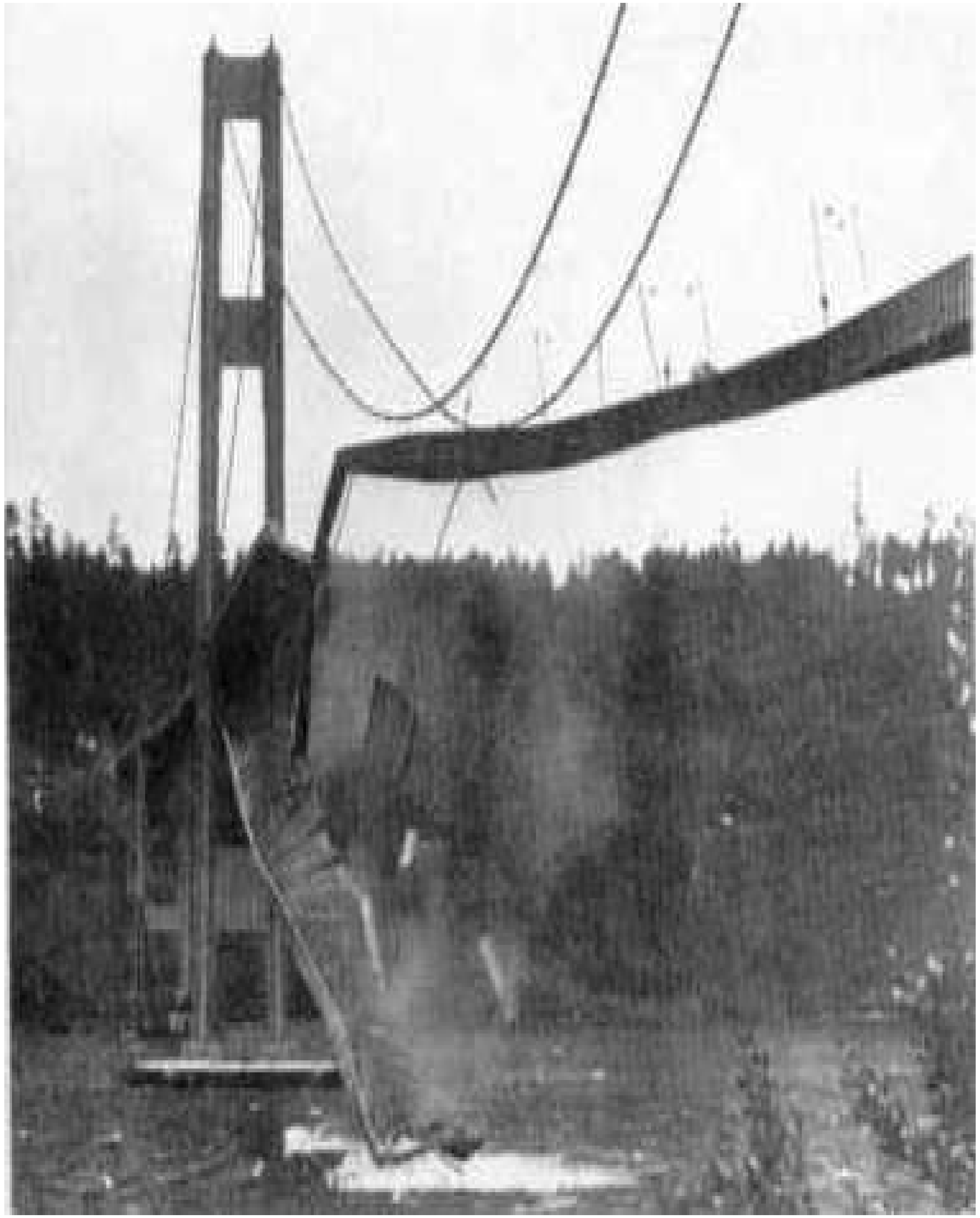
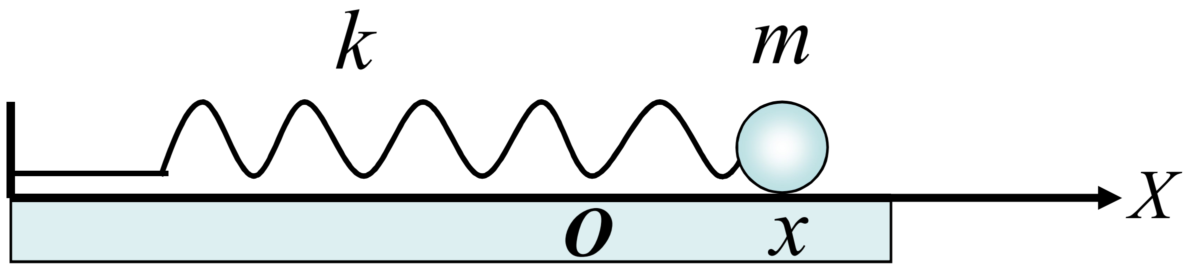
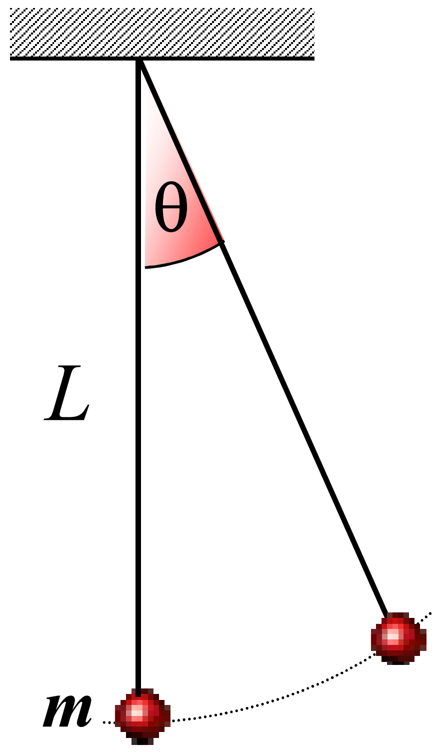


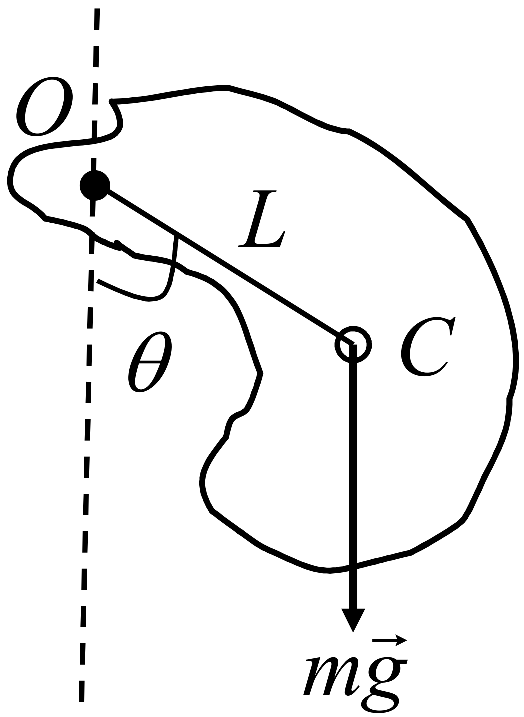
振动学基础

物体在一定位置附近往复的运动就叫机械振动，简称振动。

它是物体的一种运动形式。







广义振动：描写物质系统运动状态的物理量在某个数值附近的周期性变化。

最简单、最基本的振动是**简谐振动**

阅读

从日常生活到生产技术以及自然界中到处都存在着振动。

如：钟摆的摆动、心脏的跳动、 一切发声体都在振动、机器的运转总伴随着振动、海浪的起伏以及地震也都是振动、高温下分子的振动、电磁波中周期性变化的 电场强度和磁场强度、接收天线中电流的受迫振荡、晶体中的原子的振动… …

研究机械振动即可掌握振动的普遍规律。
振动和波的基本原理是声学、光学、电工学、无线电学、自动控制等科学技术部门的理论基础。

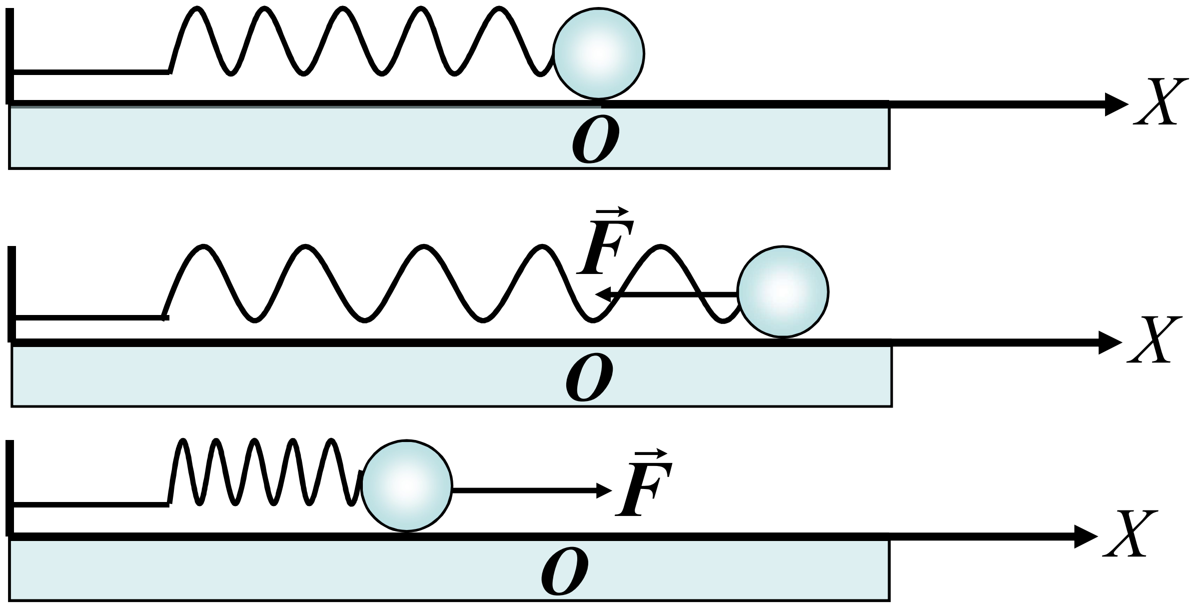
最简单的是简谐运动，它也是最基本的振动，
因为一切复杂的振动都可以认为是由许多简谐运动合成的.

