# Паросочетания с предпочтениями

У каждой вершины можно задать порядок на множестве инцидентных ей ребер: $<_v \subseteq E \times E$ (предпочтения).

Паросочетание $M$ называется устойчивым, если не существует $(v_1, v_2) \in E \setminus M$, которое удовлетворяет следующим условиям:

- ребро $(v_1, v_2)$ у $v_1$ стоит выше в списке предпочтений, чем его текущая пара $(v_1, v_2') \in M$ (либо $v_1$ не состоит в паре);
- симметричное условие для $v_2$: ребро $(v_1, v_2)$ у него стоит выше в списке предпочтений, чем его текущая пара $(v_1', v_2) \in M$ (либо $v_2$ не состоит в паре)

Варианты:

- $n$ мужчин, $n$ женщин, полный порядок ($K_{n,n}$)
- ориентированные ребра

### Теорема 1 (об устойчивых браках, Гейл и Шепли, 1962)

*Во всяком двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$, для всяких предпочтений $\{\leq_v\}_{v \in V_1 \cup V_2}$ существует устойчивое паросочетание.*

*Доказательство.* Алгоритм, строящий такое паросочетание ($V_1$ — юноши, $V_2$ — невесты).

**Описание алгоритма:**

Первый шаг:

- каждый юноша делает предложение первой девушке в своем списке
- каждая девушка заключает помолвку с наиболее предпочтительным женихом из сделавших ей предложение.

Каждый следующий шаг:

- каждый не помолвленный юноша делает предложение следующей девушке в своем списке — неважно, помолвлена она или нет.
- Если девушка получает предложение от более предпочтительного жениха, чем ее текущий жених, то она расторгает текущую помолвку и заключает помолвку с наиболее предпочтительным женихом из тех, кто сделал ей предложение.

Постепенно заключаются помолвки, все более предпочтительные для невест, и все менее предпочтительные для женихов. Ни один юноша не делает предложения одной и той же девушке дважды.

**Корректность алгоритма:**

**Конечность алгоритма:** Алгоритм завершается, поскольку на каждом шаге хотя бы один юноша делает предложение какой-то девушке, а так как каждый юноша последовательно движется по своему списку предпочтений, общее число шагов ограничено сверху суммой длин этих списков.

**Устойчивость** полученного паросочетания $M$:
Для всякой несложившейся пары $(v_1, v_2) \in E \setminus M$ рассмотрим следующие случаи.

- $v_1$ никогда не делал предложения $v_2 \Rightarrow$ к моменту завершения алгоритма у него была более предпочтительная невеста, чем $v_2$, и, женившись на ней, менять ее на $v_2$ он не захочет. Т.е. существует $v_2'$, т.ч. $(v_1, v_2') \in M$, и это ребро выше в предпочтении $v_1$, чем $(v_1, v_2)$.
- $v_1$ делал предложение $v_2$, но получил отказ $\Rightarrow$ к этому моменту у $v_2$ был более предпочтительный жених, которого она могла сменить только на еще более предпочтительного. Т.е. $\exists v_1'$, т.ч. $(v_1', v_2) \in M$, и это ребро выше в предпочтении $v_2$, чем $(v_1, v_2)$.
- $v_1$ делал предложение $v_2$, получил согласие, а потом был брошен ею $\Rightarrow$ у $v_2$ есть более предпочтительный жених. Т.е. $\exists v_1'$, т.ч. $(v_1', v_2) \in M$, и это ребро выше в предпочтении $v_2$, чем $(v_1, v_2)$.

# Свойства полученного устойчивого паросочетания

- для $K_{n,n}$ образуется $n$ пар
- оптимально для мужчин (т.е. каждый мужчина женат на наиболее предпочтительной им женщине среди всех устойчивых паросочетаний)
- самое худшее для женщин (т.е. каждая женщина замужем за наименее предпочтительным мужчиной среди всех устойчивых паросочетаний)

# Доказательство оптимальности для мужчин

*Возможная пара* $(m, w)$: $\exists$ стабильное паросочетание с такой парой.

*Наилучший возможный партнер* $w =$*best*$(m)$ *для* $m$: наиболее предпочтительный среди возможных пар $(m, w)$.

Предположим, что в паросочетании GS, выданным алгоритмом, есть мужчина, который не с наилучшей возможной партнершей. Значит, его наилучшая возможная партнерша ему отказала.

Рассмотрим первое событие $X$, когда мужчине отказала наилучшая возможная партнерша во время работы GS: $w =$best$(m)$ отказала $m$, чтобы быть (или продолжать быть) с мужчиной $m'$, более предпочтительным, чем $m$.

Так как $(m, w)$ возможная пара, то $\exists$ стабильное паросочетание $S'$ с такой парой.

Обозначим партнершу $m'$ в $S'$ за $w' \neq w$. Пара $(m', w')$ — возможная.

Алгоритм GS $\Rightarrow$ во время события $X$

- $m'$ еще не был отвергнут $\mathrm{best}(m')$ $\Rightarrow$ и никем из возможных партнерш, в том числе $w'$
- $m'$ состовит в паре с $w$, т.е. мужчине $m'$ отказали все женщины в его списке предпочтений выше $w$

$\Rightarrow$ $w'$ после $w$ в списке $m'$.

Противоречие со стабильностью $S'$: $(m, w), (m', w') \in S'$, но оба $w$ и $m'$ предпочитают друг друга относительно их пар в $S'$. Оптимальность для мужчин доказана.

Доказательство "наихудшести" для женщин: упражнение (аналогично с использованием оптимальности GS для мужчин) Случай $K_{n,n}$: упражнение.