第八次课学习要求：本次课开始恒定磁场的学习

1、结合课件“恒定磁场-1-2020”，观看金课建设平台上的**8.2-8.6**视频.

2、要求掌握以下知识点

（1）知道磁感应强度定义；

（2）区分开磁感应线与静电场中电场线；

（3）领会磁通量的概念，会由定义计算均匀磁场中通过平面的磁通量；

（4）理解磁场中的高斯定律，它反映了磁场什么性质，会运用该定理求解某些情况下的磁通量问题；

（5）重点掌握毕奥-萨伐尔定律，领会磁场叠加原理，会运用毕奥-萨伐尔定律和磁场叠加原理计算载流导线激发的磁场中磁感应强度的分布。

§7　恒定磁场

静电荷

静电场

运动电荷

电场　　磁场

恒定电流

恒定磁场

学习方法：　类比法

§ 7-1 磁场、磁感应强度
磁场的高斯定理

§ 7-2 毕奥—萨伐尔定律

§ 7-3 安培环路定律

§ 7-4 磁场对运动电荷的作用

§ 7-5 磁场对电流的作用

§ 7-6 磁介质、铁磁质

§7-1 磁场、磁感应强度 磁场的高斯定理

一、磁现象、磁场

二、磁感应强度

三、磁场中的高斯定理

一、磁现象、磁场

安培指出：电荷的运动是一切磁现象的根源。

磁场的性质

(1) 磁场是物质的一种形态，具有能量、质量、动量等。

(2)磁场是由运动电荷(或电流)产生的，它又对放入其中的运动电荷(或电流)有力的作用；

运动电荷(电流) ⇄ 磁场传递 磁相互作用 ⇄ 运动电荷(电流)

二、磁感应强度

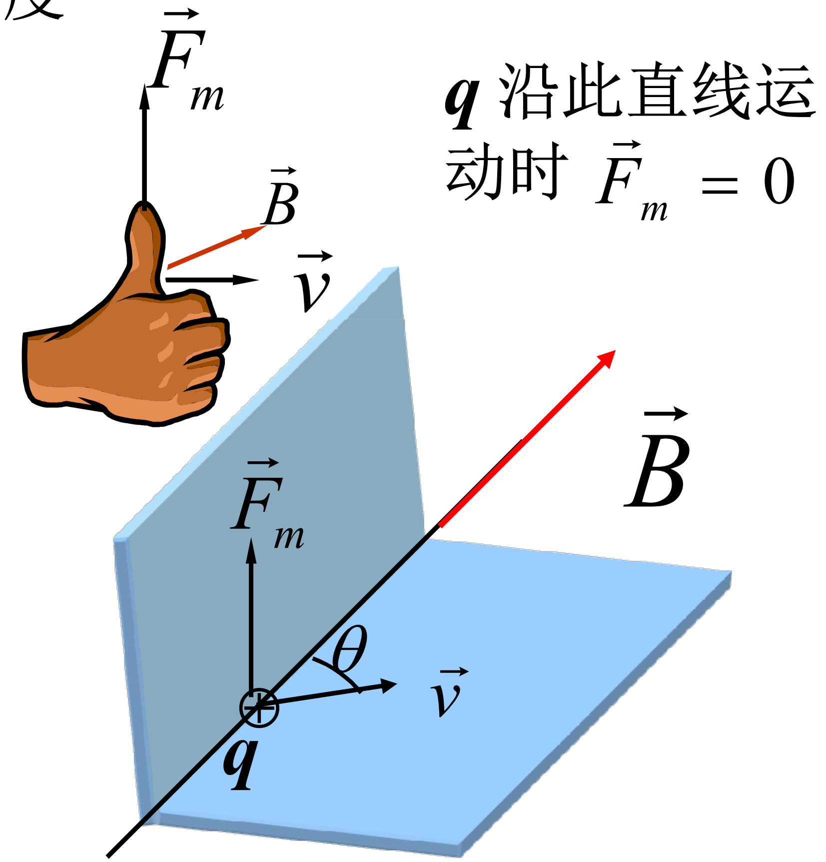
——反映磁场强弱的物理量

设计实验检验空间一点的磁感应强度

$$\frac{F_m}{qv\sin\theta}$$ 是定值

$$\frac{F_{\max}}{qv}=\frac{F_m}{qv\sin\theta}=B$$

B为该点的磁感应强度的大小。



- 磁感应强度是一个矢量，它反映了该点磁场的强弱和方向性；
- 其大小定义为 $B = \dfrac{F_{\max}}{qv} = \dfrac{F_m}{qv\sin\theta}$
- 其正方向规定为：磁场中某点的小磁针N极的稳定指向。
- 其单位是特斯拉（T）或高斯（Gs）

$$1\,T = 10^4\,Gs$$

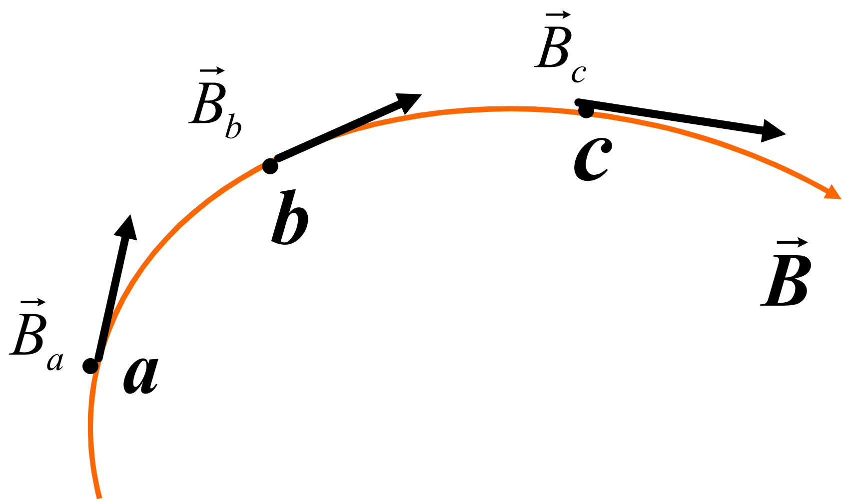
三、磁场中的高斯定理

1. 磁感应线（或 $\vec{B}$ 线）

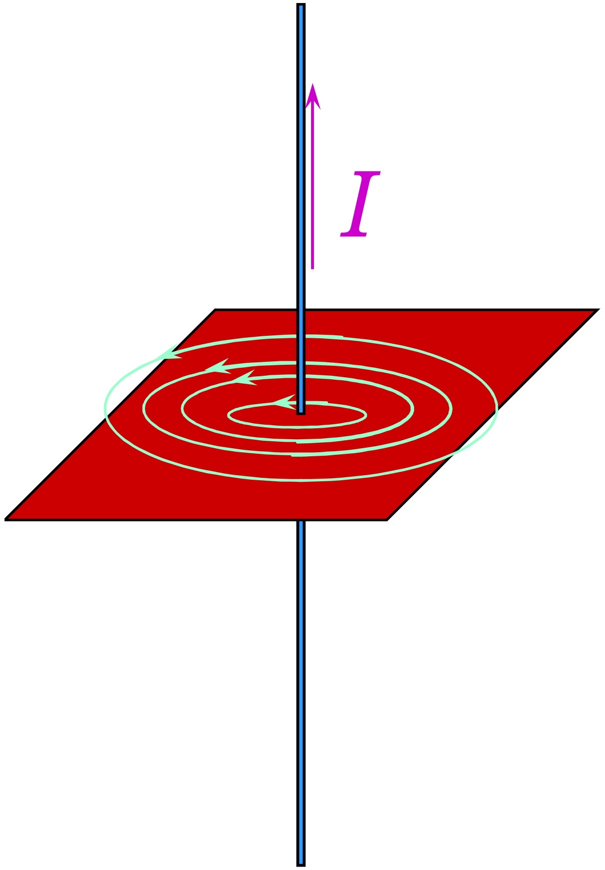
方向：线上每一点的切线

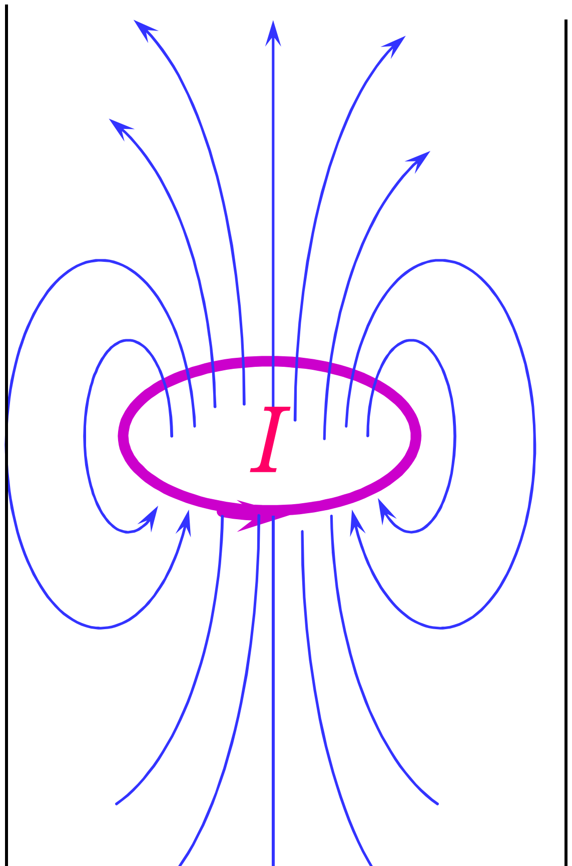
大小：线的疏密反映
该点磁场的强弱

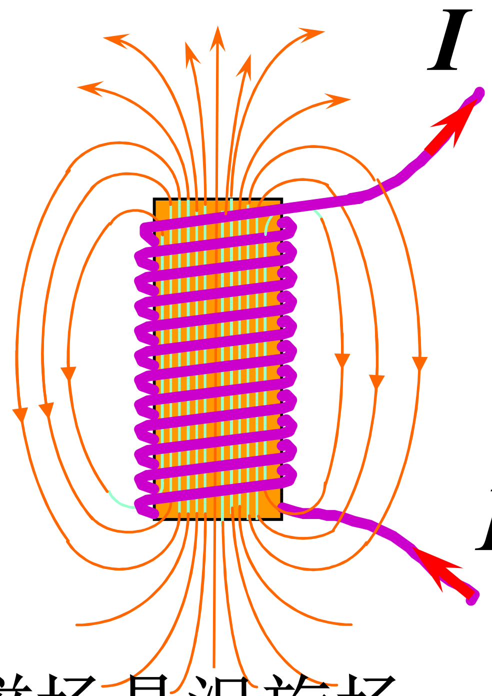
$$B = \frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}S_\perp}$$