§1 简谐振动的规律

物体运动时，如果离开平衡位置的位移(或角位移)按余弦函数(或正弦函数)的规律随时间变化，这种运动就叫简谐振动。

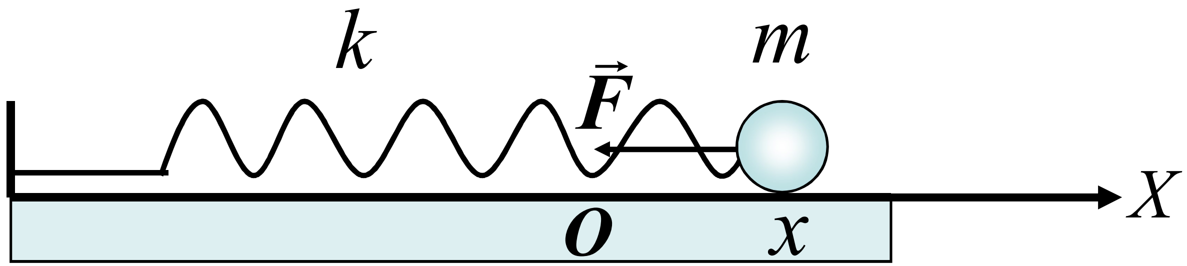
一 简谐振动的特征

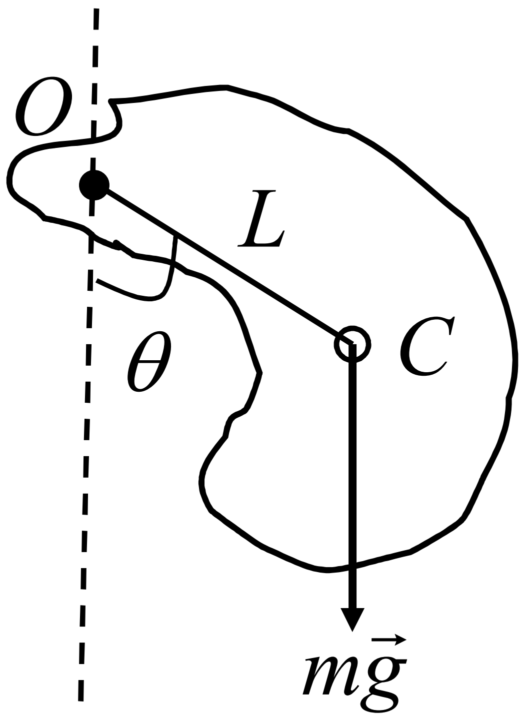
弹簧振子

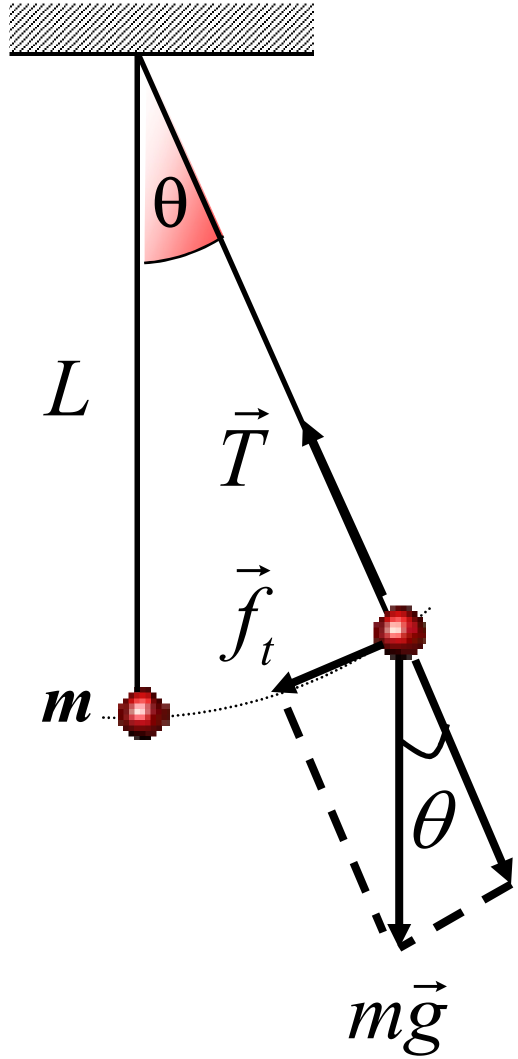


形成原因：物体受到线性回复力$F=-kx$以及物体的惯性的共同作用----自身因素

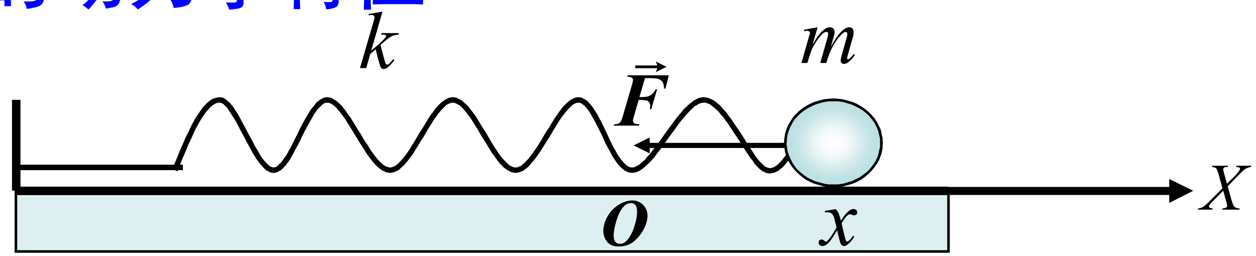
常见的谐振子模型：弹簧振子、单摆、复摆等都是谐振子。







1. 简谐振动的动力学特征



当物体的位置为 x 时，物体所受的弹性力为

$$\underline{F=-kx}$$

由牛顿第二定律得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m}x$$

令 $\omega=\sqrt{k/m}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0}$$

简谐运动的动力学方程

是判断简谐运动的依据

任一物理量x随时间t的变化关系如果满足微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0$$

其中ω是由系统固有性质决定的常量，则此物理量x做简谐振动，简称谐振动 --广义简谐运动定义

2. 简谐振动的运动学特征

该微分方程的解为

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$$

--简谐运动的运动学方程

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

任意时刻质点的速度

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

周期性

任意时刻质点的加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

简谐运动的加速度
和位移成正比而反向

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

3. 简谐振动的能量特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

当物体的位移为x时，弹簧振子的总机械能为:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

弹簧振子的总能量不随时间改变，即其机械能守恒。

可以证明单摆的微小振动是简谐振动

一根长度为 L ，质量可以忽略并且不会伸缩的细线，上端固定，下端系一可看作质点的重物 m 就构成一个单摆

把摆球从其平衡位置拉开一段距离放手，摆球就在竖直平面内来回摆动。

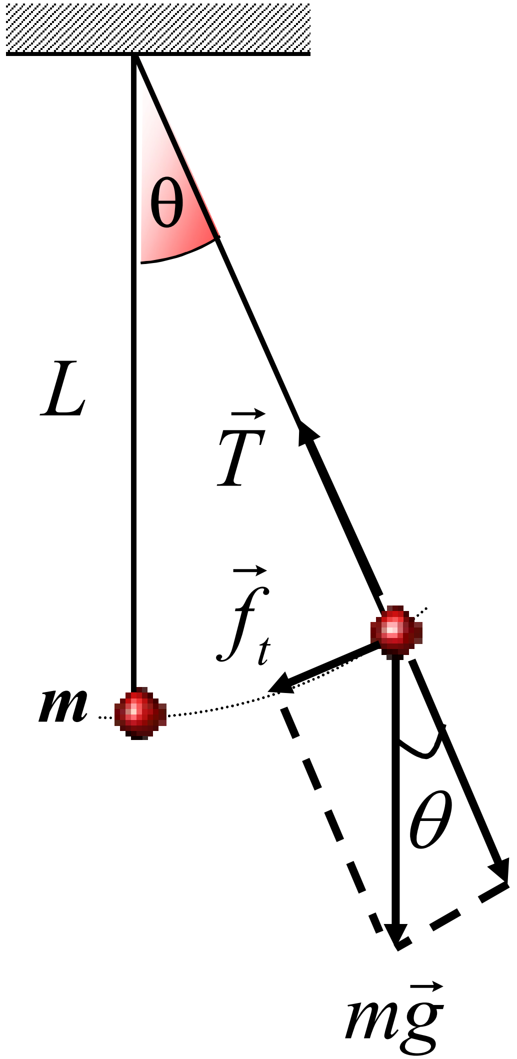
当摆线与竖直方向成 θ 角时，忽略阻力，取逆时针方向为角位移 θ 的正方向

摆球所受的合力沿切线方向的分力为

$$f_t = -mg\sin\theta$$

在角位移 θ 很小时，$\sin\theta \approx \theta$ ，所以

$$\boxed{f_t = -mg\theta}$$



二 描述简谐振动的特征量

1. 简谐振动的固有周期

简谐振动中，合外力F、位置（位移）x、速度v、加速度a、动能、势能均按照余弦或正弦规律变化，故

简谐振动最明显的特征是周期性

振动物体完成一次全振动所需要的时间----周期T

振动物体在1s内完成全振动的次数----频率ν

$$\boxed{T=\frac{1}{\nu}=\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu}$$

角频率

（圆频率）

简谐振动的角频率、周期和频率由振动系统本身的性质(包括力的特征和物体的质量)所决定。被称为振动系统的固有角频率、固有周期 、固有频率。

2. 振幅A

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

A描述了振动物体往返运动的范围和幅度，称为振幅。在数值上等于物体在振动过程中离开平衡位置的最大位移的绝对值。

弹簧振子的总能量与振幅的平方成正比，

这一点对其他的简谐运动系统也是正确的。

振幅不仅给出了简谐运动的运动范围，

而且还反映了振动系统总能量的大小，

或者说反映了振动的强度。

3. 初相位φ

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$t = 0$ 时的位移 x_0 和速度 v_0

$$x_0 = A\cos\varphi \qquad v_0 = -\omega A\sin\varphi$$

φ可唯一地确定振动物体的初始状态x_0和v_0. 反之， φ也可由初始条件来确定，称为初相位。

$$A = \sqrt{x_0^{\ 2} + \frac{v_0^{\ 2}}{\omega^2}} \qquad \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

代数解析法

$\omega t + \varphi$ ----相位， 描述振动物体t时刻的状态。

三　简谐振动的表示方式

1.振动函数

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

描述了弹簧振子中物体的位移，称为振动函数。

对于单摆的小振幅摆动，其振动函数为

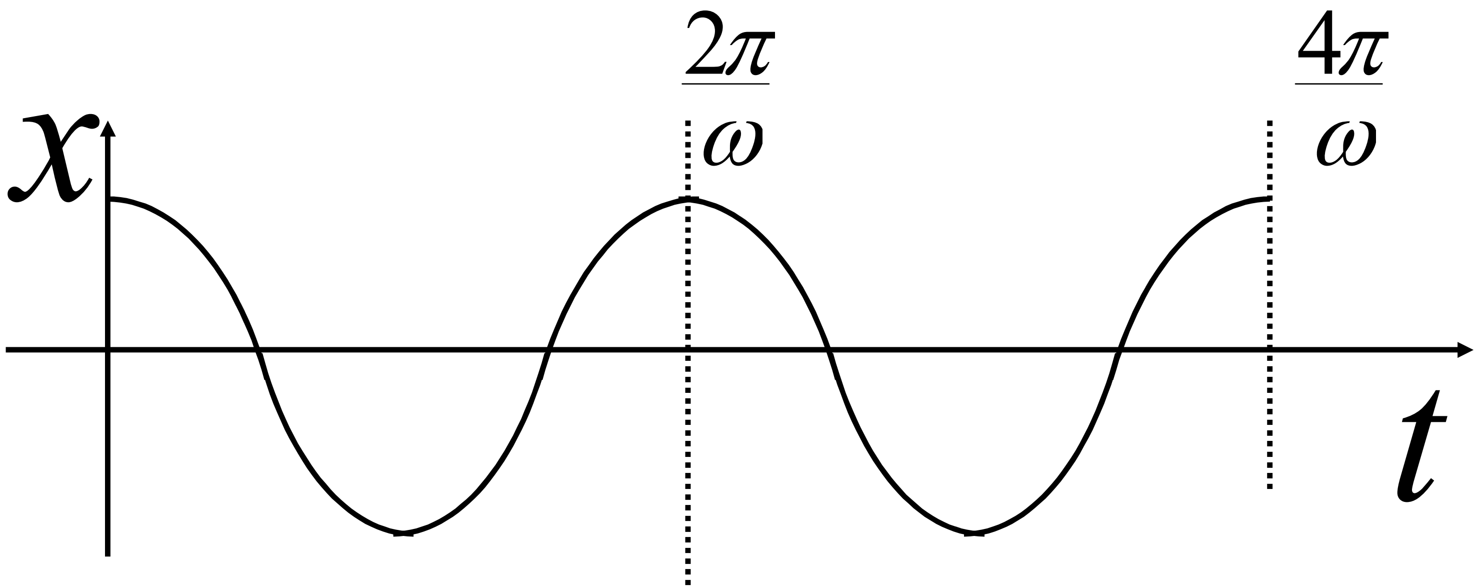
$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

对于其他的简谐振动，如电磁场

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi) \\ \vec{H}(t) = \vec{H}_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

2.振动曲线

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



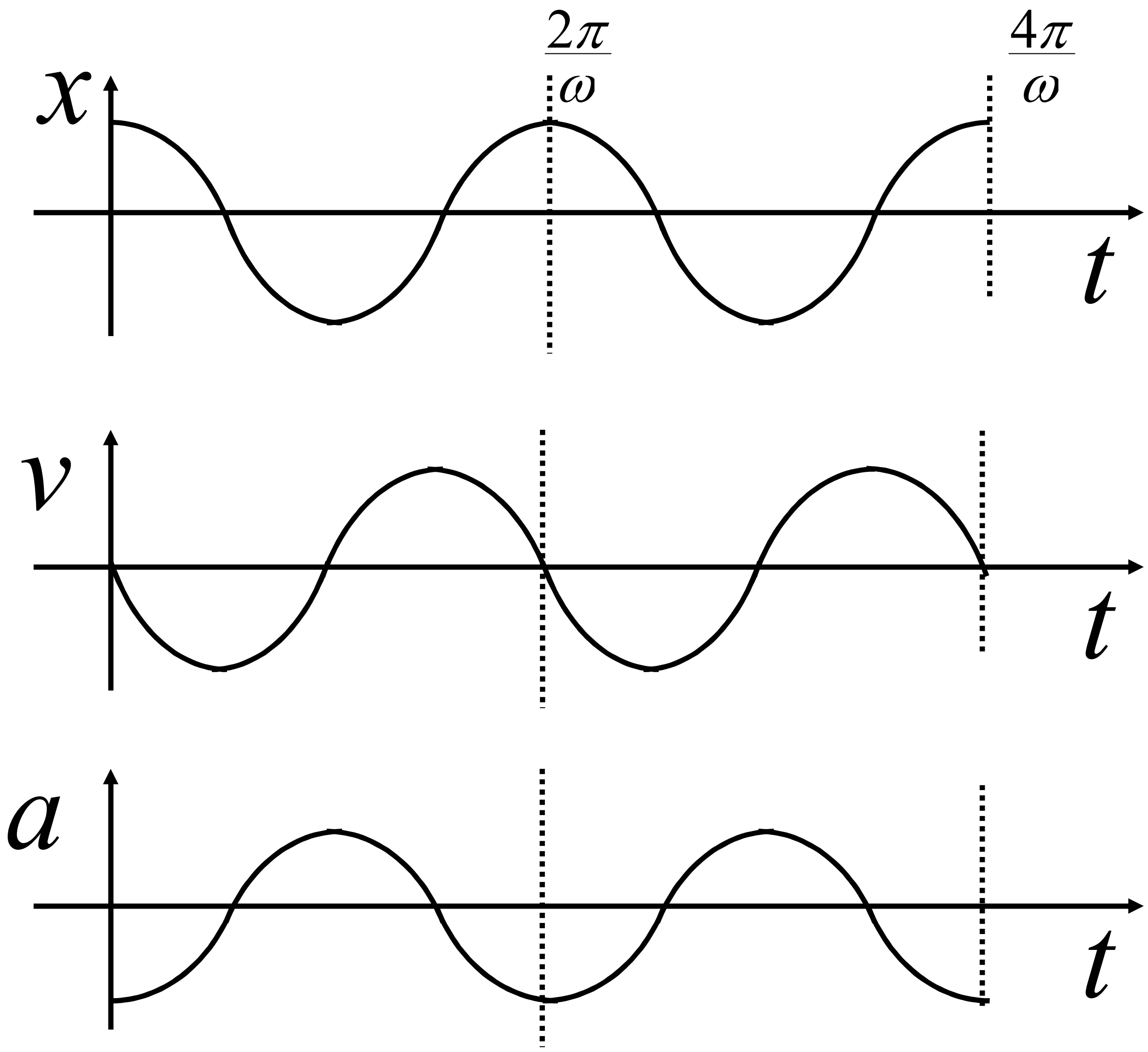
对于简谐振动，振动曲线是余弦（正弦）曲线，这也是简谐振动的一种表示。振动曲线表示的是振动的质点离开平衡位置的位移随时间的变化关系。

简谐振动中质点位移、速度、加速度与时间的关系：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

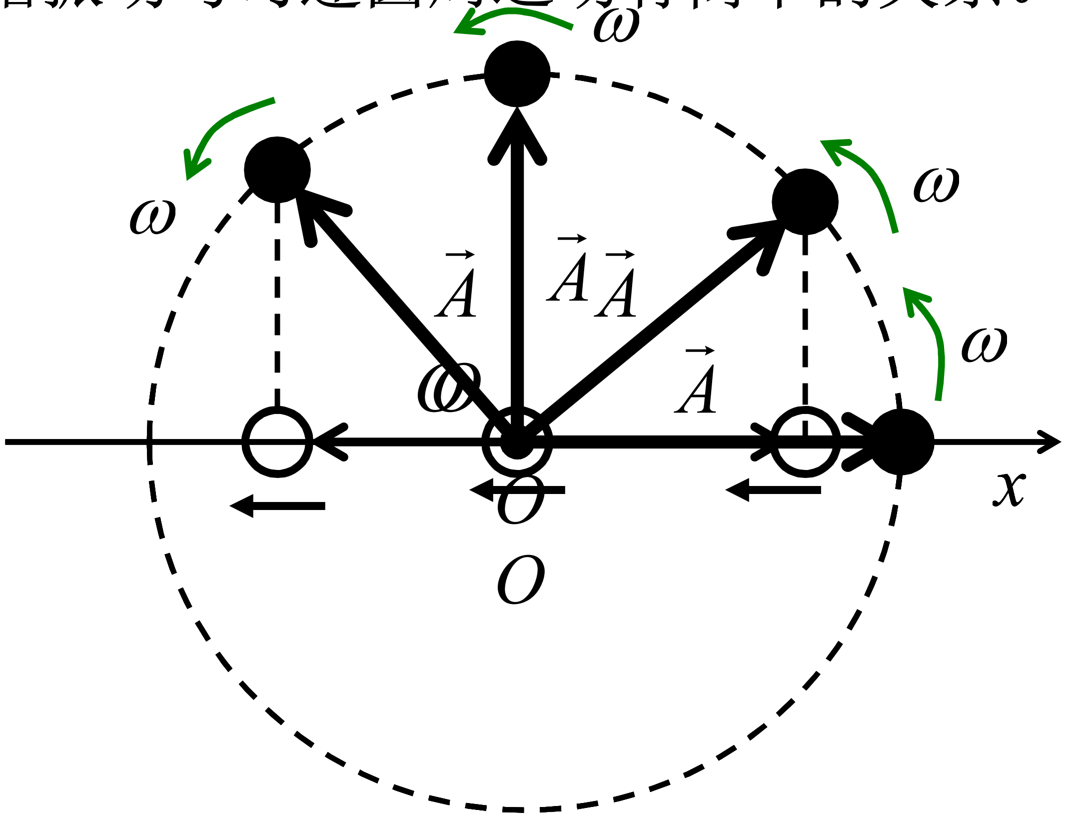
$$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



