Теоретическая информатика - 1

Теория графов — деревья, планарные графы

Дерево

Лес — граф без циклов.

Дерево — связный граф без циклов.

Ориентированное дерево — орграф без циклов, в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода, а все остальные вершины имеют степень захода 1.

Вершина с нулевой степенью захода — *корень* дерева, вершины с нулевой степенью исхода — *листья*.

Мосты

Мост — ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности.

Теорема 1 (Теорема о мостах)

Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не принадлежит ни одному циклу.

Мосты

Мост — ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности.

Теорема 1 (Теорема о мостах)

Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не принадлежит ни одному циклу.

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что оно принадлежит некоторому циклу $e, e_1, \ldots, e_k$. Рассмотрим две произвольные вершины u, v из одной компоненты связности в G, т.е. они соединены некоторым путем в G. Если e не принадлежит этому пути, то они им соединены и в $G \setminus e$. Если e принадлежит этому пути, то заменив в нем ребро e на последовательность ребер $e_1, \ldots, e_k$, получим, что они соединены путем в $G \setminus e$. Следовательно, после удаления e компоненты связности не меняются, то есть e не является мостом по определению.

Теорема о мостах — доказательство

Достаточность.
Пусть ребро $e = (x, y)$ не содержится ни в одном из циклов графа G.

Вершины x и y связаны, то есть лежат в одной компоненте связности G_1 графа G.

Если в графе $G \backslash e$ вершины x и y соединены путем, то прибавив к нему e, получим цикл, что невозможно по условию.

Следовательно, вершины x и y находятся в разных компонентах связности графа $G \backslash e$.

Таким образом, после удаления ребра e из G компонента G_1 распалась как минимум на две компоненты связности, то есть число компонент связности увеличилось и e — мост по определению.

Теорема о деревьях

Теорема 2 (Теорема о деревьях)

Для простого графа G следующие условия эквивалентны:

1. *G — дерево;*
2. *любые две различные вершины в G соединены ровно одним простым путем;*
3. *G не содержит циклов, но если любую пару несмежных в G вершин соединить ребром, то в полученном графе будет ровно один цикл;*
4. *G — связный граф и $|V| = |E| + 1$;*
5. *G не содержит циклов и $|V| = |E| + 1$;*
6. *G — связный граф, и всякое ребро в G является мостом.*

Простой граф — неориентированный без петель и кратных ребер.

Доказательство: упражнение (рекомендуемая последовательность (1) $\Rightarrow$ (2)–(6) и (2)–(6) $\Rightarrow$ (1) — но можно как угодно).

Доказательство

Доказательство. Вначале предположим, что G — дерево и докажем условия (2)–(5).

2. Дерево — связный граф, а значит, любые две вершины соединены путем.

Предположим, что вершины u и v соединены в G не менее чем двумя цепями. Пусть
$u = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k = v$ и
$u = v_0' \to v_1' \to \cdots \to v_l' = v$
различные простые пути из u в v.

Поскольку первые вершины в этих цепях совпадают, существует число i такое, что $v_0 = v_0', \ldots, v_i = v_i'$, но $v_{i+1} \neq v_{i+1}'$.

Пусть j — наименьшее из чисел, больших i, такое, что вершина v_j принадлежит второй цепи (такое j существует, поскольку в рассматриваемых цепях совпадают и последние вершины).

Тогда путь $v_i \to \Delta \ldots v_j = v_r' \to \ldots v_i' = v_i$ не содержит повторяющихся ребер, а значит, является циклом в G, противоречие.

Доказательство

3. При добавлении к простому пути из u в v ребра (u, v), очевидно, возникает цикл. Таким образом, из связности G следует, что цикл возникает при добавлении любого ребра. Если при добавлении ребра (u, v) возникло более одного цикла, значит, вершины u и v соединены более чем одной цепью, что невозможно, так как условие (2) мы уже доказали.

Доказательство

4,5. Индукция по числу вершин в графе.
Базис: $|V| = 1$, тогда $|E| = 0$, равенство верно.
Пусть $|V| \geq 2$. Сперва покажем, что в графе есть вершина степени 1. Вершин степени 0 нет, потому что граф связный. Если каждая вершина имеет степень 2 и более, то можно построить цикл, двигаясь из вершины в вершину (используя конечность графа). Следовательно, есть вершина v степени 1. Если удалить эту вершину и инцидентное ей ребро, получится дерево с $|V| - 1$ вершинами и $|E| - 1$ ребрами. По предположению индукции для него верно $|V| - 1 = |E| - 1 + 1$, и отсюда $|V| = |E| + 1$.

Доказательство

4,5. Индукция по числу вершин в графе.
Базис: $|V| = 1$, тогда $|E| = 0$, равенство верно.
Пусть $|V| \geq 2$. Сперва покажем, что в графе есть вершина степени 1. Вершин степени 0 нет, потому что граф связный. Если каждая вершина имеет степень 2 и более, то можно построить цикл, двигаясь из вершины в вершину (используя конечность графа). Следовательно, есть вершина v степени 1. Если удалить эту вершину и инцидентное ей ребро, получится дерево с $|V| - 1$ вершинами и $|E| - 1$ ребрами. По предположению индукции для него верно $|V| - 1 = |E| - 1 + 1$, и отсюда $|V| = |E| + 1$.