直线电流的磁感应线　圆电流的磁感应线　通电螺线管的磁感应线



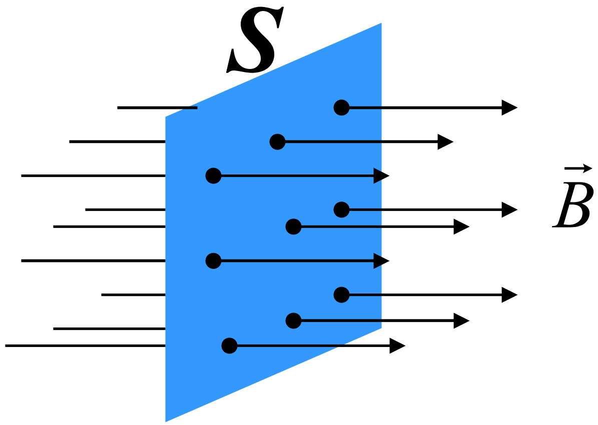




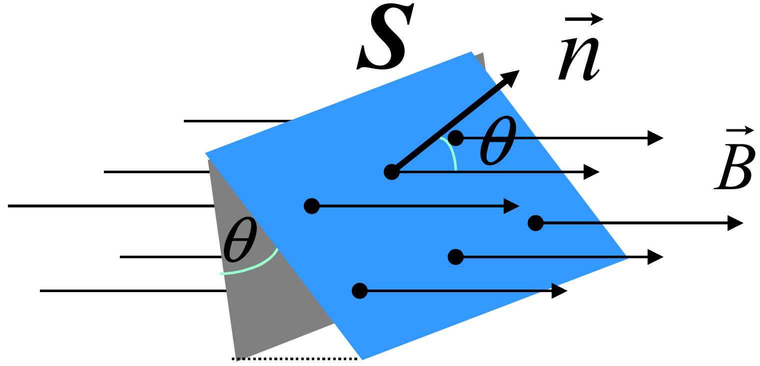
磁场是涡旋场。

磁感应线的性质：**a.** 空间中任意两条磁感应线不相交；
b.任何磁场中的磁感应线都是闭合回线，无头无尾；
c.磁感应线的环绕方向与电流***I***的流向构成右手螺旋关系。

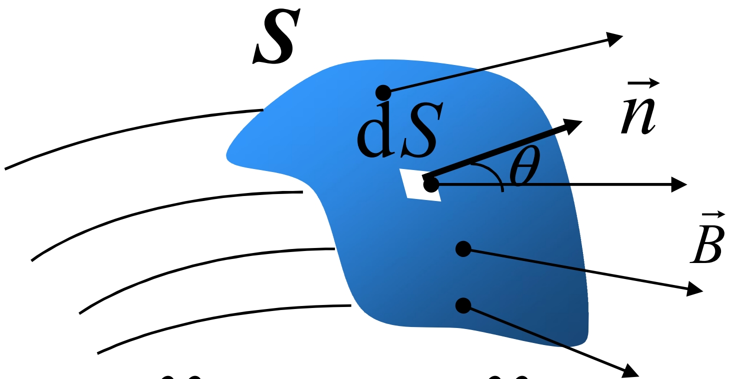
2、磁通量穿过磁场中任一曲面的磁感应线的条数



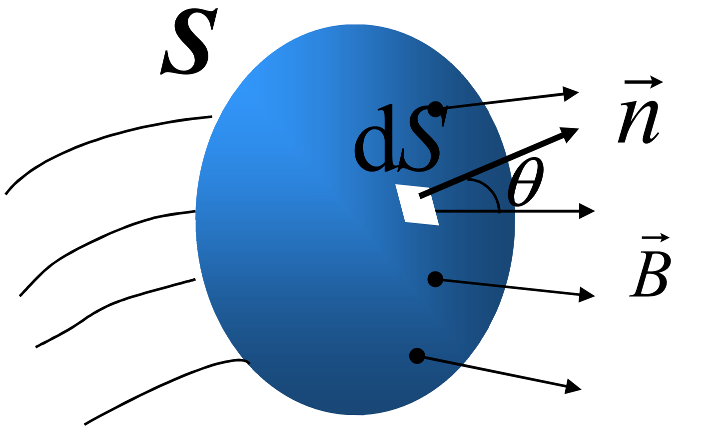
$$\Phi_m = BS$$



$$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\theta$$

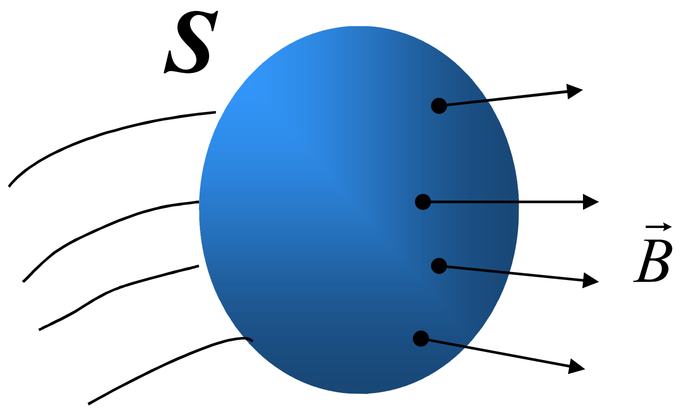


$$\Phi_m = \iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S B\cos\theta \mathrm{d}S$$



$$\Phi_m = \oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S B\cos\theta \mathrm{d}S$$

3、磁场中的高斯定理



$$\Phi_m = \oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ?$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

穿过任一闭合曲面的磁通量为零

——磁场中的高斯定理

磁场是无源场。

$$div\,\vec{B} = 0 \text{ 或 } \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

高斯定理的微分形式

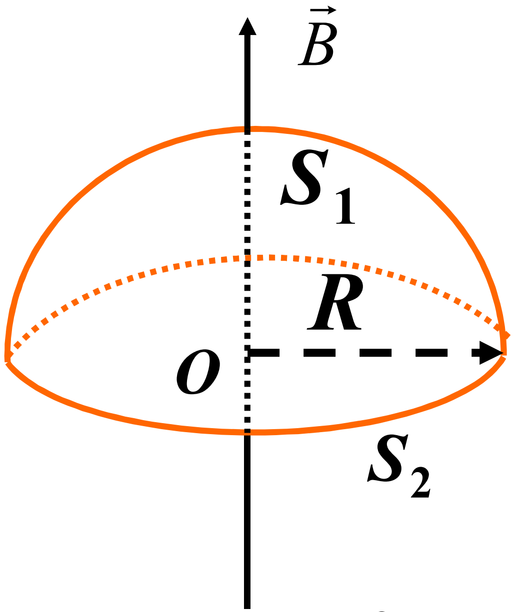
迪拉克（**P. A. M. Dirac 1931**）指出，已有的量子理论允许存在磁单极子。如果在实验中找到了磁单极子，磁场的高斯定理和整个电磁理论就要作重大的修改。

寻找磁单极子的实验研究具有重要的的理论意义。但至今还没发现磁单极子。

人们仍然认为：

磁场是电流或变化的电场产生的。

1. 求均匀磁场中半球面的磁通量

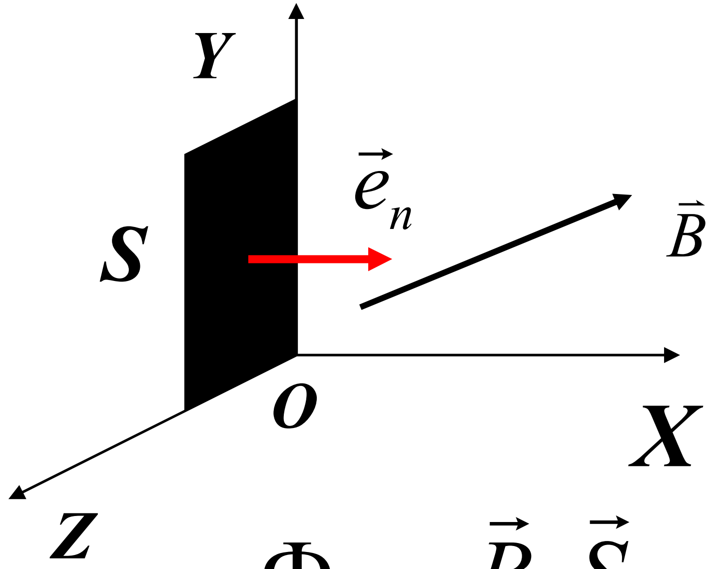


$$\Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0$$

$$\Phi_{S_1} + (-B\pi R^2) = 0$$

$$\Phi_{S_1} = B\pi R^2$$

2. 在均匀磁场 $\vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ 中，过*YOZ*平面内面积为*S*的磁通量。



