1 Ещё немного колец

1. Пусть R и S — кольца с единицей. Пусть $f : R \to S$ — гомоморфизм колец. Следует ли из этого автоматически, что $f(1_R) = 1_S$. Докажите, что $f(1_R) = 1_S$, если либо f сюръективен, либо S не имеет делителей нуля.

2. Показать, что если в кольце A с единицей элементы xy и yx, обратимы, то x и y — тоже обратимы; если обратимо xy и нет делителей 0, то x и y тоже обратимы; если обратим xy, то x и y не обязательно должны быть обратимы.

3. Является ли кольцом множество всех подмножеств множества M с операциями объединения и пересечения? Пересечения и симметрической разности? Если да, то представить его в виде прямого произведения неразложимых колец.

2 Линейная алгебра

1. Верно ли, что множество вещественных чисел больших 0 является векторным пространством над $\mathbb{R}$ относительно умножения (в качестве сложения) и возведения в степень (в качестве умножения на скаляр). Какова размерность этого пространства?

2. Сколько существует различных наборов из m линейно независимых векторов в пространстве $\mathbb{F}_q^n$? Сколько существует m-мерных подпространств в $\mathbb{F}_q^n$?

3. Пусть k – поле. Покажите, для $n \in \mathbb{N}$ ранг линейного оператора $f\colon k^n \to k^n$ равен 1 тогда и только тогда, когда для любой пары базисов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ пространства k^n изображающая матрица $[f]_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}}$ раскладывается в произведение $[f]_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} = ab$, где a – матрица с одним столбцом, а b — матрица с одной строкой.

4. Покажите, что множество всех многочленов над полем k является линейным пространством. Является ли отображение, переводящее f в f' линейным?

5. Пусть k — поле. Является ли множество векторов $(x_1, \ldots, x_n)$ пространства k^n, удовлетворяющих равенству $x_1^2 = x_2^2$, подпространством. Если да, предъявите какой-нибудь базис этого подпространства.

6. Описать сумму и пересечение следующих подпространств в $\mathbb{R}[t]$: $U_1 = \{f \mid t^2 - 7t + 6 \mid f\}$, $U_2 = \{f \mid t^2 - 5t - 6 \mid f\}$.

7. Верно ли для произвольных трех подпространств U_1, U_2, U_3 пространства V, что $(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 \cap U_3 + U_2 \cap U_3$? Верно ли это, если $U_1 \subset U_3$?

8. Пусть $f : M \to L$ — линейное отображение k-линейных пространств, M_1, M_2 — подпространства M, а L_1, L_2 — подпространства L. Какие из следующих равенств верны: $f(M_1 + M_2) = f(M_1) + f(M_2)$, $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$, $f^{-1}(L_1 + L_2) = f^{-1}(L_1) + f^{-1}(L_2)$, $f^{-1}(L_1 \cap L_2) = f^{-1}(L_1) \cap f^{-1}(L_2)$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного пространства на плоскость, заданную уравнением $x + 2y + 2z = 0$, в базисе $(1, 1, -2)$, $(2, 1, -1)$, $(3, 2, -2)$.

10. Пусть U, V — векторные пространства над полем k. Докажите, что $\mathrm{Hom}_k(U, V)$ тоже является пространством над k и найдите его размерность.

11. Пусть даны U, V — векторные пространства над полем k. $\dim U = n$, $\dim V = m$, $U_0 \leq U, \dim U_0 = n_0,$, $V_0 \leq V, \dim V_0 = m_0$. Покажите, что

$$\{F \in \mathrm{Hom}_k(U, V) \mid \ker F \leq U_0\}$$

и

$$\{F \in \mathrm{Hom}_k(U, V) \mid \operatorname{im} F \leq V_0\}$$

подпространства в $\mathrm{Hom}_k(U, V)$ и найдите их размерность.

12. Пусть V, V_1, V_2 — векторные пространства над полем k. Покажите, что если V, V_1, V_2 конечномерны, то из $V \oplus V_1 \simeq V \oplus V_2$ следует $V_1 \simeq V_2$. Так ли это в бесконечномерном случае?

13. Для любых двух эндоморфизмов $F, G \colon V \to V$, где V — векторное пространство, покажите, что $\ker(FG) \subset \ker(G)$, $\mathrm{im}(FG) \subset \mathrm{im}(F)$. Предъявите конечномерный пример, когда оба включения строгие.

14. На какую матрицу и с какой стороны нужно умножить прямоугольную матрицу чтобы a) ее строки с номерами i и j поменялись местами b) ее столбцы с номерами i и j поменялись местами c) к ее i-той строке прибавилась j-тая умноженная на число λ d) то же самое со столбцами.

15. Пусть U_1, U_2 — подпространства в V. Докажите, что $U_1 \cup U_2$ — подпространство тогда и только тогда, когда либо $U_2 \subset U_1$, либо $U_1 \subset U_2$.

16. Введем в пространстве многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ над полем $\mathbb{K}$ два базиса: $\mathbf{x} = \{1, x, \ldots, x^n\}$ и $\mathbf{y} = \{1, x + c, (x + c)^2, \ldots, (x + c)^n\}$ для некоторого ненулевого $c \in \mathbb{K}$. Найдите $[\mathrm{Id}]_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}}$ и $[\mathrm{Id}]_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}}$. Найдите с помощью полученных результатов сумму $\sum\limits_{i=m}^{n} c^i C_n^i C_i^m$.