

量子物理基础

一、基本要求

1. 了解基尔霍夫定律及黑体辐射的两个实验定律。了解普朗克量子假设。
2. 理解光电效应和康普顿效应的实验规律，以及爱因斯坦的光子理论对这两个效应的解释。理解光的波粒二象性。
3. 了解德布罗意的物质波假设，理解实物粒子的波粒二象性。
4. 理解描述物质波动性的物理量（波长、频率）与粒子性的物理量（动量、能量）间的关系。
5. 理解氢原子光谱的实验规律及玻尔的氢原子理论。了解该理论的意义和局限性。
6. 了解波函数及其统计解释。了解一维坐标动量不确定关系。了解一维定态的薛定谔方程。
7. 了解如何用波观点说明能量量子化。了解角动量量子化及空间量子化。了解斯忒恩—盖拉赫实验及微观粒子的自旋。
8. 了解描述原子中电子运动状态的四个量子数，了解泡利不相容原理和原子的电子壳层结构。

二、内容提要

1. 黑体辐射

基尔霍夫定律 物体中作热运动的带电粒子所辐射的电磁波称为热辐射。处于同温度的各物体，它们的单色辐射本领与单色吸收率的比值彼此相等。即

$$\frac{e^A(\lambda, T)}{a^A(\lambda, T)} = \frac{e^B(\lambda, T)}{a^B(\lambda, T)} = \frac{e^C(\lambda, T)}{a^C(\lambda, T)} = \dots = e^0(\lambda, T)$$

式中 $e^0(\lambda, T)$ 表示平衡热辐射场的单色辐射通量。

黑体 单色吸收率恒等于 1 的物体称为黑体。黑体的单色辐射本领即为 $e^0(\lambda, T)$ 。

斯忒藩—玻尔兹曼定律 黑体在某一温度下的总发射本领 $E^0(T)$ 与绝对温度 T 的四次方成正比：

$$E^0(T) = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

维恩位移定律 黑体的峰值波长 λ_m 与绝对温度 T 成反比：

$$\lambda_m T = b, \quad b = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

普朗克量子假设 一个频率为 ν 的谐振子其能量只能取 $h\nu$ 的整数倍。普朗克常数

$$h = 6.62606876(52) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

2. 光电效应

用紫外线照射金属时，有电子从金属中逸出，这种现象称为光电效应。

光电实验规律

(1) 红限频率的存在

只有当入射光的频率大于某一值 ν_0 时，才能从金属表面释放电子。当入射光的频率 $\nu < \nu_0$ 时，无论光强多强、照射时间多长、加的正向电压多大，都不会有光电流产生，即不能发生光电效应。而 $\nu > \nu_0$ 的光都能产生光电效应。这一频率 ν_0 称为红限频率，相应的光波长 λ_0 称为红限波长。

不同金属的红限频率不同。

(2) 光电流与正向电压的关系

当用大于红限频率的某固定频率的光照射某金属时，光强一定时，光电流随加速电压的增加而增加；当加速电压增加到一定值时，光电流不再增加，而是达到一饱和值 i_m 。

饱和现象说明，此时，单位时间内从阴极 K 逸出的光电子已经全部阳极 A 接收。

(3) 饱和电流与入射光强的关系

当用大于红限频率的某固定频率的光照射某金属时，饱和电流 i_m 与光强 I 成正比。这说明，单位时间内阴极 K 逸出的光电子数与入射光强成正比。

(4) 截止电压

用大于红限频率的某固定频率的光照射某金属时，当加速电压减小到零，并反向（减速电压）增加时，电流并不为零。仅当反向电压等于某值 U_c 时，电流为零；再增加反向电压，电流一直为零。这一电压值 U_c 称为截止电压。

截止电压的存在说明，此时，从阴极 K 逸出的具有最大初动能的光电子，由于受到外加电场的阻碍，也不能到达阳极 A 了。根据能量分析，得到光电子从阴极 K 逸出时的最大初动能与截止电压的关系

$$\frac{1}{2}mV_m^2 = eU_c$$

(5) 截止电压与入射光频率的关系

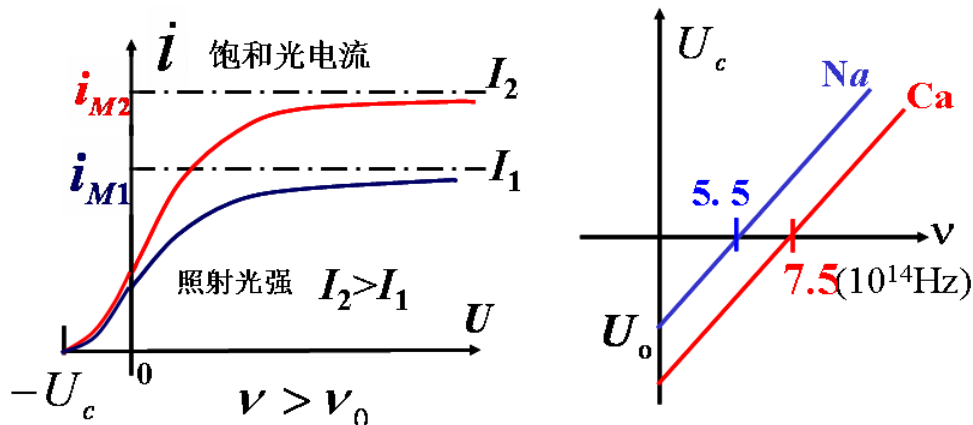
用大于红限频率的某固定频率的光照射某金属时，截止电压与入射光频率成线性关系。而且，对于不同的金属材料，其直线平行。

$$U_c = k\nu - U_0$$

式中， k 是普适常数（直线斜率），与材料无关；不同材料 U_0 值不同。

(6) 光电效应与光照时间的关系

光电子的逸出，几乎是在光照射到金属表面的那一刻发生的，其延时在 $10^{-9}s$ 以下。即使用极弱的光，只要光频率大于红限频率，光电效应的发生几乎与光照时间无关。



