§ 4 麦克斯韦方程组; 电磁场

- § 4-1 位移电流
- § 4-2 全电流安培环路定理
- § 4-3 麦克斯韦方程组
- § 4-4 电磁波
- § 4-5 电磁波能量与电磁波谱

1819年奥斯特

电 产生 磁

1831年法拉第

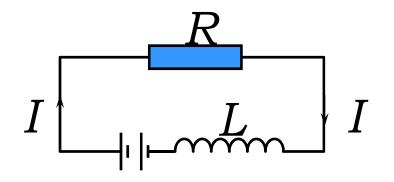
磁产生电

变化的电场——磁场

§ 4-1 位移电流

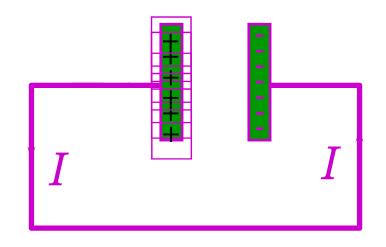
一, 俭移电流

☀电流的连续性问题:



包含电阻、电感线圈的电路,电流是连续的.

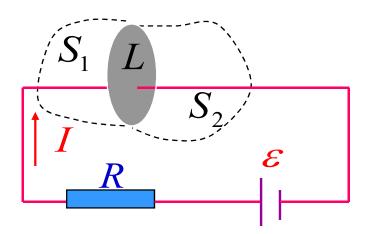
包含有电容的电流 是否连续

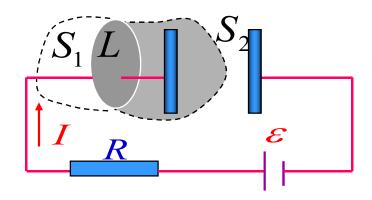


1. 问题的提出

对恒定电流
$$\iint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

稳恒磁场的安培环路定理已 不适用于非稳恒电流的电路





2. 位移电流假设

非稳恒电路中,在传导电流中断处必发生电荷分布的变化

I = dq/dt 极板上电荷的时间变化率等于传导电流

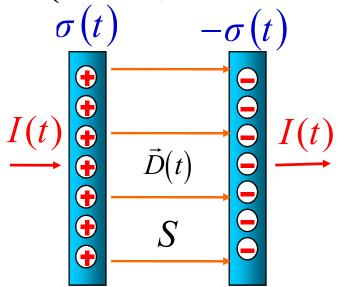
电荷分布的变化必引起电场的变化电位移通量

$$\Phi_{D} = DS = \Phi_{D}(t)$$

$$D = \varepsilon E = \varepsilon \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} = \sigma$$

$$\Phi_{D}(t) = \sigma(t)S = q(t)$$

(以平行板电容器为例)



$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = I_D$$
 —位移电流(电场变化等效为一种电流)

通过电场中某截面的位移电流等于电位移通量的时间变化率

在无传导电流的介质中 I_D = 回路导线段 传导电流I

一般情况位移电流
$$I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

变化的电场象传导电流一样能产生磁场,从产生磁场的角度看,变化的电场可以等效为一种电流。

$$I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

若把最右端电位移通量的时间变化率看作为一种电流,那么电路就连续了。麦克斯韦把这种电流称为位移电流。

定义
$$\begin{cases} I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (位移电流密度) \end{cases}$$

位移电流的方向

位移电流与传导电流方向相同

3. 位移电流的特点

1、只要电场随时间 变化,就有相应的位 移电流.

2、位移电流与传导电流是完全不同的概念, 仅在产生磁场方面二者 等价.

- I_D = 回路导线段 I.
- (2)在导体中,低频 时 $I_D << I$, 可 忽略; 高频时不可略
- (1)传导电流只存在于导体中,有电荷流动,通过导体会产生焦耳热.
- (2) I_D则无论是导体、介质或真空中都可以存在,无电荷流动,一般不存在热效应。在高频交变电场作用下,介质也发热,那是分子反复极化造成,不遵守焦耳—楞次定律.