3.旋转矢量

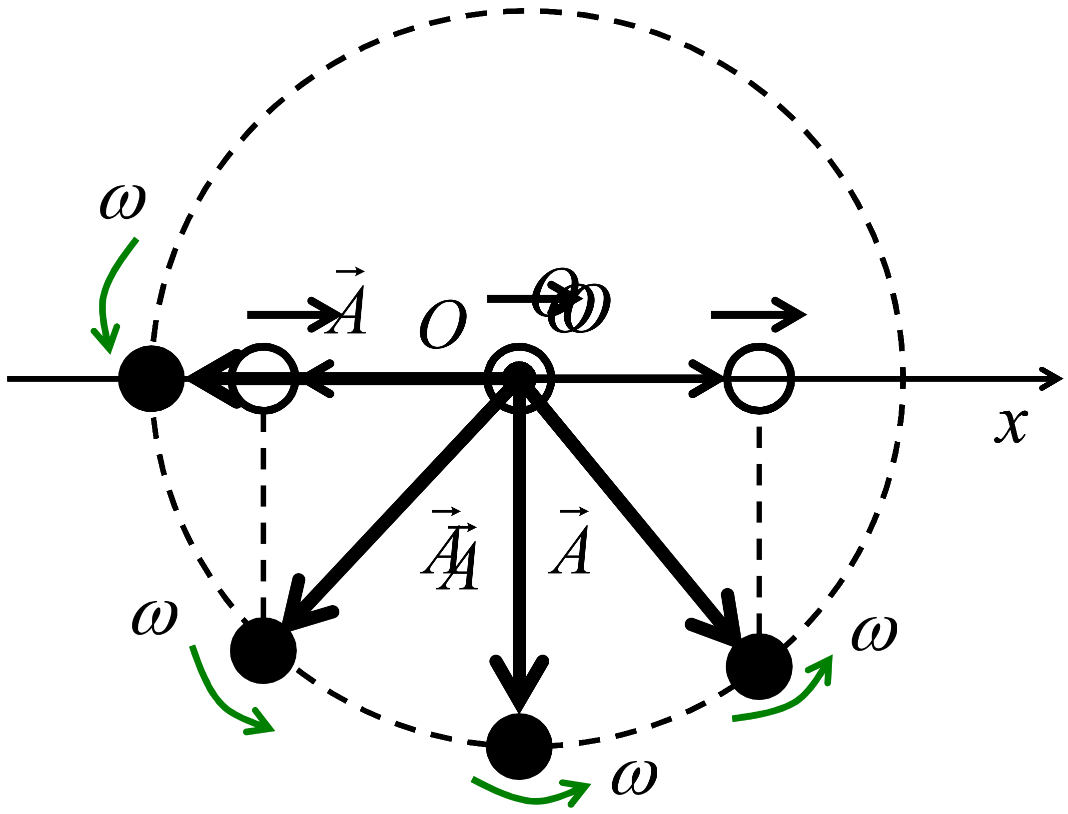
简谐振动与匀速圆周运动有简单的关系。



设一质点沿圆心在 O 点

半径为 A 的圆周作匀速运动，

其角速度为 ω 。



ω
$\vec{A}$
O
ω
x
$\vec{A}$
$\vec{A}$
ω
ω
ω

以圆心 O 为原点，设质点的径矢经过与 x 轴夹角为 φ 的位置时开始计时，

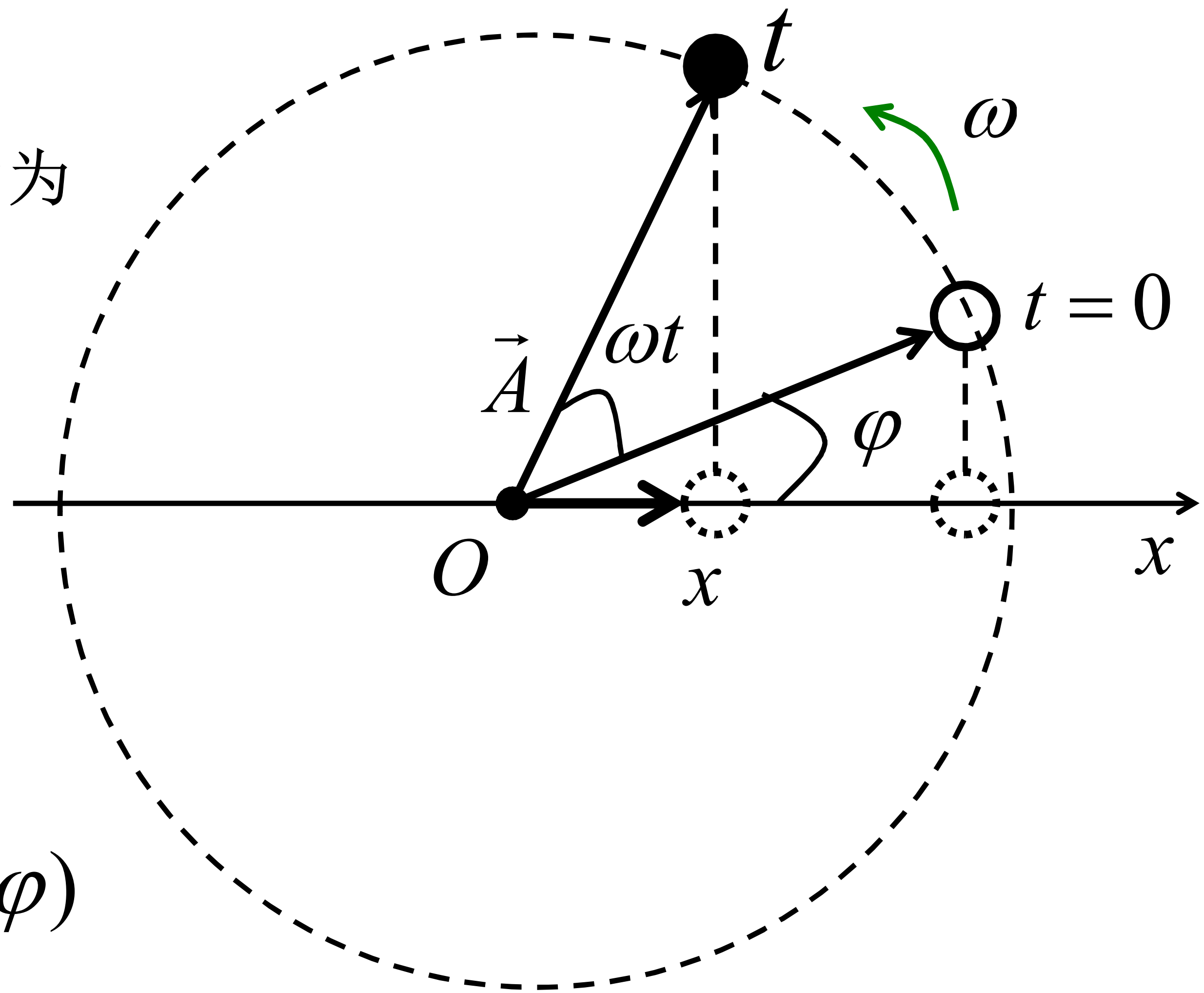
则在任意时刻 t ，

此径矢与 x 轴的夹角为

$$(\omega t+\varphi)$$

质点在 x 轴上的投影的坐标为

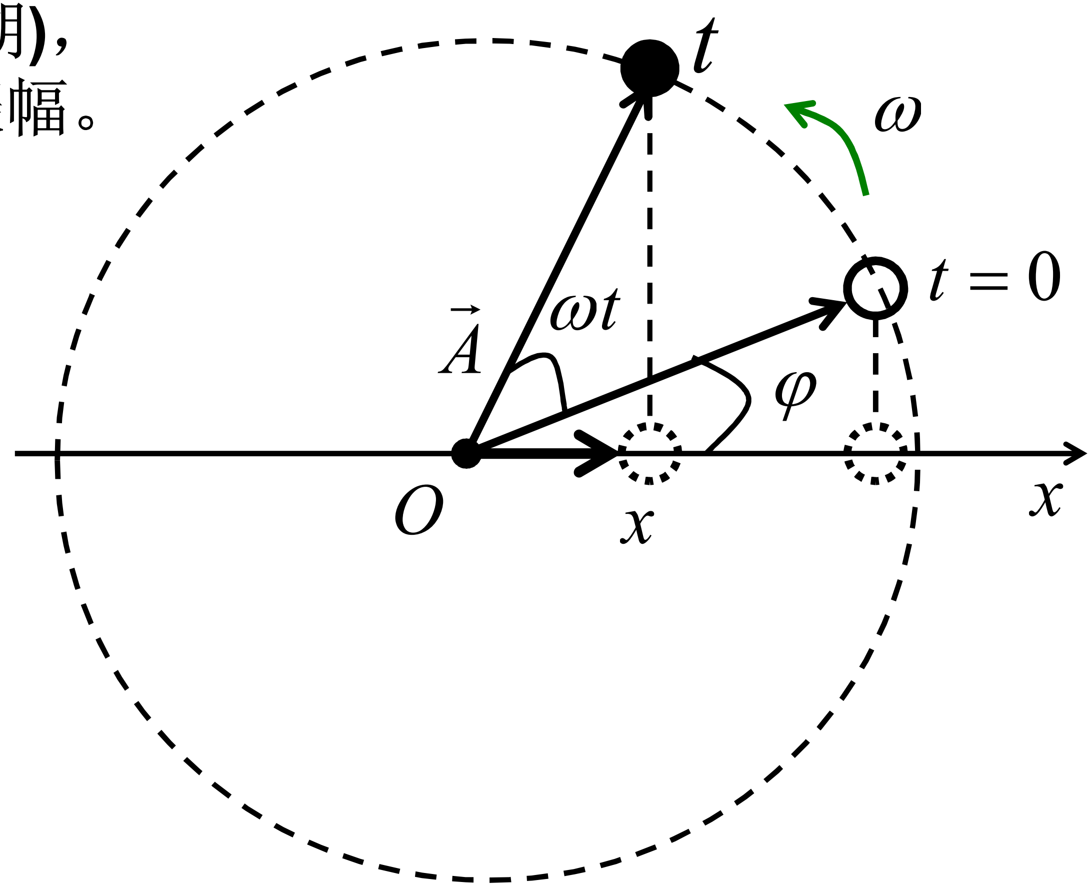
$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$



作匀速圆周运动的质点在某一直径(取作x轴)上的投影的运动就是简谐运动。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

