1 Зачет

О. Индивидуальные задания:

1. Решить линейное уравнение методом Гаусса.

2. Найти базис в сумме и пересечении подпространств.

3. Рассмотрим отображение $f_v\colon \begin{pmatrix} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 \\ M \mapsto Mv \end{pmatrix}$ для данного вектора $v \in \mathbb{R}^2$. Напишите матрицу этого отображение для двух предлагаемых базисов в $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^2$.

A. Пусть X — множество. Рассмотрим 2^X — множество всех подмножеств X, снабженное операцией Δ симметрической разности: для двух подмножеств $A, B \subseteq X$

$$A \Delta B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B).$$

1. Снабдите X структурой векторного пространства над полем из двух элементов $\mathbb{F}_2$. Какова его размерность если X конечное?

2. Докажите, что для счетного X пространство его подмножеств не допускает счетный базис? Рассмотрим подпространство $\mathrm{Fin}(X) \leq 2^X$, порожденное всеми конечными множествами в X. Постройте в нем какой-нибудь базис.

3. Допускает ли $\mathrm{Fin}(X)$ базис, каждый элемент которого являтется подмножеством из 2 элементов? Для каких $m \in \mathbb{N}$ пространство $\mathrm{Fin}(X)$ допускает базис, состоящий из m–элементных подмножеств X?

4. Пусть $\mathrm{Fin}_m(X)$ — подпространство $\mathrm{Fin}(X)$, порожденное всеми m-элементными множествами. Найдите размерность факторпространства $\mathrm{Fin}(X)/\mathrm{Fin}_m(X)$.

B. Аффинным подпространством размерности m пространства V над полем F называется его подмножество вида $\{v \in V \mid v = a + w, w \in W\}$ для некоторых $a \in V$, и $W \leq V$, $\dim W = m$.

1. Сколько разных одномерных аффинных подпространств пространства $V = \mathbb{F}_3^d$ содержат данный вектор $v \in \mathbb{F}_3^d$? Сколько есть разных аффинных подпространств размерности m, содержащих данный $v \in \mathbb{F}_3^d$?

2. Для $V = \mathbb{F}_3^2$ какова максимальная мощность подмножества векторов V, не содержащего ни одного одномерного аффинного подпространства?

3. Для $V = \mathbb{F}_3^3$ какова максимальная мощность подмножества векторов V, не содержащего ни одного одномерного аффинного подпространства?

4. Пусть $V = F_3^d$, и $W_1, \ldots, W_p \subset V$ для натурального p — набор аффинных подпространств размерности m. Найдите сумму всех векторов, составляющих множество

$$V \smallsetminus (W_1 \cup \ldots \cup W_p).$$

C. Пусть V — абелева группа, а F — поле.

1. Докажите, что, если $F = \mathbb{Q}$ или $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p — простое число, то на V существует не более одной структуры векторного пространства над F.

2. Предъявите пример абелевой группы V и поля F таких, что на V имеется более одной структуры векторного пространства над F.

D. Пусть V — векторное пространство над полем F размерности не меньше 2.

1. Докажите, что, если $|F| = \infty$, то ни для какого $m \in \mathbb{N}$ не существует таких собственных подпрстранств $V_1, \ldots, V_m$ пространства V, что $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$.

2. Пусть $|F| = q$. При каком минимальном $m \in \mathbb{N}$ существуют такие собственные подпространства $V_1, \ldots, V_m$ пространства V, что $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$.

3. Пусть $|F|$ континуально, а V бесконечномерно. Может ли объединение счетного числа собственных подпространств V быть равным V?

E. Пусть A — матрица над полем F с m строками и n столбцами. Через A^T обозначим матрицу n строками и m столбцами, у которой в позиции (i, j) стоит тот же элемент, что и у матрицы A в позиции (j, i).

1. Докажите, что, если $A^T A$ — обратимая матрица, то $rank(A) = n$.

2. Докажите, что, если $F = \mathbb{R}$ и $rank(A) = n$, то $A^T A$ — обратимая матрица.

3. Приведите пример, когда $rank(A) = n$, но матрица $A^T A$ не обратима.