§ 4-2 全电流安培环路定理

1、全电流

通过某一截面的全电流是通过这一截面的 传导电流和位移电流的代数和.

电路中的全电流在任何情况下总是连续的。 在非稳恒的电路中,安培环路定律仍然成立。

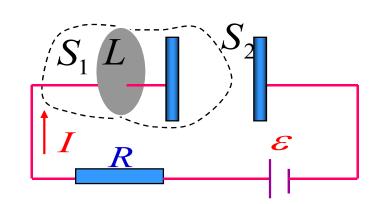
2、全电流安培环路定律

$$\iint_{L} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I + I_{D} = \sum I + \iint_{S} \frac{\partial D}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{L} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I + I_{D} = \sum I + \iint_{S} \frac{\partial D}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

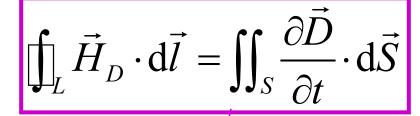
$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = I_D$$

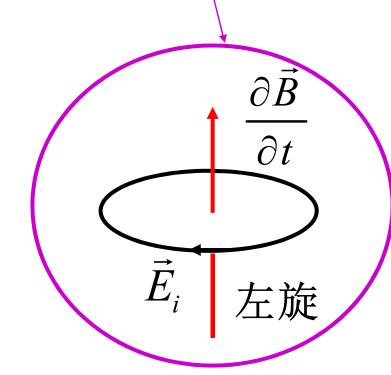
$$\iint_{L} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

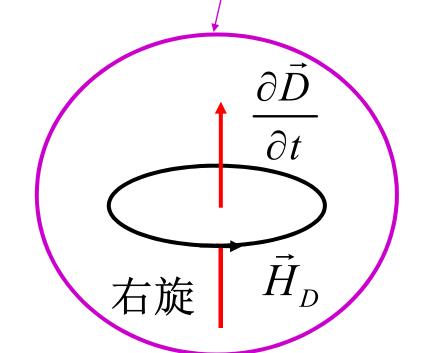


既解决了矛盾,同时又与电荷守恒定律吻合。

$$\iint_{l} \vec{E}_{i} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



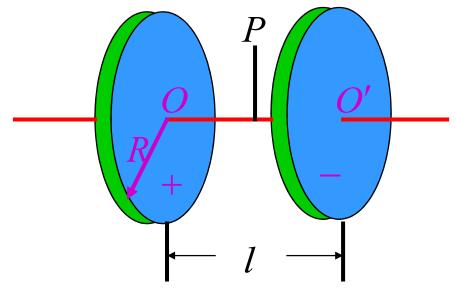




对称

例 半径为R,相距 $I(I \ltimes R)$ 的圆形空气平板电容器,两端加上交变电压 $U=U_0\sin\omega t$,求电容器极板间的:

- (1)位移电流;
- (2)位移电流密度的大小;
- (3)位移电流激发的磁场分布B(r),r为圆板的中心距离.

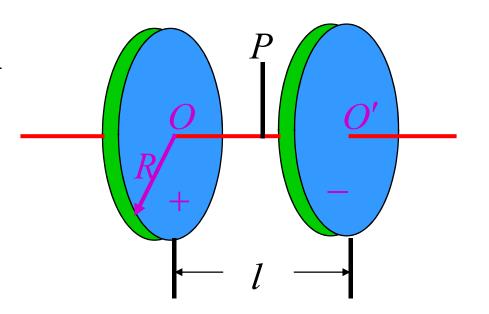


麦克斯韦方程组; 电磁场

解: (1)由于*l*<<*R*,故平板间可作匀强电场处理,

$$E = \frac{U}{l} = \frac{U_0 \sin \omega t}{l}$$

根据位移电流的定义



$$I_{D} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{D}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(DS)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_{0} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \pi R^{2} = \frac{\varepsilon_{0}\pi R^{2}}{l} U_{0}\omega\cos\omega t$$

另解
$$I_D = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

平行板电容器的电容
$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{l}$$

代入,可得同样结果.