6. По теореме о мостах.

Доказательство

Теперь покажем, что каждое из условий (2)–(6) влечет что G — дерево.

2. Поскольку две любые вершины соединены простым путем, G связен, а так как цепь единственна, то в G нет циклов (две вершины, находящиеся в цикле, соединены по крайней мере двумя цепями — фрагментами этого цикла).

Доказательство

Теперь покажем, что каждое из условий (2)–(6) влечет что G — дерево.

2. Поскольку две любые вершины соединены простым путем, G связен, а так как цепь единственна, то в G нет циклов (две вершины, находящиеся в цикле, соединены по крайней мере двумя цепями — фрагментами этого цикла).

3. Циклов в G нет по условию. Предположим, что в G более одной компоненты связности. Соединим ребром две вершины из разных компонент. В полученном графе новое ребро будет мостом по определению. По теореме о мостах оно не лежит ни в каком цикле, т. е. при его добавлении цикл не образовался, противоречие.

Доказательство

4. Вначале докажем, что в связном графе $|V| \geq |E| - 1$.
Возьмем граф без ребер с n вершинами и будем добавлять ребра по одному.
Если добавленное ребро в новом графе оказалось мостом, то новый граф содержит ровно на одну компоненту связности меньше, чем старый.
Если же добавленное ребро — не мост, то число компонент связности не изменилось.
Поскольку в исходном графе n компонент связности, необходимо как минимум $n - 1$ ребер, чтобы сделать его связным.

Граф G связен по условию. Если в нем есть цикл, удалим из него ребро и получим связный граф, у которого ребер на 2 меньше, чем вершин, что невозможно, как мы только что доказали.

Доказательство

5. Так как G не содержит циклов, каждая из его компонент связности является деревом, а значит, по доказанному ранее, число ребер в ней на единицу меньше числа вершин. Поскольку это же условие выполняется и для всего графа, компонента связности может быть только одна.

Доказательство

5. Так как G не содержит циклов, каждая из его компонент связности является деревом, а значит, по доказанному ранее, число ребер в ней на единицу меньше числа вершин. Поскольку это же условие выполняется и для всего графа, компонента связности может быть только одна.

6. Связность G дана по условию, а отсутствие циклов прямо следует из теоремы о мостах.

Доказательство теоремы завершено.

Остовное дерево

H — остовный подграф G, если $V(H) = V(G)$.
Остовное дерево — остовный подграф, который является деревом.

Остовное дерево

H — остовный подграф G, если $V(H) = V(G)$.
Остовное дерево — остовный подграф, который является деревом.

Утверждение 1

Всякий связный граф содержит остовное дерево.

Остовное дерево

H — остовный подграф G, если $V(H) = V(G)$.
Остовное дерево — остовный подграф, который является деревом.

Утверждение 1

Всякий связный граф содержит остовное дерево.

Доказательство. Если связный граф G не содержит циклов, то он сам является своим остовным деревом.

В противном случае выберем произвольное ребро e графа G, входящее в цикл, и удалим его из G — связность сохраняется. Будем повторять процедуру удаления ребра из цикла, пока не получим связный граф без циклов.

Остовное дерево

H — остовный подграф G, если $V(H) = V(G)$.
Остовное дерево — остовный подграф, который является деревом.

Утверждение 1

Всякий связный граф содержит остовное дерево.

Доказательство. Если связный граф G не содержит циклов, то он сам является своим остовным деревом.

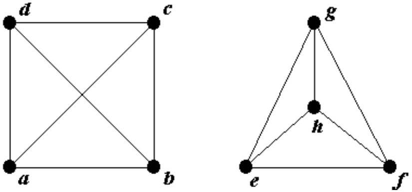
В противном случае выберем произвольное ребро e графа G, входящее в цикл, и удалим его из G — связность сохраняется. Будем повторять процедуру удаления ребра из цикла, пока не получим связный граф без циклов.

Следствие 1

В связном графе с n вершинами хотя бы $n-1$ ребро.

Изоморфные графы

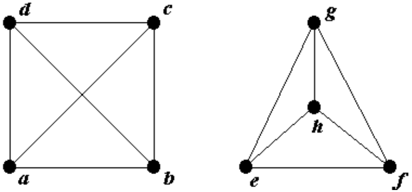
Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ изоморфны, если существует биекция $f : V_1 \to V_2$ такая, что любых двух вершин $u, v \in V_1$ они смежны тогда и только тогда, когда $f(u)$ и $f(v)$ смежны.



$f : a \to e, b \to f, c \to g, d \to h$

Изоморфные графы

Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ изоморфны, если существует биекция $f : V_1 \to V_2$ такая, что любых двух вершин $u, v \in V_1$ они смежны тогда и только тогда, когда $f(u)$ и $f(v)$ смежны.