$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S}$$
$$= (3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot S\vec{i}$$
$$= 3S$$

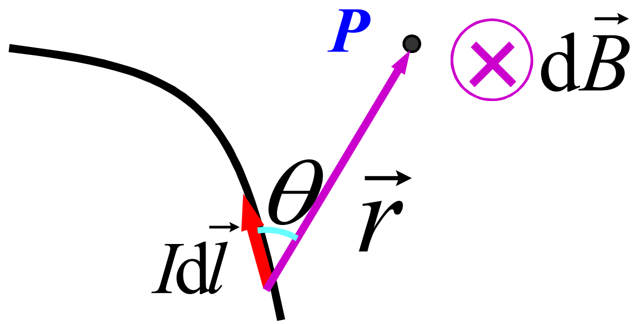
四、 毕奥—萨伐尔定律

1. 毕奥—萨伐尔定律内容

静电场： 取 $\mathrm{d}q \longrightarrow \mathrm{d}\vec{E} \longrightarrow \vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}$

磁　场： 取 $I\mathrm{d}\vec{l} \xrightarrow{?} \mathrm{d}\vec{B} \longrightarrow \vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}$

大小：$\mathrm{d}B=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$



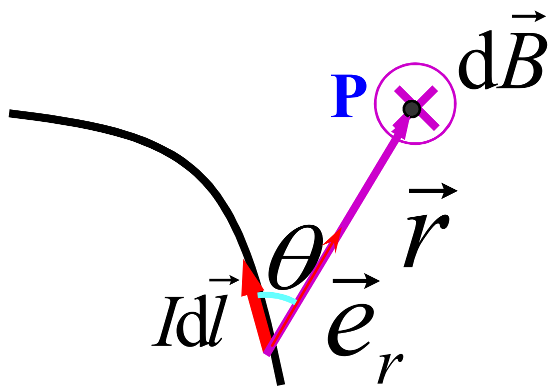
方向：右手螺旋法则判定

毕—萨定律：$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$　$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$

真空中的磁导率

$\vec{r}$— 由电流元指向场点P的矢径

大小：$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$



方向：右手螺旋法则判定

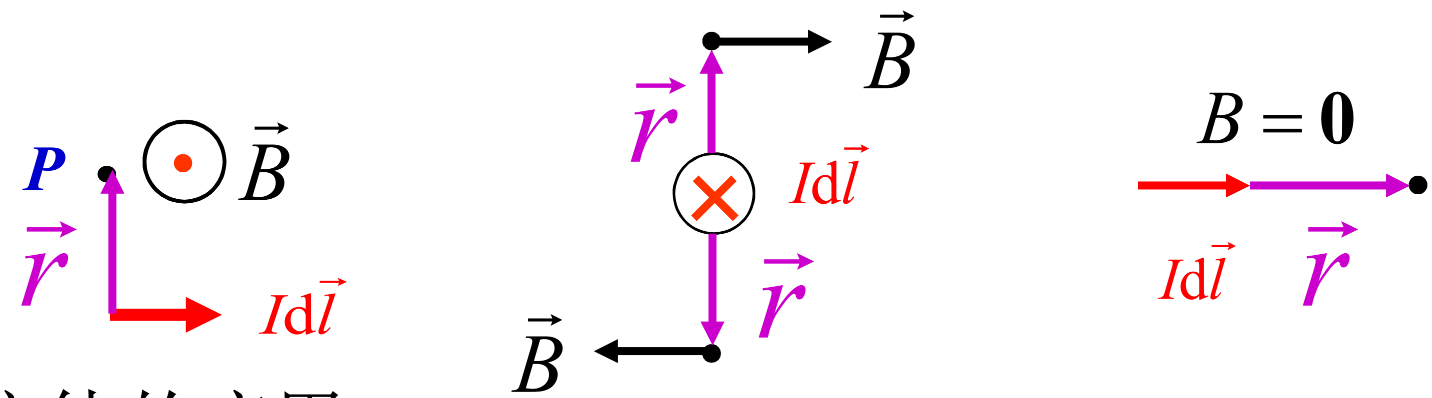
毕－萨定律：$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}}$$

$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$

真空中的磁导率

$\vec{r}\,(\vec{e}_r)$— 由电流元指向场点***P***的矢径(单位矢量）

例如：



2. 毕一萨定律的应用

—— 计算任意形状的载流导线的磁场

<u>解题步骤</u>

1. 分割载流导线，取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

2.确定 $\mathrm{d}\vec{B}$的表达式 $\mathrm{d}\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

3. 判断$\mathrm{d}\vec{B}$方向。建立坐标系，将 $\mathrm{d}\vec{B}$ 投影到坐标轴上

$$\mathrm{d}B_x,\mathrm{d}B_y,\mathrm{d}B_z;\Rightarrow B_x=\int\mathrm{d}B_x,\ B_y=\int\mathrm{d}B_y,$$

$$B_z=\int\mathrm{d}B_z;\Rightarrow \text{合成}\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