圆周运动的角速度(或周期)等于振动的角频率(或周期)，圆周的半径等于振动的振幅。



初始时刻作圆周运动的质点的径矢与x轴的夹角就是振动的初相。

简谐振动的速度

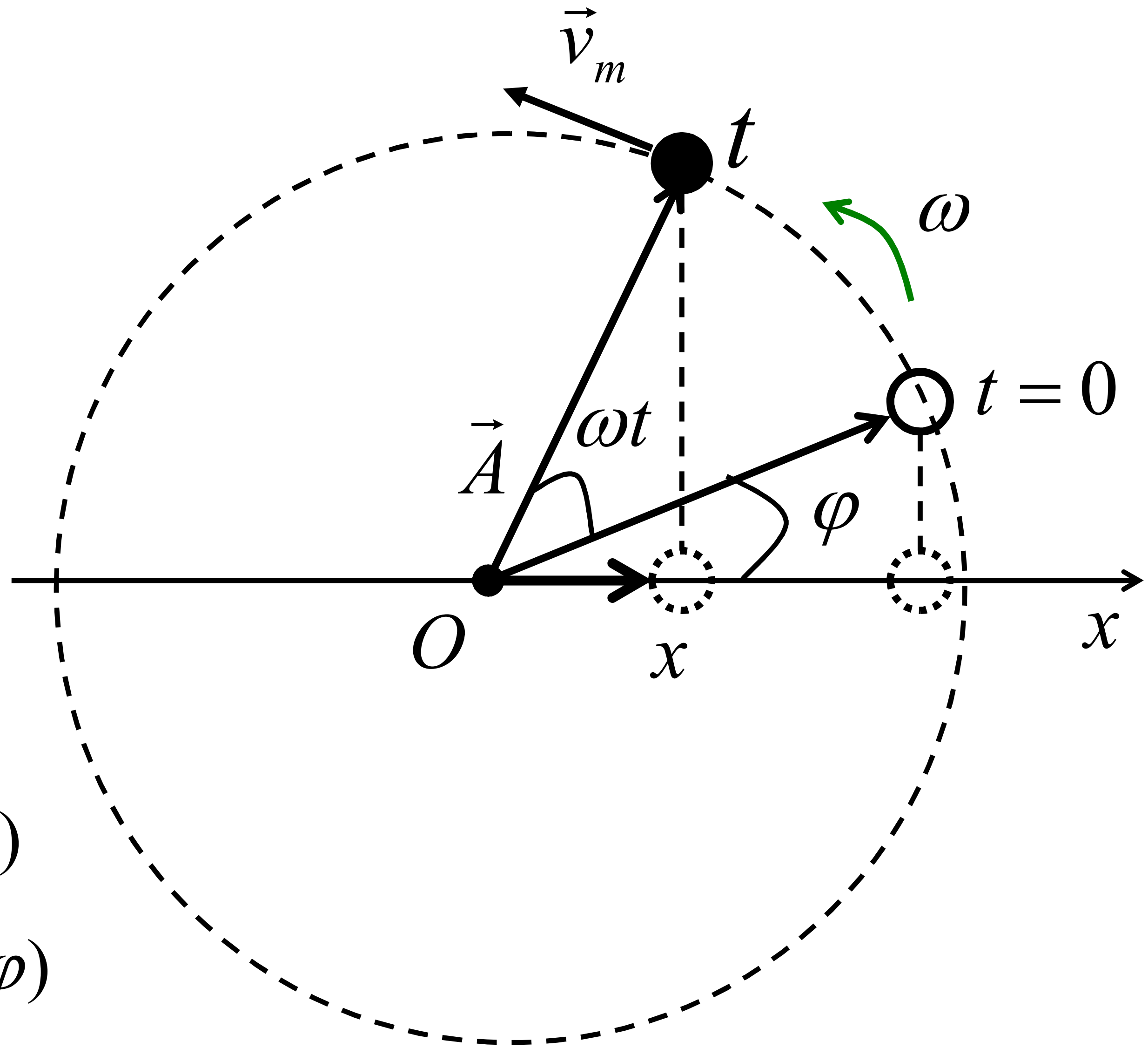
作匀速圆周运动的质点的速率是

$$v_m = \omega A$$

在 t 时刻它在 x轴上的投影是

$$v = -v_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$



这正是简谐运动的速度公式。

简谐振动的加速度

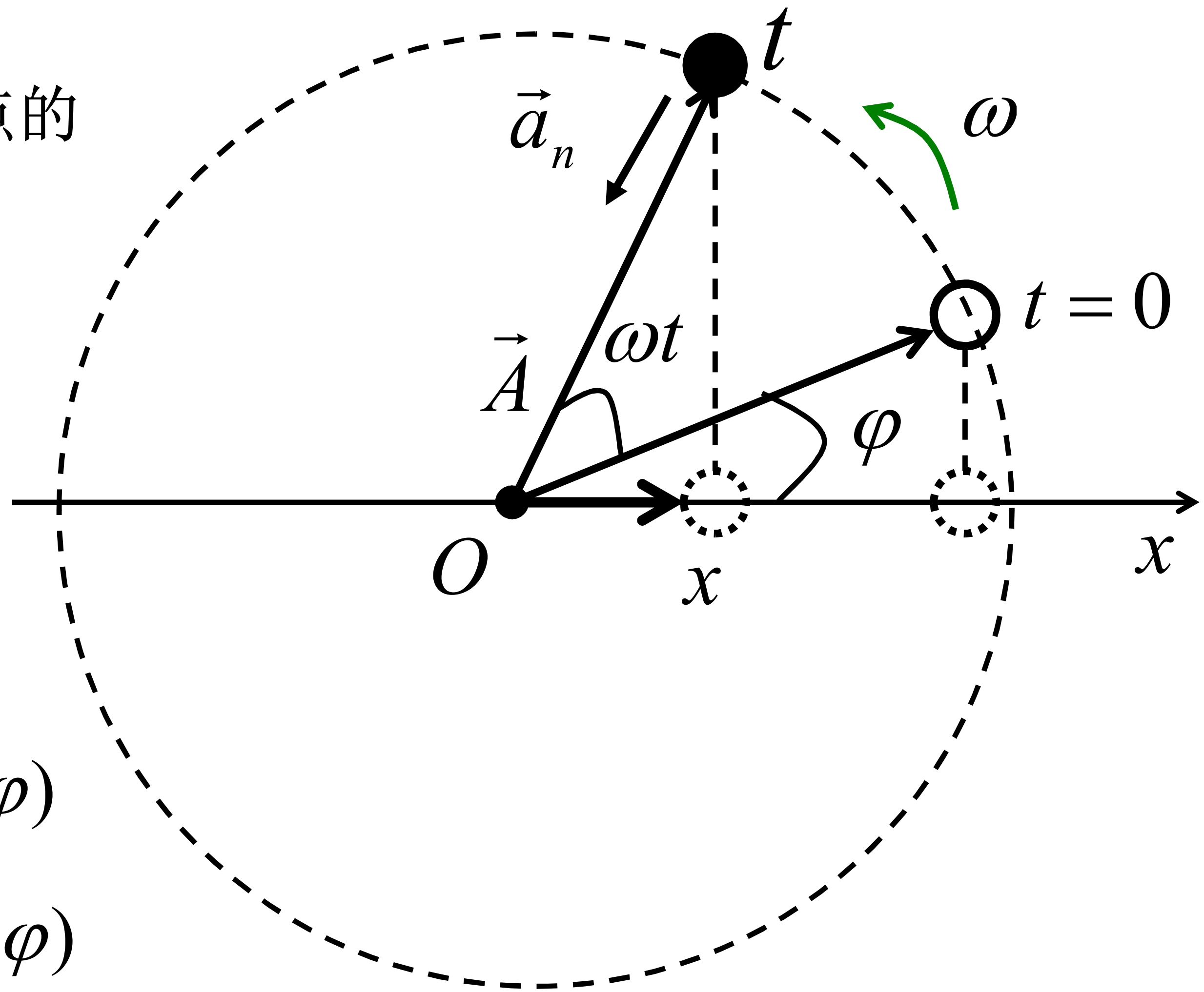
作向心加速度是：作匀速圆周运动的质点的向心加速度是

$$a_n = \omega^2 A$$

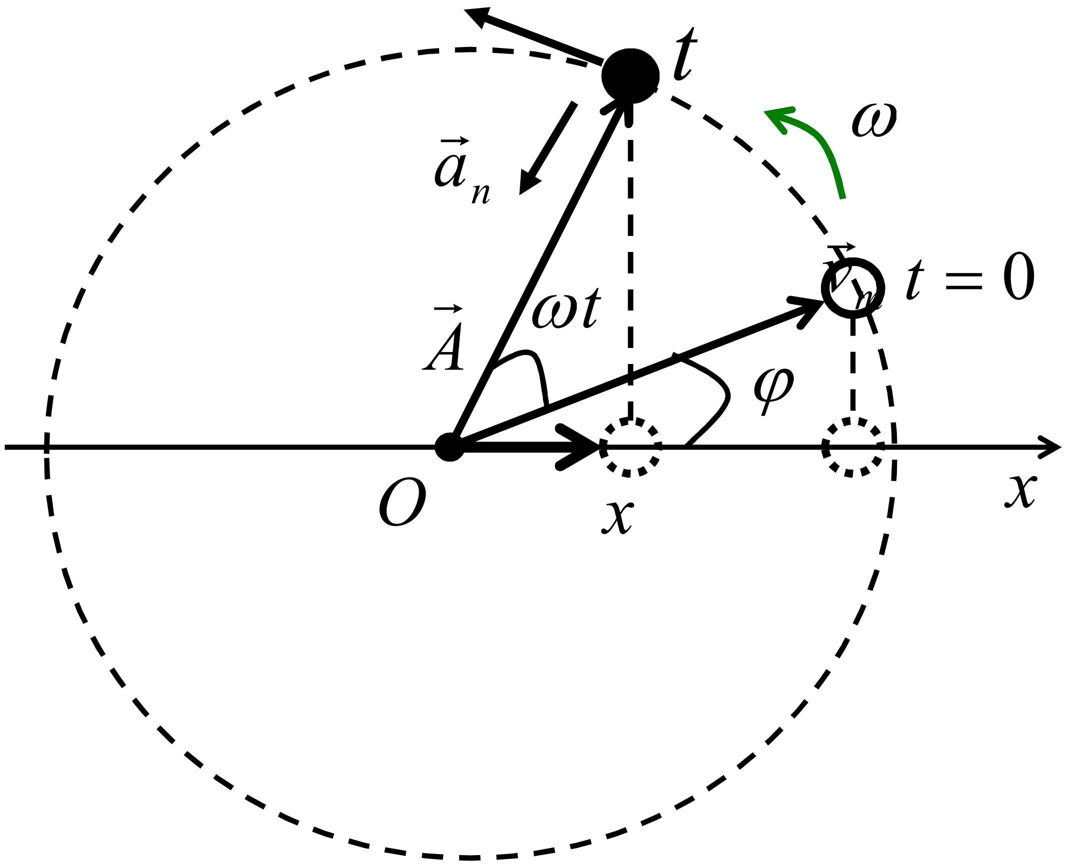
在 t 时刻它在 x 轴上的投影是

$$a = -a_n \cos(\omega t + \varphi)$$

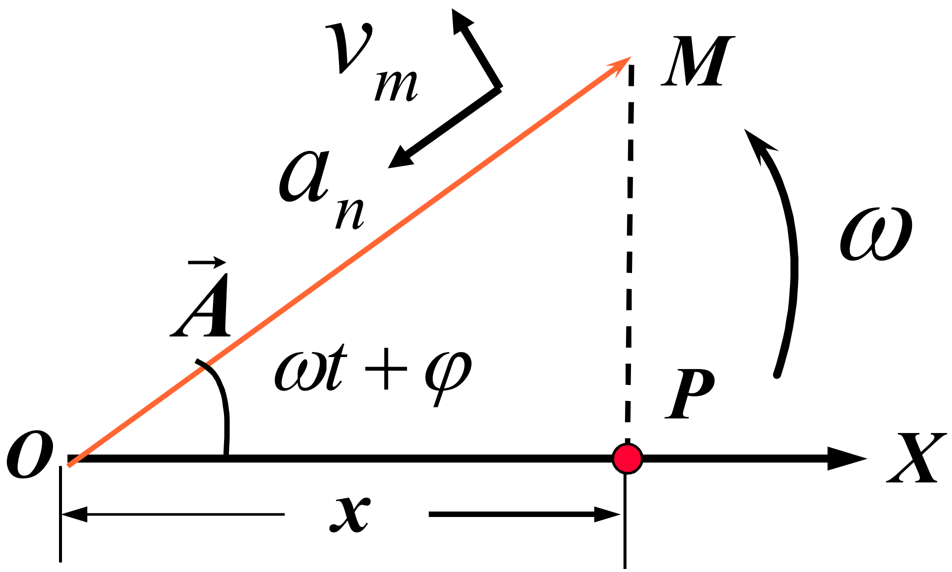
$$= -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$



