

信息论

信号传输与处理的理论基础

第八讲：MIMO信道容量（更深入地认识容量公式）



MIMO信道模型与容量(8)

* 带Gauss噪声的MIMO信道容量公式的特例(一): SIMO

*

* 对单发射天线/多接收天线SIMO的情况:

* $M=1$, $N>1$, H 是 N 维列向量且秩 $r=1$,

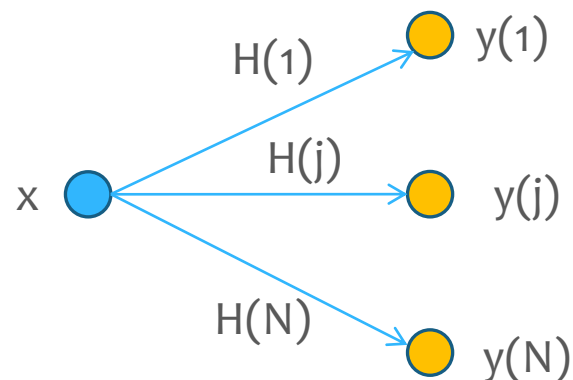
* 发射机自相关矩阵 Q_X 为 1×1 的, 即 Q_X 是实数且 $Q_X \leq P$, 故

* Telatar公式成为

*
$$C_{SIMO} = \max_{\text{tr}(Q) \leq P} W \log \det(I_N + H Q_X H^T / \sigma^2)$$

*
$$= \max_{\text{tr}(Q) \leq P} W \log(I + Q_X H^T H / \sigma^2)$$

*
$$= W \log(I + |H|^2 P / \sigma^2)$$



MIMO信道模型与容量(9)

* 带Gauss噪声的MIMO信道容量公式的特例(二): MISO

*

* 对多发发射天线/单接收天线MISO的情况:

* $N=1$, $M>1$, H 是 M 维行向量且秩 $r=1$,

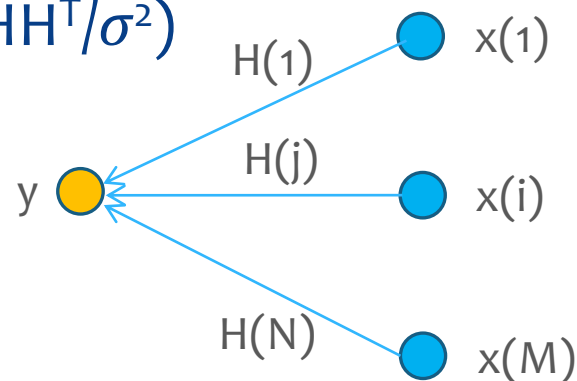
* 发射机自相关矩阵 Q_X 为 1×1 的, 即 Q_X 是实数且 $Q_X \leq P$, 故

* Telatar公式成为

* $C_{MISO} = \max_{\text{tr}(Q) \leq P} W \log \det(I_N + H Q_X H^T / \sigma^2)$

* $= \max_{\text{tr}(Q) \leq P} W \log(I + Q_X H H^T / \sigma^2)$

* $= W \log(I + |H|^2 P / \sigma^2)$



MIMO信道模型与容量(10)

* 更深入地认识MIMO容量公式 (一)

- * (1) 公式 $C_{\text{MIMO}} = W \log \det(\mathbf{I}_N + \mathbf{H} \mathbf{Q}_X^* \mathbf{H}^T / \sigma^2)$
- * 是在发射机和接收机均已知信道状态 \mathbf{H} 的理想情况下的MIMO信道容量。
- * (2) 对发射机未知信道状态/接收机已知信道状态的情况，最优
- * 自相关矩阵 $\mathbf{Q}_X^* = (\mathbf{P}/M) \mathbf{I}_M$ ，即发射机将总功率平均分配到M个
- * 发射天线。注意到 $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$ 是以奇异值平方 a_i^2 为特征值的对称矩阵，故在这种情况下
- * $C_{\text{MIMO}} = W \log \det(\mathbf{I}_N + \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{H}^T / M \sigma^2)$
- * $= W \sum_{i=1}^r \log(\mathbf{I}_N + \mathbf{P} a_i^2 / M \sigma^2)$



MIMO信道模型与容量(11)

* 更深入地认识MIMO容量公式 (二)

- * (3) 对衰落信道，信道状态(传输特性)随机变化，即 H 是随机矩阵，从而 $C_{\text{MIMO}}(H)$ 是随 H 变化的随机变量。在这种情况下，
- * 设已知 H 的概率分布为 p ，当发射机以恒定速率 R 发送信息，
- * 定义MIMO信道的阻断概率

$$P_{\text{out}}(R) = P_H[W \log \det(I_N + PHH^T / M\sigma^2) < R]$$

- * 根据 H 的概率分布计算 $P_{\text{out}}(R)$ 对 R 的变化曲线，是具有衰落信道的MIMO网络的关键设计依据。



MIMO信道模型与容量(12)

