1 Группы. Рейтинг.

1. Пусть G — счётная группа. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

   - G не порождается никаким конечным множеством своих элементов.
   - Существуют подгруппы $G_i \leq G$ ($i \geq 1$) такие, что $G_i \leq G_{i+1}$, $G_i \neq G$ для всех $i \geq 1$ и $\cup_{i\geq 1} G_i = G$.

   (1 балл)

2. Пусть H, K — нормальные подгруппы конечного индекса в группе G. Докажите, что, если $[G : H]$ и $[G : K]$ взаимно просты, то $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$. Может ли быть так, что $G/(H \cap K) \ncong G/H \times G/K$, если индексы H и K не взаимно просты и $H \neq K$. (1 балл)

3. Докажите, что $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — единственная конечная группа, у которой есть ровно два класса сопряжённости. Может ли для какого-то $k > 2$ существовать бесконечно много *конечных* групп с ровно k классами сопряжённости? (2 балла)
   Замечание. *Существуют бесконечные группы с ровно двумя классами сопряжённости.*

4. Решите полностью задачу 3 из листка на зачёт (1 балл). Докажите, что сюръекция $\pi\colon \mathrm{Aut}(S_6) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ не расщепляется, то есть не существует гомоморфизма $\iota\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(S_6)$ такого, что $\pi\iota = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$. (2 балла)

5. Пусть H — нормальная подгруппа группы G, $Z(H) = \{1\}$ и $\mathrm{Aut}(H) = \mathrm{Inn}(H)$. Докажите, что $G = H \times K$ для некоторой подгруппы K группы G. (1 балл)

6. Пусть G — конечная группа такая, что все элементы $[G, G]$ являются коммутаторами. Докажите, что $|Z(G)|\sqrt{|[G,G]|} \leq |G|$. (1 балл) Пусть множество G — множество наборов $(a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq 6}$, где $a_{i,j} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (то есть это наборы из 21 элемента $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, пронумерованные парами чисел (i, j) такими, что $1 \leq i \leq j \leq 6$). Произведением наборов $(a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq 6}$ и $(b_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq 6}$ положим набор $(c_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq 6}$, где

   $$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} + b_{i,i} \text{ для всех } 1 \leq i = j \leq 6 \\ a_{i,j} + b_{i,j} + a_{i,i}b_{j,j} \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

   Покажите, что введенная операция задает на G структуру группы, и что её коммутант не равен множеству коммутаторов. (1 балл)