以上现象用光的波动理论无法解释。如果把光看成纯粹的电磁波，则光电子的初动能应与照射光的强度有关；只要照射时间足够长，使电子的能量充分累积，最终一定能产生光电子，而不会存在极限频率；电子需要能量积累过程，一定会存在一个滞后的时间，这些都与实验规律相矛盾。

康普顿效应 X 射线照射在石墨上产生散射。在散射光中除了有与入射光相同的波长为 λ_0 的射线外，还有波长为 $\lambda > \lambda_0$ 的射线，这种散射光称为康普顿散射光。康普顿散射光的波长 λ 与入射光波 λ_0 之差 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ ，随散射角 φ 增大而增大。对所有散射物质，同一散射角 φ 的波长偏移量 $\Delta\lambda$ 都相同。

经典理论对康普顿效应也无法解释。按照经典电磁理论，当电磁辐射通过物质时，被散射的辐射应与入射辐射具有相同的波长

爱因斯坦的光子理论 光是以光速运动的粒子流，这些粒子称为光子。每一光子的能量为 $\varepsilon = h\nu$ 。光强决定于单位时间内通过垂直于光子运动方向的单位面积的光子数 N 。单色光的光强等于 $I = Nh\nu$ 。光子只能作为一个整体被发射和吸收。

光子的质量为(光子的静质量为零)

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

光子的动量为

$$P = \frac{h}{\lambda}$$

光子理论对光电效应的解释 金属中的自由电子吸收一个光子而从金属中逸出时，根据能量守恒定律：

$$\frac{1}{2}mV_m^2 = h\nu - A$$

这就是光电效应的爱因斯坦方程。 A 是电子从金属中逸出时所需的逸出功， $\frac{1}{2}mV_m^2$ 是电子逸出后的初动能。

由爱因斯坦光子理论可知：

①如果要发生光电效应，必须

$$h\nu \geq A, \nu \geq A/h$$

可见，如果要发生光电效应，入射光频率必须大于某一频率 $\nu_0 = A/h$ ，从而解释了光电效应的红限频率的存在。

②当用大于红限频率的光入射（可以发生干涉效应），单位时间内打下的光电子数与入射光强（光子数）成正比。如果加速电压不是很强，单位时间产生的光电子不能全部被输送到阳极，所以光电流随加速电压的增高而增大；当加速电压增高到一定程度，保证单位时间内产生的光电子都被输送到阳极，再增高加速电压，没有光电子可以被输送到阳极，加速电压再增高，光电流不会再增大，光电流达到了饱和。

③在可以发生光电效应的前提下，入射光强度增高，单位时间内入射的光子数增大，发生的光电效应数增高，单位时间内打下的光电子数增高，饱和电流增高。饱和电流与入射光强成正比。

④当入射光子的能量大于该金属的脱出功（发生光电效应），光电子还有一定的初动能（最大初动能是入射光子能量与脱出功之差），可以自动向阳极运动，即使不加加速电压，光电子也可以自己到达阳极，形成光电流。只有加反向电压（使光电子减速），才能使光电流减小。只有加的反向电压达到某一值时，最大初动能的光电子也不能到达阳极，光电流为零。所以，存在反向截止电压。

⑤截止电压与光电子的最大初动能的关系为

$$\frac{1}{2}mV_m^2 = eU_c$$

所以

$$U_c = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}$$

即截止电压与入射光频率成线性关系，斜率 $k = h/e$ 与材料无关。当然，直线的截距与材料有关。

⑥光电子在吸收一个充足能量的光子后马上就能产生。

由此可见，光子理论与实验规律符合得很好。

光子理论对康普顿效应的解释 能量为 $h\nu_0$ 的光子与原子中束缚较松的电子“碰撞”而散射，电子因反冲获得动能，因而散射光子的能量小于入射光子能量，其波长 λ 也就大于入射光的波长 λ_0 ；光子与原子中束缚很紧的电子“碰撞”，相当于光子与整个原子交换能量和动量，因原子的质量比电子质量大得多，因而散射光与入射光的波长差异很小，这就是波长不变的散射光。

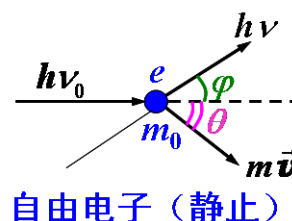
一个光子与自由而静止的电子的碰撞，如图所示。利用能量守恒、动量守恒和相对论关系式可推得光子散射后波长的改变量

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\varphi)$$

这就是康普顿散射公式。式中 m_e 是电子的静止质量， φ 为

散射角： $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \times 10^{-3} \text{ nm}$ ，称为电子的康普顿波