(2)由位移电流密度的定义

$$J_{D} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_{0} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon_{0}}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\varepsilon_{0} U_{0}}{l} \omega \cos \omega t$$
或者
$$J_{D} = I_{D} / \pi R^{2}$$

(3)两极板间的位移电流相当于均匀分布的柱电流,这将产生具有轴对称性的涡旋磁场,由全电流安培环路定律得

$$r < R$$

$$\iint_{L_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = \iint_{S} \vec{J}_D \cdot d\vec{S} = J_D \pi r^2$$

$$H_1 2\pi r = \frac{\varepsilon_0 U_0}{l} \pi r^2 \omega \cos \omega t$$

$$H_1 = \left(\frac{\varepsilon_0 U_0}{2l} \omega \cos \omega t\right) r$$

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \left(\frac{U_0 \omega}{2lc^2} \cos \omega t\right) r$$

$$\frac{1}{\xi_0 \mu_0}$$

$$\iint_{L_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = I_D = J_D \pi R^2$$

$$H_2 = \frac{I_D}{2\pi r} = \left(\frac{\varepsilon_0 R^2 U_0}{2l} \omega \cos \omega t\right) \frac{1}{r}$$

$$B_2 = \mu_0 H_2 = \left(\frac{R^2 U_0 \omega}{2lc^2} \cos \omega t\right) \frac{1}{r} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

§ 4-3 麦克斯韦方程组

静电场和恒定磁场的基本规律

静电场

恒定磁场

$$\iiint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V} \rho \cdot dV$$

$$\iint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{L} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\iint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

变

$$\iint_{L} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$-\iint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \left| \iint_{L} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

一、积分形式

麦克斯韦指出:变化的电场和磁场不是彼此孤立的,它们相互联系,彼此激发,组成一个统一的电磁场

麦克斯韦方程组; 电磁场

若两类场同时存在

$$ec{E} = ec{E}_{0} + ec{E}'$$
 $ec{D} = ec{D}_{0} + ec{D}'$ $ec{B} = ec{B}_{0} + ec{B}'$ $ec{H} = ec{H}_{0} + ec{H}'$

(1)
$$\iiint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i} Q_{i} = \iiint_{V} \rho \, dV$$

$$(2) \quad \iiint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

(1)
$$\iint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i} Q_{i} = \iiint_{V} \rho \, dV$$
(2)
$$\iint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$
(3)
$$\iint_{L} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\iint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
(4)
$$\iint_{L} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \sum_{i} I_{i} + \iint_{S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_{S} (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

麦克斯韦方程组的物理意义

方程 (1) $\iint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum Q_{i} = \iiint_{V} \rho \, dV$ 是电场的高斯定理 (电场通量定理) · .它给出了电场强度与电荷的关系,揭示了电场的性质.其中的电场既包括电荷产生的,也包括变化的磁场产生的.

静电场是有源场、感生电场是无源场

方程(2) $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 是磁场的高斯定理,反映磁场的性质

传导电流、位移电流产生的磁场都是无源场,磁感应线总是闭合曲线,该方程也叫磁通连续方程.

方程 (3) $\iint_{S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\iint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ 是电场的环路定理,反映了变化的磁场和电场之间的联系

—— 法拉第电磁感应定律

静电场是保守力场,变化磁场可以激发涡旋电场

方程 (4) $\iint_L \vec{H} \cdot d\vec{r} = \sum_i I_i + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$ 是全电流安培环路定理(磁场环路定理),反映了变化的电场和磁场之间的联系

传导电流和变化电场都可以激发涡旋磁场



这四个方程称为麦克斯韦方程组的积分形式.麦克斯韦方程组能完全描述电磁场的动力学过程

麦克斯韦方程组的积分形式描述的是在某有限区域内(例如一个闭合曲线或一个封闭曲面所围的区域)以积分形式联系各点的电磁场量(*E, D, B, H*)和电流、电荷之间的依存关系,不能直接表示某一点上各个电磁场量和该点电流、电荷间的相互联系.

