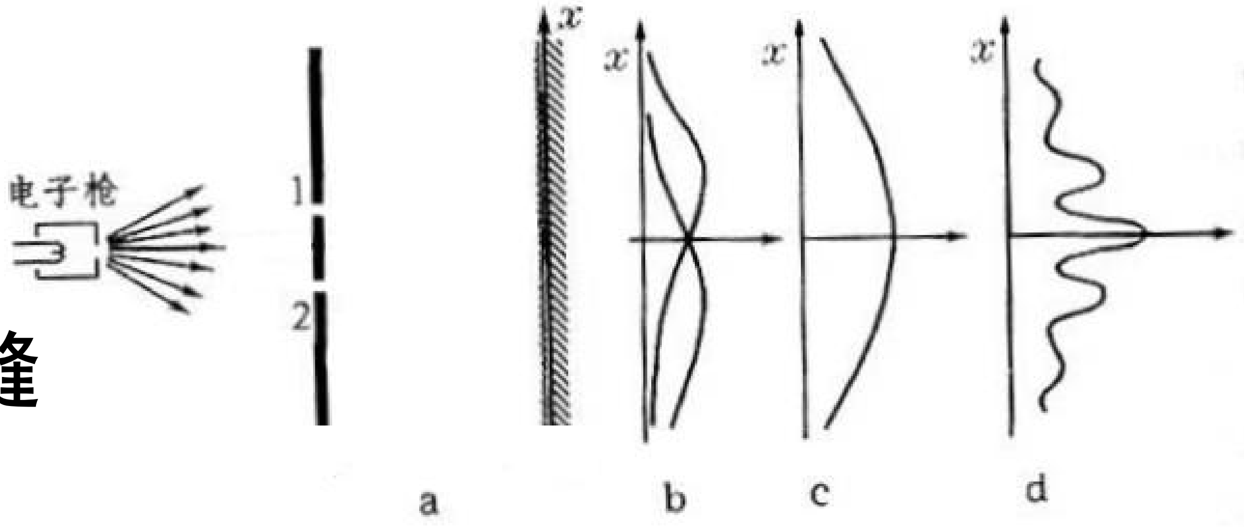
电子的状态用波函数 Ψ 描述。



只开上缝时，电子有一定的概率通过上缝，其状态用 $\psi_1(x)$ 描述，电子的概率分布为 $P_1=|\Psi_1|^2$

只开下缝时，电子有一定的概率通过下缝，其状态用 $\psi_2(x)$ 描述，电子的概率分布为 $P_2=|\Psi_2|^2$

通过双缝后，
分布是d不是c。
双缝齐开时，
电子可通过上缝
也可通过下缝，



通过上、下缝各有一定的概率，ψ_1 、ψ_2 都有。

总的概率幅为 $\Psi_{12}=\Psi_1+\Psi_2$

总概率分布：

（出现了干涉）

$$P_{12}=|\Psi_{12}|^2=|\Psi_1+\Psi_2|^2$$

$$=|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2+\underline{\Psi_1^*\Psi_2+\Psi_1\Psi_2^*}$$

$$P_{12}=|\Psi_{12}|^2=|\Psi_1+\Psi_2|^2=|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2+\Psi_1^*\Psi_2+\Psi_1\Psi_2^*$$

$$\neq|\boldsymbol{\Psi}_1|^2+|\boldsymbol{\Psi}_2|^2=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$$

可见，干涉是概率波的干涉，

是由于概率幅的线性叠加产生的。

即使只有一个电子，当双缝齐开时，

它的状态也要用 $\boldsymbol{\Psi}_{12}=\boldsymbol{\Psi}_1+\boldsymbol{\Psi}_2$ 来描述。

两部分概率幅的叠加就会产生干涉。

微观粒子的波动性，实质上就是概率幅的

相干叠加性。衍射图样是概率波的干涉结果。

4 统计解释对波函数提出的要求

1）有限性：在空间任何有限体积元ΔV中找到粒子的概率 ($\iiint_{\Delta V} |\Psi|^2 \mathrm{d}V$) 必须为有限值。

2）单值性：波函数应单值，从而保证概率密度在任意时刻、任意位置都是确定的。

3）连续性：

●波函数连续，保证概率密度连续。

●对于势场连续点，或势场不是无限大的间断点，波函数的一阶导数连续。

归一化：

在空间各点的概率总和必须为1。

归一化条件：

$$\int_{\Omega} \left|\boldsymbol{\Psi}\left(\vec{r},t\right)\right|^2 \mathrm{d}V = 1 \quad ,(\Omega - \text{全空间}\ )$$