长，其物理意义是：能量与电子的静止能量相等的光子，应具有



自由电子（静止）

光的波粒二象性 光的干涉、衍射、偏振等现象表明光具有波动性。热辐射、光电效应、康普顿效应等现象说明光又具有粒子性。光的这种双重性质被称为波粒二象性。

3. 德布罗意波

一个具有确定能量 E 和动量 P 的粒子，它的行为相当于一个沿着动量方向传播的单色平面波。其频率和波长由下式决定：

$$E = h\nu, \quad P = \frac{h}{\lambda}$$

这样的波称为德布罗意波（也称物质波）。

粒子作为一个整体只能在某处出现，这是粒子性的表现；它在某处出现的概率由波强度决定，这是波动性的表现。这就是物质的波粒二象性。波粒二象性就是通过上式联系起来的。

4. 波函数

具有确定动量 P 和能量 E 的自由粒子相当于一个单色平面波，其波函数为

$$\Psi(t, x) = A \exp\left[-i \frac{2\pi}{h} (Et - Px)\right] = \psi(x) \exp\left(-i \frac{2\pi}{h} Et\right)$$

平面波的传播方向就是粒子动量的方向。其中

$$\psi(x) = A \exp\left(i \frac{2\pi}{h} Px\right)$$

称为振幅波函数(定态波函数)。

一般情况下，粒子的状态可用波函数 $\psi(x, y, z)$ 来描写。其意义如下：粒子在某处出现的概率密度 $w(x, y, z)$ 与该处波函数模的平方成正比

$$w(x, y, z) \propto |\psi(x, y, z)|^2$$

知道了粒子的波函数，就可以知道处于该状态下的粒子的一切力学量的概率分布。

选取适当常数因子，可使波函数归一化，即

$$\iiint |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1$$

则此归一化波函数的模的平方就等于概率密度 w 。

不确定关系 微观粒子的位置和动量不能同时确定，其不确定量满足海森伯不确定关系式，即

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\text{关于能量和时间的不确定关系: } \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

如果 $\Delta t \sim \tau$ 代表能级的寿命，则 ΔE 代表能级的宽度。

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar; \Delta E \Delta t \geq \hbar \quad (\text{我们考试如果用到，希望用这个})$$

5. 薛定谔方程

薛定谔方程 薛定谔方程是关于物质波的波动方程，这个方程和牛顿运动方程一样，不能从更基本的假设推导出来：它是量子力学的一个假定，它的正确与否只能靠实验来检定。

在势场中运动的微观粒子其波函数遵守

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, y, z, t) + U(x, y, z, t) \Psi(x, y, z, t)$$

式中 $U(x, y, z, t)$ 为微观粒子所在力场中势能。

定态薛定谔方程 若势能 U 不显含时间，薛定谔方程具有单色解，即波函数有如下形式解

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) \exp(-i2\pi\nu t) = \Phi(x, y, z) \exp(-i\frac{2\pi Et}{h})$$

而 $\Phi(x, y, z)$ 满足下式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi(x, y, z) + U(x, y, z) \Phi(x, y, z) = E \Phi(x, y, z)$$

称为定态薛定谔方程。常数 E 被解释为粒子的能量值。此时微观粒子所处的状态具有确定的能量值，称为定态。

由于归一化的波函数模的平方表示粒子在该处出现的概率密度，因此波函数必须满足单值、有限、连续的标准条件。定态薛定谔方程只能对某些 E 值才有满足该标准条件的解，因此粒子的能量只能取某些分立值。

一维无限深势阱 定态薛定谔方程化为

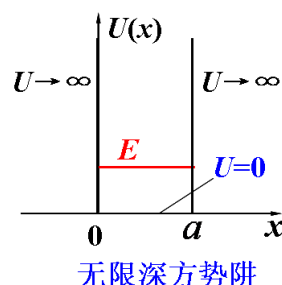
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) = E \Phi(x) \quad (0 < x < a)$$

其解（定态波函数）为

$$\Phi(x) = A \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (0 < x < a)$$

其能量值

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



6. 氢原子光谱

氢原子光谱实验规律 对于氢原子光谱，单位长度所包含的波数 $\tilde{\nu}$ ($\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$) 满足下列各式：

$$\text{赖曼线系（紫外区）} \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n'^2} \right), \quad n' = 2, 3, 4, \dots$$

$$\text{巴尔末线系（可见光）} \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n'^2} \right), \quad n' = 3, 4, 5, \dots$$

$$\text{帕邢线系（红外区）} \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n'^2} \right), \quad n' = 4, 5, 6, \dots$$

式中 $R = 1.0973731568549 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ 称为里德伯常数。

玻尔理论 玻尔把普朗克的量子概念应用于原子，作了如下假设：

①**定态假设** 原子系统中，电子只能处在一些不连续的稳定状态，其电子只能在一定的轨道上绕原子核作圆周运动，但不辐射能量。这时，原子系统处于一定的稳定状态，称为定态。

原子的一个稳定状态，对应于一定的原子能量 E_i ，这些能量值之间是不连续的

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$$

②**轨道量子化假设** 原子系统中的电子绕原子核圆周运动的角动量必须是 $\hbar = h/2\pi$ 的整数倍，即

$$L_n = mV_n r_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

③**量子跃迁假设** 原子能量的任何变化, 包括发射或吸收电磁辐射, 都只能在两个定态之间以跃迁方式进行。原子系统中在某一轨道上运动的电子, 由于某种原因从一个轨道跃迁到另一个轨道上时, 原子就从一个稳定状态跃迁到另一个稳定状态。同时, 原子吸收或辐射一个能量为 $h\nu$ 的光子。原子在两个定态 (分别属于能级 E_i 和 E_f) 之间跃迁时, 发射或吸收的电磁辐射的频率 ν , 由如下的频率条件给出:

$$h\nu_{if} = |E_i - E_f|, \quad \nu_{if} = \frac{|E_i - E_f|}{h}$$

玻尔理论对氢原子光谱作出了较好的解释, 但它的理论并不完善, 其根本缺陷是把电子当做经典粒子处理。

量子力学对氢原子的应用 电子在原子核的库仑场中运动, 其势能

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

具有确定能量 E 的电子定态波函数满足定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\Phi = E\Phi$$