二、微分形式

根据高斯公式
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

$$\iiint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V} (\nabla \cdot \vec{D}) dV = \iiint_{V} \rho dV$$

$$\iiint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V} (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0$$

根据斯托克斯公式

$$\iint_{L} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_{S} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\iint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{L} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_{S} (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S} (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

麦克斯韦方程组; 电磁场

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Maxwell 方程组

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

§ 4-4 电磁波

电磁波:

根据麦克斯韦理论,在自由空间内的电场和磁场满足

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

这样电场和磁场可以相互激发并以波的形式由近及远,以有限的速度在空间传播开去,就形成了<u>电磁波</u>。

一、电磁波的波动方程

无限大均匀介质或真空中,空间内无自由电荷, 也无传导电流。则麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

介质性质方程:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 & \Leftrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 & \text{ee is both the energy of the en$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$
 电磁场的波动微分方程

在真空中,
$$u_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

对于仅沿水方向传播的一维平面电磁波,有

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

解上两微分方程得:

$$E = E_0 \cos \omega (t - \frac{x}{u})$$
 (沿y方向振动)

$$H = H_0 \cos \omega (t - \frac{x}{u})$$
 (沿z方向振动)

沿x轴正方向传播的单色平面电磁波的波动方程

二、电磁波的发射和接收

电磁波的发射

如何获得变化的电场呢?

振荡电路中的电流是周期性变化的, 因此振荡电路可以发射电磁波

讨论LC回路中电荷和电流的变化规律

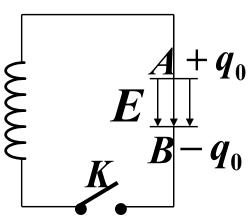
电容器两极板间电势差

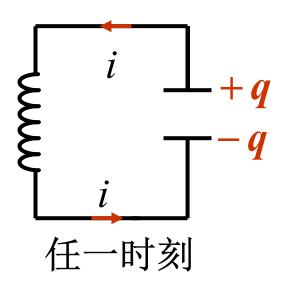
$$u = \frac{q}{C}$$

自感线圈内电动势

$$\varepsilon_L = -L \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$$

$$LC$$
回路





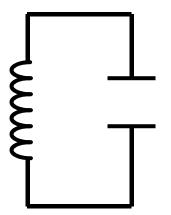
$$-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C} \qquad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{LC} = \omega^2$$

$$\frac{d^{2}q}{dt^{2}} + \omega^{2}q = 0 \qquad \left(\frac{d^{2}x}{dt^{2}} + \omega^{2}x = 0\right) \quad \xi$$

电荷q和电流i作简谐振动,周期性变化

$$q = q_0 \cos(\omega t + \phi)$$
 $i = -q_0 \omega \sin(\omega t + \phi)$

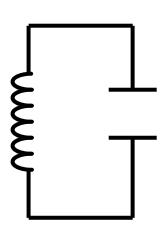


振荡角频率
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
 振荡频率 $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

电场
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$
 $W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

磁场
$$B = \mu_0 ni \qquad W_m = \frac{1}{2} Li^2$$

电场和磁场以及各自场的能量均呈周期性变化。



2

LC回路能否有效地发射电磁波

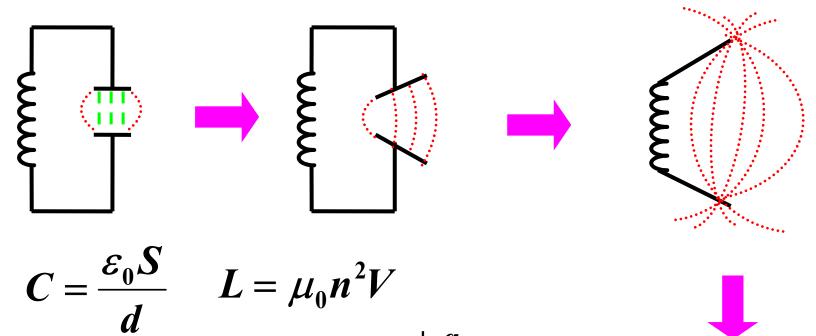
LC回路有两个缺点:

(1)振荡频率太低

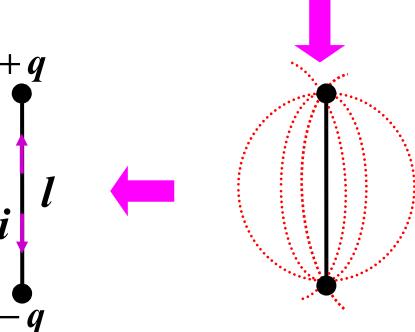
LC电路的辐射功率 $S \propto \omega^4$

(2)电磁场仅局限于电容器和自感线圈内解决途径:

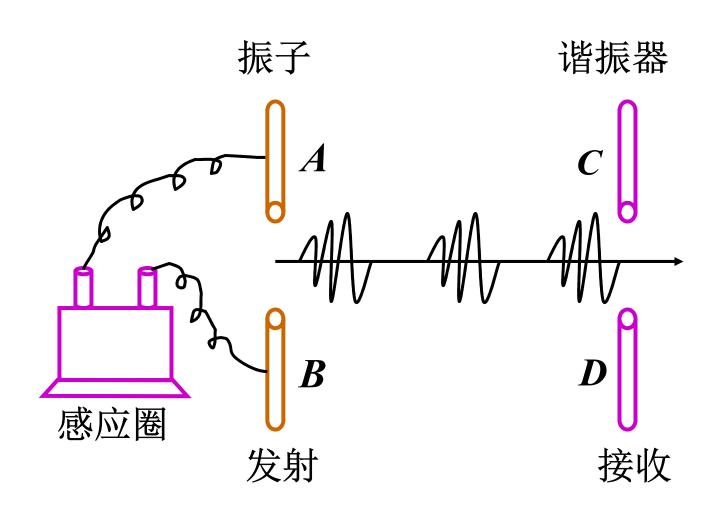
- (1)提高回路振荡频率 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 减小L、C
- (2)实现回路的开放



从LC振荡电路 到振荡电偶极子



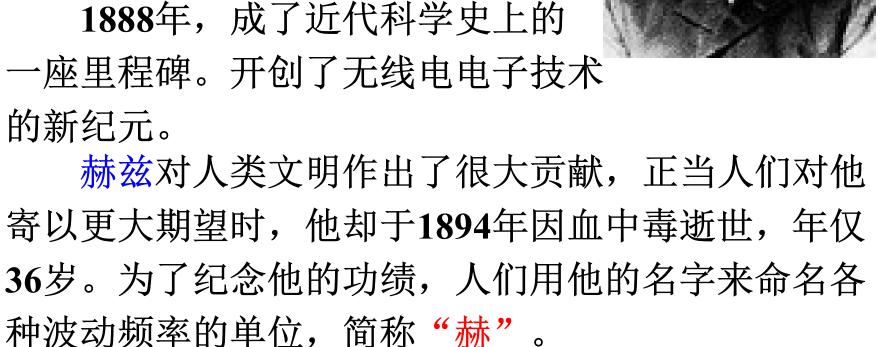
电磁波的接收 (赫兹实验)



