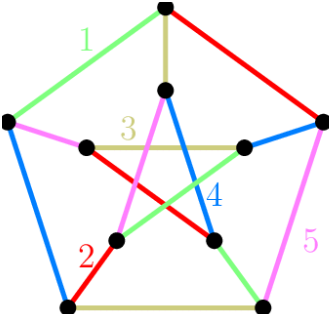
Реберные раскраски

C — множество цветов
Реберная раскраска: $c : E \to C$(красим ребра).
Раскраска c правильная, если $c(e) \neq c(e')$ для всяких смежных ребер e, e'.



Иными словами, для каждого цвета множество ребер, раскрашенных в данный цвет — это паросочетание.

Реберные раскраски

Theorem 1 (Кенига о раскраске ребер)

В двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ *существует правильная раскраска ребер в* D *цветов, где* D *— наибольшая степень вершины.*

Доказательство. Индукция по наименьшей степени вершины d, от больших к меньшим.

Базис: $d = D$, т.е. D-регулярный граф.
Покажем, что он удовлетворяет условию теоремы Холла:

- всякое множество $U_1 \subseteq V_1$ соединено со своими соседками из V_2 ровно $D|U_1|$ ребрами,
- так как у каждой соседки степень тоже D, этих соседок всего не менее чем $\frac{D|U_1|}{D} = |U_1|$.

По теореме Холла есть совершенное паросочетание.

Удаляем ребра паросочетания, остается $(D-1)$-регулярный двудольный граф, в нем опять есть совершенное паросочетание, и т.д.

Полученные D непересекающихся паросочетаний образуют искомую раскраску ребер G.

Реберные раскраски

Шаг индукции: $d < D$. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — граф.

- Строим копию этого графа: $G' = (V_1', V_2', E')$.
- Эти два графа объединяются в граф $G'' = (V_1 \cup V_2', V_2 \cup V_1', E \cup E' \cup E_0)$, где E_0 содержит по ребру (v, v') для каждой вершины $v \in V_1 \cup V_2$ степени d.

В G'' наибольшая степень вершины D, а наименьшая $d + 1$.

По предположению индукции его ребра красятся.

Из его раскраски извлекается раскраска ребер G.