若 $$\int_{\Omega} \left|\Psi_A\right|^2 dV = \int_{\Omega} \Psi_A{}^* \Psi_A dV = A$$

则 $$\int_{\Omega} \left|\frac{1}{\sqrt{A}}\Psi_A\right|^2 dV = 1 \qquad \frac{1}{\sqrt{A}} \text{——归一化因子}$$

在物理理论中引入概率概念在哲学上有重要的意义。
它意味着：
在已知给定条件下，不可能精确地预知结果，
只能预言某些可能的结果的概率。
这也就是说，不能给出唯一的肯定结果，
只能用统计方法给出结论。
这一理论是与经典物理的严格因果律直接矛盾的。
玻恩在**1926**年曾说过：
“粒子的运动遵守概率定律，
但概率本身还是受因果律支配的。”
这句话虽然以某种方式使因果律保持有效，
但概率概念的引入在人们了解自然的过程中
还是一个非常大的转变。

阅读

波函数本身“测不到，看不见”，
是一个很抽象的概念，
但是它的模方给我们展示了
粒子在空间分布的图像，
即粒子坐标的取值情况。

当测量粒子的某一力学量的取值时，
只要给定描述粒子状态的波函数，
按照量子力学给出的一套方法
就可以预言一次测量可能测到哪个值，
以及测到这个值的概率是多少。

阅读

尽管所有物理学家都承认，
由于量子力学预言的结果与实验异常精确地相符，
所以它是一个很成功的理论，
但是关于量子力学的哲学基础仍然有很大的争论。
哥本哈根学派，包括玻恩、海森伯等
坚持波函数的概率或统计解释，
认为它就表明了自然界的最终实质。

另一些人不同意这样的结论，
最主要的反对者是爱因斯坦。
他在**1927**年就说过：
“上帝并不是跟宇宙玩掷骰子游戏。” 阅读

德布罗意的话(1957年)更发人深思:

“不确定性是物理实质，这样的主张并不是完全站得住的。
将来对物理实在的认识达到一个更深的层次时，我们可能
对概率定律和量子力学作出新的解释，即它们是目前我们
尚未发现的那些变量的完全确定的数值演变的结果。
我们现在开始用来击碎原子核并产生新粒子的强有力的方法，
可能有一天向我们揭示关于这一更深层次的目前我们
还不知道的知识。阻止对量子力学目前的观点作进一步探索
的尝试对科学发展来说是非常危险的。
而且它也背离了我们从科学史中得到的教训。
实际上，科学史告诉我们，已获得的知识常常是暂时的，
在这些知识之外，肯定有更广阔的新领域有待探索。”

阅读

狄拉克(P．A．M．Dirac)

（1902-1984）

1933年诺贝尔物理奖

量子力学大师狄拉克在1972年的一段话：

“在我看来，我们还没有量子力学的基本定律。

目前还在使用的定律需要作重要的修改，……。

当我们作出这样剧烈的修改后，

当然，我们用统计计算对理论作出物理解释的观念

可能会被彻底地改变。”

阅读

尽管对玻恩的统计诠释是有争论的，

虽然至今所有实验都证实统计诠释是正确的，但是关于量子力学根本问题的争论不但推动了量子力学的发展，而且还为量子信息论等新兴学科的诞生奠定了基础。

阅读

三 状态叠加原理

若体系具有一系列互异的可能状态(波函数):