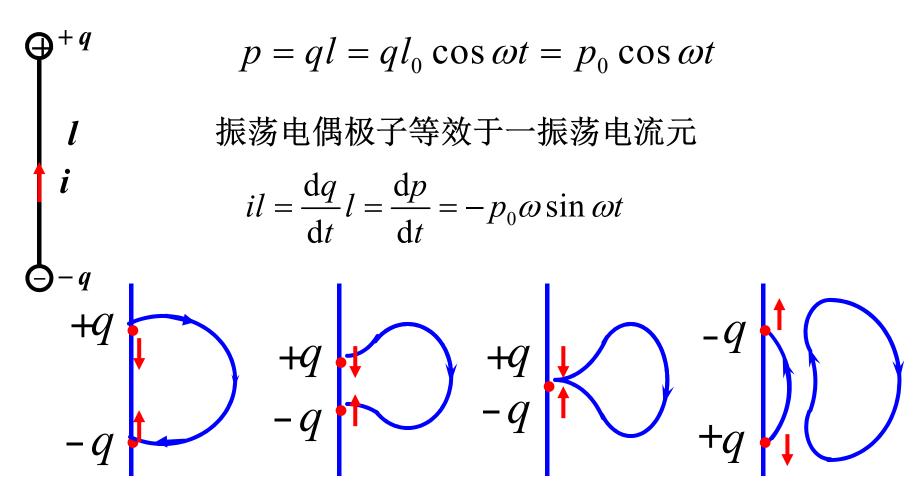
赫兹----德国物理学家

赫兹对人类伟大的贡献是 用实验证实了电磁波的存在, 发现了光电效应。

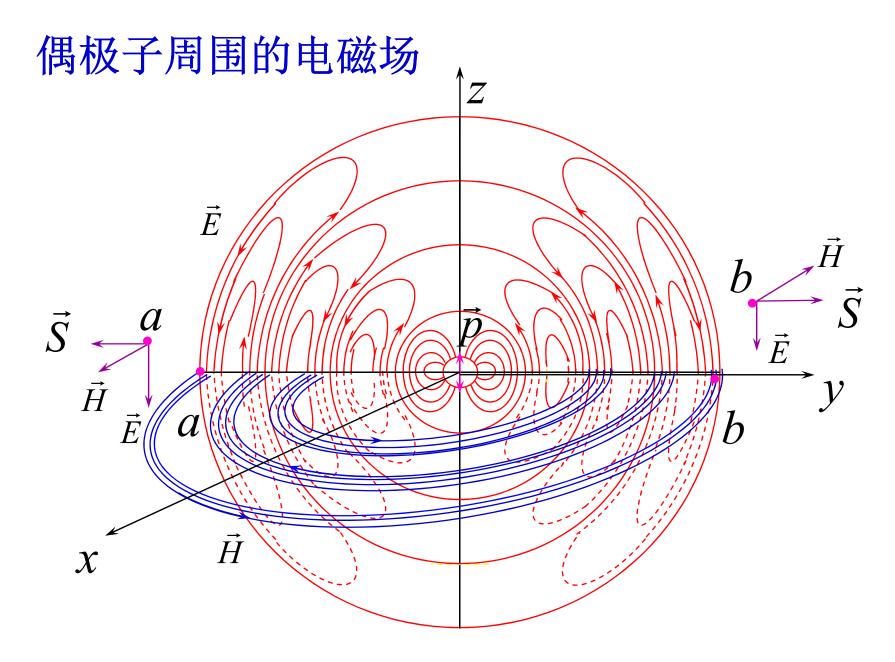
1888年,成了近代科学史上的 一座里程碑。开创了无线电电子技术 的新纪元。



振荡电偶极子: 电矩作周期性变化的电偶极子.