这正是简谐运动的加速度公式。



相量图法



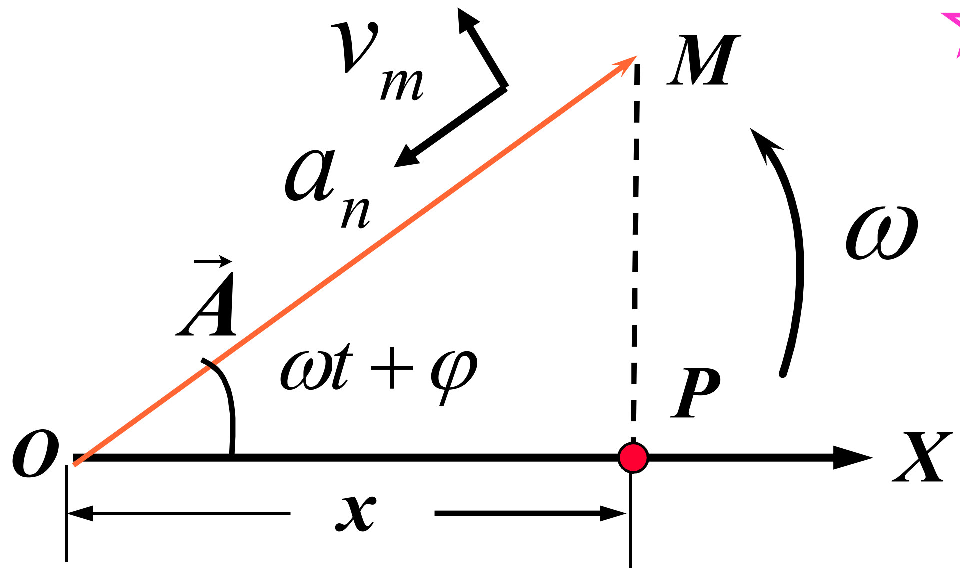
相量图法

$\vec{A}$ 的长度

⇨ 振幅A

$\vec{A}$ 旋转的角速度

⇨ 振动圆频率ω



$\vec{A}$ 旋转的方向 ⇨ 逆时针方向

$\vec{A}$ 与参考方向x 的夹角 ⇨ 振动相位

M 点在 x 轴上投影（P点）的运动规律：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

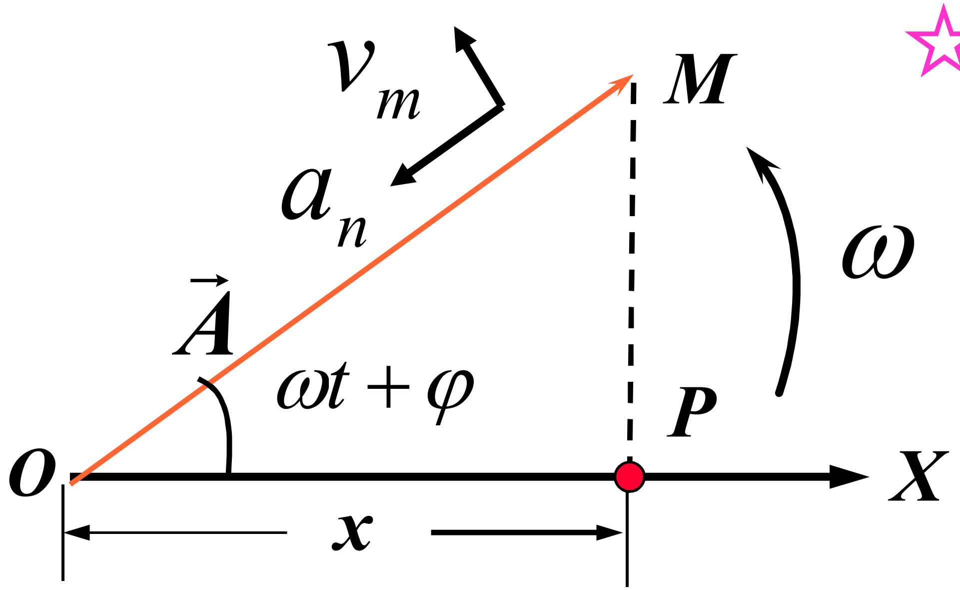
在相量图中，有一个直观的几何意义，

在t 时刻振幅矢量 $\vec{A}$ 与x 轴夹角

$(\omega t + \varphi)$

相 $(\omega t+\varphi)$

对于确定的简谐运动来说，一定的相对应于振动质点一定时刻的运动状态，即一定时刻的位置和速度



相为零的状态 $(\omega t+\varphi)=0$

表示质点在正位移极大处而速度为零；

相为 $(\omega t+\varphi)=\pi/2$ 的状态

表示质点正越过原点并以最大速率向 x 轴负向运动；

相为 $(\omega t+\varphi)=3\pi/2$ 的状态

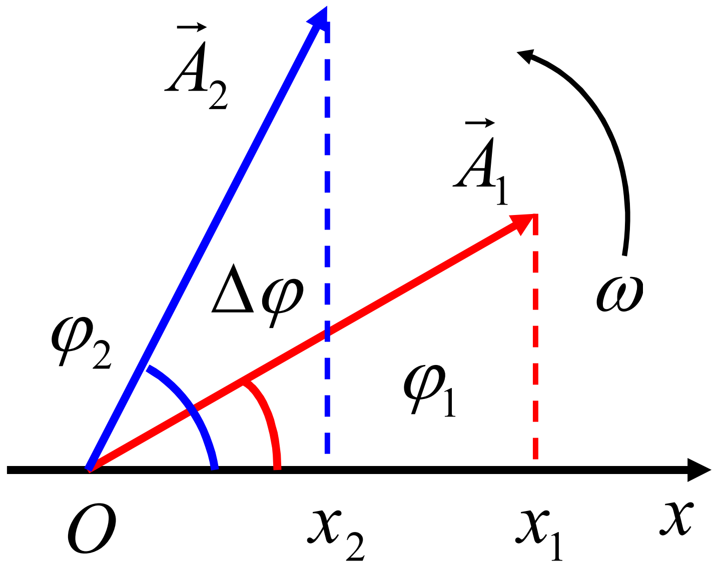
表示质点也正越过原点但是以最大速率向 x 轴正向运动

相的概念在比较两个同频率的简谐运动的步调时特别有用

设有下列两个简谐运动：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$



它们的相差为

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$

它们在任意时刻的相差都等于其初相差而与时间无关。

由这个相差的值就可以知道它们的步调是否相同。

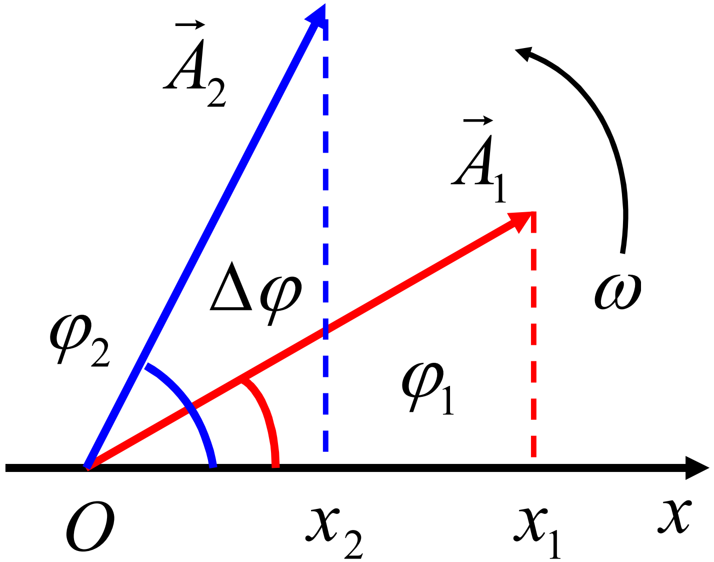
如果 $\Delta\varphi = 0$ (或者 2π 的整数倍)，

两振动质点将同时到达各自的同方向的极端位置，
并且同时越过原点而且向同方向运动，它们的步调相同。
这种情况我们说二者同相。

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$



如果 $\Delta\varphi = \pi$ (或者 π 的奇数倍)，

两振动质点将同时到达各自的相反方向的极端位置，
并且同时越过原点但向相反方向运动，它们的步调相反。
这种情况我们说二者反相。

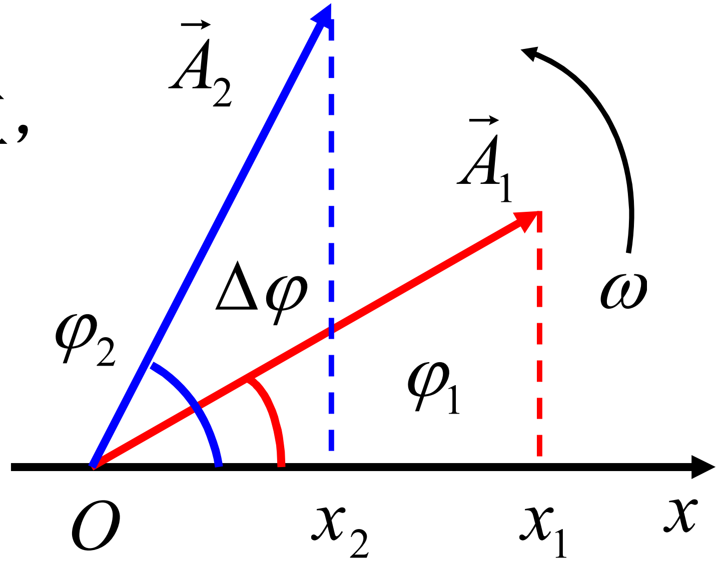
当$\Delta\varphi$为其他值时，一般地说二者不同相。

当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$ 时，

x_2 将先于x_1到达各自的同方向极大值，

我们说x_2振动超前 x_1振动 $\Delta\varphi$，

或者说x_1振动落后于x_2振动 $\Delta\varphi$ 。



当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$ 时，

我们说x_1振动超前x_2振动 $|\Delta\varphi|$ 。

对于$\Delta\varphi < 0$，由于相差的周期是 2π ，

所以,我们把$|\Delta\varphi|$ 的值限在π 以内。

例如，当 $\Delta\varphi = 3\pi/2$ 时，不说x_2振动超前 x_1 振动 $(3\pi/2)$ ，

而改写成 $\Delta\varphi = 3\pi/2 - 2\pi = -\pi/2$ ，

且说x_2 振动落后于 x_1 振动 $(\pi/2)$，

或说 x_1振动超前 x_2振动 $(\pi/2)$。

§2 简谐振动的合成

在实际问题中，

常会遇到一个质点同时参与两个振动的情况。

例如，当两个声波同时传到某点时，

该点处空气质点就将同时参与两个振动，

这时质点的运动实际上就是两个振动的合成。

振动合成的基本知识在声学、光学、交流电工学及无线电技术等方面都有着广泛的应用。

一 同一直线上同频率简谐振动的合成

二 同一直线上不同频率的简谐运动的合成

三 互相垂直同频振动的合成

四 互相垂直不同频振动的合成

一 同一直线上同频率简谐振动的合成

两个在同一直线(x 轴)上的同频率的简谐振动

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

在任意时刻合振动的位移为

$$\begin{aligned} \underline{x(t)} &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= \underline{A\cos(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

合成运动的合位移 x 仍在这一直线上

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

两个在同一直线上的同频率谐振动的合成运动仍为谐振动，合成谐振动的频率和原来谐振动频率相同。

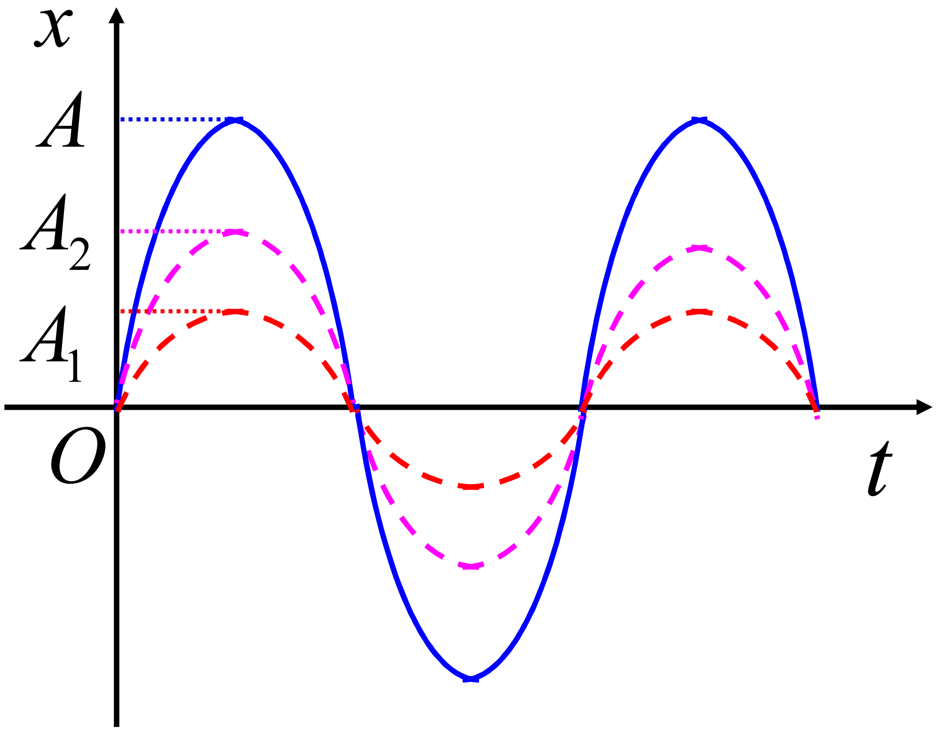
合成简谐振动的振幅 A 不仅与 A_1 、A_2 有关，而且与原来两个简谐振动的初相差 $(\varphi_2-\varphi_1)$有关

两分振动同相， $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$\begin{cases}x_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)\\ x_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)\end{cases}$$

$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$



$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2}$$

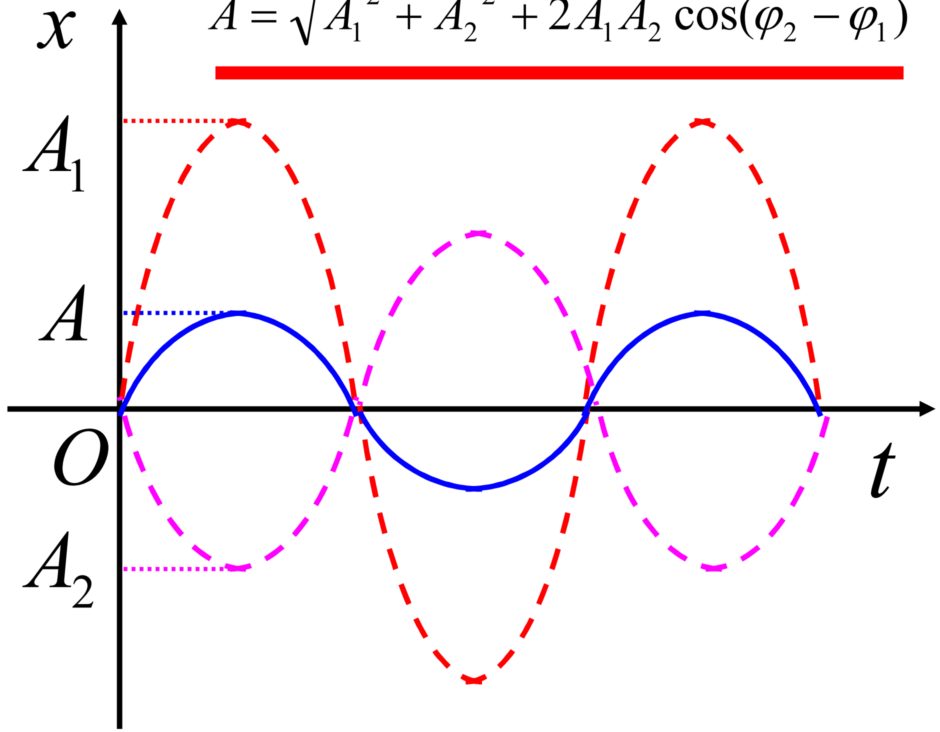
$$=A_1+A_2$$

合成谐振动振幅等于原来两个简谐振动振幅之和。
这是合成谐振动振幅可能达到的最大值

两分振动反相，$\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} - 2A_1A_2}$$

$$= |A_1 - A_2|$$

合成谐振动振幅等于原来两个简谐振动振幅之差。

这是合成谐振动振幅可能达到的最小值

如果 $A_1 = A_2$，$A = 0$

两个同幅反相的振动合成的结果将使质点处于静止状态。

两分振动为其他值

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

合振幅的值在 $(A_1 + A_2)$ 与 $\left|A_1 - A_2\right|$ 之间

二 同一直线上不同频率的简谐运动的合成

设两分振动的角频率分别为 ω_1 与 ω_2 ，振幅都是 A 。

由于二者频率不同，总会有机会二者同相。

我们就从此时刻开始计算时间，因而二者的初相相同。

这样，两分振动的表达式可分别写成

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= A\cos(\omega_1 t + \varphi) + A\cos(\omega_2 t + \varphi) \\ &= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi\right) \end{aligned}$$

在一般情形下，我们察觉不到合振动有明显的周期性。

但当两个分振动的频率都较大而其差很小时，

就会出现明显的周期性。

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}}$$

$$\underline{x(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi\right)}$$

当两个分振动频率较大而相差很小时，

即 $\omega_2 - \omega_1 << \omega_1$ ，由于 $\omega_2 - \omega_1 << \omega_2 + \omega_1$

合振动可看成振幅为 $\left|2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\right|$ ，

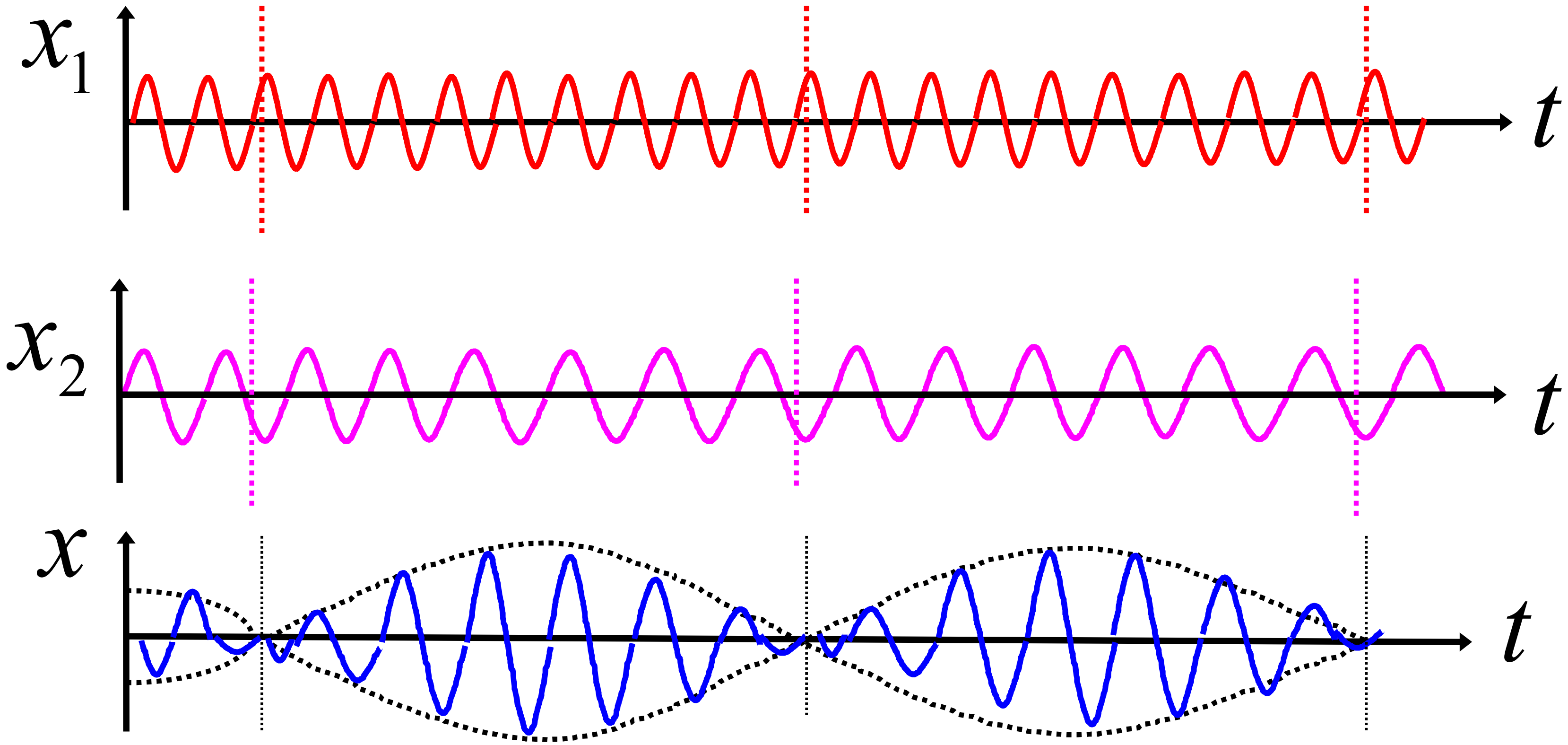
角频率为 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ 的近似的简谐振动，

这种振动称为拍。

由于振幅周期性改变，振动出现忽强忽弱的现象。

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi\right)$$



$$x(t)=2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

振幅变化的频率称为拍频。

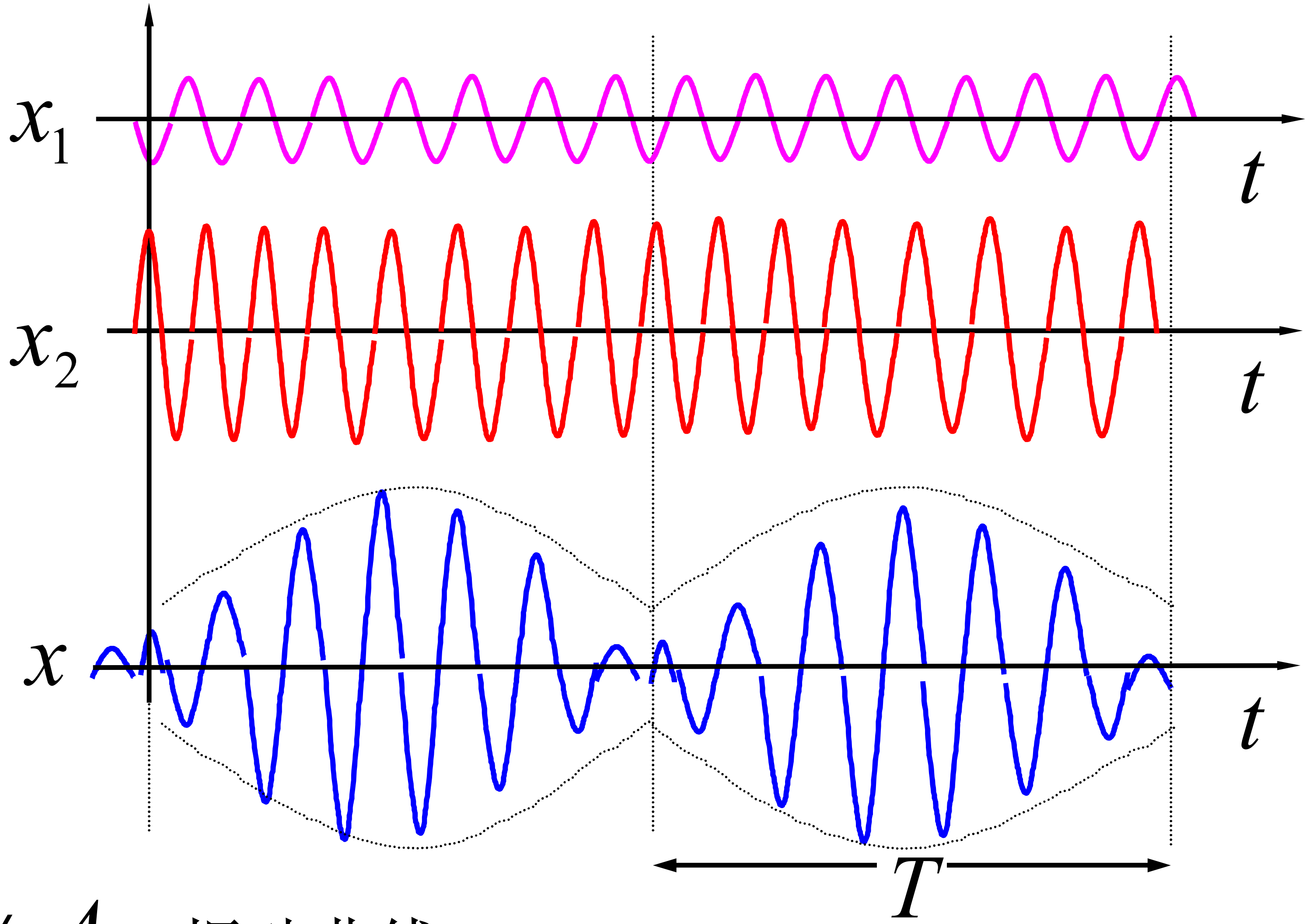
由于余弦函数$2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$的频率为$\frac{(\omega_2-\omega_1)/2}{2\pi}$，