$$\{\Psi_1, \quad \Psi_2 \cdots\}$$

则它们的线性组合: $\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$,

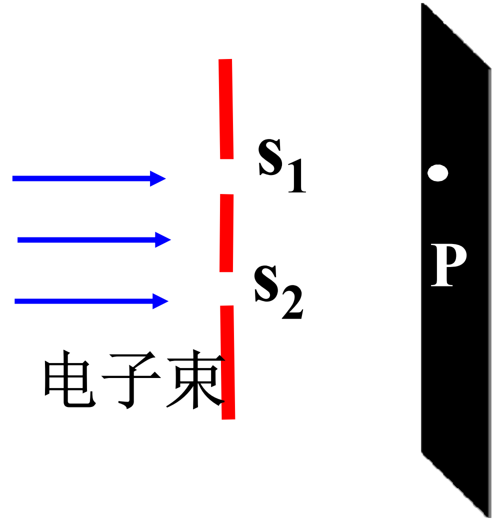
也是该体系的一个可能的状态(波函数),

若叠加中各状态间的差异无穷小，则应该用积分代替求和: $\Psi = \int C_n \Psi_n \, \mathrm{d}\, n$

这里 C_n为任意复常数。

$|C_n|^2$为该体系处于Ψ_n状态的概率。

以电子双缝衍射为例：



开S_1，电子出现在屏P的波函数——ψ_1

开s2，电子出现在屏P的波函数——ψ_2

S_1S_2同时开，电子出现在屏P的波函数——

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2$$

如果两个单缝相同，则 $C_1 = C_2$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

§19-7　不确定关系

根据牛顿力学理论，
质点的运动都沿着一定的轨道，
在轨道上，
任意时刻质点都有确定的位置和动量。
在牛顿力学中也正是用位置和动量来
描述一个质点在任一时刻的运动状态的。

波动性使得实际粒子与牛顿力学所
设想的“经典粒子”根本不同。

对于实际的粒子，由于其粒子性，
可以谈论它的位置和动量，
但由于其波动性，
它的空间位置需要用概率波来描述，
而概率波只能给出粒子在各处出现的概率，
所以在任一时刻粒子不具有确定的位置，
与此相联系，
粒子在各时刻也不具有确定的动量。
这也可以说，由于波粒二象性，
在任意时刻粒子的位置和动量
都有一个不确定量。

1927年，海森伯分析了一些理想实验
并考虑到德布罗意关系，
得出不确定度关系（测不准关系）：

粒子在同一方向上的坐标和动量不能同时确定。

如果用Δx代表位置的测量不确定度（不确定范围），用Δp_x代表沿x方向的动量的测量不确定度，那么它们的乘积有一个下限，即

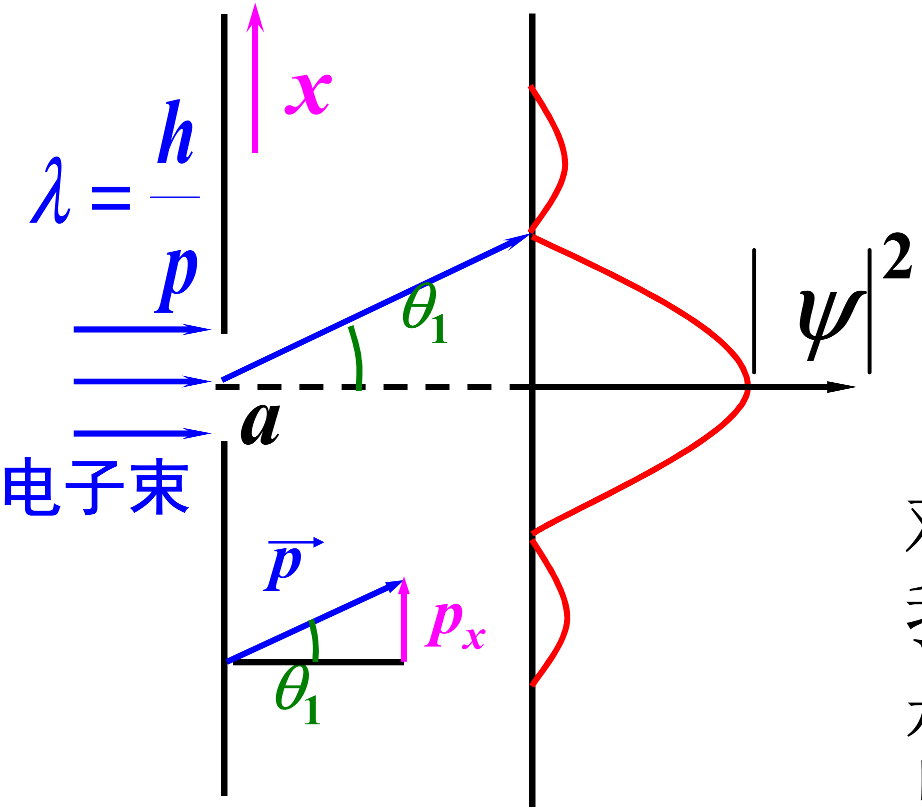
$$\boxed{\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}}$$