氢原子电子处于束缚态, $E < 0$, 要使方程有满足标准条件的解, E 只能取如下分立值:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} E_1 = -13.6 \frac{1}{n^2} (eV) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

式中, n 称为主量子数, 它决定氢原子的能量。

电子绕核运动的角动量只能取如下分立值:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

式中, l 称为副量子数或角量子数, 它决定动量矩的大小。当主量子数 n 一定时, l 可取 n 个值。

角动量在任一方向的分量也是量子化的:

$$L_z = m_l \hbar, \quad m_l = -l, -(l-1), \dots, 0, 1, 2, \dots, (l-1), l$$

式中, m_l 称为磁量子数。它决定角动量的分量值 L_z 。当角量子数一定时, m_l 可取 $2l+1$ 个不同的值, 这叫做空间量子化。

7. 电子的自旋

电子除绕核公转外, 还有自旋, 因而有自旋角动量 S , S 也是量子化的。由史特恩盖拉赫实验(原子束在非均匀外磁场中会发生分裂)证明了电子的角动量在外磁场中的取向是量子化的

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \quad s = \frac{1}{2}$$

其中, s 称为自旋量子数。

对应自旋, 基态原子束在非均匀外磁场中分裂为两条, 说明自旋只有两个取向。自旋角动量在 z 轴方向的分量 S_z

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

式中, m_s 称为自旋磁量子数, 它只有两个值 $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 。

8. 原子的壳层结构

量子数 原子中电子的状态由四个量子数来确定。

①主量子数 $n = 1, 2, 3, \dots$, 电子在原子中的能量主要由 n 决定。

②角动量量子数 $l = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$, l 决定电子轨道角动量的大小。

③磁量子数 $m_l = -l, -(l-1), \dots, 0, 1, 2, \dots, (l-1), l$, m_l 决定电子轨道角动量在某一方向的分量。

④自旋磁量子数 $m_s = \pm \frac{1}{2}$, m_s 决定电子自旋角动量在某一方向的分量。

泡利不相容原理 在多电子的原子系统中,不可能有两个电子具有相同的状态。也就是说,描述电子状态的两组量子数不会全相同。

主量子数 n 相同的诸态属于同一壳层, $n=1,2,3,4,5,6,\dots$ 之壳层分别称为 K, L, M, N, O, P, \dots 壳层。

同一壳层中,角量子数 l 相同的诸态属于同一分壳层, $l=0,1,2,3,4,\dots$ 之分壳层分别用 s, p, d, f, \dots 表示。

n, l, m_l 相同, 但 m_s 不同的可能状态有 2 个。

n, l 相同, 但 m_l, m_s 不同的可能状态有 $2(2l+1)$ 个, 这些状态组成一个支壳层。

n 相同, 但 l, m_l, m_s 不同的可能状态有 $2n^2$ 个, 这些状态组成一个壳层。

能量最小原理 电子在原子诸壳层中的分配不同, 原子的能量就不同。能量最小的状态是原子最稳定的状态, 即原子的基态。原子处于基态时, 电子在原子诸壳层中的分配, 必须使原子的能量为最小值。

三、问题讨论

1. 黑体是否总是呈黑色?黑色的物体是否都是黑体?太阳光照射下黑体是否能无限制地升温?

答: 单色吸收率恒等于 1 的物体称为黑体, 这是一个理想模型。作为理想模型的黑体, 只是说它的单色反射率恒为零。它不反射由外界辐射来的能量, 但它本身仍要辐射能量。黑体并不一定是黑色的, 它的颜色是由它自身所发射的辐射频率所决定的。如果黑体的温度很低, 则它辐射的能量很少, 辐射的峰值波长会远大于可见光波长, 则呈现黑色。如果黑体温度较高, 辐射的能量大, 峰值波长处于可见光波段范围内, 就会呈现各种颜色。例如金属炼炉上的小孔可近似视为黑体, 而在高温工作条件下该小孔看上去十分明亮。

至于呈黑色的实际物体, 由于它的单色吸收率并不恒等于 1, 或者说它的单色反射率并不是恒为零, 一般不能称为黑体。

在太阳光照射下的黑体的温度也不会无限制地升温。由基尔霍夫定律可知: 对某种波长的辐射吸收强烈的物体, 对这种波长的辐射本领也大。在太阳光照射下的黑体吸收辐射能量使其温度升高的同时, 向外辐射的能量也增大。当黑体的温度上升到某一值时, 吸收的辐射能量与发射能量处在动态平衡时, 温度就不再上升。

2. 光电效应和康普顿效应都包含有电子与光子的相互作用过程, 这两种过程有什么不同?

