Несовершенные паросочетания

odd(G) — число нечетных КС в G.
Теорема о размере максимального паросочетания в графе:

Теорема 3 (Формула Бержа, 1958)

Число вершин, непокрытых наибольшим паросочетанием, равно

$$\max_{U\subseteq V}(odd(G\setminus U)-|U|).$$

Эта величина иногда называется дефектом $d(G)$ графа G.

Замечание: $d(G) = 0$ соответствует теореме Татта.

Несовершенные паросочетания

Доказательство.
($\geq$) Аналогично доказательству простой части теоремы Татта:

Пусть $M \subseteq E$ — паросочетание, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество вершин, для которого достигается максимум $(\text{odd}(G \setminus U) - |U|)$.

В $G \setminus U$ во всякой нечетной КС $C \subseteq V \setminus U$ есть

- или вершина, не покрытая паросочетанием M,
- или вершина $v_C \in C$, для которой паросочетание M содержит ребро (u_C, v_C), где $u_C \in U$.

Вершины u_C для разных таких КС C не повторяются.

Отсюда нечетных КС, в которых есть непокрытая вершина, не менее чем $(\text{odd}(G \setminus U) - |U|)$.

($\leq$): Пусть $k = \max_{U \subseteq V}(\text{odd}(G \setminus U) - |U|)$.
В граф добавляем k новых вершин $\{v_1, \ldots, v_k\}$ и соединяем ребрами со всеми вершинами из V. Покажем, что полученный граф G' удовлетворяет условию теоремы Татта.

Для всякого $U' \subseteq V \cup \{v_1, \ldots v_k\}$ рассмотрим два случая:

- если не все вершины $\{v_1, \ldots v_k\}$ попали в U', то после удаления U' останется связный граф (т.е., не более 1 нечетной КС).
- если в $\{v_1, \ldots v_k\} \subseteq U'$ попали все новые вершины, то по сути из исходного графа G удаляются $|U'| - k$ вершин. Оценим число образующихся нечетных КС:
  $\text{odd}(G' \setminus U') - (|U'| - k) \leq k$;
  $\text{odd}(G' \setminus U') \leq |U'|$.
  Тогда, по теореме Татта, существует совершенное паросочетание в G'. После удаления из графа дополнительных вершин остается не более чем k вершин, не покрытых этим паросочетанием.