$f : a \to e, b \to f, c \to g, d \to h$

Утверждение 2

Два графа изоморфны $\Leftrightarrow$ вершины одного из них можно перенумеровать так, чтобы матрица смежности этого графа совпала с матрицей смежности второго графа.

Плоский граф

Граф называется **плоским**, если его можно изобразить в виде геометрической фигуры на плоскости без пересечения ребер, так что его вершины — это точки плоскости, а ребра — непересекающиеся кривые на ней, соединяющие смежные вершины ("укладка" графа на плоскости).

Плоский граф

Граф называется **плоским**, если его можно изобразить в виде геометрической фигуры на плоскости без пересечения ребер, так что его вершины — это точки плоскости, а ребра — непересекающиеся кривые на ней, соединяющие смежные вершины ("укладка" графа на плоскости).

Более формально, ребра можно изображать ломаными с конечным числом звеньев.

Плоский граф

Граф называется плоским, если его можно изобразить в виде геометрической фигуры на плоскости без пересечения ребер, так что его вершины — это точки плоскости, а ребра — непересекающиеся кривые на ней, соединяющие смежные вершины ("укладка" графа на плоскости).

Более формально, ребра можно изображать ломаными с конечным числом звеньев.

Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его гранями. Неограниченная часть плоскости — тоже грань ("внешняя грань").

Плоский граф

Граф называется **плоским**, если его можно изобразить в виде геометрической фигуры на плоскости без пересечения ребер, так что его вершины — это точки плоскости, а ребра — непересекающиеся кривые на ней, соединяющие смежные вершины ("укладка" графа на плоскости).

Более формально, ребра можно изображать ломаными с конечным числом звеньев.

Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его **гранями**. Неограниченная часть плоскости — тоже грань ("внешняя грань").

Множество граней: F. Плоский граф: $G = (V, E, F)$.

Плоский граф

Граф называется **плоским**, если его можно изобразить в виде геометрической фигуры на плоскости без пересечения ребер, так что его вершины — это точки плоскости, а ребра — непересекающиеся кривые на ней, соединяющие смежные вершины ("укладка" графа на плоскости).

Более формально, ребра можно изображать ломаными с конечным числом звеньев.

Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его **гранями**. Неограниченная часть плоскости — тоже грань ("внешняя грань").

Множество граней: F. Плоский граф: $G = (V, E, F)$.

Планарный граф: изоморфный плоскому.

Плоский граф

Граф называется плоским, если его можно изобразить в виде геометрической фигуры на плоскости без пересечения ребер, так что его вершины — это точки плоскости, а ребра — непересекающиеся кривые на ней, соединяющие смежные вершины ("укладка" графа на плоскости).

Более формально, ребра можно изображать ломаными с конечным числом звеньев.

Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его гранями. Неограниченная часть плоскости — тоже грань ("внешняя грань").

Множество граней: F. Плоский граф: $G = (V, E, F)$.

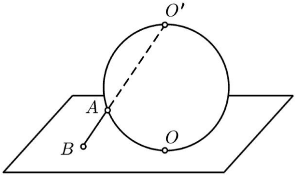
Планарный граф: изоморфный плоскому.

Теорема Фари (докажем позже): Любой планарный граф можно изобразить так, что его ребра — отрезки.

Изображение на сфере

Плоский граф = существует укладка на сфере.

Доказательство — через стереографическую проекцию:



Граф, двойственный данному

$G = (V, E, F)$ плоский связный мультиграф

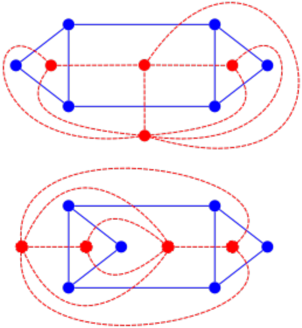
Граф G^*, двойственный G: каждая грань становится вершиной, и каждое ребро исходного графа, служившее границей между двумя гранями, переходит в ребро, соединяющее соответствующие вершины.

Утверждение 3

Для всякого плоского графа G граф G^* тоже плоский, и $(G^*)^* = G$.

Граф, двойственный данному

Двойственность — соответствие между укладками, а не между графами! Для разных укладок одного и того же графа двойственные ему графы могут быть неизоморфными.



Формула Эйлера

Теорема 3 (Формула Эйлера, 1758)

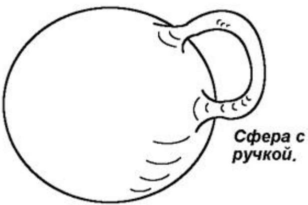
Во всяком связном плоском графе выполняется равенство $|V| - |E| + |F| = 2$.

Следствие 2

Число граней в планарном графе не зависит от его укладки.