答: 参与光电效应的金属电子是金属中的自由电子, 它不是完全自由的, 而是被束缚在金属表面以内。在光电效应中, 通常是一个电子吸收一个光子的过程, 电子与光子的相互作用是非弹性碰撞。在碰撞过程中能量守恒, 动量不守恒, 金属材料必取走部分动量。

而参与康普顿效应的散射物中的电子在光子能量较大时可看做是完全自由的。散射物中电子与光子的相互作用可近似看成弹性碰撞过程, 满足动量和能量守恒定律。光子把一部分能量传给电子后, 光子散射出去, 所以散射光波长比入射光波长大。

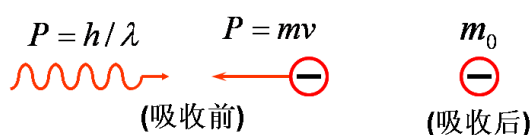
对完全自由的电子不能有光电效应可作如下讨论:

如果光子与电子作用后, 被电子吸收。在系统的质心系中看来: 作用前的光子和运动的电子, 作用后变成静止的电子。按能量守恒定律:

$$h\nu + mc^2 = m_0c^2$$

这意味着, $m_0 > m$,

违背相对论质量速度公式



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

因此，自由电子吸收光子的过程不可能发生，对自由电子不能有光电效应。光子与自由电子的相互作用只能产生康普顿效应。

3. X 射线通过某物质时会发生康普顿效应，而可见光则没有，为什么？

答：硬 X 射线光子(波长比 0.1nm 小的 X 射线称为硬 X 射线)的质量与电子静止质量差别不大，而可见光光子的质量比电子静止质量小得多。这样，按弹性碰撞理论，可见光光子与自由电子碰撞后，光子能量不会转移给电子，即散射波长不会改变。而可见光光子与束缚电子发生碰撞，光子能量更不会转移给电子了。

也可由康普顿散射公式

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\varphi)$$

来说明。如果入射光是波长 $\lambda = 400\text{nm}$ 的可见光，由上式可算出，当散射角 $\varphi = \pi/2$ 时，

$\Delta\lambda = 0.0024\text{nm}$ 。那么，波长的相对增量 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{0.0024}{400} = 0.0006\%$ ，如此小的波长偏移

是不容易观察出来的。所以可见光观察不到康普顿效应。而对于波长为 0.1nm 的 X 射线，

在同样的散射角 $\varphi = \pi/2$ 的情况下， $\Delta\lambda = 0.0024\text{nm}$ ， $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{0.0024}{0.1} = 2.4\%$ ，这个波长偏移是可以测出来的。

4. 根据量子力学解出的氢原子角动量量子化条件与玻尔理论的量子化条件有何区别？

答：量子力学解出的氢原子角动量量子化条件为

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

角动量的最小值可以为零。角动量分量(即角动量在某特殊方向如磁场方向)为

$$L_z = m_l \hbar, \quad m_l = -l, -(l-1), \dots, 0, 1, 2, \dots, (l-1), l$$

如图 (a)所示，为 $l = 2$ 时由量子力学得出的角动量分量的可能取值。

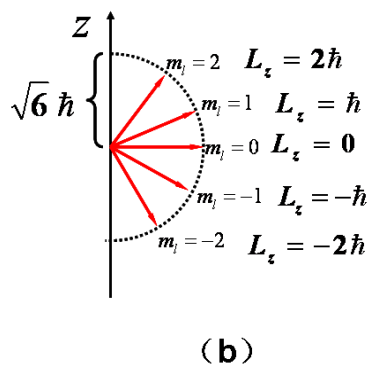
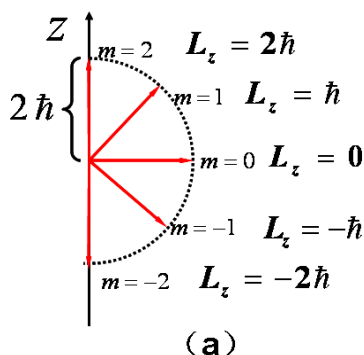
而玻尔氢原子理论的角动量量子化条件为

$$L_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

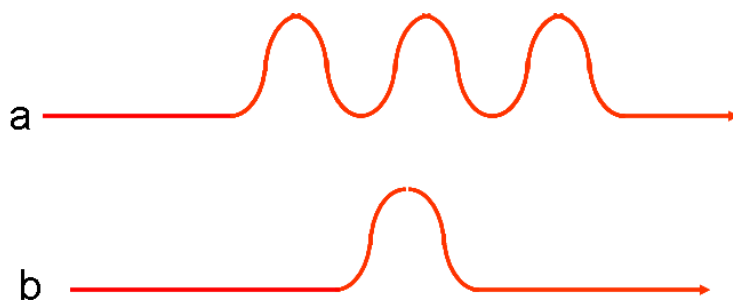
角动量的最小值不为零而是 \hbar 。角动量分量

$$L_z = m\hbar, \quad m = -n, -(n-1), \dots, 0, 1, 2, \dots, (n-1), n$$

当 $n = 2$ 时，其角动量量子化的矢量图如图 (b)所示。



5. 粒子 a, b 的波函数分别如图所示，若用位置和动量描述它们的运动状态，两者中哪一粒子的位置不确定量较大？哪一粒子的动量不确定量较大，为什么？



答：由图可知，a 粒子的波列长度大，其位置的不确定量较大。由不确定关系式

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2}$$

可知，a 粒子的动量不确定量较小。

b 粒子的波列长度小，则 b 粒子的位置不确定量较小，动量不确定量较大。

6. 图中直线 AB，表示光电子的初动能 E_k 与入射光频率 ν 的关系。问：

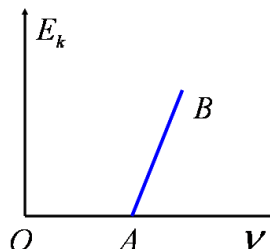
(1) 图中 A 点的频率表示什么？

(2) 对于不同的金属，直线 AB 的斜率是否相同？

答：由爱因斯坦的光电效应方程

$$\frac{1}{2} m V_m^2 = h\nu - A, \quad E_k = h\nu - A$$

(1) 对于 A 点， $E_k = 0$ ，故 $h\nu_0 - A = 0$ ， $\nu_0 = \frac{A}{h}$ ，



所以图中 A 点的频率表示光电效应的红限频率。

(2) AB 直线的斜率为 h ，是普朗克常数，与金属的种类无关，所以对于不同的金属，直线 AB 斜率是相同的，都为 h 。

7. 质量为 $40g$ 的子弹，以 $1000m/s$ 的速度飞行，它的德布罗意波长是多少？当子弹穿过小孔时，能否观察到衍射效应？

答：由 $P = \frac{h}{\lambda}$ ，得子弹德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mV} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{40 \times 10^{-3} \times 10^3} = 1.66 \times 10^{-35} m$$