1932年诺贝尔物理学奖获得者

—— 海森伯

- 德国人
- **Werner Karl Heisenberg**
- **1901-1976**
- 量子力学的创立

以电子单缝衍射为例来分析。



一束动量为 p 的电子通过宽为 Δx 的单缝后发生衍射，在屏上形成衍射条纹。

对一个电子来说，我们不能确定地说它是从缝中哪一点通过的，只能说它是从宽为 Δx 的缝中通过的，

因此它在 x 方向上的位置不确定量就是 Δx 。

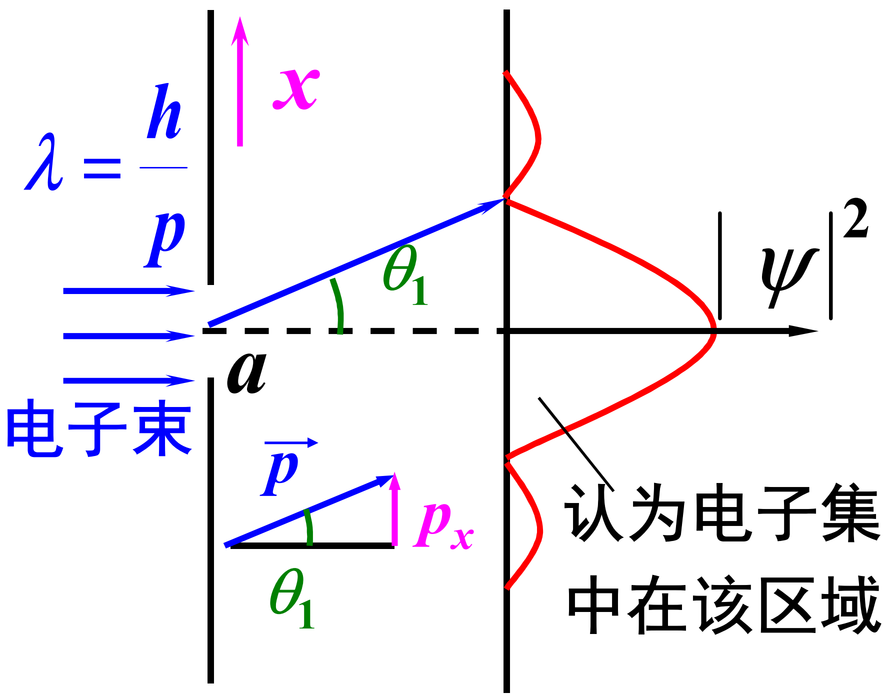
假定电子通过单缝前沿 x 方向的动量为零 $p_{x0}=0$

由于发生衍射，屏上电子落点沿 x 方向展开，

说明电子通过缝时已有了不为零的 p_x 值。

忽略次级极大，认为电子都落在中央亮纹内，

电子在通过缝时，运动方向可以有大到 θ_1 角的偏转。



可知一个电子在通过缝时在 x 方向动量的分量的大小为下列不等式所限

$$0 \le p_x \le p\sin\theta_1$$

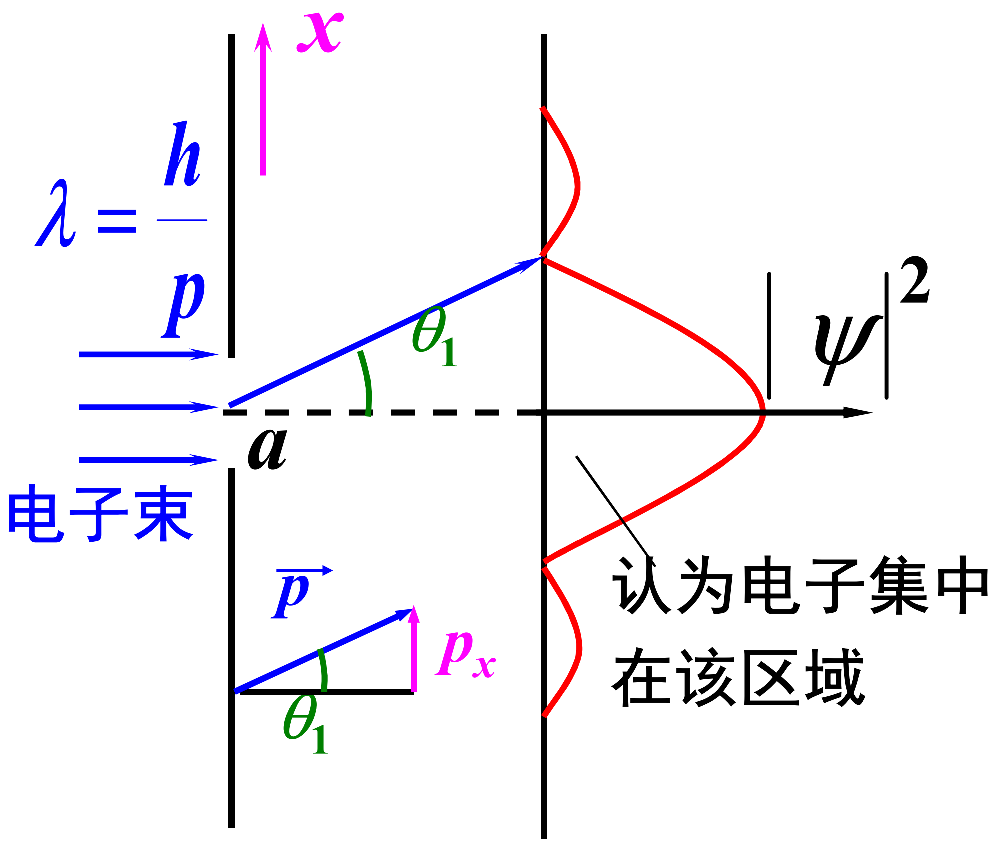
一个电子通过缝时在 x 方向上的动量不确定量

$$\Delta p_x = p\sin\theta_1$$

考虑到衍射条纹的次级极大 $\Delta p_x \geq p\sin\theta_1$

由单缝衍射公式，

第一级暗纹中心的角位置 θ_1 　 $\Delta x\sin\theta_1 = \lambda$



根据德布罗意公式

$$\lambda = h/p$$

$$\Delta x\sin\theta_1 = h/p$$

$$\boxed{\Delta x\Delta p_x \geq h}$$

更一般的理论给出 $\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq h/4\pi}$

$$\boxed{\Delta y \Delta p_y \geq h/4\pi \qquad \Delta z \Delta p_z \geq h/4\pi}$$

