# Теоретическая информатика - 2

Теория Рамсея

Теория Рамсея:

В достаточно большой структуре, об устройстве которой ничего не предполагается, можно найти подструктуру, устроенную некоторым регулярным образом.

полный хаос невозможен.
Пример: из шести людей всегда можно выбрать либо троих, попарно знакомых, либо троих, попарно незнакомых.

# Теорема Рамсея

Обобщение:

1. пары людей (ребра графа знакомств) $\to$ наборы людей по $k$ ($k$-гиперребра).
2. два цвета (знакомы-незнакомы) $\to$ $d$ цветов.
3. будем искать подмножество заранее выбранной мощности, в котором все гиперребра одного цвета.

# Теорема Рамсея

Обобщение:

1. пары людей (ребра графа знакомств) $\to$ наборы людей по $k$ ($k$-гиперребра).
2. два цвета (знакомы-незнакомы) $\to$ $d$ цветов.
3. будем искать подмножество заранее выбранной мощности, в котором все гиперребра одного цвета.

**Определение.** $N \in \mathbb{N}$ обладает свойством Рамсея $\mathcal{R}(k; m_1, \dots, m_d)$, если для любой покраски всех $k$-элементных подмножеств $M$, $|M| = N$ в $d$ цветов $\{1, \dots, d\}$ найдется номер $i$ и подмножество $A \subseteq M$, $|A| = m_i$, т. ч. все $k$-элементные подмножества множества $A$ покрашены в цвет $i$.

Число Рамсея $R(k; m_1, \dots, m_d)$: наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих свойству $\mathcal{R}(k; m_1, \dots, m_d)$.

**Пример**. Утверждение о шести людях: $R(2; 3, 3) \le 6$ (на самом деле $=$).

## Теорема (Рамсея, 1930)

*Для любых натуральных чисел* $\{k; m_1, \ldots, m_d\}$ *найдется* $N \in \mathbb{N}$, *обладающее свойством* $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$. *Иными словами, число* $R(k; m_1, \ldots, m_d)$ *существует и конечно.*

## Теорема (Рамсея, 1930)

*Для любых натуральных чисел* $\{k; m_1, \dots, m_d\}$ *найдется* $N \in \mathbb{N}$, *обладающее свойством* $\mathcal{R}(k; m_1, \dots, m_d)$. *Иными словами, число* $R(k; m_1, \dots, m_d)$ *существует и конечно.*

*Доказательство.* Отметим, что:

1. $R(1; m_1, \dots, m_d) = \sum_{i=1}^{d} m_i - d + 1 \ \forall m_1, \dots, m_d \in \mathbb{N}$.

## Теорема (Рамсея, 1930)

*Для любых натуральных чисел* $\{k; m_1, \ldots, m_d\}$ *найдется* $N \in \mathbb{N}$, *обладающее свойством* $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$. *Иными словами, число* $R(k; m_1, \ldots, m_d)$ *существует и конечно.*

*Доказательство.* Отметим, что:

1. $R(1; m_1, \ldots, m_d) = \sum_{i=1}^{d} m_i - d + 1 \ \forall m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{N}$.

   Действительно, $k = 1$ — покраска элементов множества.

   Отсутствие одноцветного множества $A$ мощности $m_i$ и цвета $i \Leftrightarrow$ в цвет $i$ покрашено не более чем $m_i - 1$ элементов.

   Это возможно для некоторого $i \Leftrightarrow$ всего элементов $\leq \sum_{i=1}^{d} m_i - d$.

## Теорема (Рамсея, 1930)

*Для любых натуральных чисел* $\{k; m_1, \ldots, m_d\}$ *найдется* $N \in \mathbb{N}$, *обладающее свойством* $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$. *Иными словами, число* $R(k; m_1, \ldots, m_d)$ *существует и конечно.*

*Доказательство.* Отметим, что:

1. $R(1; m_1, \ldots, m_d) = \sum_{i=1}^{d} m_i - d + 1 \ \forall m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{N}$.