毕奥---萨伐尔定律的应用

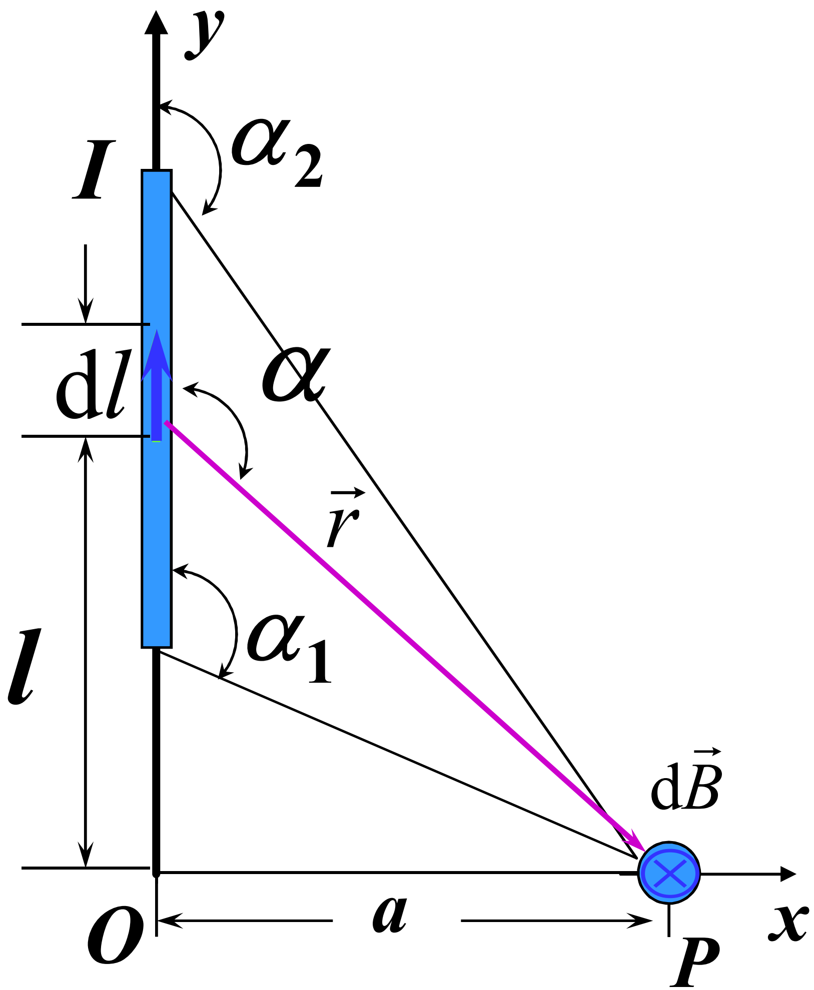
例1. 求载流直导线的磁场

已知：真空中I、α_1、 α_2、a

解：建立如图坐标系Oxy

在距O为l处任取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

则由毕—萨定律可知



大小 $\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$

方向 $I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}$ $\otimes$

$$B=\int \mathrm{d}B=\int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

统一积分变量

$$l = a\cot(\pi - \alpha) = -a\cot\alpha$$

$$\mathrm{d}l = a\csc^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

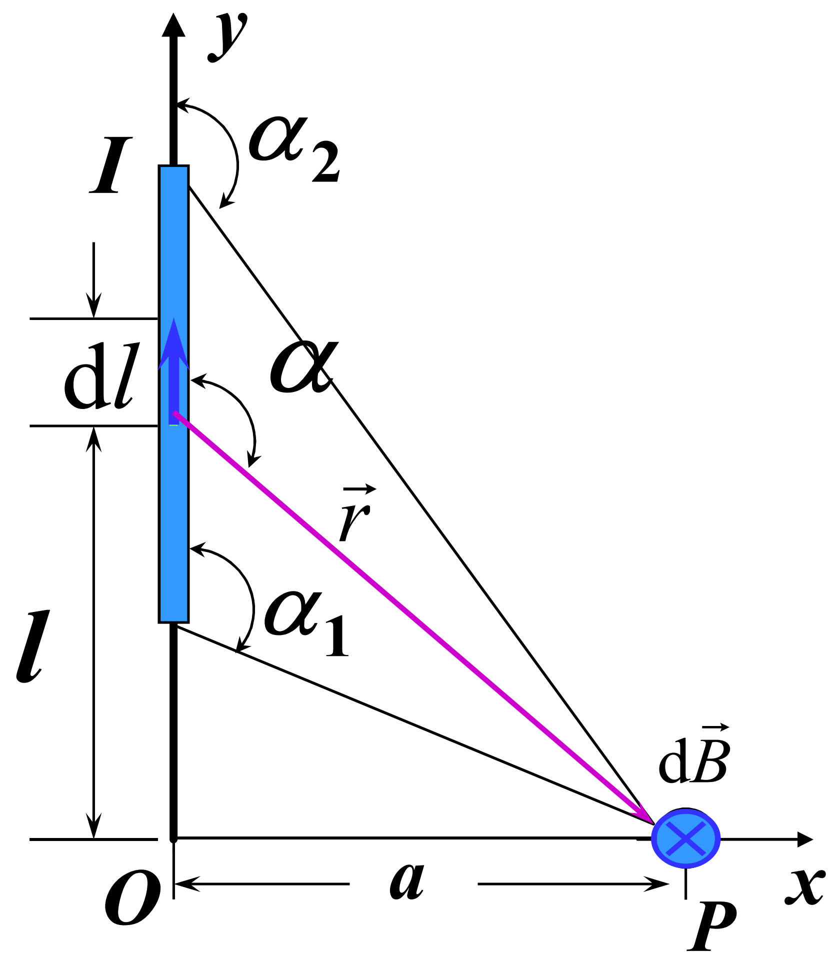
$$r = a/\sin\alpha$$

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\alpha\mathrm{d}l}{r^2}$$

$$= \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sin^2\alpha}{a^2}I\sin\alpha\frac{a\mathrm{d}\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu_0}{4\pi a}I\sin\alpha\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

方向 ⊗

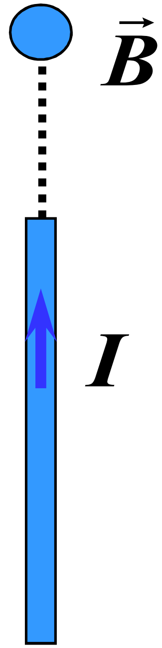
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$$

讨论

无限长载流直导线 $\alpha_1\to 0,\quad \alpha_2\to\pi$ $\quad B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

半无限长载流直导线 $\alpha_1=\pi/2,\quad \alpha_2\to\pi$ $\quad B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}$

直导线延长线上 $\quad B=?$

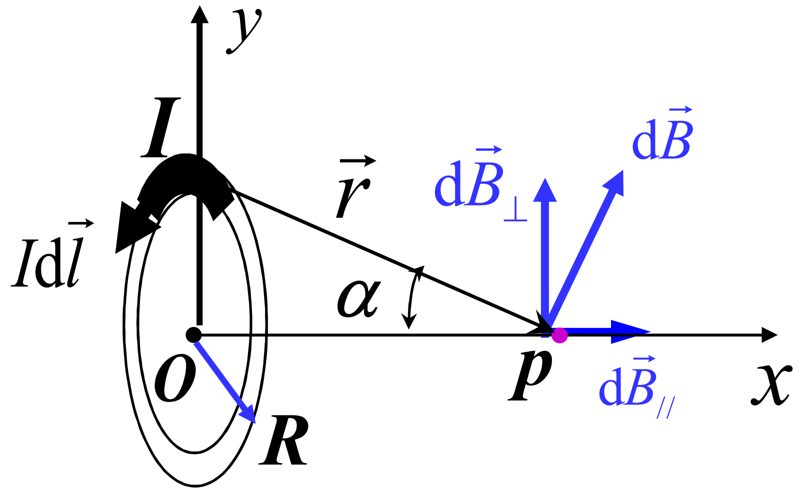


$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$$

$\alpha=0 \qquad dB=0 \longrightarrow \boxed{B=0}$

例2. 求圆电流的磁场

已知：***R***、***I***，求轴线上***P***点的磁感应强度。



解：建立坐标系***Oxy***

任取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

大小 $\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}l}{r^2}$ 方向 $I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}$

分析对称性、写出分量式

$$\vec{B}_{\perp} = \int \mathrm{d}\vec{B}_{\perp} = 0 \qquad B_{//} = \int \mathrm{d}B_{//} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2} = B_x$$

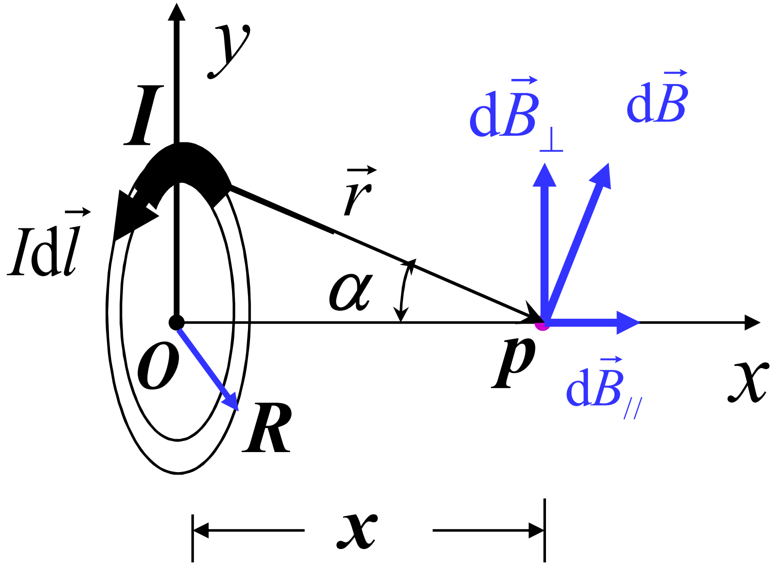
统一积分变量

$$\sin\alpha = R/r$$

$$B_x = \int \mathrm{d}B_x = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int \mathrm{d}l \qquad = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\cdot 2\pi R$$

$$= \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$



结论
- 大小： $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}}$
- 方向： 右手螺旋法则

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

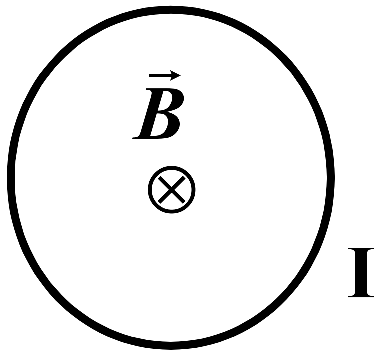
讨论

1. $x>>R \quad B=?$

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$$

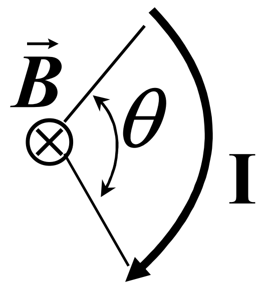
2. $x=0 \quad B=?$

载流圆环　　圆心角 $\theta=2\pi$

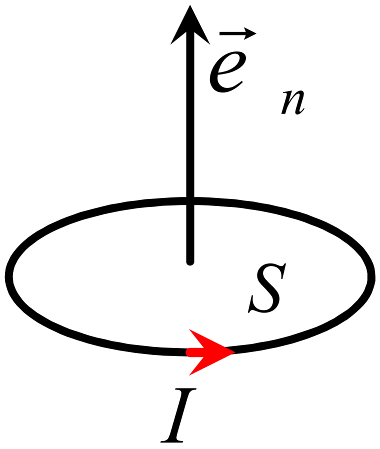


$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

载流圆弧　　圆心角 θ



$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}\bullet\frac{\theta}{2\pi}=\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}$$



线圈的磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_n$$

反映线圈磁性大小的物理量。

多匝线圈的磁矩 $\vec{m} = NIS\ \vec{e}_n$

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 I\pi R^2}{2\pi x^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3} \qquad \therefore\ \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi x^3}$$

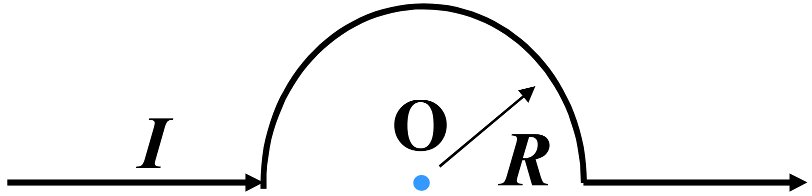
五、 磁场的叠加原理

- 实验表明：同电场一样，稳恒电流的磁场也满足叠加原理。即在由几个电流共同激发的磁场中，某点的磁感应强度 $\vec{B}$ 等于各个电流单独存在时在该点产生的磁感应强度 $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \cdots, \vec{B}_n$ 的矢量和，即

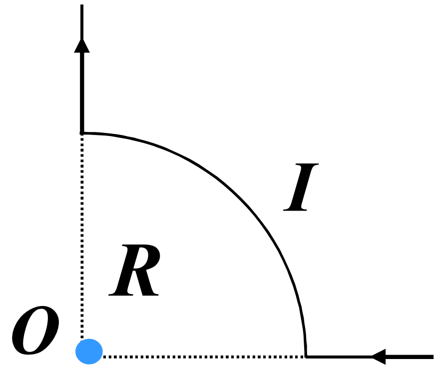
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n = \sum_i \vec{B}_i$$