$\left|2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right|$的频率是$2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$的二倍

因此拍频为

$$\nu=\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}=\nu_2-\nu_1$$

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$



$A_1 \neq A_2$ 振动曲线

三 互相垂直同频振动的合成

一个质点同时参与两个不同方向的振动，
质点的合位移等于两个分振动位移的矢量和.
这就是不同方向振动合成的法则。

质点同时参与两个互相垂直的同频率的简谐振动

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \qquad y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

这可以看作为该质点的运动函数，
质点运动的轨道方程（质点的合振动函数）为

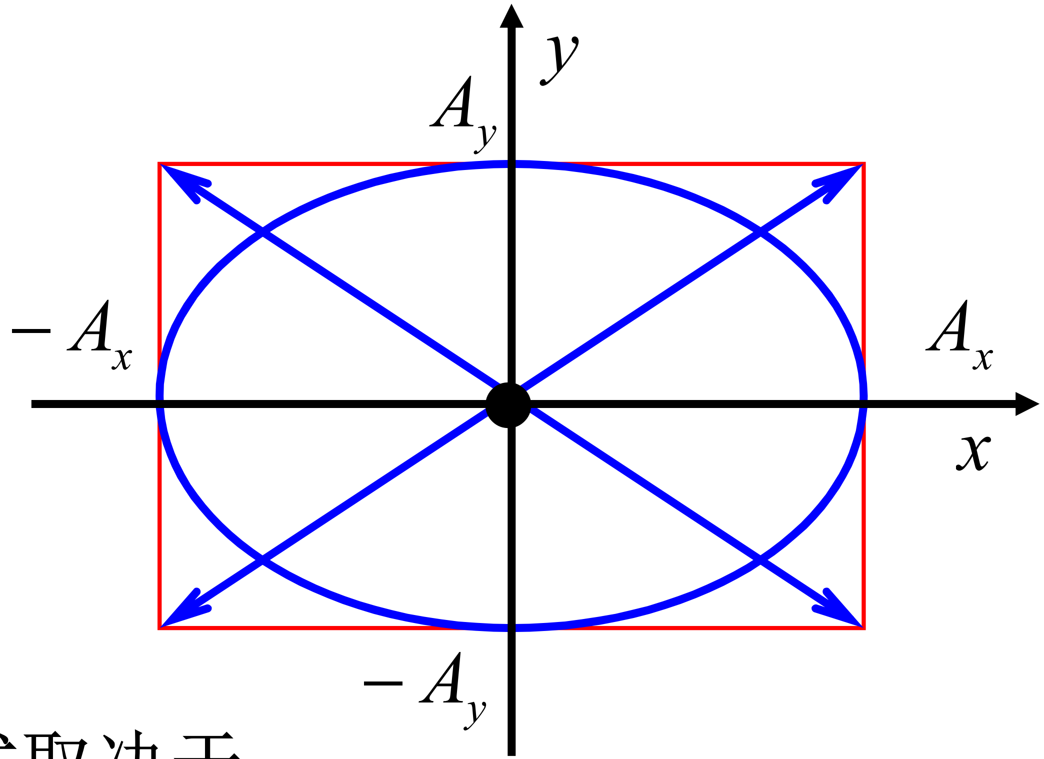
$$\boxed{\frac{x^2}{A_x^{\ 2}} + \frac{y^2}{A_y^{\ 2}} - \frac{2xy}{A_x A_y}\cos(\varphi_y - \varphi_x) = \sin^2(\varphi_y - \varphi_x)}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_y-\varphi_x)=\sin^2(\varphi_y-\varphi_x)}$$

质点的合成运动轨道
被限制在矩形范围内

$$x=\pm A_x$$

$$y=\pm A_y$$



运动轨道的具体形式取决于

两个垂直振动的振幅 A_x、A_y 和初相差 $\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x$。

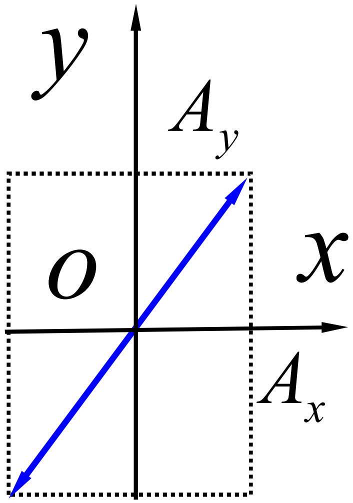
一般为椭圆，特殊情况下，可能是圆或直线。

$$\boxed{\frac{x^2}{A_x^{\ 2}}+\frac{y^2}{A_y^{\ 2}}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_y-\varphi_x)=\sin^2(\varphi_y-\varphi_x)}$$

（**1**）初相差 $\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x=0$ ，即两个分振动同相

$$\frac{x^2}{A_x^{\ 2}}+\frac{y^2}{A_y^{\ 2}}-\frac{2xy}{A_xA_y}=0$$

$$\boxed{\frac{x}{A_x}-\frac{y}{A_y}=0}$$



(a)

质点运动轨道是一条直线段，

直线的斜率为 $\frac{A_y}{A_x}>0$

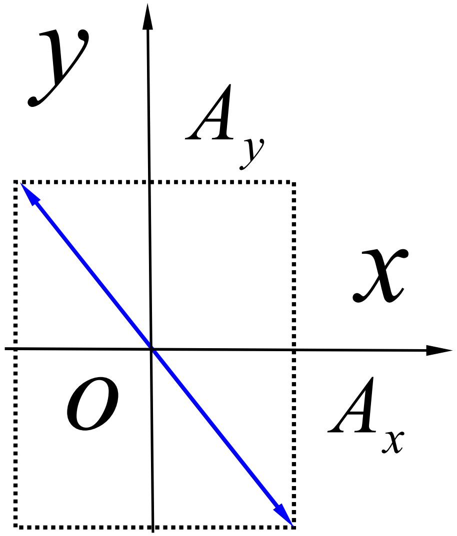
直线段（质点运动轨道）在 Ⅰ、Ⅲ象限

$$\boxed{\frac{x^2}{A_x^{\ 2}}+\frac{y^2}{A_y^{\ 2}}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_y-\varphi_x)=\sin^2(\varphi_y-\varphi_x)}$$

（**2**）初相差 $\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x=\pi$，即两个分振动反相

$$\frac{x^2}{A_x^{\ 2}}+\frac{y^2}{A_y^{\ 2}}+\frac{2xy}{A_xA_y}=0$$

$$\boxed{\frac{x}{A_x}+\frac{y}{A_y}=0}$$



(b)

质点运动轨道是一条直线段，

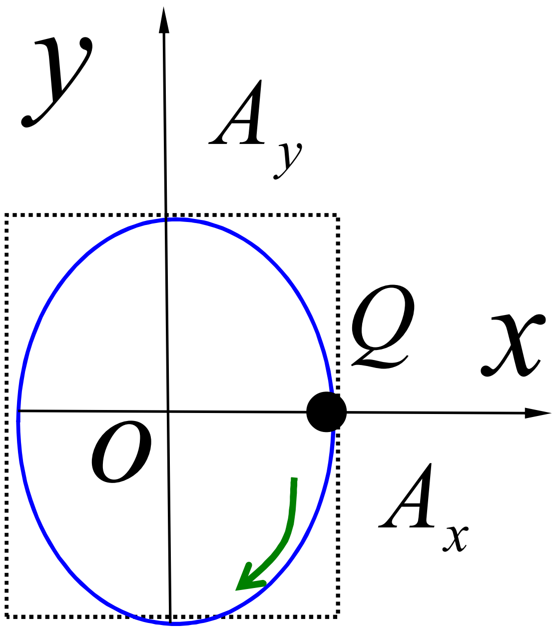
直线的斜率为 $-\dfrac{A_y}{A_x}<0$

直线段（质点运动轨道）在Ⅱ、Ⅳ象限

$$\boxed{\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_y-\varphi_x)=\sin^2(\varphi_y-\varphi_x)}$$

（**3**）初相差 $\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x=\pi/2$ ，☆

即 x 分振动落后于 y 分振动 $\pi/2$



(c)

$$\boxed{\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}=1}$$

是以坐标轴为主轴的椭圆方程，即质点的运动轨道为椭圆。

质点沿椭圆顺时针运动(右旋)

附注： 此时，质点的运动函数为

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x),$$

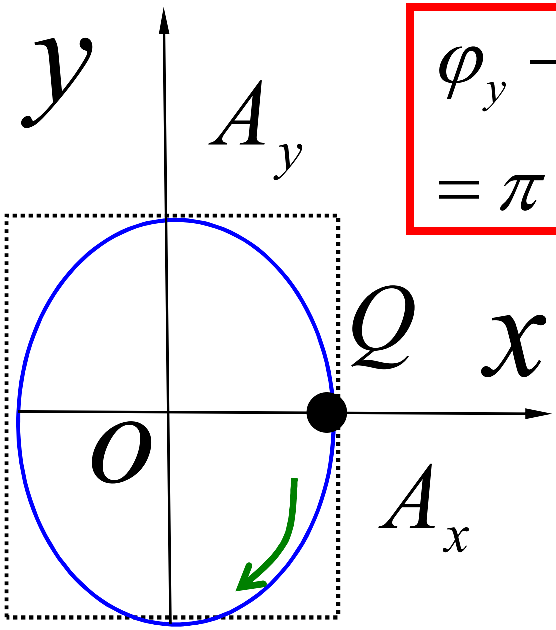
$$y = -A_y \sin(\omega t + \varphi_x)$$

设 t 时刻质点的位置 $x = A_x$，则

$\cos(\omega t + \varphi_x) = 1$，$(\omega t + \varphi_x) = 0$，

$$y = -A_y \sin(\omega t + \varphi_x) = 0$$

即质点位于 $Q(A_x, 0)$ 点。



(c)

$\boxed{\varphi_y - \varphi_x = \pi / 2}$

过微小时间 dt 后，即 $t + dt$ 时刻，质点的位置坐标为

$$x = A_x \cos(\omega t + \omega dt + \varphi_x) = A_x \cos(\omega dt) > 0$$

$$y = -A_y \sin(\omega t + \omega dt + \varphi_x) = -A_y \sin(\omega dt) < 0$$

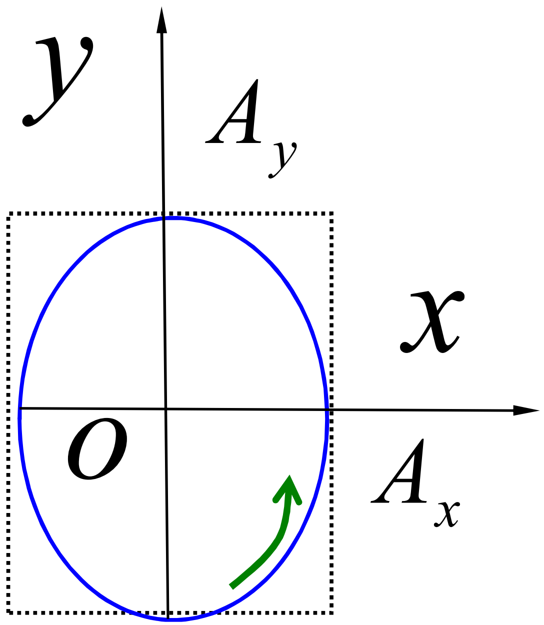
可见，t 时刻，质点在 $Q(A_x, 0)$ 点向下运动。

因此，质点沿椭圆顺时针运动

$$\boxed{\frac{x^2}{A_x^{\,2}}+\frac{y^2}{A_y^{\,2}}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_y-\varphi_x)=\sin^2(\varphi_y-\varphi_x)}$$

（4）初相差 $\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x=-\pi/2$ ，

即 y 分振动落后于 x 分振动 $\pi/2$



(d)

$$\boxed{\frac{x^2}{A_x^{\,2}}+\frac{y^2}{A_y^{\,2}}=1}$$

是以坐标轴为主轴的椭圆方程，

即质点的运动轨道为椭圆。

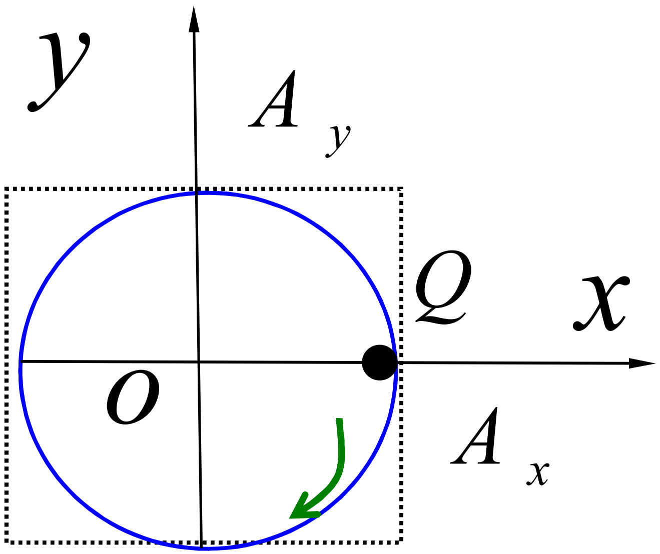
质点沿椭圆逆时针运动(左旋)

$$\boxed{\frac{x^2}{A_x{}^2}+\frac{y^2}{A_y{}^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_y-\varphi_x)=\sin^2(\varphi_y-\varphi_x)}$$

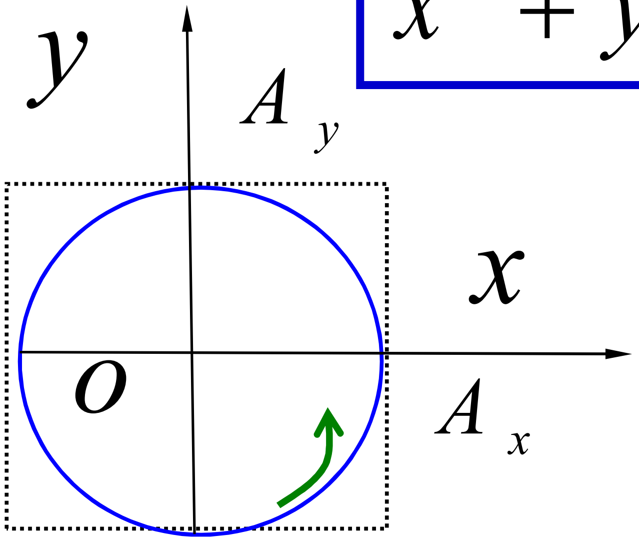
（**5**）初相差 $\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ ，

