Теория Рамсея:

В достаточно большой структуре, об устройстве которой ничего не предполагается, можно найти подструктуру, устроенную некоторым регулярным образом.

полный хаос невозможен.
Пример: из шести людей всегда можно выбрать либо троих, попарно знакомых, либо троих, попарно незнакомых.

Теорема Рамсея

Обобщение:

1. пары людей (ребра графа знакомств) $\to$ наборы людей по k (k-гиперребра).
2. два цвета (знакомы-незнакомы) $\to$ d цветов.
3. будем искать подмножество заранее выбранной мощности, в котором все гиперребра одного цвета.

Определение. $N \in \mathbb{N}$ обладает свойством Рамсея $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$, если для любой покраски всех k-элементных подмножеств M, $|M| = N$ в d цветов $\{1, \ldots, d\}$ найдется номер i и подмножество $A \subseteq M$, $|A| = m_i$, т. ч. все k-элементные подмножества множества A покрашены в цвет i.

Число Рамсея $R(k; m_1, \ldots, m_d)$: наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих свойству $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$.

Пример. Утверждение о шести людях: $R(2; 3, 3) \leq 6$ (на самом деле $=$).

Теорема (Рамсея, 1930)

Для любых натуральных чисел $\{k; m_1, \ldots, m_d\}$ *найдется* $N \in \mathbb{N}$*, обладающее свойством* $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$*. Иными словами, число* $R(k; m_1, \ldots, m_d)$ *существует и конечно.*

Доказательство. Отметим, что:

1. $R(1; m_1, \ldots, m_d) = \sum_{i=1}^{d} m_i - d + 1 \; \forall m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{N}$.

   Действительно, $k = 1$ — покраска элементов множества.
   Отсутствие одноцветного множества A мощности m_i и цвета $i \Leftrightarrow$ в цвет i покрашено не более чем $m_i - 1$ элементов.
   Это возможно для некоторого $i \Leftrightarrow$ всего элементов $\leq \sum_{i=1}^{d} m_i - d$.
2. Если $\min(m_1, \ldots, m_d) < k$, то
   $R(k; m_1, \ldots, m_d) = \min(m_1, \ldots, m_d)$.

   Т.к. при $m_i < k$ любое множество мощности m_i нам подойдет в качестве A.

Двойная индукция:

- по k (база 1.),
- по $\sum m_i$ при фиксированном k (база 2.).

Предположим, что числа Рамсея конечны при меньших значениях k и при данном k при меньшем значении $\sum m_i$. Докажем, что конечно $R(k; m_1, \ldots, m_d)$.

Если $\min(m_1, \ldots, m_d) < k$, то доказано по 2.; пусть $\min(m_1, \ldots, m_d) \geq k$.

Обозначим $Q_1 = R(k; m_1 - 1, \ldots, m_d)$; аналогично Q_i $(i = 2, \ldots, d)$.
Q_i существуют и конечны по индукционному предположению.

Положим $N = 1 + R(k - 1; Q_1, \ldots, Q_d)$.
По индукционному предположению по k, N конечно.

Докажем, что $R(k; m_1, \ldots, m_d) \leq N$.

Рассмотрим N-элементное множество M, k-элементные подмножества которого покрашены в цвета от 1 до d.

Зафиксируем $a \in M$ и покрасим $(k-1)$-элементные подмножества $M \backslash a = M_1$ в d цветов: всякое $A \subset M_1$ мощности $(k-1)$ красим в цвет множества $a \cup A$ в M.

Т.к. $N-1$ выбрано со свойством $\mathcal{R}(k-1; Q_1 \ldots, Q_d)$, то имеется $B \subseteq M_1$, $|B| = Q_i$, т.ч. все $(k-1)$-элементные подмножества B имеют цвет i. Без ограничения общности $i = 1$. Тогда в B найдется (по определению Q_i):

- либо подмножество мощности m_i, все k-элементные подмножества которого имеют цвет i, для некоторого $i \in \{2, \ldots, d\}$;
- либо подмножество мощности $m_1 - 1$, все k-элементные подмножества которого имеют цвет 1.

В первом случае сразу имеем то, что нужно. Во втором случае имеем то, что нужно, после добавления к найденному подмножеству мощности $m_1 - 1$ элемента a. ЧТД