利用叠加原理求组合导线的磁场

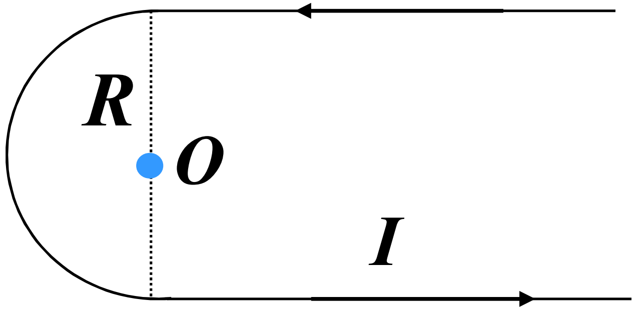
例1 如图， 求圆心O点的 $\vec{B}$



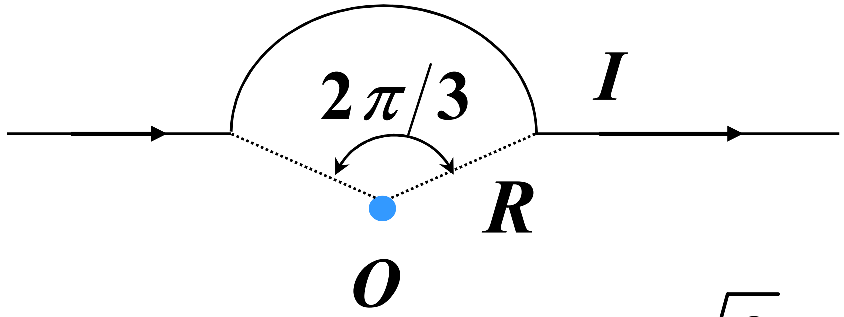
$$B=\frac{\mu_0 I}{4R} \quad \otimes$$



$$B=\frac{\mu_0 I}{8R} \quad \odot$$



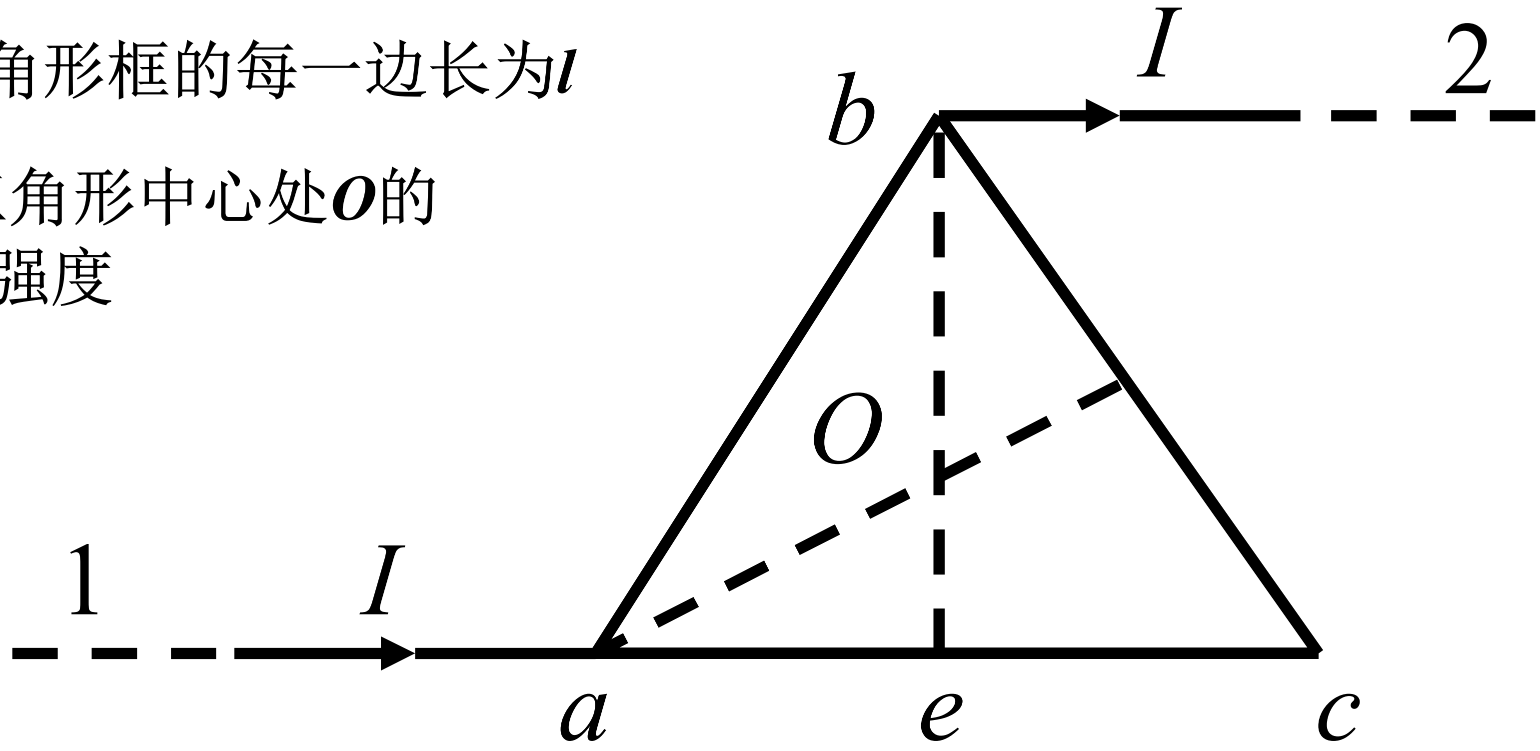
$$B=\frac{\mu_0 I}{4R}+\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \odot$$



$$B=\frac{\mu_0 I}{6R}+\frac{\mu_0 I}{\pi R}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \otimes$$

例2：三角形框的每一边长为*l*

求:正三角形中心处*O*的磁感应强度



解：令 $\vec{B}_1$ 、$\vec{B}_2$ 、$\vec{B}_{ac}$、$\vec{B}_{cb}$、$\vec{B}_{ab}$ 分别代表长直导线1、2、和三角形框的边 *ac*、*cb*、*ab*在*O*点处产生的磁感应强度。

则按叠加原理 $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_{ac}+\vec{B}_{cb}+\vec{B}_{ab}$

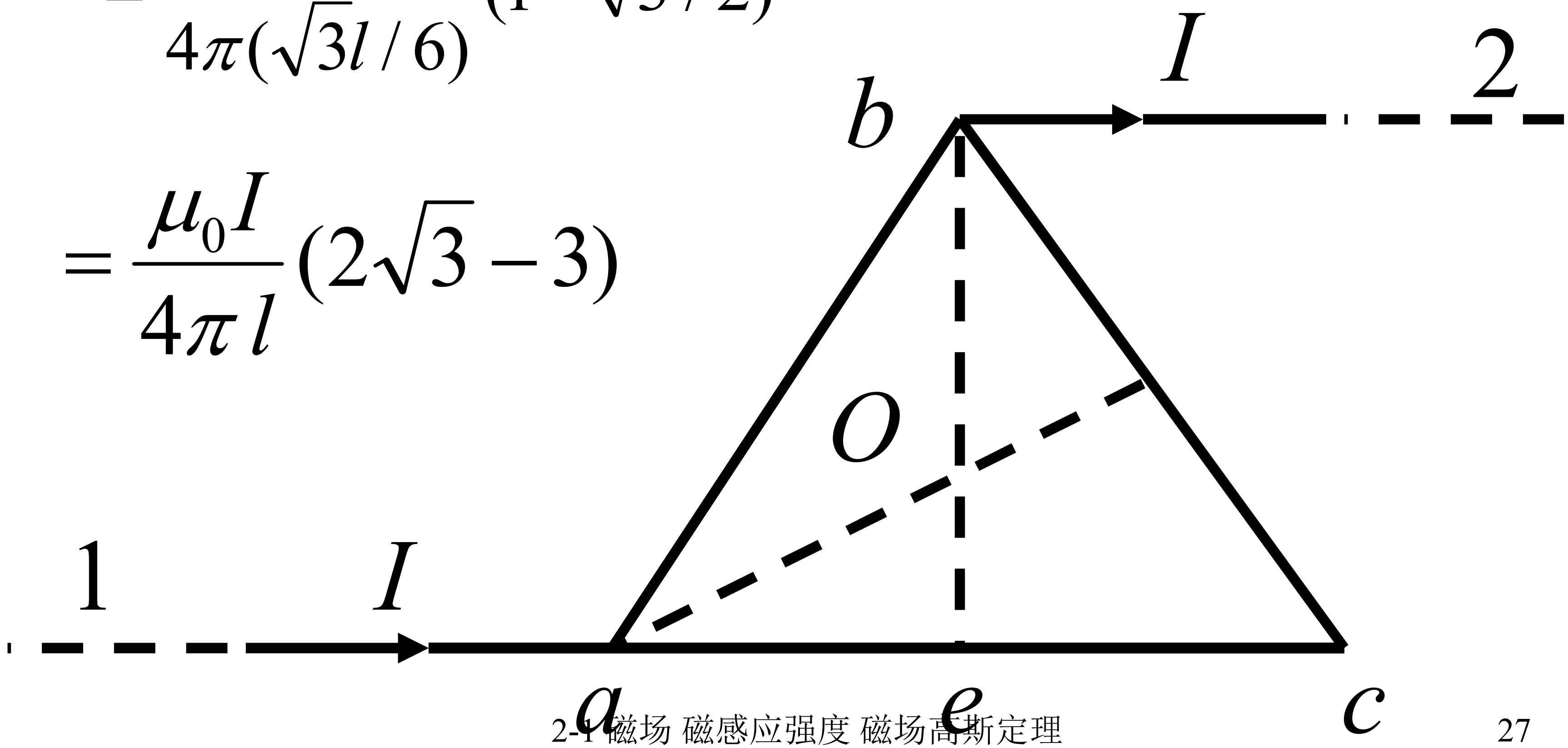
由毕--萨定律，有

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi(\overline{Oe})}(\cos 0^0-\cos 30^0)$$