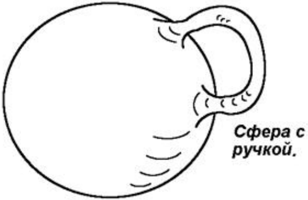
Сферы с ручками

Тор = сфера с ручкой:



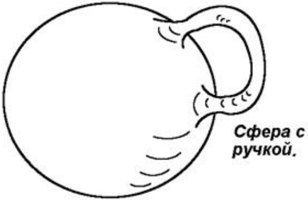
Сферы с ручками

Тор = сфера с ручкой: много ручек



Сферы с ручками

Тор = сфера с ручкой: много ручек



Теорема 4 (Обобщение формулы Эйлера)

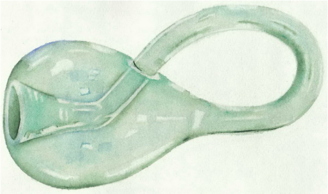
Для графа, укладываемого на тор с k ручками, выполняется $|V| - |E| + |F| = 2 - 2k$.

В укладке граф связный, каждая грань является областью, т.е. гомеоморфна диску.

Без доказательства и без формальных определений.

Неориентируемые поверхности

Бутылка Кляйна:



$$|V| - |E| + |F| = 0$$

Доказательство формулы Эйлера

Доказательство. Индукция по числу граней.

Базис: $|F| = 1$ — это дерево, равенство $|V| - |E| = 1$ выполняется по теореме о деревьях.

Доказательство формулы Эйлера

Доказательство. Индукция по числу граней.

Базис: $|F| = 1$ — это дерево, равенство $|V| - |E| = 1$ выполняется по теореме о деревьях.

Пусть $|F| \geq 2$. Удаляем одно ребро, входящее в цикл; оно разделяло две грани.

Получается граф, в котором $|V|$ вершин, $|E| - 1$ ребер, $|F| - 1$ граней.

Доказательство формулы Эйлера

Доказательство. Индукция по числу граней.

Базис: $|F| = 1$ — это дерево, равенство $|V| - |E| = 1$ выполняется по теореме о деревьях.

Пусть $|F| \geq 2$. Удаляем одно ребро, входящее в цикл; оно разделяло две грани.

Получается граф, в котором $|V|$ вершин, $|E| - 1$ ребер, $|F| - 1$ граней.

Для него, по предположению индукции, выполняется $|V| - (|E| - 1) + (|F| - 1) = 2$,
откуда следует $|V| - |E| + |F| = 2$.

Границы

Теорема 5

Во всяком планарном графе $G = (V, E)$ *без петель и кратных ребер, где* $|V| \geq 3$, *выполняется неравенство* $|E| \leq 3|V| - 6$.
Если, кроме того, всякий цикл в графе имеет длину не менее чем l, *то* $|E| \leq \frac{l}{l-2}(|V| - 2)$.

Доказательство. Граф допускает укладку с некоторым множеством граней F.

Утверждение: Длина границы каждой грани не менее чем 3.

Если длина границы 2, то имеем цикл длины 2, т.е., кратное ребро — а по условию их нет. Если длина границы 1, то имеем петлю.

Доказательство. Граф допускает укладку с некоторым множеством граней F.

Утверждение: Длина границы каждой грани не менее чем 3.

Если длина границы 2, то имеем цикл длины 2, т.е., кратное ребро — а по условию их нет. Если длина границы 1, то имеем петлю.

Грани соответствует как минимум три ребра, а ребру соответствует не более двух граней, получаем $3|F| \leq 2|E|$.

Доказательство. Граф допускает укладку с некоторым множеством граней F.

Утверждение: Длина границы каждой грани не менее чем 3.

Если длина границы 2, то имеем цикл длины 2, т.е., кратное ребро — а по условию их нет. Если длина границы 1, то имеем петлю.

Грани соответствует как минимум три ребра, а ребру соответствует не более двух граней, получаем $3|F| \leq 2|E|$.

Подставим в формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$:

$$3|V| - 3|E| + 2|E| \geq 3|V| - 3|E| + 3|F| = 6$$

$$\Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

Доказательство. Граф допускает укладку с некоторым множеством граней F.

Утверждение: Длина границы каждой грани не менее чем 3.

Если длина границы 2, то имеем цикл длины 2, т.е., кратное ребро — а по условию их нет. Если длина границы 1, то имеем петлю.

Грани соответствует как минимум три ребра, а ребру соответствует не более двух граней, получаем $3|F| \leq 2|E|$.

Подставим в формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$:

$$3|V| - 3|E| + 2|E| \geq 3|V| - 3|E| + 3|F| = 6$$

$$\Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

Вторая часть: здесь $l|F| \leq 2|E|$, и далее из формулы Эйлера $l|V| - l|E| + 2|E| \geq l|V| - l|E| + l|F| = 2l$, откуда следует требуемое неравенство.

Следствие 3

Во всяком планарном графе $G = (V, E)$ *без петель и кратных ребер есть вершина степени не более чем 5.*

Следствие 3

Во всяком планарном графе $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер есть вершина степени не более чем 5.

Доказательство. Пусть все вершины имеют степень 6 и более. Тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V|.$$

Следствие 3

Во всяком планарном графе $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер есть вершина степени не более чем 5.

