信息论
信号传输与处理的理论基础

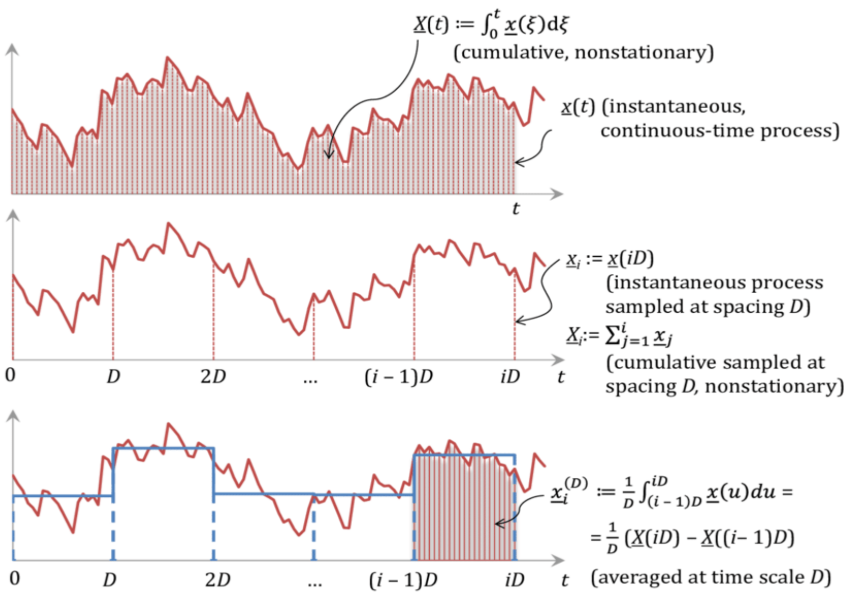
一些基础知识的复习与延伸

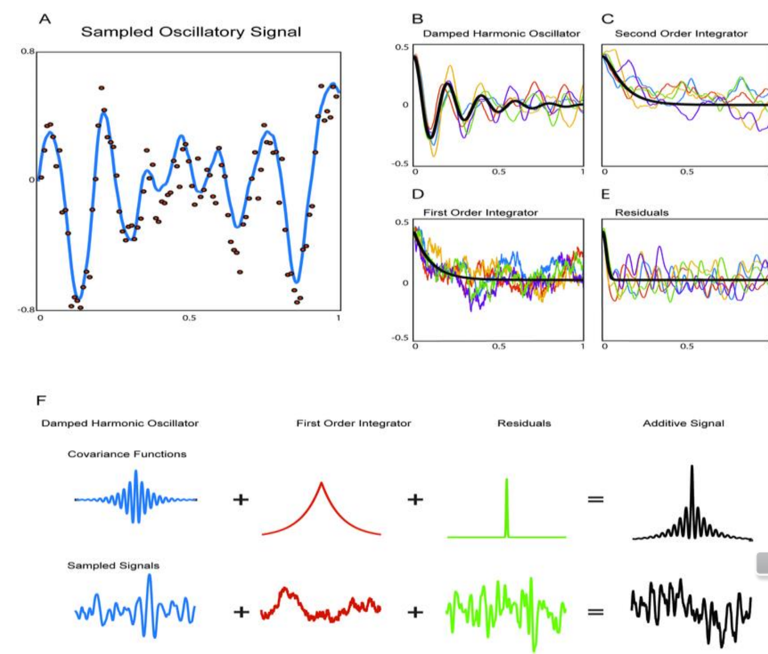
基础知识的复习与延伸

* 内容要点
* （1）信号分析与处理
*   Fourier分析、信号与频谱等
* （2）线性代数
*   矩阵运算、特殊矩阵的性质等
* （3）随机过程
*   随机过程的功率谱、通信干扰及噪声特性等
*

基础知识的复习与延伸：概率、随机过程与随机序列（1）

- （1）概率的基本概念和性质
- （2）随机过程基本概念和性质
- （3）随机序列基本概念和性质





基础知识的复习与延伸：概率、随机过程与随机序列（2）

* 概率基本概念的概要回顾
* （1）连续型随机变量X及其概率密度p.d.f. $p(x)$:
* $$p(x) = P[x<X<x+dx]$$
* $$p(x) \geq 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1$$
* （2）离散型随机变量X及其概率分布$P(x_i)$:
* $$P(x_i) = P[X=x_i] \quad i=1,2,\ldots$$
* $$\sum_i P(x_i) = 1$$
* (3) 基本特征量
* 均值（数学期望）
* 连续型 $m = \int_{-\infty}^{\infty} dx x p(x)$， 离散型 $M = \sum_i x_i P(x_i)$
* 方差 连续型 $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x-m)^2 p(x)$
* 离散型 $\sigma^2 = \sum_i (x_i - M)^2 P(x_i)$
*