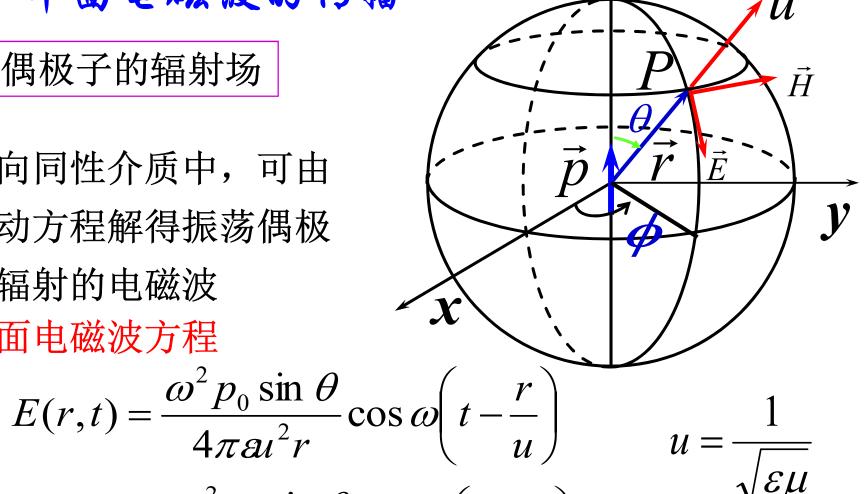
电偶极子的辐射过程



三、平面电磁波的传播

电偶极子的辐射场

各向同性介质中,可由 波动方程解得振荡偶极 子辐射的电磁波 球面电磁波方程



$$H(r,t) = \frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi u r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{u}\right)$$

在远离偶极子的地方(r>>l),因 r 很大,在通常的研究范围内, θ 的变化很小,故 \vec{E} , \vec{H} 的振幅可看作恒量,因而

$$E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right)$$

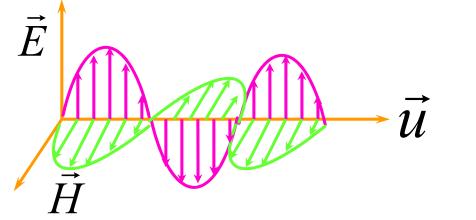
$$H = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right)$$

平面电磁波方程

四、电磁波的性质

在无限大均匀绝缘介质(或真空)中,平面电磁波的性质概括如下:

1. 电磁波是横波, \vec{E} , \vec{H} , \vec{u} 构成正交右旋关系. 电磁波是偏振波, \vec{E} , \vec{H} 都在各自的平面内振动,且 \vec{E} , \vec{H} 是同位相的.



平面电磁波 示意图

2. 在同一点的E和H值满足下式:

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$$

3. 电磁波的传播速度为

$$u = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

真空中
$$u_0 = c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

实验测得真空中光速

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

光波是一种电磁波

已知:真空中沿z轴负向传播的平面电磁波,其磁场强度的表达式为

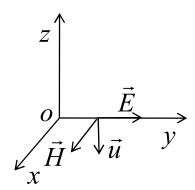
 $\vec{H} = \vec{i} H_0 \cos \left(t + \frac{z}{c} \right) [SI]$

求: 电场强度的波的表达式。

解: 由已知该电磁波沿z轴负向传播,磁场分量振动的正 方向为x轴正向,由平面电磁波性质可得

$$\vec{u} = -u\vec{k} \propto \vec{E} \times \vec{H}, \ \vec{H} = H\vec{i}$$

$$\vec{E} = \vec{j} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H = \vec{j} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_0 \cos \omega (t + \frac{z}{c}) \quad [SI]$$



电磁波的应用

从1888年赫兹用实验证明了电磁波的存在,

1895年俄国科学家波波夫发明了第一个无线电报系统。

1914年语音通信成为可能。

1920年商业无线电广播开始使用。

20世纪30年代发明了雷达。

40年代雷达和通讯得到飞速发展,

自50年代第一颗人造卫星上天,卫星通讯事业得到迅猛发展。

如今电磁波已在通讯、遥感、空间控测、军事应用、科学研究等诸多方面得到广泛的应用。

§ 4-5 电磁波能量与电磁波谱

一、电磁波的能量 坡印延去量

1. 能量密度

电场
$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

磁场

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

电磁场

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \mu H^2 \right)$$

电磁波所携带的能量称为辐射能.

2. 能流密度(又叫辐射强度)

单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积 的辐射能量(S)

$$S = wu = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) u$$
 $u = 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$ $\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H$
能流密度矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ が可廷矢量 $\vec{S} = w\bar{u}$

麦克斯韦方程组; 电磁场

对于振荡电偶极子辐射波,可导出平均辐射强度:

$$\overline{S} = \frac{\mu p_0 \omega^4 \sin^2 \theta}{2(4\pi)^2 r^2 u}$$

上式表明:

- 1) 辐射具有方向性
- 2) \overline{S} 与 ω 成正比

二、电磁波谱

将电磁波按 波长或频率 的顺序排列 成谱