Доказательство. Пусть все вершины имеют степень 6 и более. Тогда

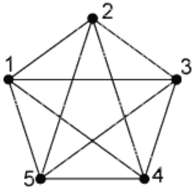
$$\sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V|.$$

С другой стороны,

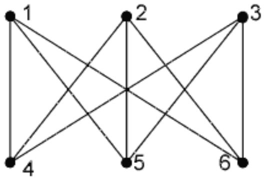
$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Отсюда вытекает, что $|E| \geq 3|V|$. Противоречие с частью 1 теоремы.

Непланарность K_5 и $K_{3,3}$

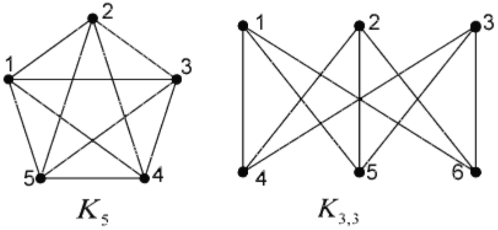


K_5



$K_{3,3}$

Непланарность K_5 и $K_{3,3}$

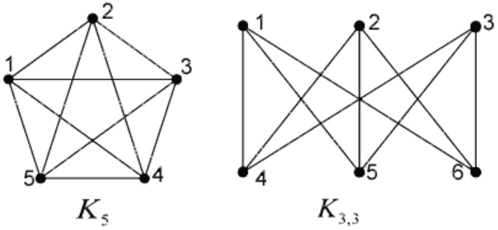


Лемма 1

Граф K_5 непланарен.

Доказательство: В нем $|V| = 5$ и $|E| = 10$; противоречие с частью 1 теоремы.

Непланарность K_5 и $K_{3,3}$



Лемма 1

Граф K_5 непланарен.

Доказательство: В нем $|V| = 5$ и $|E| = 10$; противоречие с частью 1 теоремы.

Лемма 2

Граф $K_{3,3}$ непланарен.

Доказательство: В нем $|V| = 6$ и $|E| = 9$, всякий цикл имеет длину не менее чем 4; противоречие с частью 2 теоремы.

Гомеоморфизм графов

Операция разбиения ребра: добавить вершину в середине ребра $(u, v) \to (u, w), (w, v)$, где w — новая вершина.

Графы G_1 и G_2 гомеоморфны, если, применяя к каждому из них операцию разбиения ребер, можно привести их к двум изоморфным графам.

Критерий планарности графа

Теорема Понтрягина-Куратовского, 1930

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

Критерий планарности графа

Теорема Понтрягина-Куратовского, 1930

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

Доказательство.
$\Rightarrow$ Пусть граф G планарен, но содержит подграф G_1, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$. Тогда, имея укладку G, из нее извлекаем укладку G_1, из которой в свою очередь можно получить укладку K_5 или $K_{3,3}$.
$\Leftarrow$ Не разбираем на курсе.

Теорема о художественной галерее

Сколько сторожей надо расставить в углах произвольного n-угольника, чтобы каждую внутреннюю точку видел кто-то из них?

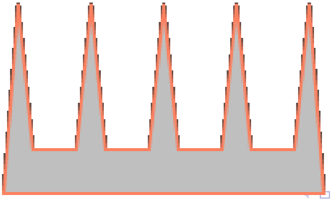
Теорема о художественной галерее

Сколько сторожей надо расставить в углах произвольного n-угольника, чтобы каждую внутреннюю точку видел кто-то из них?

Теорема 6 (Хватал, 1975)

Для всякого $n \geq 3$ в любом n-угольнике достаточно $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ сторожей, расставленных в вершинах.
Существует n-угольник, для которого необходимо не менее $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ сторожей, даже если разрешить их расстановку в произвольных точках.

Нижняя оценка — гребенка Хватала: $n = 3k$, минимум k сторожей.



Лемма 3

Всякий многоугольник можно диагоналями разбить на треугольники, причем полученный граф раскрашивается в 3 цвета.

Доказательство. Индукция по числу сторон n.

Базис: $n = 3$, треугольник — уже разбит. Раскрашивается.

Переход: находим угол меньше 180°, он есть.

- Если отрезок между соседними с ним вершинами лежит внутри многоугольника:
  - Отрезаем треугольник.
  - По индукции, все остальное разбивается и раскрашивается.
  - Отрезанная вершина раскрашивается в свободный цвет.

- Если этот отрезок пересекает какие-то другие отрезки:
  - Проводим отрезок из вершины угла к концу одного из мешающих отрезков (можно выбрать, например, вершину внутри угла, лежащую на прямой, параллельной AB, и ближайшей к вершине), разбиваем многоугольник на два.
  - Каждая половина разбивается и раскрашивается
  - Цвета в одной из половин переименовываются, чтобы на общем отрезке были те же два цвета.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы о художественной галерее

Доказательство теоремы.
По лемме строим разбиение на треугольники так, что полученный граф раскрашивается в три цвета.

Доказательство теоремы о художественной галерее

Доказательство теоремы.
По лемме строим разбиение на треугольники так, что полученный граф раскрашивается в три цвета.