基础知识的复习与延伸：概率、随机过程与随机序列（3）

* 连续型和离散型随机向量$X=(X_1,\ldots,X_n)$:

  联合概率密度

  $$p(x_1,\ldots,x_n) = P[x_1<X_1<x_1+dx_1,\ldots, x_n<X_n<x_n+dx_n]$$

  联合概率

  $$P(x_1,\ldots,x_n) = P[X_1=x_1,\ldots, X_n=x_n]$$

  特征量（以下仅以连续型随机向量为例）：

  均值向量m:

  分量 $m_i = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x x_i p(x_1,\ldots,xn)$，i=1,…,n

  协方差矩阵R_{XX}，矩阵元 $R_{XX}(i,j) = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x (x_i - mi)(x_j - mj) p(x_1,\ldots,xn)$

  重要性质【请验证之：习题】

  任何随机变量的协方差矩阵R_{XX}恒为正定、对称矩阵。

  两个随机变量X和Y的互协方差矩阵R_{XY}:

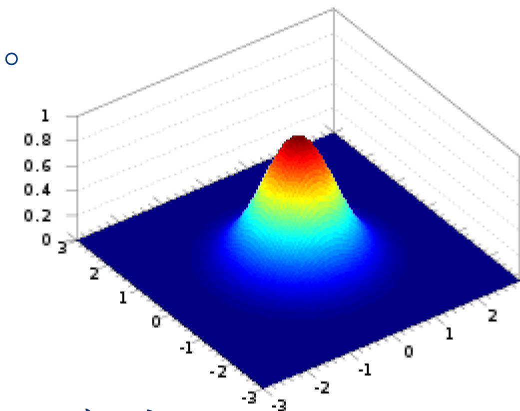
  矩阵元 $R_{XY}(i,j) = \int_{-\infty}^{\infty} d^m x d^n y (xi - mXi)(y_j - mYj) p(x_1,\ldots,xm,y_1,\ldots,ym)$

基础知识的复习与延伸：
概率、随机过程与随机序列（4）

* 重要的随机向量：Gauss随机向量
* Gauss向量$X=(X_1,\ldots,X_n)$的联合概率密度

$$\boxed{p(x_1,\ldots,x_n) = (2\pi)^{-n/2}\,|R|^{-1/2}\exp(-(X-M)^{*}R^{-1}(X-M)/2)}$$

M是均值向量，R是协方差矩阵，|R|表示R的行列式。



重要性质【请检验之：习题】

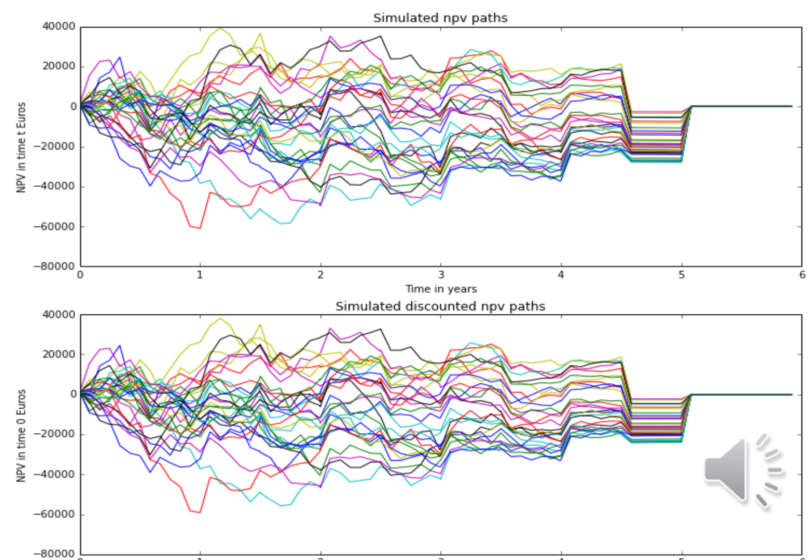
（1）Gauss随机向量X和Y的任意线性组合 Z=aX+bY也是Gauss随机向量，均值向量 $M_Z=aM_X+bM_Y$，协方差矩阵

$$R_{ZZ}= a^2R_{XX}+ b^2R_{YY} +ab(R_{XY} + R_{YX})$$

（2）Gauss随机向量X的各个分量彼此概率独立，当且仅当协方差矩阵是对角矩阵，即$R_{XX}(i,j) = 0$，若$i\neq j$。

基础知识的复习与延伸：概率、随机过程与随机序列（5）

* 随机过程
* 随机过程就是带参数的随机变量族。
* 例：随机变化的语音信号v(t)、电信号f(t)、噪声及干扰n(t)、图像I(x,y)、存储信号S(x,y)、视频I(x,y,t)...
* 图像、存储是二维随机过程的例子，视频是三维随机过程的例子。在通信系统中，主要关注以为随机过程，以时间t或频率ω为连续型参量。



基础知识的复习与延伸：概率、随机过程与随机序列（6）

* 基本概念：如何描述随机过程的特征?

