1 Группы

1. Пусть R — кольцо с единицей. Докажите, что множество его обратимых элементов образует группу. Эта группа обозначается R^*.
   - Группа $GL_n(F)$ — это множество обратимых элементов кольца матриц $n \times n$ над полем F. Докажите, что множество $U_n(F)$ верхних унитреугольных матриц (то есть матриц, у которых ниже главной диагонали стоят нули, а на самой главной диагонали - единицы) образует подгруппу в $GL_n(F)$. Покажите, что $U_2(F) \cong F$.
   - Опишите группу $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, где p — простое число. Опишите группу $(\mathbb{Z}/p_1, \dots, p_k\mathbb{Z})^*$, где $p_1, \dots, p_k$ — различные простые числа.
2. Дан кусочек таблицы Кэли $\begin{matrix} a & \cdots & ? \\ \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & c \end{matrix}$. Выразите элемент, стоящий на месте знака ? через a, b, c.
3. Пусть $g^2 = 1$ для любого $g \in G$. Докажите, что G абелева.
4. Пусть G — группа с чётным числом элементов. Докажите, что в ней есть нечётное число подгрупп порядка 2.
5. Пусть G - группа, $a \in G$. Докажите, что G с операциями $*_a$ и $\circ$, определёнными равенствами $g *_a h = gah$ и $g \circ h = hg$ тоже является группой. Всегда ли $(G, *_a)$ изоморфна G? Всегда ли $(G, \circ)$ изоморфна G?
6. Явдяется ли $\mathbb{R}$ с операцией $a * b = ab + a + b$ группой? Моноидом? Какое максимальное подмножество $\mathbb{R}$ явлется группой относительно операции $*$?
7. Пусть H и $(G \setminus H) \cup \{1_G\}$ подгруппы группы G. Докажите, что $H = G$ или $H = \{1\}$.
8. Покажите, что если подмножество H группы G конечно, и для любых $a, b \in H$ верно $ab \in H$, то $H \leq G$.
9. Рассмотрим множество $F^* \times F$ с операцией $(a, b) * (c, d) = (ab, ad + b)$. Докажите, что $(F \times F, *)$ — группа. Опишите какую нибудь подгруппу с $GL_2(F)$ изоморфню этой группе.
10. Докажите, что группа простого порядка циклична.
11. Докажите, что любая фактор-группа и любая подгруппа циклической группы циклична. Докажите, что любая подгруппа $(\mathbb{Z}, +)$ изоморфна $(\mathbb{Z}, +)$.
12. * Докажите, что, если группа G порождается m элементами, то любая её фактор-группа тоже порождается m элементами. Верно ли это для любой подгруппы G?
13. Опишите все пары групп (G, H) такие, что группа $G \times H$ циклична.
14. Докажите, что множество полиномов с целыми коэффициентами с операцией сложения образует группу изоморфную группе $\mathbb{Q}^+$ положительных рациональных чисел по умножению.
15. Пусть G — множество рациональных чисел из промежутка $[0, 1)$ с операцией $x * y = \{x + y\}$. Докажите, что $G \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Докажите, что для любая собственная конечно порождённая подгруппа $H \subset G$ циклична и что имеет место изоморфизм $G \cong G/H$.
16. Рассмотрим подгруппу H группы G из предыдущей задачи, состоящую из всех чисел, знаменатель которых при записи в виде несократимой дроби является степенью двойки. Докажите, что $G \ncong G/H$. Конечна или бесконечна группа H? Имеет ли H хоть одну собственную бесконечную подгруппу?
17. Пусть G — множество вещественных чисел из промежутка $[0, 1)$ с операцией $x * y = \{x + y\}$. Докажите, что $G \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Пусть H — циклическая подгруппа группы G. Докажите, что $G \cong G/H$ тогда и только тогда, когда $H \subset \mathbb{Q}$.
18. Докажите, что в любой бесконечной группе есть бесконечно много подгрупп.

19. Пусть $G \subset GL_n(F)$ — множество обратимых верхнетреугольных матриц (то есть матриц, у которых ниже главной диагонали стоят нули). Докажите, что $G/U_n(F) \cong (F^*)^n$.

20. Пусть U - множество матриц 3×3, которые отличаются от единичной только в позиции $(1,3)$. Докажите, что $U_3(F)/U \cong F \oplus F$.

21. Докажите, что $\mathbb{Q}^* \cong \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

22. Покажите, что существует единственный гомоморфизм sgn из S_n в множество $\{1, -1\}$ с операцией умножения такой, что $sgn(1,2) = -1$. Значение этого гомоморфизма на перестановке σ называется знаком σ. Перестановка называется чётной, если она лежит в ядре sgn, в противном случае она называется нечётной. Ядро sgn обозначается A_n и называетс знакопеременной группой порядка n.

23. Каких перестановок в S_n больше: четных или нечетных?

24. Покажите, что в симметрической группе S_n минимальное число транспозиций которые необходимо перемножить для того, чтобы получить цикл длины n равно $n-1$. Сколько существует наборов транспозиций $\{\tau_i\}_{i=1}^{n-1}$ таких, что их произведение дает цикл длины n. Докажите, что любой такой набор порождает S_n.

25. Докажите, что S_n порождается транспозициями, а A_n — 3-циклами.

26. Опишите все подгруппы групп D_3 и D_4. Какие из них нормальны?

27. Пусть H — подгруппа G такая, что существует ровно 2 смежных класса G по H. Докажите, что H нормальна.

28. Пусть H — подгруппа G и $a, b \in G$ таковы, что $aH = bH$. Докажите, что тогда $Ha^{-1} = Hb^{-1}$. Обязательно ли $Ha = Hb$?

29. Докажите, что множество $X \subset G$ является правым смежным классом по некоторой подгруппе тогда и только тогда, когда $ab^{-1}c \in X$ для любых $a, b, c \in X$. Докажите, что X является левым смежным классом по некоторой подгруппе тогда и только тогда, когда оно является правым смежным классом по некоторой (возможно, другой) подгруппе.

30. Опишите все группы порядка $2p$, где p — нечётное простое число.

31. Центр группы G — это множество $Z(G)$ элементов G, которые коммутируют со всеми элементами G. Докажите, что центр является нормальной подгруппой. Докажите, что, если $G/Z(G)$ — циклическая группа, то $Z(G) = G$, то есть G абелева.

32. Пусть H, K — номальные подгруппы группы G такие, что $H \cap K = \{1\}$. Докажите, что $xy = yx$ для любых $x \in H$, $y \in K$. Останется ли это утверждение верным, если убрать условие нормальности?

33. Докажите, что группа автоморфизмов любой группы порядка больше 2 нетривиальна.

34. Чему равен порядок группы автоморфизмов циклической группы порядка n?

35. Опишите группы автоморфизмов групп $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и S_3.

36. Автоморфизм σ группы G называется внутренним, если существует $a \in G$ такой, что $\sigma(g) = a^{-1}ga$ для всех $g \in G$. Обозначим через $Aut(G)$ группу всех автоморфизмоф группы G, а через $Inn(G)$ — множество её внутренних автоморфизмов. Докажите, что $Inn(G)$ — нормальная подгруппа $Aut(G)$. Докажите, что $Inn(G) \cong G/Z(G)$.

37. Докажите, что любой внутренний автоморфизм S_n переводит транспозиции в транспозиции.

38. Докажите, что при $n > 2$ центр S_n равен 1.

39. Докажите, что любой автоморфизм S_n, переводящий транспозиции в транспозиции внутренний.

40. Покажите, что при $n \neq 2, 6$ любой автоморфизм S_n внутренний.