Из этих цветов выбираем тот, который используется не чаще других; им раскрашено вершин $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Доказательство теоремы о художественной галерее

Доказательство теоремы.
По лемме строим разбиение на треугольники так, что полученный граф раскрашивается в три цвета.

Из этих цветов выбираем тот, который используется не чаще других; им раскрашено вершин $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Расставляем сторожей в вершинах, раскрашенных этим цветом.

Теорема 7 (Фари, 1948)

Для всякого планарного графа без кратных ребер и без петель существует укладка, в которой все ребра представлены отрезками.

Теорема 7 (Фари, 1948)

Для всякого планарного графа без кратных ребер и без петель существует укладка, в которой все ребра представлены отрезками.

Доказательство. Граф можно предполагать связным.

Теорема 7 (Фари, 1948)

Для всякого планарного графа без кратных ребер и без петель существует укладка, в которой все ребра представлены отрезками.

Доказательство. Граф можно предполагать связным.

Рассмотрим произвольную укладку графа, и докажем, что ее можно преобразовать в прямолинейную укладку с сохранением множества граней.

Теорема 7 (Фари, 1948)

Для всякого планарного графа без кратных ребер и без петель существует укладка, в которой все ребра представлены отрезками.

Доказательство. Граф можно предполагать связным.

Рассмотрим произвольную укладку графа, и докажем, что ее можно преобразовать в прямолинейную укладку с сохранением множества граней.

Сперва добавим в граф лишние ребра, чтобы сделать каждую его грань, включая внешнюю, треугольником (триангуляция). После построения укладки эти ребра удалим.

Лемма о триангуляции

Пусть G — плоский граф без петель, причём в границе каждой грани не менее трёх вершин. Тогда существует триангуляция T, остовным подграфом которой является G.

Лемма о триангуляции

Пусть G — плоский граф без петель, причём в границе каждой грани не менее трёх вершин. Тогда существует триангуляция T, остовным подграфом которой является G.

Доказательство. Пусть f — грань, граница которой не треугольник.

Случай 1: граница связна.

Внутреннее ребро грани f = с обеих сторон грань f

Лемма о триангуляции

Пусть G — плоский граф без петель, причём в границе каждой грани не менее трёх вершин. Тогда существует триангуляция T, остовным подграфом которой является G.

Доказательство. Пусть f — грань, граница которой не треугольник.

Случай 1: граница связна.

Внутреннее ребро грани f = с обеих сторон грань f

Раздвоим каждое внутреннее ребро грани f $\Rightarrow$ граница превращается в цикл Z, проходящий каждое граничное ребро f ровно один раз и каждое внутреннее ребро ровно два раза (Z может не быть простым, но он реберно-простой). Грань f — внутренняя область цикла Z. Триангулировать f = триангулировать внутренность цикла Z.

Лемма о триангуляции

Вспомогательное утверждение:

Пусть Z цикл с ≥ 3 вершинами, вершины Z покрашены в ≥ 3 цветов т.ч. любые две соседние вершины покрашены в разные цвета. Тогда можно триангулировать внутреннюю область Z т.ч. все проведённые диагонали цикла соединяют вершины разных цветов.

Лемма о триангуляции

Вспомогательное утверждение:

Пусть Z цикл с ≥ 3 вершинами, вершины Z покрашены в ≥ 3 цветов т.ч. любые две соседние вершины покрашены в разные цвета. Тогда можно триангулировать внутреннюю область Z т.ч. все проведённые диагонали цикла соединяют вершины разных цветов.

Доказательство. Индукция по числу вершин.

База для цикла из трёх вершин очевидна, докажем переход.

Пусть $Z = v_1 v_2 \ldots v_k$, $k \geq 4$.

Лемма о триангуляции

Вспомогательное утверждение:

Пусть Z цикл с ≥ 3 вершинами, вершины Z покрашены в ≥ 3 цветов т.ч. любые две соседние вершины покрашены в разные цвета. Тогда можно триангулировать внутреннюю область Z т.ч. все проведённые диагонали цикла соединяют вершины разных цветов.

Доказательство. Индукция по числу вершин.

База для цикла из трёх вершин очевидна, докажем переход.

Пусть $Z = v_1 v_2 \dots v_k$, $k \geq 4$.

Очевидно, найдётся диагональ $a_i a_{i+2}$, соединяющая две вершины разных цветов.

Эта диагональ разрезает цикл Z на треугольник $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ и меньший цикл Z'.

Лемма о триангуляции

Если в $Z' \geq 3$ цветов, то применим к Z' индукционное предположение и все доказано.

Лемма о триангуляции

Если в $Z' \geq 3$ цветов, то применим к Z' индукционное предположение и все доказано.

Если в Z' два цвета, то пусть вершина a_{i+1} покрашена в цвет 3, а вершины Z' покрашены в цвета 1 и 2.

Лемма о триангуляции

Если в $Z' \geq 3$ цветов, то применим к Z' индукционное предположение и все доказано.