方向：
垂直纸面向外；

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi(\sqrt{3}l/6)}(1-\sqrt{3}/2)$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi l}(2\sqrt{3}-3)$$



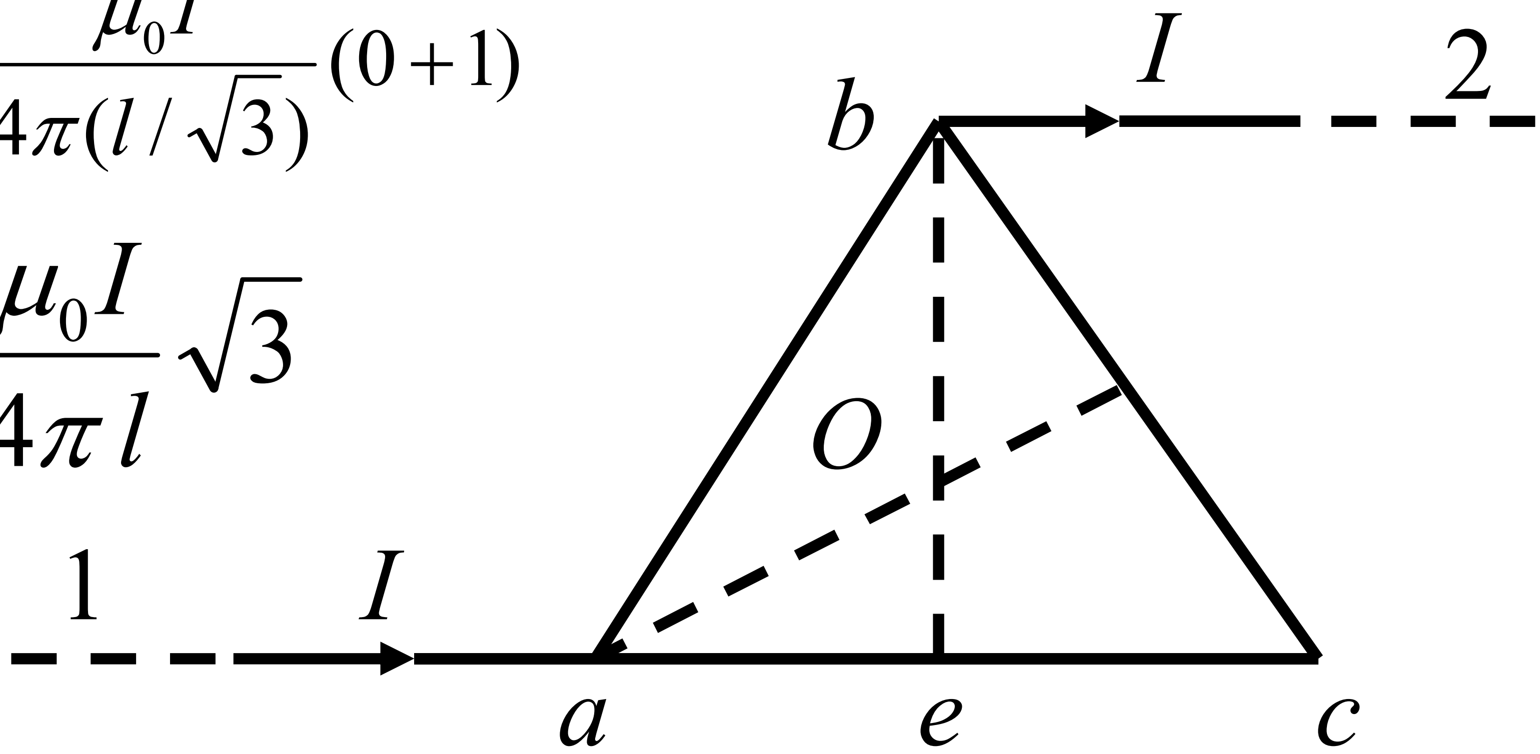
由毕--萨定律，有

方向：
垂直纸面向里；

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi(\overline{Ob})}(\cos 90^0-\cos 180^0)$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi(l/\sqrt{3})}(0+1)$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi l}\sqrt{3}$$



$$B_{ab} = \frac{\mu_0 I_{ab}}{4\pi(\sqrt{3}l/6)}(\cos 30^0 - \cos 150^0) = \frac{3\mu_0 I_{ab}}{2\pi l} \quad \otimes$$

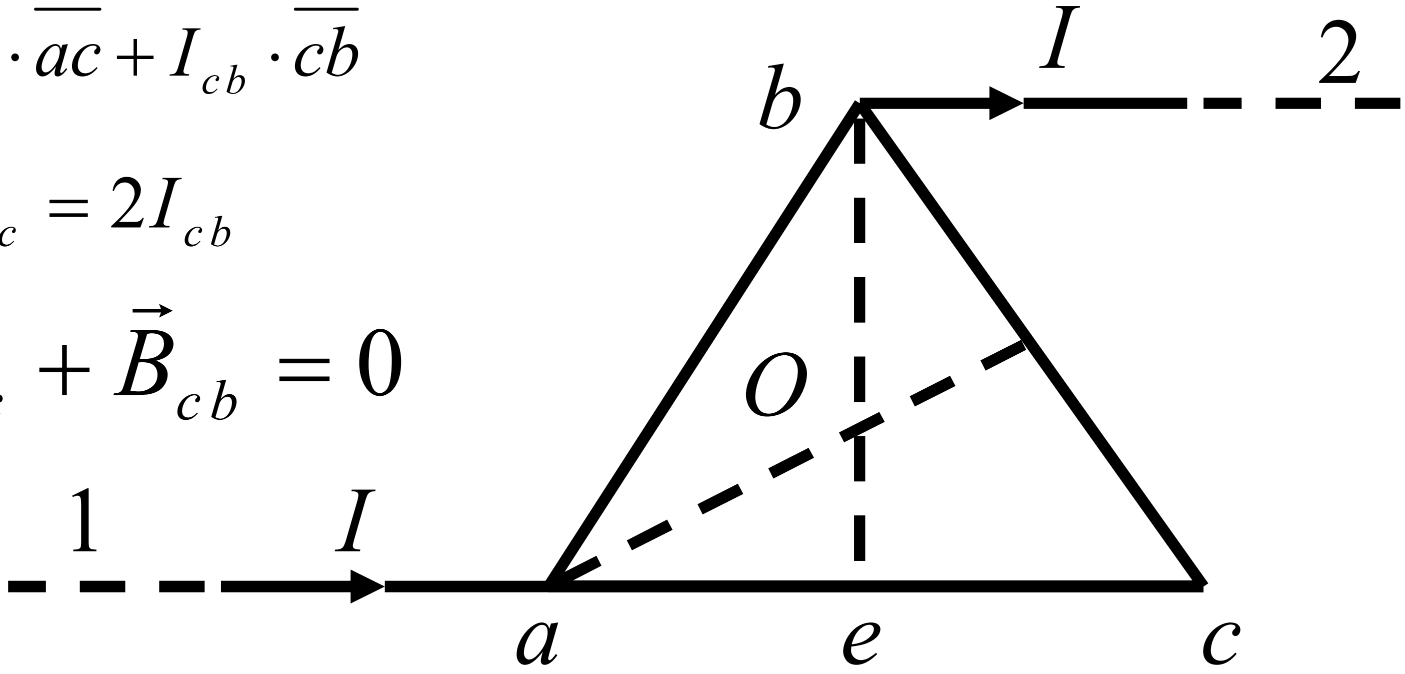
$$B_{ac} = \frac{\mu_0 I_{ac}}{4\pi(\sqrt{3}l/6)}(\cos 30^0 - \cos 150^0) = \frac{3\mu_0 I_{ac}}{2\pi l} \quad \odot$$

$$B_{cb} = \frac{\mu_0 I_{cb}}{4\pi(\sqrt{3}l/6)}(\cos 30^0 - \cos 150^0) = \frac{3\mu_0 I_{cb}}{2\pi l} \quad \odot$$

$$I_{ab} \cdot \overline{ab} = I_{ac} \cdot \overline{ac} + I_{cb} \cdot \overline{cb}$$