根据衍射理论，只有当入射波波长与缝宽或障碍物的线度可比拟时，衍射现象才明显。这里子弹的德布罗意波长与缝宽或障碍物线度相比极小，衍射效应无法观测，波动性显示出来，子弹表现为粒子性。

四、解题指导

例 1 在加热黑体过程中，其最大单色辐射本领的波长由 $0.8\mu m$ 变到 $0.4\mu m$ ，则其总辐射本领增加了几倍？

分析：最大单色辐射本领的波长是指峰值波长 λ_m 。由于黑体加热过程中，最大单色辐射本领的波长由 $0.8\mu m$ 变到 $0.4\mu m$ ，相应的温度由 T_1 增加到 T_2 。总辐射本领随温度的升高而变大，并且与热力学温度的 4 次方成正比。

解：由维恩位移定律 $\lambda_m T = C$ ，

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} = \frac{0.8}{0.4} = 2$$

根据斯忒藩—玻尔兹曼定律，总辐射本领 $E^0(T) = \sigma T^4$ 知

$$\frac{E^0(T_2)}{E^0(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 2^4 = 16$$

即总辐射率增大为原来的 16 倍。

例 2 光电效应中光电子的最大初动能与入射光频率的关系如图所示。根据图，求：

(1)逸出功；(2)红限；(3)如能确定普朗克常量，请求之(a ， b 均为正值)。

分析：由爱因斯坦光电效应方程 $E_k = \frac{1}{2}mV_m^2 = h\nu - A$ ，可见光电

效应中光电子的最大初动能与入射光频率成线性关系。直线的斜率就是普朗克常量，直线截距的负值就是逸出功。若要发生光电效应，入射光子的能量必须大于逸出功。红限频率是指能够发生光电效应的最小入射光频率，即光电子的初动能为零时，入射光频率。

解：由爱因斯坦光电效应方程

$$E_k = \frac{1}{2}mV_m^2 = h\nu - A$$

与图中直线对比可得：

(1) 因为直线的截距为 $-b$ (对应于 $\nu = 0$ 时光电子的最大初动能)，所以逸出功为

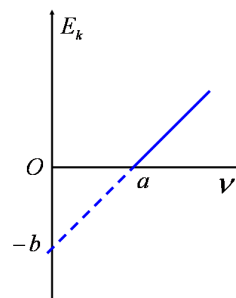
$$A = -(-b) = b$$

(2) 对应于 $E_k = 0$ 时， $\nu = a$ ，所以红限频率为

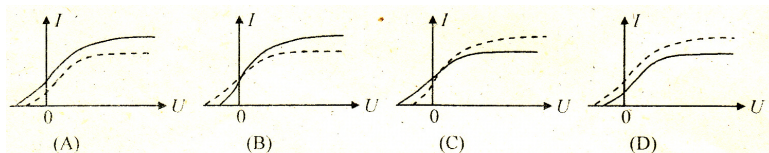
$$\nu_0 = a$$

(3) 直线的斜率即为普朗克常量

$$h = \frac{-b - 0}{0 - a} = \frac{b}{a}$$



例 3 以一定频率的单色光照射在某金属上，测出其光电流的曲线如图所示。然后在光强度不变的条件下增大照射光的频率，测出光电流的曲线如图中虚线所示。满足题意的图是哪个？



分析：截止电压：在发生光电效应的前提下（入射光子的能量大于逸出功），光电子具有一定的初动能向阳极自由冲去；如果加一个反向电压，阻止向阳极自由冲去，连最大初动能的光电子也刚好到达阳极即被反向电压产生的电场拉回阴极，从而没有光电流（光电效应已经发生），此时的反向电压，就是截止电压。注意，截止电压与入射光子的能量（频率）有关，入射光子的能量越大，光电子的初动能越大，截止电压越高，截止电压与光电子的初动能成正比。

饱和电流：在发生光电效应的前提下，如果所加的正向加速电压足够大，使得单位时间从金属表面逸出的光电子，在单位时间内全部被阳极接收，再增大正向电压，也不会有更多的光电子到达阳极，光电流达到了最大值，该光电流就是饱和电流。注意，饱和电流与单位时间从金属表面逸出的光电子数成正比，与单位时间内入射到金属表面的光子数成正比；在入射光频率一定的情况下，与光强成正比。