Если в Z' два цвета, то пусть вершина a_{i+1} покрашена в цвет 3, а вершины Z' покрашены в цвета 1 и 2.

Тогда цвета вершин Z' чередуются $\Rightarrow$ число вершин в Z' чётно, то есть ≥ 4.

$\Rightarrow$ в Z единственная вершина a_{i+1} цвета 3 и хотя бы по две вершины цветов 1 и 2.

Лемма о триангуляции

Если в $Z' \geq 3$ цветов, то применим к Z' индукционное предположение и все доказано.

Если в Z' два цвета, то пусть вершина a_{i+1} покрашена в цвет 3, а вершины Z' покрашены в цвета 1 и 2.

Тогда цвета вершин Z' чередуются $\Rightarrow$ число вершин в Z' чётно, то есть ≥ 4.

$\Rightarrow$ в Z единственная вершина a_{i+1} цвета 3 и хотя бы по две вершины цветов 1 и 2.

Тогда отрежем треугольник диагональю $a_{i+1}a_{i+3}$ и получим меньший цикл Z'' с 3 цветами.

Применим к Z'' предположение индукции $\Rightarrow$ триангулируем внутренность цикла Z''. Утв. доказано.

Доказательство леммы о триангуляции

Покрасим вершины цикла Z цветами, соответствующими вершинам грани (их ≥ 3), т.ч. в один цвет были покрашены одинаковые вершины.

Тогда любые две соседние вершины разноцветны.

Вспомогательное утверждение $\Rightarrow$ можем триангулировать внутренность цикла Z так, чтобы проведённые рёбра имели разноцветные концы, то есть, не были петлями, что и требовалось доказать.

Доказательство леммы о триангуляции

Случай 2: граница f несвязна.

Пусть x и y — две вершины из разных компонент связности. Проведём ребро xy внутри грани f.
Это ребро будет внутренним для грани f, поэтому длина границы f увеличится на 2. Будем действовать таким образом, пока граница грани не окажется связной.

Доказательство теоремы Фари

Индукция по количеству вершин.

Базис: $|V| = 3$ — представляется треугольником.

Доказательство теоремы Фари

Индукция по количеству вершин.

Базис: $|V| = 3$ — представляется треугольником.

Шаг индукции. Следствие **??** $\Rightarrow$ есть вершина v: $\deg v \le 5$. Докажем, что существует такая вершина, не лежащая на границе внешней грани.

Доказательство теоремы Фари

Индукция по количеству вершин.

Базис: $|V| = 3$ — представляется треугольником.

Шаг индукции. Следствие **??** $\Rightarrow$ есть вершина v: $\deg v \leq 5$. Докажем, что существует такая вершина, не лежащая на границе внешней грани.

Пусть у всех вершин не на границе внешней грани $\deg \geq 6$.

Доказательство теоремы Фари

Индукция по количеству вершин.

Базис: $|V| = 3$ — представляется треугольником.

Шаг индукции. Следствие **??** $\Rightarrow$ есть вершина v: $\deg v \leq 5$. Докажем, что существует такая вершина, не лежащая на границе внешней грани.

Пусть у всех вершин не на границе внешней грани $\deg \geq 6$.

На границе внешней грани ровно три вершины, степень каждой из них не менее чем 2, и должна быть хотя бы одна вершина степени не менее чем 3, потому что иначе весь граф — треугольник.

Доказательство теоремы Фари

Индукция по количеству вершин.

Базис: $|V| = 3$ — представляется треугольником.

Шаг индукции. Следствие **??** $\Rightarrow$ есть вершина v: $\deg v \leq 5$. Докажем, что существует такая вершина, не лежащая на границе внешней грани.

Пусть у всех вершин не на границе внешней грани $\deg \geq 6$.

На границе внешней грани ровно три вершины, степень каждой из них не менее чем 2, и должна быть хотя бы одна вершина степени не менее чем 3, потому что иначе весь граф — треугольник. Тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v \geq 6(|V| - 3) + 3 + 2 + 2 = 6|V| - 11,$$

то есть

$$2|E| \geq 6|V| - 11.$$

Доказательство теоремы Фари

Индукция по количеству вершин.

Базис: $|V| = 3$ — представляется треугольником.

Шаг индукции. Следствие **??** $\Rightarrow$ есть вершина v: $\deg v \leq 5$. Докажем, что существует такая вершина, не лежащая на границе внешней грани.

Пусть у всех вершин не на границе внешней грани $\deg \geq 6$.

На границе внешней грани ровно три вершины, степень каждой из них не менее чем 2, и должна быть хотя бы одна вершина степени не менее чем 3, потому что иначе весь граф — треугольник. Тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v \geq 6(|V| - 3) + 3 + 2 + 2 = 6|V| - 11,$$

то есть

$$2|E| \geq 6|V| - 11.$$

Теорема **??** $\Rightarrow 2|E| \leq 6|V| - 12$. Противоречие.

Ребра, примыкающие к v, принадлежат граням-треугольникам.

Ребра, примыкающие к v, принадлежат граням-треугольникам.