$$I_{ab} = 2I_{ac} = 2I_{cb}$$

$$\vec{B}_{ab} + \vec{B}_{ac} + \vec{B}_{cb} = 0$$

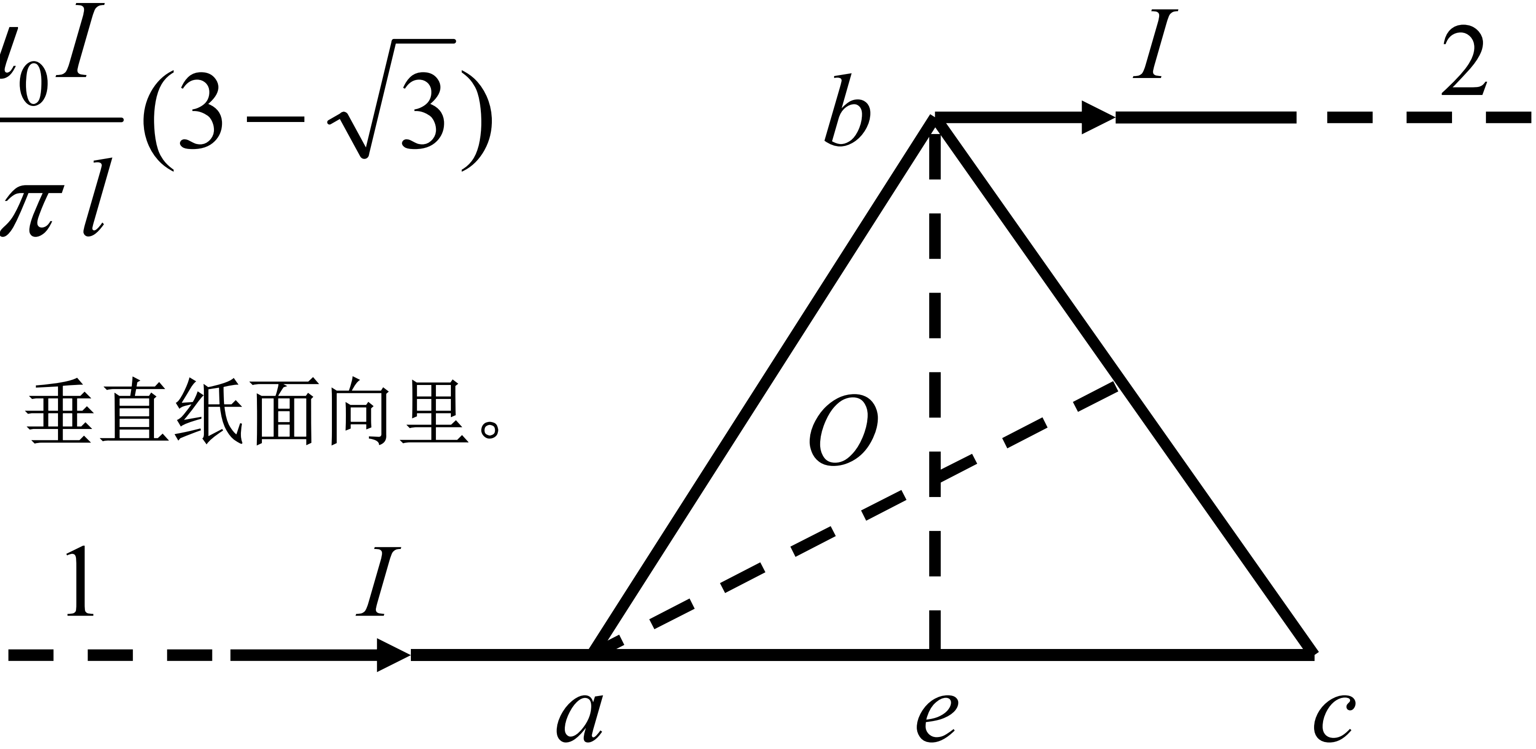


$$B=-B_1+B_2+B_{ac}+B_{cb}-B_{ab}=-B_1+B_2$$

$$=-\frac{\mu_0 I}{4\pi l}(2\sqrt{3}-3)+\frac{\mu_0 I}{4\pi l}\sqrt{3}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi l}(3-\sqrt{3})$$

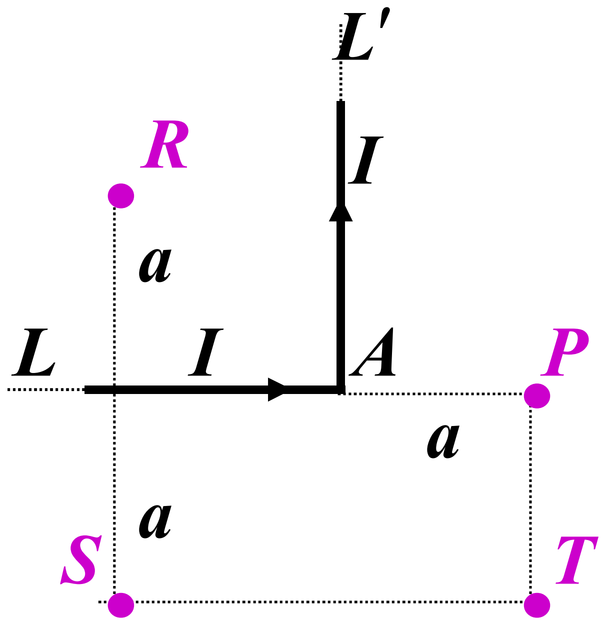
方向：垂直纸面向里。



例3 无限长载流直导线弯成如图形状

$I = 20\ \mathrm{A} \qquad a = 4\ \mathrm{cm}$

求：　P、R、S、T四点的 $\vec{B}$



解：P点 $B_p = B_{LA} + B_{L'A}$

$$= 0 + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = 5\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

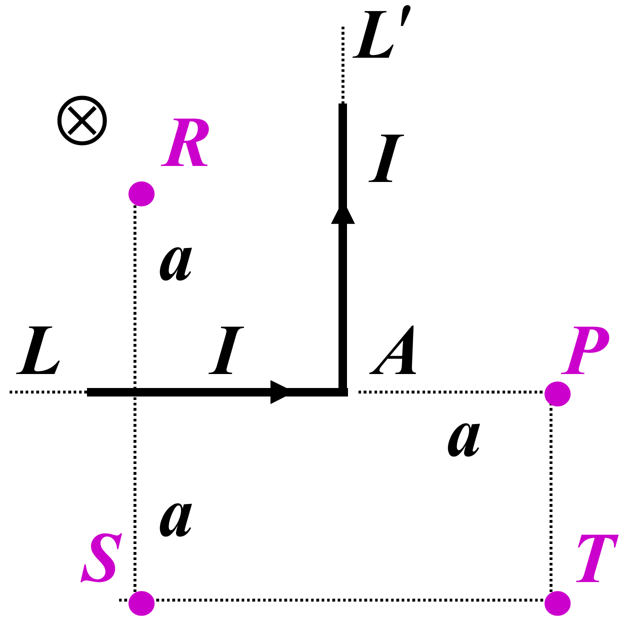
方向 $\otimes$

R点 $B_R = B_{LA} + B_{L'A}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos 0 - \cos\frac{3}{4}\pi) + \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\frac{1}{4}\pi - \cos\pi)$$

$$= 1.71\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$　　方向 $\odot$

S点 $B_{LA}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos 0-\cos\frac{3}{4}\pi)$ 方向 $\otimes$



$B_{L'A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\frac{3}{4}\pi-\cos\pi)$ 方向 $\odot$

$B_p=B_{LA}-B_{L'A}=7.07\times10^{-5}\ \mathrm{T}$ 方向 $\otimes$

T点 $B_{LA}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos 0-\cos\frac{\pi}{4})$ 方向 $\otimes$

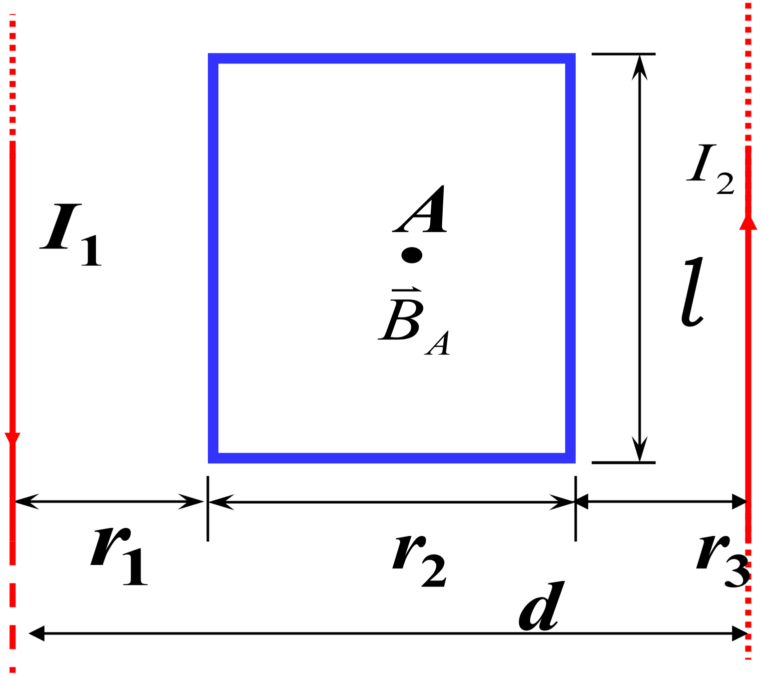
$B_{L'A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\frac{3}{4}\pi-\cos\pi)$ 方向 $\otimes$