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}}$$

这三个公式就是位置坐标和动量的不确定关系。

它们说明粒子的位置坐标不确定量越小，

则同方向上的动量不确定量越大。

同样，某方向上动量不确定量越小，

则此方向上粒子位置的不确定量越大。

总之，在表明或测量粒子的位置和动量时，

它们的精度存在着一个终极的不可逾越的限制。

考虑一个粒子在一段时间 Δt 内的动量 $\vec{p}$ 为沿 x 方向，而能量为 E 。

相对论关系 $p^2c^2 = E^2 - m_0^2c^4$

则其动量的不确定量为 $\Delta p = \dfrac{E}{pc^2}\Delta E$

在时间Δt内，粒子可能发生的位移为：

$$\Delta x = V\Delta t = \frac{p}{m}\Delta t$$

这位移也就是在这段时间内粒子的位置坐标不确定度。

$$\Delta x \Delta p = \frac{E}{mc^2} \Delta E \Delta t$$

$$\Delta x = \frac{p}{m} \Delta t$$

$$\Delta p = \frac{E}{pc^2} \Delta E$$

$$E = mc^2$$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

关于能量和时间的不确定关系

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

不确定关系：

$$\boxed{\Delta x\cdot\Delta p_x\geq\frac{\hbar}{2},\quad \Delta y\cdot\Delta p_y\geq\frac{\hbar}{2},\quad \Delta z\cdot\Delta p_z\geq\frac{\hbar}{2}}$$