Удаляем v, на ее месте остается грань. К этой грани применяем триангуляцию.

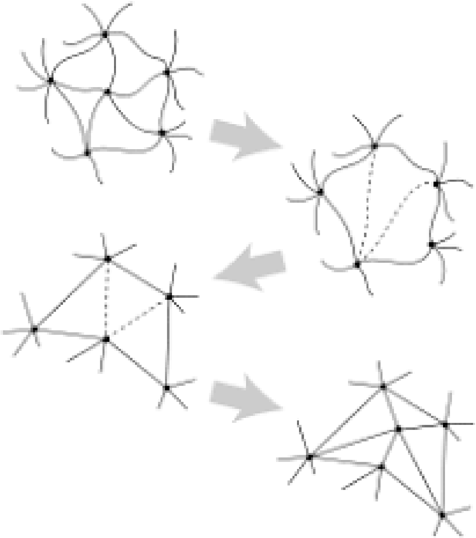
Ребра, примыкающие к v, принадлежат граням-треугольникам.

Удаляем v, на ее месте остается грань. К этой грани применяем триангуляцию.

По предположению индукции, для полученного графа есть прямолинейная укладка с сохранением набора граней. Удаляя диагонали, получаем опять большую грань, граница которой — многоугольник с ≤ 5 сторонами.

По теореме о художественной галерее всю эту грань может обозревать один сторож. Там, где стоит этот сторож, размещаем вершину v; из нее можно провести отрезки во все пять углов. Если сторож стоит в одной из вершин многоугольника, то вершину v можно разместить на небольшом расстоянии от нее.

Теорема Фари



Раскраски графов

$G = (V, E)$, С — множество цветов.
Раскраска — это всякая функция $c : V \to C$.
Раскраска **правильная**, если для всякого ребра (v, u) верно $c(v) \neq c(u)$.

Примеры:

- **Двудольный граф**: если раскрашивается в два цвета. Например, $K_{3,3}$.
- Граф K_n не раскрашивается менее чем в n цветов.

Теорема 8 (Хивуд)

Всякий планарный граф раскрашивается в 5 цветов.

Доказательство. Индукция по числу вершин.
Базис $|V| = 1$: раскрашивается.

Доказательство. Индукция по числу вершин.
Базис $|V| = 1$: раскрашивается.

Шаг индукции. По следствию **??**, есть вершина v степени ≤ 5.

Доказательство. Индукция по числу вершин.
Базис $|V| = 1$: раскрашивается.

Шаг индукции. По следствию **??**, есть вершина v степени ≤ 5.

Если $\deg(v) \leq 4$, то удаляем ее, остаток раскрашиваем по предположению индукции, а затем возвращаем и раскрашиваем в свободный цвет.

Доказательство. Индукция по числу вершин.
Базис $|V| = 1$: раскрашивается.

Шаг индукции. По следствию **??**, есть вершина v степени ≤ 5.

Если $\deg(v) \leq 4$, то удаляем ее, остаток раскрашиваем по предположению индукции, а затем возвращаем и раскрашиваем в свободный цвет.

Если $\deg(v) = 5$, то рассмотрим ее соседей v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 в порядке их укладки на плоскости. Если какого-то из ребер (v_i, v_{i+1}) нет, добавим его.

Доказательство. Индукция по числу вершин.
Базис $|V| = 1$: раскрашивается.

Шаг индукции. По следствию **??**, есть вершина v степени ≤ 5.

Если $\deg(v) \leq 4$, то удаляем ее, остаток раскрашиваем по предположению индукции, а затем возвращаем и раскрашиваем в свободный цвет.

Если $\deg(v) = 5$, то рассмотрим ее соседей v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 в порядке их укладки на плоскости. Если какого-то из ребер (v_i, v_{i+1}) нет, добавим его.

Хотя бы одной из диагоналей (v_i, v_{i+2}) нет, иначе был бы подграф K_5.

Доказательство. Индукция по числу вершин.
Базис $|V| = 1$: раскрашивается.

Шаг индукции. По следствию ??, есть вершина v степени ≤ 5.

Если $\deg(v) \leq 4$, то удаляем ее, остаток раскрашиваем по предположению индукции, а затем возвращаем и раскрашиваем в свободный цвет.

Если $\deg(v) = 5$, то рассмотрим ее соседей v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 в порядке их укладки на плоскости. Если какого-то из ребер (v_i, v_{i+1}) нет, добавим его.

Хотя бы одной из диагоналей (v_i, v_{i+2}) нет, иначе был бы подграф K_5.

Склеим вершины v_i, v_{i+2} и v — получим планарный граф меньшего размера, который раскрашивается в 5 цветов по предположению индукции. Тогда в исходном графе v_i и v_{i+2} покрасим тот же цвет, что и склеенную вершину, а v — в свободный пятый цвет.

Раскраски графов

Теорема 9 (Аппель, Хакен, 1977)

Всякий планарный граф раскрашивается в 4 цвета.

Доказательство — компьютерный перебор (первое в истории доказательство такого рода).