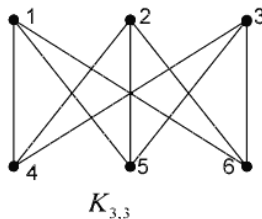
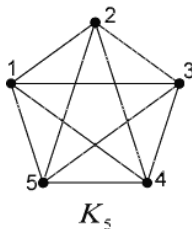


Непланарность K_5 и $K_{3,3}$



Лемма 1

Граф K_5 непланарен.

Доказательство: В нем $|V| = 5$ и $|E| = 10$; противоречие с частью 1 теоремы.

Лемма 2

Граф $K_{3,3}$ непланарен.

Доказательство: В нем $|V| = 6$ и $|E| = 9$, всякий цикл имеет длину не менее чем 4; противоречие с частью 2 теоремы.

Гомеоморфизм графов

Операция разбиения ребра: добавить вершину в середине ребра $(u, v) \rightarrow (u, w), (w, v)$, где w — новая вершина.

Графы G_1 и G_2 **гомеоморфны**, если, применяя к каждому из них операцию разбиения ребер, можно привести их к двум изоморфным графам.

Критерий планарности графа

Теорема Понтрягина-Куратовского, 1930

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

Доказательство.

\Rightarrow Пусть граф G планарен, но содержит подграф G_1 , гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$. Тогда, имея укладку G , из нее извлекаем укладку G_1 , из которой в свою очередь можно получить укладку K_5 или $K_{3,3}$.

\Leftarrow Не разбираем на курсе.