能量和时间之间的不确定关系：

$$\boxed{\Delta E\cdot\Delta t\geq\frac{\hbar}{2}}$$

Δt：测量能量经历的时间范围，ΔE：测量误差。

$\boxed{\tau\Gamma\sim\hbar}$ τ：寿命，Γ：能级宽度。

不确定关系是微观体系具有波粒二象性的必然结果
本质上不是由测量仪器对体系干扰造成。

例19－5

（1）设子弹的质量为 $0.01kg$，枪口的直径为 $0.5cm$，试用不确定性关系计算子弹射出枪口时的横向速度。

（2）原子的线度为 $10^{-10}m$，求原子中电子速度的不确定量。

解：（1）枪口直径可以当作子弹射出枪口时的位置不确定量 Δx。由于 $\Delta p_x = m\Delta V_x$ ，所以

$$\Delta V_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x m} = \frac{1.05\times 10^{-34}}{2\times 0.01\times 0.5\times 10^{-2}} = 1.1\times 10^{-30}\,(m/s)$$

这也就是子弹的横向速度。与子弹飞行速度每秒几百米相比，这一速度引起的运动方向的偏转是微不足道的。因此对于子弹这种宏观粒子，它的波动性不会对它的“经典式”运动以及射击时的瞄准带来任何实际的影响。

（2）“电子在原子中”，就意味着电子的位置不确定量为 $\Delta x = 10^{-10} m$ ，由不确定关系可得

$$\Delta V_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x m} = \frac{1.05\times 10^{-34}}{2\times 9.11\times 10^{-31}\times 10^{-10}} = 0.6\times 10^{6} (m/s)$$

按照牛顿力学计算，氢原子中电子的轨道运动速度约为 $10^{6}\, m/s$ ，它与上面的速度不确定量有相同的数量级。可见，对原子范围内的电子，谈论其速度是没有什么实际意义的。这时电子的波动性十分显善，描述它的运动时必须抛弃轨道概念，
代之以说明电子在空间的概率分布的电子云图像。

例19－6

(1) J/ψ 粒子的静能为 $3100MeV$ ，

寿命为 $5.2\times10^{-21}s$ 。

它的能量不确定度是多大?占静能的几分之几?

(2) ρ 介子的静能是 $765MeV$ ，

寿命是$2.2\times10^{-24}s$ 。

它的能量不确定度多大?又占其静能的几分之几?

解： $\Delta E=\hbar/2\Delta t$

此处 Δt 即为粒子的寿命。

（**1**）J/ψ 对于粒子

$$\Delta E = \hbar/2\Delta t = \frac{1.05\times10^{-34}}{2\times5.2\times10^{-21}\times1.6\times10^{-13}} = 0.063(MeV)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{0.063}{3100} = 2.0\times10^{-5} = 0.002\%$$

（**2**） ρ对于介子

$$\Delta E = \hbar/2\Delta t = \frac{1.05\times10^{-34}}{2\times2.2\times10^{-24}\times1.6\times10^{-13}} = 150(MeV)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{150}{765} = 0.20 = 20\%$$

▲能级自然宽度和寿命的关系

设体系处于某能量状态的寿命为Δt，则该状态能量的不确定程度（能级自然宽度）$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t}$，

假定原子中某一激发态的寿命$\Delta t \sim 10^{-8}$ s，则

由此给出能级宽度 $\Delta E \geq 3.3\times 10^{-8}$ eV

存在不确定关系的一对物理量互称共轭物理量。

不确定关系是由微观粒子的固有属性决定的，与仪器精度和测量方法的缺陷无关。

宏观现象中，不确定关系的影响可以忽略。