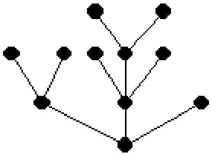
Дерево

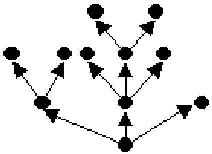
Лес — граф без циклов.

Дерево — связный граф без циклов.

Ориентированное дерево — орграф без циклов, в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода, а все остальные вершины имеют степень захода 1.

Вершина с нулевой степенью захода — *корень* дерева, вершины с нулевой степенью исхода — *листья*.





Мосты

Мост — ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности.

Теорема 1 (Теорема о мостах)

Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не принадлежит ни одному циклу.

Доказательство.
Необходимость. Предположим, что оно принадлежит некоторому циклу $e, e_1, \ldots, e_k$. Рассмотрим две произвольные вершины u, v из одной компоненты связности в G, т.е. они соединены некоторым путем в G. Если e не принадлежит этому пути, то они им соединены и в $G \backslash e$. Если e принадлежит этому пути, то заменив в нем ребро e на последовательность ребер $e_1, \ldots, e_k$, получим, что они соединены путем в $G \backslash e$. Следовательно, после удаления e компоненты связности не меняются, то есть e не является мостом по определению.

Теорема о мостах — доказательство

Достаточность.
Пусть ребро $e = (x, y)$ не содержится ни в одном из циклов графа G.

Вершины x и y связаны, то есть лежат в одной компоненте связности G_1 графа G.

Если в графе $G \backslash e$ вершины x и y соединены путем, то прибавив к нему e, получим цикл, что невозможно по условию.

Следовательно, вершины x и y находятся в разных компонентах связности графа $G \backslash e$.

Таким образом, после удаления ребра e из G компонента G_1 распалась как минимум на две компоненты связности, то есть число компонент связности увеличилось и e — мост по определению.

Теорема о деревьях

Теорема 2 (Теорема о деревьях)

Для простого графа G следующие условия эквивалентны:

1. *G — дерево;*
2. *любые две различные вершины в G соединены ровно одним простым путем;*
3. *G не содержит циклов, но если любую пару несмежных в G вершин соединить ребром, то в полученном графе будет ровно один цикл;*
4. *G — связный граф и $|V| = |E| + 1$;*
5. *G не содержит циклов и $|V| = |E| + 1$;*
6. *G — связный граф, и всякое ребро в G является мостом.*

Простой граф — неориентированный без петель и кратных ребер.
Доказательство: упражнение (рекомендуемая последовательность (1) $\Rightarrow$ (2)–(6) и (2)–(6) $\Rightarrow$ (1) — но можно как угодно).

Доказательство

Доказательство. Вначале предположим, что G — дерево и докажем условия (2)–(5).

2. Дерево — связный граф, а значит, любые две вершины соединены путем.

Предположим, что вершины u и v соединены в G не менее чем двумя цепями. Пусть
$u = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k = v$ и
$u = v'_0 \to v'_1 \to \cdots \to v'_l = v$
различные простые пути из u в v.

Поскольку первые вершины в этих цепях совпадают, существует число i такое, что $v_0 = v'_0, \ldots, v_i = v'_i$, но $v_{i+1} \neq v'_{i+1}$.

Пусть j — наименьшее из чисел, больших i, такое, что вершина v_j принадлежит второй цепи (такое j существует, поскольку в рассматриваемых цепях совпадают и последние вершины).

Тогда путь $v_i \to \Delta \ldots v_j = v'_r \to \ldots v'_i = v_i$ не содержит повторяющихся ребер, а значит, является циклом в G, противоречие.

Доказательство

3. При добавлении к простому пути из u в v ребра (u, v), очевидно, возникает цикл. Таким образом, из связности G следует, что цикл возникает при добавлении любого ребра. Если при добавлении ребра (u, v) возникло более одного цикла, значит, вершины u и v соединены более чем одной цепью, что невозможно, так как условие (2) мы уже доказали.

Доказательство

4,5. Индукция по числу вершин в графе.
Базис: $|V| = 1$, тогда $|E| = 0$, равенство верно.
Пусть $|V| \geq 2$. Сперва покажем, что в графе есть вершина степени 1. Вершин степени 0 нет, потому что граф связный. Если каждая вершина имеет степень 2 и более, то можно построить цикл, двигаясь из вершины в вершину (используя конечность графа). Следовательно, есть вершина v степени 1. Если удалить эту вершину и инцидентное ей ребро, получится дерево с $|V| - 1$ вершинами и $|E| - 1$ ребрами. По предположению индукции для него верно $|V| - 1 = |E| - 1 + 1$, и отсюда $|V| = |E| + 1$.

6. По теореме о мостах.

Доказательство

Теперь покажем, что каждое из условий (2)–(6) влечет что G — дерево.

2. Поскольку две любые вершины соединены простым путем, G связен, а так как цепь единственна, то в G нет циклов (две вершины, находящиеся в цикле, соединены по крайней мере двумя цепями — фрагментами этого цикла).

3. Циклов в G нет по условию. Предположим, что в G более одной компоненты связности. Соединим ребром две вершины из разных компонент. В полученном графе новое ребро будет мостом по определению. По теореме о мостах оно не лежит ни в каком цикле, т. е. при его добавлении цикл не образовался, противоречие.

Доказательство

4. Вначале докажем, что в связном графе $|V| \geq |E| - 1$.
Возьмем граф без ребер с n вершинами и будем добавлять ребра по одному.
Если добавленное ребро в новом графе оказалось мостом, то новый граф содержит ровно на одну компоненту связности меньше, чем старый.
Если же добавленное ребро — не мост, то число компонент связности не изменилось.
Поскольку в исходном графе n компонент связности, необходимо как минимум $n - 1$ ребер, чтобы сделать его связным.

Граф G связен по условию. Если в нем есть цикл, удалим из него ребро и получим связный граф, у которого ребер на 2 меньше, чем вершин, что невозможно, как мы только что доказали.

Доказательство

5. Так как G не содержит циклов, каждая из его компонент связности является деревом, а значит, по доказанному ранее, число ребер в ней на единицу меньше числа вершин. Поскольку это же условие выполняется и для всего графа, компонента связности может быть только одна.

6. Связность G дана по условию, а отсутствие циклов прямо следует из теоремы о мостах.

Доказательство теоремы завершено.

Остовное дерево

H — остовный подграф G, если $V(H) = V(G)$.
Остовное дерево — остовный подграф, который является деревом.

Утверждение 1

Всякий связный граф содержит остовное дерево.

Доказательство. Если связный граф G не содержит циклов, то он сам является своим остовным деревом.

В противном случае выберем произвольное ребро e графа G, входящее в цикл, и удалим его из G — связность сохраняется. Будем повторять процедуру удаления ребра из цикла, пока не получим связный граф без циклов.

Следствие 1

В связном графе с n вершинами хотя бы $n - 1$ ребро.