而且 $A_x=A_y=A$ ，

$$\boxed{x^2+y^2=A^2}$$



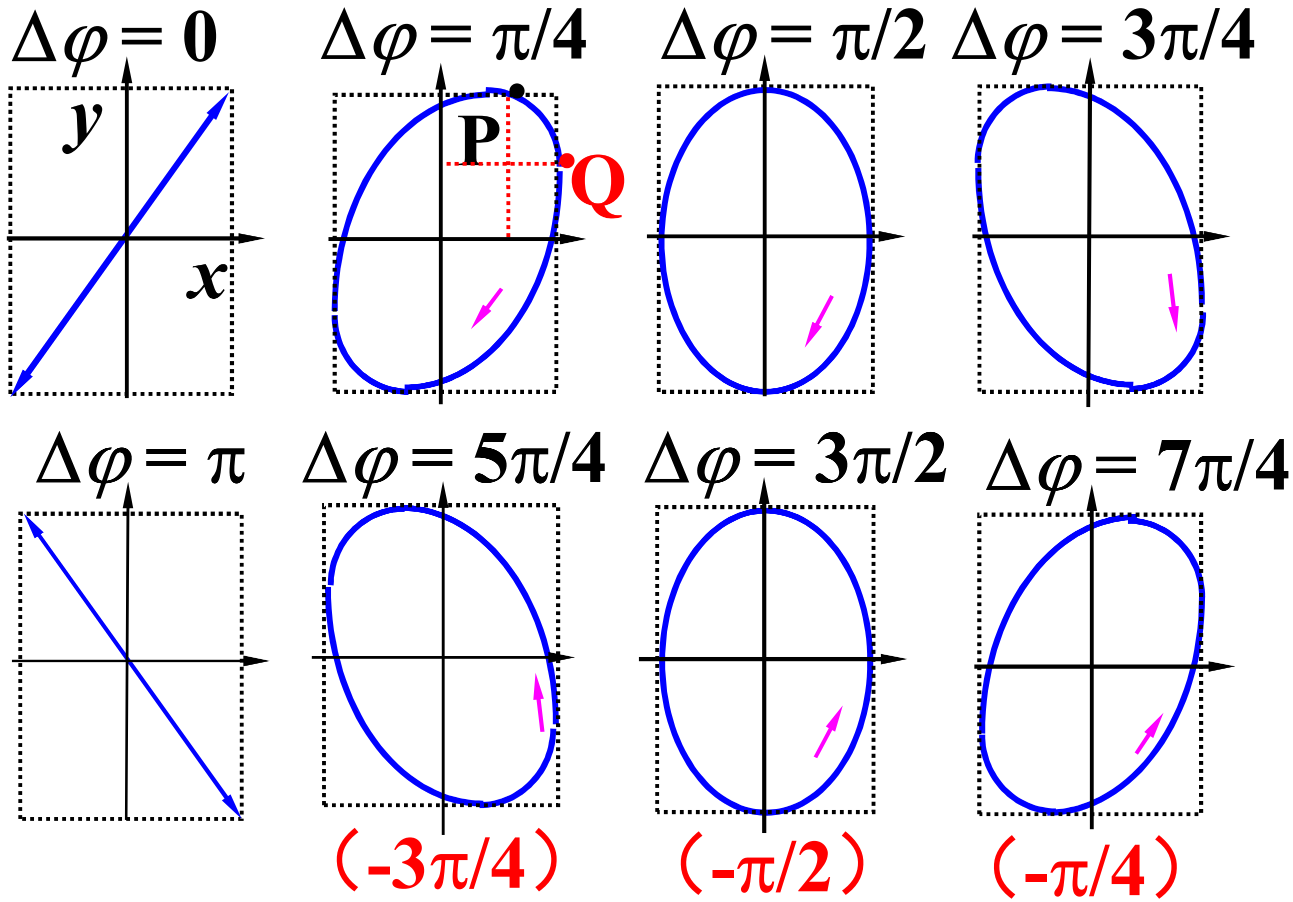
(c)



(d)

轨道为圆

（6）其他几种特殊初相差的情况



（7）初相差 $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ 为一般值时，

是主轴不在坐标轴上的椭圆

四 互相垂直不同频振动的合成

两个频率不同的互相垂直的简谐振动的合成比较复杂，
这时只能根据质点运动轨道的参数方程,
了解质点的运动情况

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x)$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

两个频率不同的互相垂直的简谐振动的
合成运动轨迹的形状不仅与两振动的频率比有关，
还与它们的初相和初相差有关。

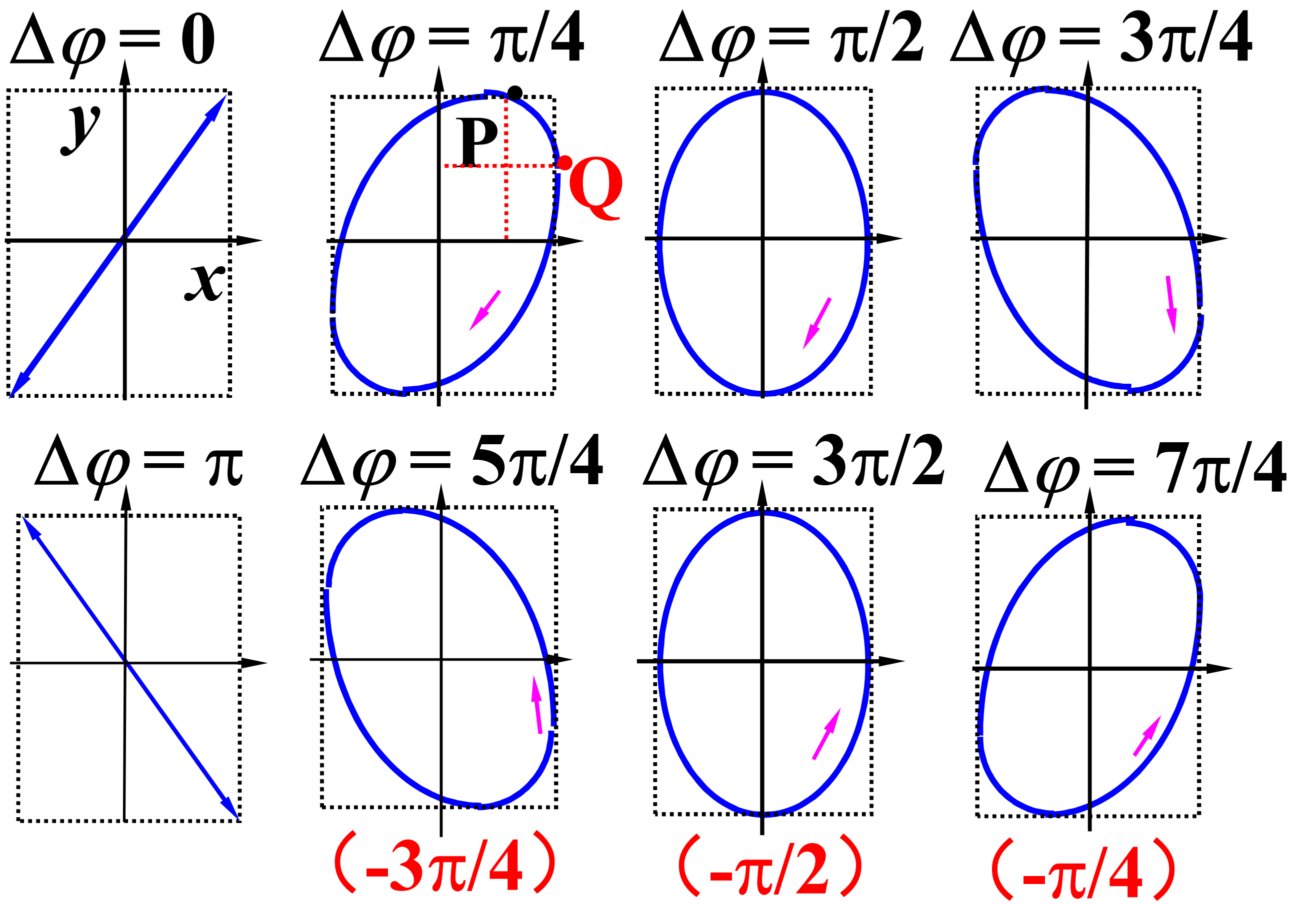
如果两分振动频率之差很小，则合振动可近似地看成是

同频率的两个互相垂直的简谐振动的合成，

但由于相位差随时间缓慢变化，

因此合成振动的轨道依下图所示的次序不断变化，

由直线变成椭圆再变成直线等。



如果两分振动频率相差较大，但有简单整数比，

则合成振动具有稳定闭合的轨道，

这种轨道称为李萨如图形

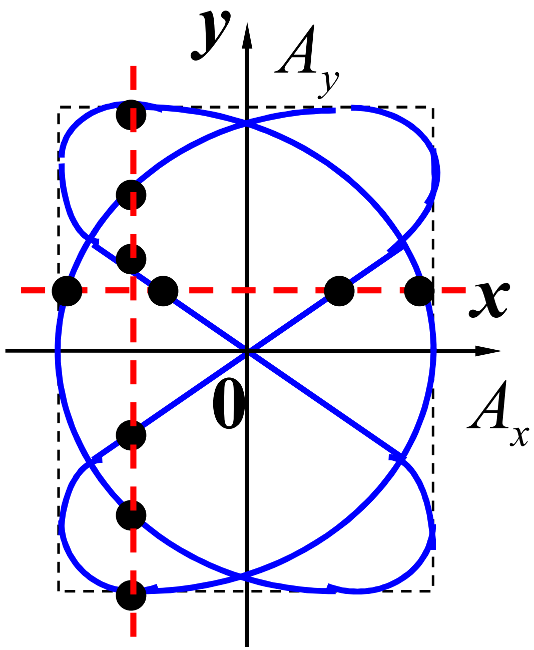
设某李萨如图形与 x 轴有 n_x 个交点，与 y 轴有 n_y 个交点，

沿 x 轴振动的周期为 T_x，沿 y 轴振动的周期为 T_y

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) \qquad y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

$$\boxed{\frac{T_x}{T_y} = \frac{n_x}{n_y}}$$

$$\boxed{\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x}}$$

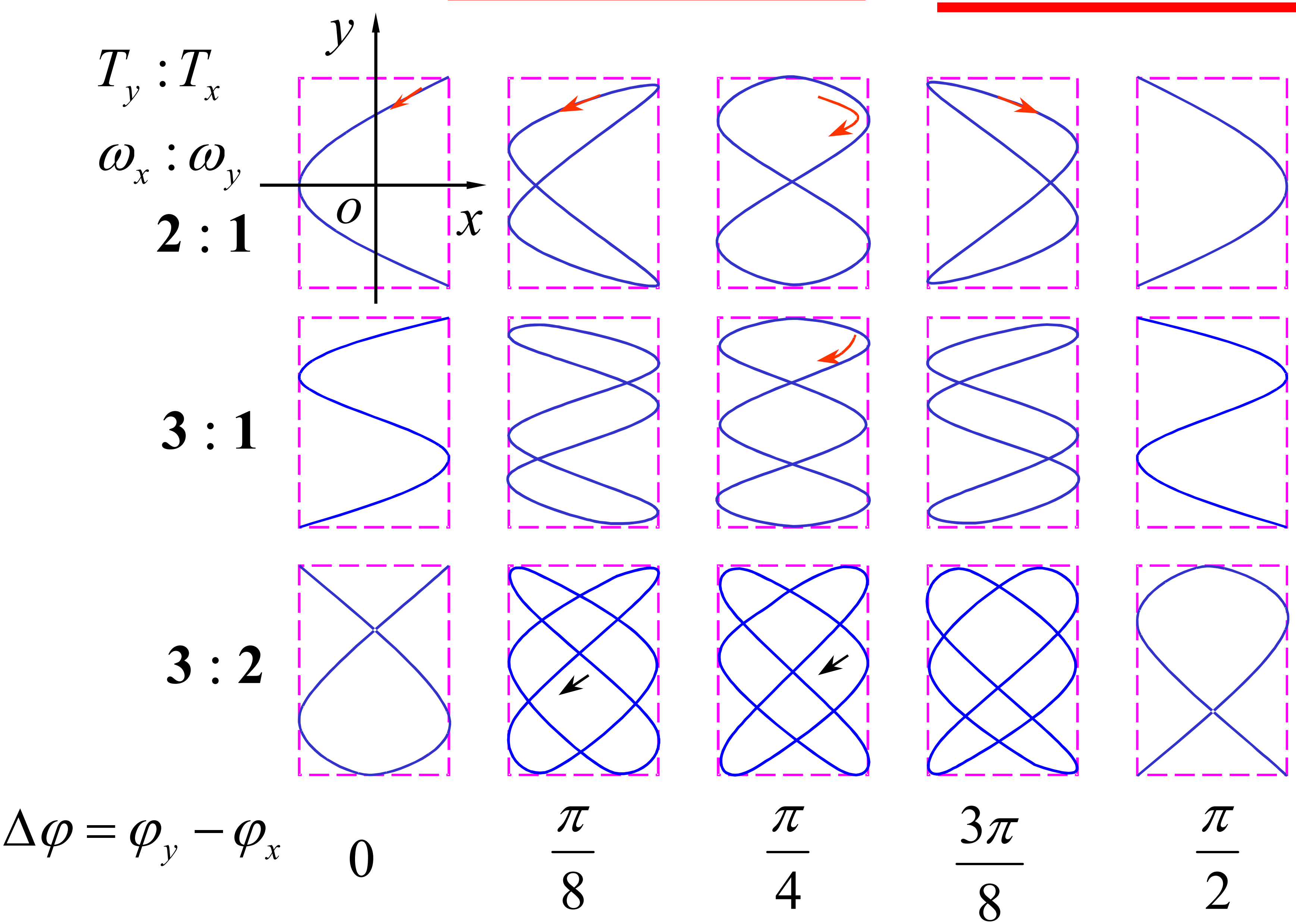


$$\frac{T_x}{T_y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{3}{2}$$

李萨如图形

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) \qquad y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$



例1 质点同时参与的两个谐振动的振动方程为

$$x_1 = 4\cos(2\pi t + \pi),\quad x_2 = 4\cos(2\pi t + \pi/2)$$

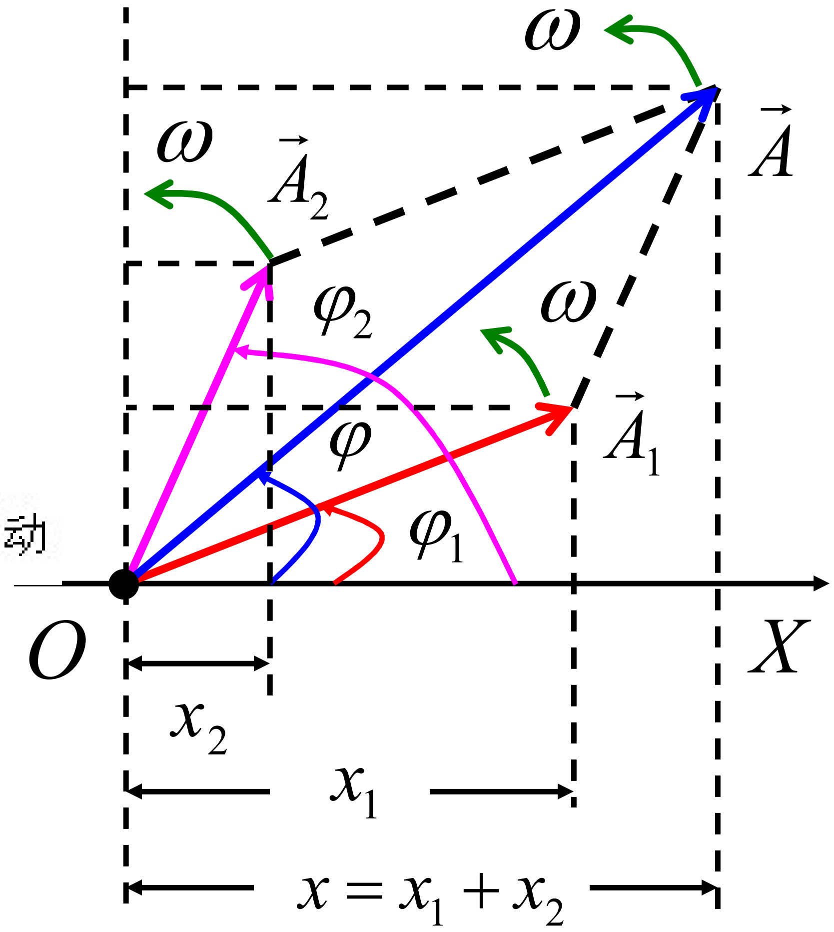
求合成谐振动的振动方程。

解:

同方向同频率振动的合成，
使用振动的旋转矢量法比较方便。

$\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 以相同的匀角速度 ω 绕 O 点旋转

当 $t = 0$ 时，矢量 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 与 X 轴间的夹角分别为 φ_1 和 φ_2，已知 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 在 X 轴上的投影 x_1 和 x_2 分别代表两个同方向同频率的谐振动



$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

以 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 为邻边作平行四边形，得合矢量 $\vec{A}$，

合矢量 $\vec{A}$ 与 X 轴间的夹角为 φ，

由于 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 长度都不变，

且以相同角速度 ω 绕 O 点旋转，

所以它们的合矢量 $\vec{A}$ 的长度也不变，

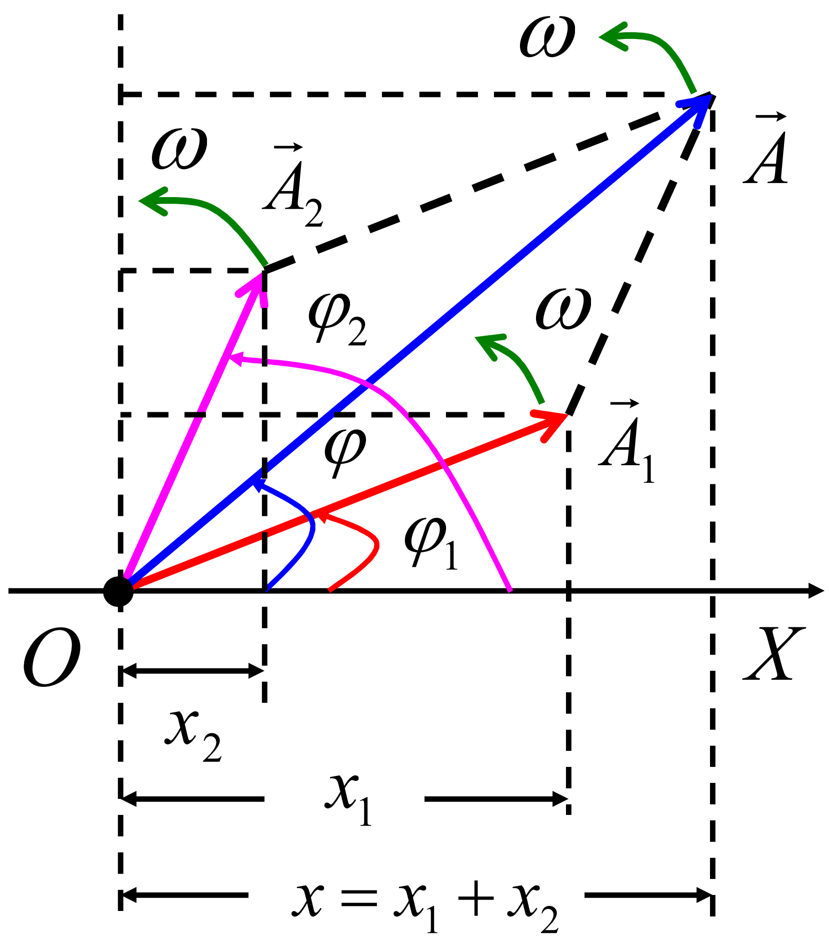
而且也是以匀角速度 ω 绕 O 点旋转

因此合矢量 $\vec{A}$ 在 X 轴上的投影 x

所代表的运动也是简谐振动，

而且它的频率与 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 矢量投影

所代表的简谐振动频率相同。



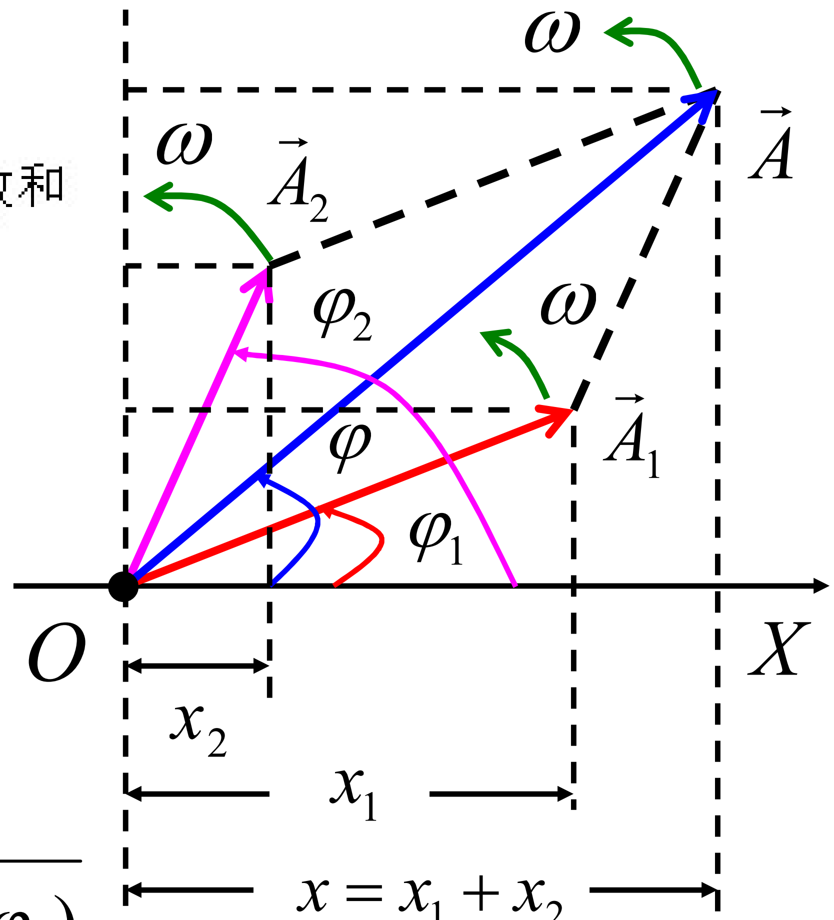
根据矢量$\vec{A}$在X轴上的投影x等于

矢量$\vec{A}_1$和$\vec{A}_2$在X轴上的投影x_1和x_2的代数和

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

即旋转矢量$\vec{A}$在X轴上的投影就代表

x_1和x_2两个简谐振动的合成振动的位移。



根据平行四边形法则，
可求得合成谐振动的振幅

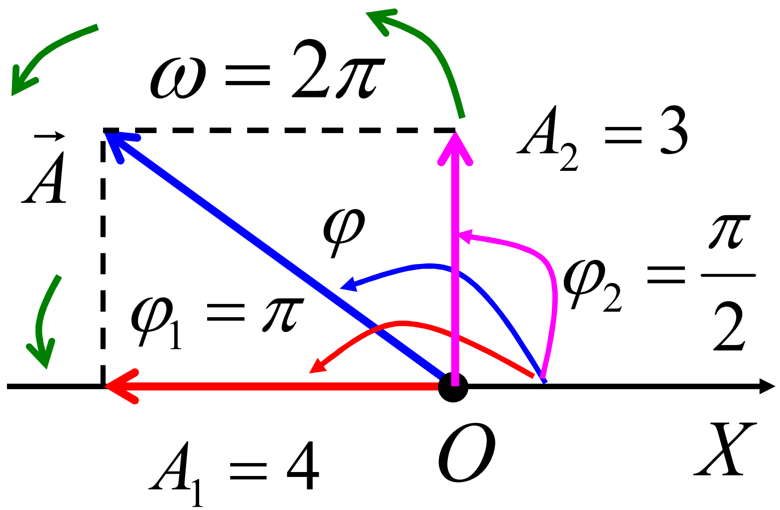
$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

从图可以看出，
合成谐振动的初相为

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$x_1 = 4\cos(2\pi t + \pi)$$

$$x_2 = 4\cos(2\pi t + \pi / 2)$$



画出各个旋转矢量，得到

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2}} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5(cm)$$

$$\tan(\pi - \varphi) = \frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{4}, \quad (\pi - \varphi) = \frac{\pi}{5}, \quad \varphi = \frac{4\pi}{5}$$

所以，合振动方程为 $x = 5\cos(2\pi t + \frac{4\pi}{5})$

例2 一质点同时参与互相垂直的两个振动

$$x = 0.08\cos(\pi t/3 + \pi/6)$$

$$y = 0.06\cos(\pi t/3 - \pi/3)$$

解： $$\frac{x}{0.08} = \cos(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6})$$

$$\frac{y}{0.06} = \cos(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6})$$

$$\left(\frac{x}{0.08}\right)^2 + \left(\frac{y}{0.06}\right)^2 = 1$$

这是一个正椭圆方程

§ 3 谐振分析

任何一个复杂的周期性振动都可以分解成一系列简谐振动之和。这就是谐振分析。

$F(t)$是周期性振动函数，由傅里叶级数展开得

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}[A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)]$$

各分振动的振幅 A_k 与初相 φ_k 可用数学公式根据 $F(t)$ 求出。

这些分振动中频率最低的称为基频振动，它的频率就是原周期函数 $F(t)$ 的频率 ω ，这一频率也就叫基频。

其他分振动的频率都是基频的整数倍，依次分别称为二次、三次、四次……谐频。

不仅周期性振动可以分解为

一系列频率为最低频率整数倍的简谐运动，

而且任意一种非周期性振动也可以

分解为许多简谐运动。

不过对非周期性振动的谐振分析要用

傅里叶变换处理，合振动是简谐振动的频率积分。

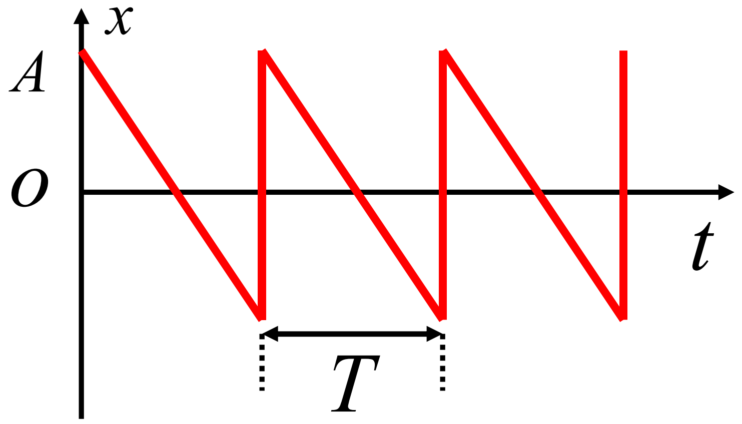
通常用频谱表示一个实际振动所包含的

各种谐振成分的振幅和它们的频率的关系。

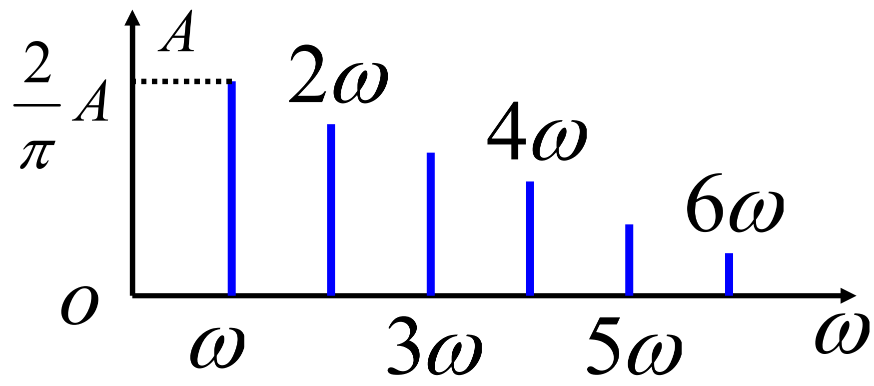
周期性振动的频谱是分立的线状谱;

非周期性振动的频谱密集成连续谱

锯齿波及其频谱

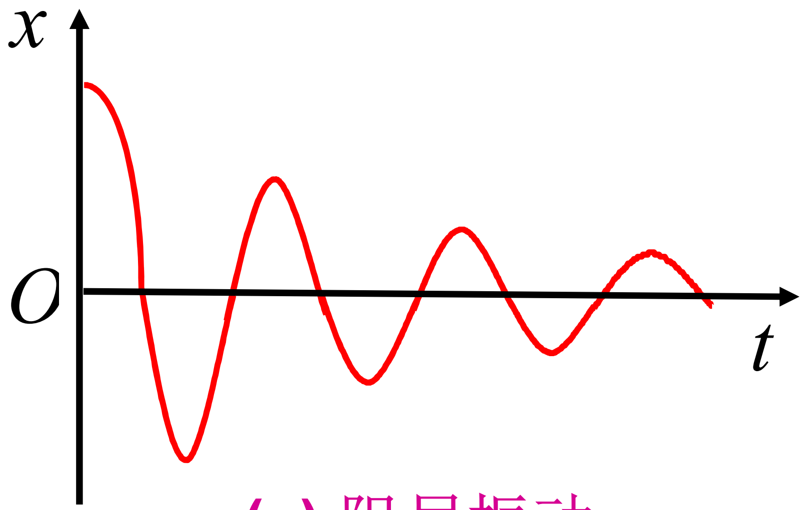


(a) 锯齿波

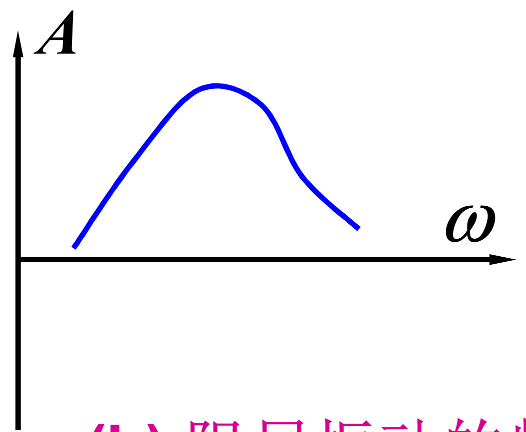


(b) 锯齿波的频谱

阻尼振动及其频谱



(a) 阻尼振动



(b) 阻尼振动的频谱

谐振分析无论对实际应用或理论研究，

都是十分重要的方法，

因为实际存在的振动大多不是严格的简谐运动，

而是比较复杂的振动。

在实际现象中，

一个复杂振动的特征总跟组成它们的

各种不同频率的谐振成分有关。

例如，同为 C 音，音调(即基频)相同，

但钢琴和胡琴发出的 C 音的音色不同，

就是因为它们所包含的高次谐频的个数与振幅不同。