* 以通信系统中（被各类噪声污染和干扰的）随机信号$f(t)$为例，

（1） $f(t)$不再是一个普通的函数，而是在每个t上的值皆为随机变量的一个对象，称为随机样本或样本曲线。

（2）对每个t，随机变量$f(t)$具有特定的概率密度$p(t,x)$，含义是$p_1(t,x)=P[x<f(t)<x+dx]$，因此随机过程的取值具有随时间t变换的概率分布。

（3）对每一对时间变量t_1和t_2，随机变量$f(t_1)$和$f(t_2)$具有特定的联合概率分布$p_2(t_1,x_1;t_2,x_2)=P[x_1<f(t_1)<x_1+dx_1, x_2<f(t_2)<x_2+dx_2]$。

基础知识的复习与延伸：概率、随机过程与随机序列（7）

对每组时间变量$t_1,\ldots,t_n$，随机变量$f(t_1),\ldots,f(t_n)$具有特定的联合概率分布

$p_n(t_1,x_1;\ldots,t_n,x_n) = P[x_1<f(t_1)<x_1+dx_1,\ldots,x_n<f(t_n)<x_n+dx_n]$

工程应用领域的典型随机过程：

（1）平稳随机过程

概率密度$p_1(t,x)$不依赖于时间t，并且$p_2(t_1,x_1;t_2,x_2)$仅依赖于观测时间差t_1-t_2。

（2）Gauss随机过程

对任何n=1,2,3,… 概率密度$p_n(t_1,x_1;\ldots,t_n,x_n)$均为Gauss密度。

【习题】

（1）验证任何两个Gauss随机过程的线性组合，也是Gauss随机过程。

（2）任何两个平稳过程的线性组合，不一定是平稳的。你能设想某种合理的条件，保证两个平稳过程的线性组合仍然平稳吗？

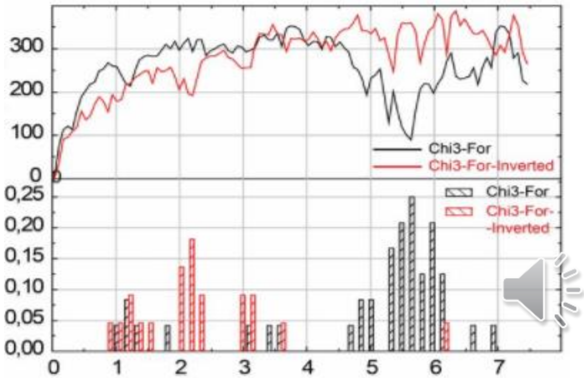
通信系统中的典型随机过程类型：平稳Gauss过程

基础知识的复习与延伸：概率、随机过程与随机序列（8）

* 平稳随机过程的自相关函数和功率谱
* (1) 对平稳随机过程（随机信号）f(t), 自相关函数是
* $R_f(t_2 - t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) p(t_1, x_1; t_2, x_2)$
* (2) f(t)的功率谱，即信号功率在频域上的分布，是
* $S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty} E[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} dt |f(t)|^2]$
* E[.]表示均值。
* (3)功率谱和自相关函数的关系：Wiener-Khintchin公式
* $S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt R_f(t) e^{-i\omega t}$
* 平稳随机信号的功率谱和自相关函数互为Fourier变换。

基础知识的复习与延伸：概率、随机过程与随机序列（9）

* 随机过程的实例：
* 白噪声n(t)，功率谱$S_n(\omega)$ = 常数。
* 随机序列概要：离散型随机过程
* 序列x=(x(1),x(2),…,x(n),…)，每个x(n)是具有特定概率分布的随机变量。
* 注：x(n)本身既可以是离散型，也可以连续型随机变量。
* 例：通信系统中的比特序列；周期采样的温度序列，等。



基础知识的复习与延伸：概率、随机过程与随机序列（10）

* 随机序列的特征量：
* （1）均值（2）自相关矩阵
* 平稳随机序列的自相关序列
* 平稳随机序列的（离散型）功率谱
* 平稳随机序列的功率谱是自相关序列的离散Fourier变换

【习题】

仿连续型随机过程的相应定义，建立随机序列的均值、自相关矩阵、平稳随机序列的自相关序列、功率谱的定义，并证明两者互为离散Fourier变换。