光强：单位时间，通过单位面积的光能量；即单位时间，通过单位面积的光子数与单个光子能量的乘积。

解：由爱因斯坦光电效应方程

$$E_k = \frac{1}{2}mV_m^2 = h\nu - A$$

增大照射光的频率，因为金属的逸出功 A 不变，所以逸出的光电子的动能 E_k 增大，而

$e|U_c| = E_k$ ，则遏止电压 $|U_c|$ 增加。由此分析可断定(A)和(C)是错误的。

在光强度不变的条件下增大照射光的频率，单位时间内照射到金属表面的光子数减少，则单位时间内产生的光电子数减少，饱和电流减小，故(D)是错误的。

在光强度不变的条件下增大照射光的频率，应该是饱和电流减小、截止电压增大，故只有(B)图满足题意。

例 4 设康普顿效应中入射 X 射线(伦琴射线)的波长 $\lambda_0 = 0.0700nm$ ，散射的 X 射线的波长 $\lambda = 0.0720nm$ ，且散射的 X 射线与入射的 X 射线垂直。求：

(1)反冲电子的动能 E_K ；

(2)反冲电子运动的方向与入射的 X 射线之间的夹角 θ 。

分析：康普顿效应中，入射光子与自由电子发生完全弹性碰撞，遵守能量守恒定律和动量守恒定律。入射光子将部分能量转移给电子，散射光子的能量比入射光子的能量小，波长变长。

解：设 \vec{P}_0 、 ν_0 和 \vec{P} 、 ν 分别为入射与散射光子的动量和频率， $m\vec{V}$ 为反冲电子的动量。

由康普顿散射公式

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi)$$

因为入射 X 射线与散射 X 射线垂直，即 $\varphi = \pi/2$ ，所以散射 X 射线的波长为

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_e c}$$

(1)根据能量守恒定律

$$m_e c^2 + h\nu_0 = mc^2 + h\nu$$

$$m_e c^2 + \frac{hc}{\lambda_0} = mc^2 + \frac{hc}{\lambda}$$

再根据爱因斯坦相对论，反冲电子的动能为

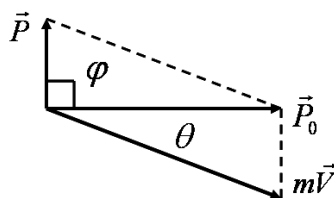
$$E_K = mc^2 - m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = hc\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0}\right) = 7.89 \times 10^{-17} J$$

(2)根据动量守恒定律

$$\vec{P}_0 = \vec{P} + m\vec{V}$$

由图知

$$\tan\theta = \frac{P}{P_0} = \frac{h/\lambda}{h/\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{0.0700}{0.0720} = 0.972, \quad \theta = 44.2^\circ$$



例 5 一光子的波长与一电子的德布罗意波长皆为 $0.5nm$ ，此光子的动量 P_o 与电子的动量 P_e 之比为多少？光子的动能 E_o 与电子的动能 E_e 之比为多少？

分析：由爱因斯坦光子理论和德布罗意物质波理论，可以求得某一波长的光子和电子的动量。粒子的动能是其总能量与静止能量之差，光子的静止质量为零，静止能量为零，光子的动能即为其总能量；电子的动能很小，可以不考虑相对论效应。

解：由物质波公式 $P = h/\lambda$ ，所以

$$\text{光子的动量为 } P_o = h/\lambda_o,$$

$$\text{电子的动量为 } P_e = h/\lambda_e,$$

因为 $\lambda_o = \lambda_e$ ，所以 $P_o/P_e = 1$ 。

因为光子的静质量为零，所以光子的动能即为总能量 $E_o = E = P_o c$ ；在不考虑相对论效应的条件下，电子的动能为

$$E_e = \frac{1}{2} m_e V^2 = \frac{P_e^2}{2m_e}$$

由此得到光子的动能与电子的动能之比为

$$\frac{E_o}{E_e} = \frac{P_o c}{P_e^2 / (2m_e)} = \frac{2m_e c}{P_e} = \frac{2m_e c \lambda_e}{h} = 4.12 \times 10^2$$

讨论：电子动能的相对论公式为

$$E_e = \sqrt{P_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2$$

由于 $\frac{P_e c}{m_e c^2} = 4.85 \times 10^{-3}$ ，由此说明电子的动能 E_e 很小，可以不考虑相对论效应。

例 6 氢原子光谱的巴尔末线系中，有一光谱线的波长为 $\lambda = 434nm$ ，试求：

(1) 与这一谱线相应的光子能量为多少电子伏特？

(2) 该谱线是氢原子由能级 E_L 跃迁到能级 E_K 产生的， L 和 K 各为多少？

(3) 大量氢原子从 $n = 5$ 能级向下能级跃迁，最多可以发射几个线系，共几条谱线？

请在氢原子能级图中表示出来，并标明波长最短的是哪一条谱线？

分析：氢原子光谱的巴尔末线系是可见光，是由高能级向第一激发态 (E_2) 的跃迁。

大量氢原子从 $n = 5$ 能级 (第四激发态) 向下能级跃迁，除基态外，也可以跃迁到第一、二、三激发态；第三激发态又可以向基态、第一、二激发态跃迁；第二激发态又可以向基态、第一激发态跃迁；第一激发态又可以向基态跃迁。

