1. Пусть S — конечная полугруппа. Покажите, что существует $s \in S$ такой, что $s^2 = s$.

2. Покажите, что множество $[-\infty, \infty)$ с операцией $\max$ – моноид.

3. Покажите, что, если к элементу a моноида существуют правый и левый обратные, то они совпадают. Выведите отсюда, что, если обратный элемент к a существует, то он единственный. Верно ли, что, если существует правый обратный к a, то он единственен?

4. Опишите все возможные группы порядков $2, 3, 4$.

5. Покажите что множество состоящее из всех возможных поворотов и отражений правильного n-угольника, переводящих вершины в вершины — группа.

6. Покажите, что множество всех биективных отображений множества на себя — группа.

7. Постройте таблицу Кэлли группы симметрий правильного треугольника. Покажите, что эта группа может быть отождествлена с группой автоморфизмов множества $\{1, 2, 3\}$.

8. Покажите, что подмножество группы, содержащее нейтральный элемент и замкнутое относительно умножения и взятия обратного, — группа.

9. Покажите, что любая группа может быть отождествлена с некоторым подмножеством биекиций на себя.

10. Опишите все возможные кольца с единицей порядков 2,3,4.

11. Покажите, что аксиомы кольца влекут такие тождества:
$$0a = 0, -1a = -a$$
для любого элемента a кольца.

12. Пусть A — кольцо с единицей, для которого верно $a^2 = a$ для всех $a \in A$. Покажите, что для такого кольца $a + a = 0$ для всех $a \in A$.

13. Пусть A — кольцо с единицей. Покажите, что $A \cong B \times C$ для двух ненулевых колец B и C тогда и только тогда, когда существует $e \in A$ не равный 0 или 1 и коммутирующий со всеми элементами A такой, что $e^2 = e$.

14. Рассмотрим
$$\{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0, b - \text{нечетное}\}.$$
Покажите, что это кольцо с единицей отностительно операций $+$ и $\times$, опишите множество обратимых элементов.

15. Проверьте аксиомы кольца для множества матриц 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли это кольцо коммутативным?

16. Какие из колец $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ являются полями?

17. Докажите, что множество $\mathbb{R}^3$ с покомпонентным сложением и векторным умножением образует неассоциативное кольцо, удовлетворяющее тождеству $a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0$. Подсказка: Докажите сначала, что $a \times (b \times c) = b(a, c) - c(a, b)$, где (x, y) — скалярное произведение векторов x и y.