$B_p=B_{LA}+B_{L'A}=2.94\times10^{-5}\ \mathrm{T}$ 方向 $\otimes$

例 4 两平行载流直导线

求 两线中点 $\vec{B}_A$

过图中矩形的磁通量



$d = 40\ \text{cm}$

$r_2 = 20\ \text{cm}$

$l = 25\ \text{cm}$

$r_1 = r_3 = 10\ \text{cm}$

$I_1 = I_2 = 20\ \text{A}$

解：I_1、I_2在A点的磁场

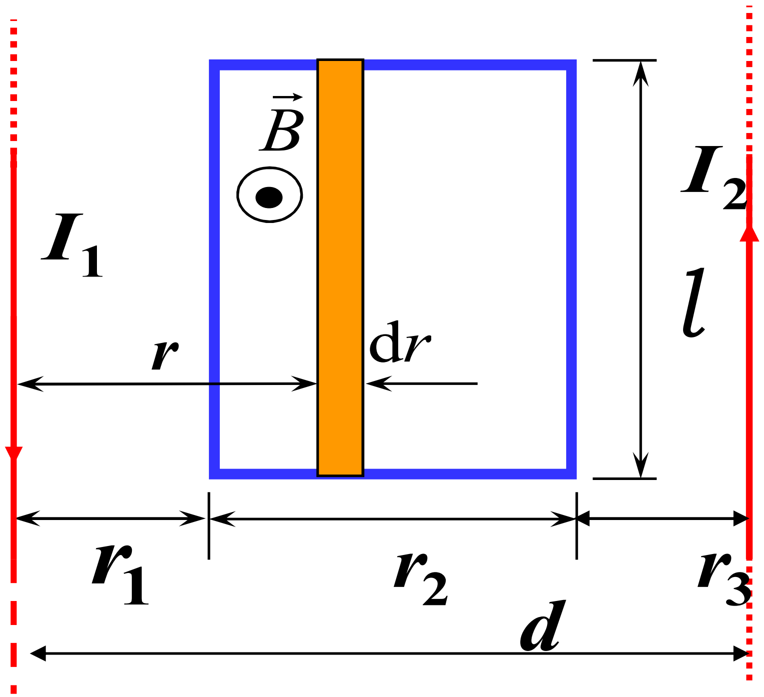
$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\, d/2}$$

$$= 2.0\times10^{-5}\ \text{T}$$

$$B_A = B_1 + B_2 = 4.0\times10^{-5}\ \text{T}$$

方向 ⊙

如图在距1为r处取一宽为dr的面元,则有



$$\mathrm{d}\Phi_m = \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Bl\mathrm{d}r$$

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-r)}$$

方向 $\odot$

$$\Phi_m = \int \mathrm{d}\Phi_m = \int_{r_1}^{r_1+r_2} \left[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-r)}\right] l\mathrm{d}r$$

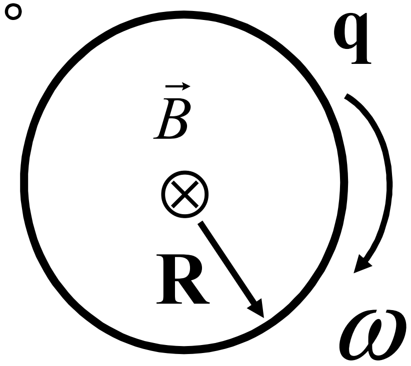
$$= \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi}\ln\frac{r_1+r_2}{r_1} + \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi}\ln\frac{d-r_1}{d-r_1-r_2}$$

$$= 2.26\times 10^{-6}\ \mathrm{Wb}$$

例 5 均匀带电圆环

已知：q、R、ω 圆环绕轴线匀速旋转。

求圆心处的 $\vec{B}$



解： 带电体转动，形成运流电流。

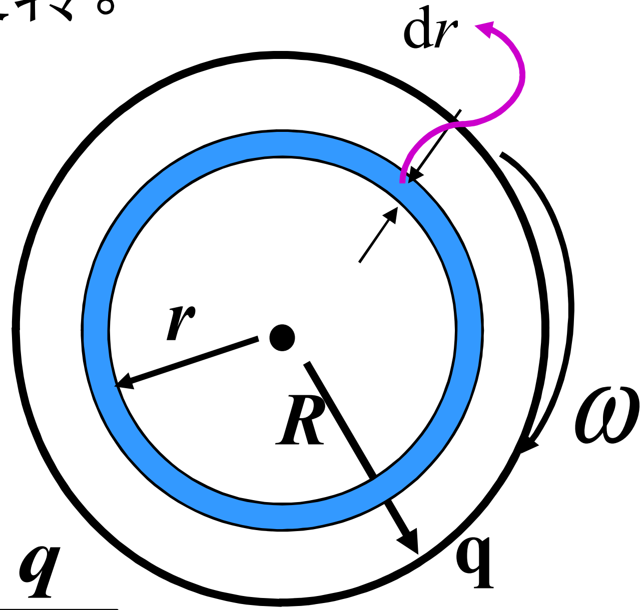
$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi/\omega} = \frac{q\omega}{2\pi}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 q\omega}{4\pi R}$$

例6 均匀带电圆盘

已知：q、R、ω 圆盘绕轴线匀速旋转。

求圆心处的 $\vec{B}$ 及圆盘的磁矩



解：如图取半径为**r**,宽为**dr**的环带。

元电流 $$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{\mathrm{d}q}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q$$

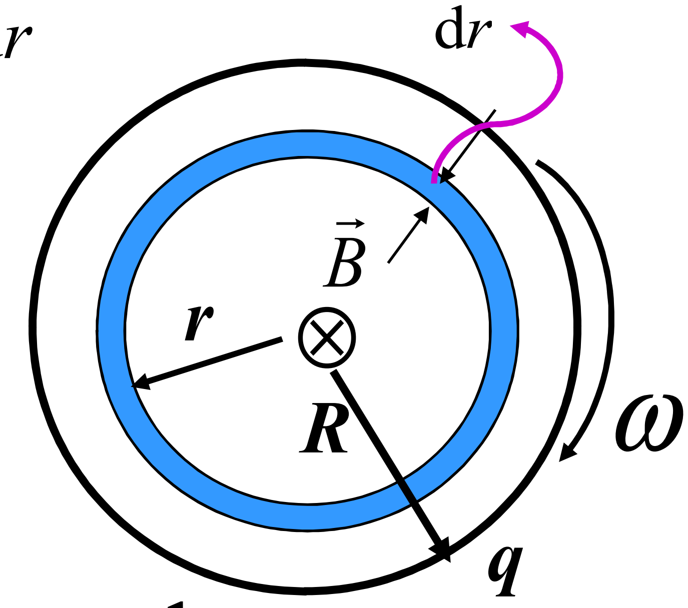
$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S = 2\pi\sigma r \mathrm{d}r$$ 其中 $\sigma = \dfrac{q}{\pi R^2}$

$$\mathrm{d}I = \sigma\omega r \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0}{2r}\sigma\omega r \mathrm{d}r$$

$$B=\int \mathrm{d}B=\int \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r}=\int_0^R \frac{\mu_0}{2r}\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$$



线圈磁矩 $\vec{m}=IS\vec{n}$

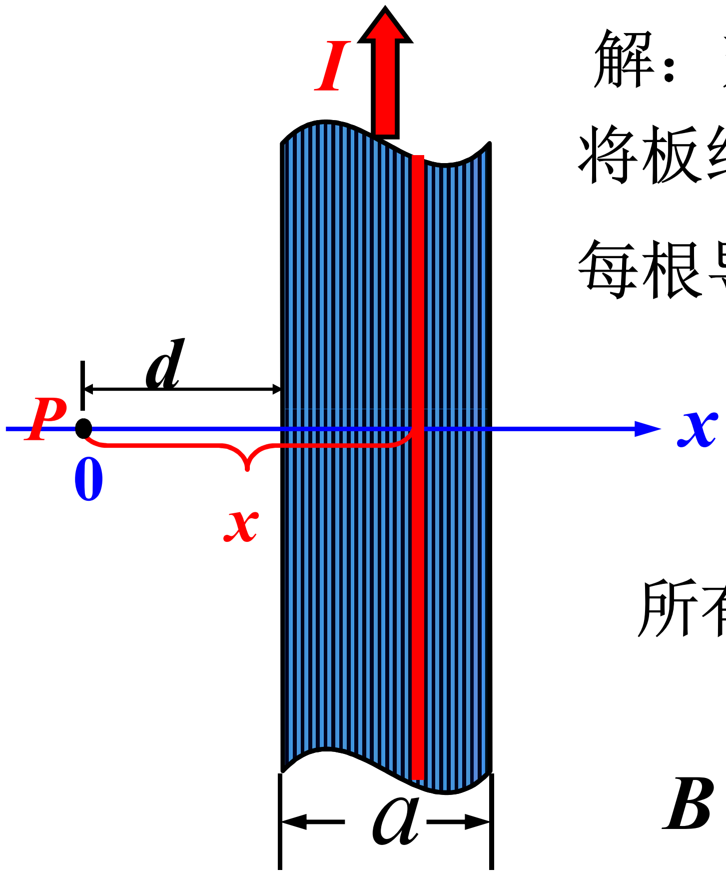
如图取微元 $\mathrm{d}m=S\mathrm{d}I=\pi r^2\sigma\omega r\mathrm{d}r$

$$m=\int \mathrm{d}m=\int_0^R \pi r^2\sigma\omega r\mathrm{d}r=\frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}$$

方向： $\otimes$

例7

宽度为 a 的无限长金属平板，均匀通电流 I，求：图中 P 点的磁感应强度。



解：建立坐标系

将板细分为许多无限长直导线

每根导线宽度为 dx 通电流 $i = \dfrac{I}{a}\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}x}{2\pi a x}$$

所有$\mathrm{d}B$ 的方向都一样：$\odot$

$$B = \int_d^{a+d} \frac{\mu_0 I \mathrm{d}x}{2\pi a x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+d}{d}$$