由高能态向基态跃迁，组成赖曼线系；由高能态向第一激发态跃迁，组成巴尔末线系；由高能态向第二激发态跃迁，组成帕邢线系；由高能态向第三激发态跃迁，组成布喇开线系。

最短波长的光，光子的能量最大，即从最高能态向最低能态跃迁所辐射的光子。

解：(1) 光子能量

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 2.86eV$$

(2) 由于此谱线是巴尔末线系，所以 $K = 2$ ，

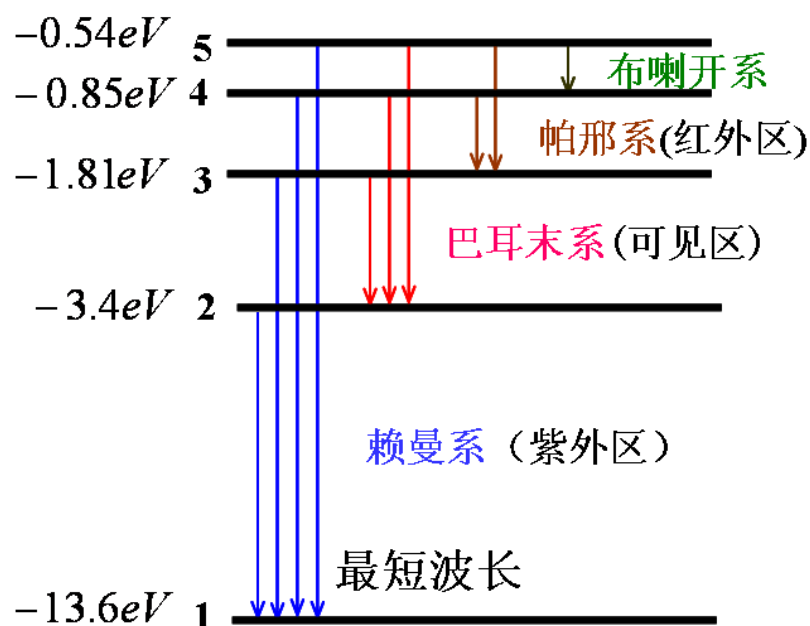
$$E_2 = \frac{E_1}{2^2} = \frac{-13.6eV}{4} = -3.4eV$$

$$E_L = h\nu + E_2 = 2.86eV - 3.4eV = -0.54eV$$

$$E_L = -0.54eV = \frac{E_1}{L^2} = \frac{-13.6eV}{L^2}$$

$$L = \sqrt{\frac{E_1}{E_L}} = \sqrt{\frac{-13.6}{-0.54}} = 5$$

(3) 从 $n = 5$ 能级向下能级跃迁，最多可以发射 4 个线系，共有 10 条谱线 (如图)。其中波长最短的是赖曼系中由 $n = 5$ 向 $n = 1$ 跃迁的谱线。



例 7 具有下列哪一能量的光子，能被处在 $n = 2$ 的能级的氢原子吸收？

(A).1.51eV (B).1.89eV (C).2.15eV (D).2.40eV

分析：当入射光子的能量刚好等于某一氢原子高能态与 $n = 2$ 的能级之差时，处在 $n = 2$ 的能级的氢原子才能吸收这一光子，使氢原子跃迁到该高能态。

解：对氢原子，其能级

$$E_n = \frac{1}{n^2} E_1, \quad E_1 = -13.6eV$$

基态 ($n = 1$) $E_1 = -13.6eV$

第一激发态 ($n = 2$) $E_2 = \frac{1}{4} E_1 = -3.4eV$

第二激发态 ($n = 3$) $E_3 = \frac{1}{9} E_1 = -1.51eV$

第三激发态 ($n = 4$) $E_4 = \frac{1}{16} E_1 = -0.85eV$

处在 $n = 2$ 能级的氢原子向 $n = 3$ 能级跃迁时需吸收能量 $\Delta E_1 = E_3 - E_2 = 1.89eV$ 。

处在 $n = 2$ 能级的氢原子向 $n = 4$ 能级跃迁时需吸收能量 $\Delta E_2 = E_4 - E_2 = 2.55eV$ 。

故只有 1.89eV 的光子才能被处在 $n = 2$ 的能级的氢原子吸收使之跃迁到 $n = 3$ 能级上。

例 8 电视机显象管中电子的加速电压为 $U = 9kV$ ，电子枪枪口直径取 $\Delta x = 0.50mm$ ，枪口离荧光屏的距离为 $L = 0.30m$ 。求荧光屏上一个电子亮斑形成的直径。这样大小的亮斑影响电视的清晰度吗？

分析：加速的电子从枪口出射时，在垂直于出射方向有一个位置不确定量（枪口直径）。根据不确定原理，电子从枪口出射时，应该垂直于出射方向有一个速度分量。电子在高速射向荧光屏的同时，还有横向速度，使得大量电子在荧光屏上形成一个散斑。

解：电子离开枪口时，纵向速度为

$$V = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 5.6 \times 10^7 m/s$$

电子在离开枪口时，最大横向不确定量为

$$\Delta x = 0.50mm$$

根据不确定关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

电子在离开枪口时，最大横向速度为

$$\Delta V = \frac{\hbar}{\Delta p_x} \approx \frac{\hbar}{2m\Delta x} = 0.116 \text{ m/s}$$

亮斑线度为

$$\Delta l = 2 \times (L \times \tan \theta) = 2L \frac{\Delta V}{V} = 1.2 \text{ nm}$$

不会影响电视的清晰度。

例 9 有一粒子沿 x 轴方向运动，其波函数为

$$\psi(x) = \frac{A}{1+ix}$$

(1) 将此波函数归一化；

(2) 求粒子按坐标的概率分布函数；

(3) 问在何处找到粒子的概率最大？

分析：在整个一维空间找到粒子的概率为 1，由此可以将波函数归一化；归一化波函数模平方即为概率分布函数。

解：(1) 波函数的归一化

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1-ix} \frac{A}{1+ix} dx = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi A^2$$

归一化常数为

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

归一化波函数为

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+ix}$$

(2) 按坐标的概率分布函数

$$w(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

(3) 当 $x=0$ 时， w 最大

