Реберные раскраски

Theorem 2 (Визинг, 1964)

Во всяком графе существует правильная раскраска ребер в $D+1$ цвет, где D — наибольшая степень вершины.

Замечание: теорема дает очень точную оценку, так как D цветов, очевидно, необходимо.

Реберные раскраски

Лемма 1

Пусть $G = (V, E)$ граф, и пусть

- *v — вершина степени не более чем k,*
- *степень каждого из соседей v также не превосходит k*
- *причем степень k достигается не более чем для одного из соседей v.*

Тогда если ребра графа $G \setminus \{v\}$ можно покрасить в k цветов, то и ребра графа G можно покрасить в k цветов.

Доказательство леммы. Индукцией по k:

Базис, $k = 1$: v — или изолированная вершина, или вершина, связанная ребром с другой вершиной степени 1.

Раскраска графа $G' = G \setminus \{v\}$ в один цвет дополняется покраской дополнительного ребра в единственный цвет.

Индуктивный переход.
Пусть $m = \mathrm{deg} v$, $u_1, \ldots, u_m$— соседи v в G:
$\mathrm{deg} u_1 \leq k$, а $\mathrm{deg} u_i \leq k - 1$ $\forall i = 2, \ldots m$.

В G': $\mathrm{deg} u_1 \leq k - 1$, а $\mathrm{deg} u_1 \leq k - 2$ $\forall i = 2, \ldots m$.

Пусть c — раскраска ребер G' в цвета $\{1, \ldots, k\}$.

Можем считать, что $\mathrm{deg} u_1 = k$, а $\mathrm{deg} u_i = k - 1$ $\forall i = 2, \ldots m$.
Если какие-то степени меньше, то можно добавить в граф G' дополнительные вершины, соединить их ребрами с u_i и произвольно раскрасить эти ребра в свободные цвета.

Для цвета i:
$X_i \subseteq \{u_1, \dots, u_m\} :=$ подмножество всех соседей убранной вершины v, т.ч. никакие инцидентные им ребра не раскрашены в цвет i.

Тогда

- u_1 степени $k-1$ попадает ровно в одно из $X_1, \dots, X_k$,
- $u_2, \dots, u_m$ степени $k-2$ попадают ровно в два из этих множеств.

Отсюда $\sum_{i=1}^{k} |X_i| = 2\mathrm{deg} v - 1 < 2k$.

Пусть $\exists i, j$: $|X_i| > |X_j| + 2$ (цвет i встречается реже).

Рассмотрим подграф $G'_{i,j}$ графа G', образованный ребрами цветов i и j.

Каждая КС в $G'_{i,j}$ — это или простой путь, или простой цикл; в них чередуются i-ребра и j-ребра. Каждая вершина $\notin X_i \cap X_j$, попадет в одну из этих КС.

Тогда $\exists$ КС, в которой больше вершин из X_i, чем из X_j.

Эта КС — простой путь, начинающийся с j-ребра в X_i и заканчивающийся или другим j-ребром в другой вершине из X_i, или за пределами $X_i \cup X_j$.

Перекрасим путь, поменяв местами цвета i и j.

При этом $|X_i|$ уменьшится на 1 или на 2, а $|X_j|$ на столько же увеличится.

Применяя такое перекрашивание необходимое число раз к наиболее редкому цвету i и наиболее частому цвету j, получим

$$||X_i| - |X_j|| \leq 2$$

для любых двух цветов.

$\sum_{i=1}^{k} |X_i|$ нечетно $\Rightarrow \exists i$: $|X_i|$ нечетно. $\Rightarrow \exists i$: $|X_i| = 1$, поскольку в противном случае все слагаемые ≥ 2, и их сумма $\geq 2k$.

Пусть $X_i = \{u_l\}$, то есть ни одно из ребер G', инцидентных u_l, не покрашено в цвет i.

Строим граф $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$: удаляем из G ребро (u_l, v), а также все ребра, покрашенные в G' в цвет i.

Степень v уменьшилась на единицу, и степени всех соседей v также уменьшились на единицу $\Rightarrow$ по предположению индукции ребра $\tilde{G}$ раскрашиваются в $k - 1$ цветов.

Остается вернуть все удаленные из G ребра и покрасить их в цвет i.

Доказательство теоремы Визинга.
Пусть $G = (V, E)$ граф, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, и пусть $D = \mathrm{max}_i \mathrm{deg} v_i$.

Пусть G_i — подграф G на вершинах $v_1, \ldots, v_i$.

Докажем, что ребра каждого G_i можно раскрасить в $D + 1$ цветов. Индукция по i.

Базис: G_1 — это одинокая вершина, раскрасить можно.

Шаг индукции: если G_{i-1} можно раскрасить, то, по лемме для графа G_i, вершины $v = v_i$ и числа $k = D + 1$, граф G_i тоже можно раскрасить в $D + 1$ цветов.

Реберные раскраски

Теорема Визинга $\Rightarrow$ два класса графов:

- Класс 1: ребра красится в D цветов,
  - двудольные графы
  - почти все случайные графы
  - планарные графы при $D \geq 7$
- Класс 2: в $D + 1$ цвет.
  - некоторые планарные графы при $D \leq 5$

Открытые вопросы

Планарные графы с $D = 6$?

Задача проверки, имеет ли произвольный граф класс 1, является NP-полной задачей (не известно полиномиального по времени алгоритма) — снова 1000000 от института Клэя за решение.