* 更深入地认识MIMO容量公式 (三)

* (4) 天线数量非常大的情形

* 如果发射机未知信道状态/接收机已知信道状态，且发射天线和接收天线数量M与N非常大，则

$$* C_{\text{MIMO}} \approx W \min(M, N) \log(1 + P/\sigma^2)$$

*

* 上式表明采用MIMO技术的主要优点之一：

* 即使发送端未知信道状态，只要接收端已知信道当前状态，则总容量就随等效天线数成比例增长，而无需增加带宽W和SNR。

* 注1：等效天线数= $\min(M, N)$ ，它是MIMO系统的自由度数。

* 注2：在极低SNR情形，采用很大自由度数不能获得好的容量增益。

*



MIMO信道模型与容量(13)

* 更深入地认识MIMO容量公式 (四)

- * (5) 在发射机和接收机均未知信道状态的情形，这时没有
- * 明确的容量公式，容量严重依赖于信道状态 H 的动态
- * 变化的模型。
- * 目前研究表明：
- * 若信噪比 $SNR (=P/\sigma^2)$ 很低，则 C_{MIMO} 受限于 SNR 且正比于 $\min(M,N)$ ；
- * 对中等水平的 SNR ， C_{MIMO} 受限于 H 的估计误差且正比于 $\min(M,N)$ ；
- * 对较高的 SNR ， C_{MIMO} 仅随 SNR 和 $\min(M,N)$ 缓慢增长。
- * 特别是，对慢衰落信道和高 SNR 的情形，增加天线数量不是提升容量
- * 的有效益的途径。



MIMO信道模型与容量(14)

* 更深入地认识MIMO容量公式 (五)

- * 对频率选择性(frequency-selective)MIMO信道，信道状态H和功率分配均为频率 ω 的函数，对接收机和发射机均已知信道状态的情况，相应的容量公式是：

- *
$$C_{\text{MIMO}} = \int_{-W/2}^{+W/2} d\omega \log \det(I_N + H(\omega) P_X^*(\omega) H^T(\omega) / \sigma^2)$$

- * 其中 $P_X^*(\omega)$ 是发射信号X的最优功率谱矩阵，满足极值条件

- *
$$H^T(\omega)(I_N + H(\omega) P_X^*(\omega) H^T(\omega) / \sigma^2)^{-1} H(\omega) = \lambda(\omega) I_M \quad (i)$$

- * 乘子函数 $\lambda(\omega)$ 通过将(i)的解 $P_X^*(\omega)$ 代入以下条件确定

- *
$$\int_{-W/2}^{+W/2} d\omega \text{tr}(P_X^*(\omega)) = P \quad (ii)$$

- * 以上方程构成 C_{MIMO} 的数值算法的依据。



MIMO信道模型与容量(15)

* 更深入地认识MIMO容量公式 (六)

- * 对频率选择性(frequency-selective)SIMO信道，信道状态H
- * 和功率分配均为频率 ω 的函数，对接收机和发射机均已知信道状态的情况，相应的容量公式是：

- *
$$C_{\text{SIMO}} = \int_{-W/2}^{+W/2} d\omega \log \det(I_N + |H(\omega)|^2 P_X^*(\omega) / \sigma^2)$$

- * 其中 $P_X^*(\omega)$ 是发射信号X的最优功率谱函数，满足极值条件

- *
$$|H(\omega)|^2 (I_N + |H(\omega)|^2 P_X^*(\omega) H^T(\omega) / \sigma^2)^{-1} = \lambda(\omega) I_M \quad (i)$$

- * 乘子函数 $\lambda(\omega)$ 通过将(i)的解 $P_X^*(\omega)$ 代入以下条件确定

- *
$$\int_{-W/2}^{+W/2} d\omega P_X^*(\omega) = P \quad (ii)$$

- * 以上方程构成 C_{SIMO} 的数值算法的依据。 C_{MISO} 的公式形式相同。



MIMO信道模型与容量(16)

* 更深入地认识MIMO容量公式 (七)

- * 对频率选择性(frequency-selective)MIMO信道，信道状态H
- * 和功率分配均为频率 ω 的函数，对接收机未知/发射机均已知信道状态的情况，相应的容量公式是：

- *
$$\dot{C}_{\text{MIMO}} = \max_{P_X} \int_{-W/2}^{+W/2} d\omega \log \det(I_N + P_X(\omega) H(\omega) H^T(\omega) / M \sigma^2)$$

- * 其中 $P_X(\omega)$ 是发射信号的总功率谱，满足约束条件

- *
$$\int_{-W/2}^{+W/2} d\omega \text{tr}(P_X(\omega)) = P$$

- * 以上方程构成 \dot{C}_{MIMO} 的数值算法的依据。