   Действительно, $k = 1$ — покраска элементов множества.
   Отсутствие одноцветного множества $A$ мощности $m_i$ и цвета $i \Leftrightarrow$ в цвет $i$ покрашено не более чем $m_i - 1$ элементов.
   Это возможно для некоторого $i \Leftrightarrow$ всего элементов $\leq \sum_{i=1}^{d} m_i - d$.
2. Если $\min(m_1, \ldots, m_d) < k$, то $R(k; m_1, \ldots, m_d) = \min(m_1, \ldots, m_d)$.

## Теорема (Рамсея, 1930)

*Для любых натуральных чисел* $\{k; m_1, \ldots, m_d\}$ *найдется* $N \in \mathbb{N}$, *обладающее свойством* $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$. *Иными словами, число* $R(k; m_1, \ldots, m_d)$ *существует и конечно.*

*Доказательство.* Отметим, что:

1. $R(1; m_1, \ldots, m_d) = \sum_{i=1}^{d} m_i - d + 1 \ \forall m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{N}$.

   Действительно, $k = 1$ — покраска элементов множества.
   Отсутствие одноцветного множества $A$ мощности $m_i$ и цвета $i \Leftrightarrow$ в цвет $i$ покрашено не более чем $m_i - 1$ элементов.
   Это возможно для некоторого $i \Leftrightarrow$ всего элементов $\leq \sum_{i=1}^{d} m_i - d$.
2. Если $\min(m_1, \ldots, m_d) < k$, то $R(k; m_1, \ldots, m_d) = \min(m_1, \ldots, m_d)$.

   Т.к. при $m_i < k$ любое множество мощности $m_i$ нам подойдет в качестве $A$.

Двойная индукция:

- по $k$ (база 1.),
- по $\sum m_i$ при фиксированном $k$ (база 2.).

Предположим, что числа Рамсея конечны при меньших значениях $k$ и при данном $k$ при меньшем значении $\sum m_i$. Докажем, что конечно $R(k; m_1, \ldots, m_d)$.

Двойная индукция:

- по $k$ (база 1.),
- по $\sum m_i$ при фиксированном $k$ (база 2.).

Предположим, что числа Рамсея конечны при меньших значениях $k$ и при данном $k$ при меньшем значении $\sum m_i$. Докажем, что конечно $R(k; m_1, \ldots, m_d)$.

Если $\min(m_1, \ldots, m_d) < k$, то доказано по 2.; пусть $\min(m_1, \ldots, m_d) \geq k$.

Обозначим $Q_1 = R(k; m_1 - 1, \ldots, m_d)$; аналогично $Q_i$ $(i = 2, \ldots, d)$.
$Q_i$ существуют и конечны по индукционному предположению.

Положим $N = 1 + R(k-1; Q_1, \ldots, Q_d)$.
По индукционному предположению по $k$, $N$ конечно.

Докажем, что $R(k; m_1, \ldots, m_d) \leq N$.

Рассмотрим $N$-элементное множество $M$, $k$-элементные подмножества которого покрашены в цвета от 1 до $d$.

Зафиксируем $a \in M$ и покрасим $(k-1)$-элементные подмножества $M \backslash a = M_1$ в $d$ цветов: всякое $A \subset M_1$ мощности $(k-1)$ красим в цвет множества $a \cup A$ в $M$.

Рассмотрим $N$-элементное множество $M$, $k$-элементные подмножества которого покрашены в цвета от 1 до $d$.

Зафиксируем $a \in M$ и покрасим $(k-1)$-элементные подмножества $M \backslash a = M_1$ в $d$ цветов: всякое $A \subset M_1$ мощности $(k-1)$ красим в цвет множества $a \cup A$ в $M$.

Т.к. $N-1$ выбрано со свойством $\mathcal{R}(k-1; Q_1 \dots, Q_d)$, то имеется $B \subseteq M_1$, $|B| = Q_i$, т.ч. все $(k-1)$-элементные подмножества $B$ имеют цвет $i$. Без ограничения общности $i = 1$.

Рассмотрим $N$-элементное множество $M$, $k$-элементные подмножества которого покрашены в цвета от 1 до $d$.

Зафиксируем $a \in M$ и покрасим $(k-1)$-элементные подмножества $M \backslash a = M_1$ в $d$ цветов: всякое $A \subset M_1$ мощности $(k-1)$ красим в цвет множества $a \cup A$ в $M$.

Т.к. $N-1$ выбрано со свойством $\mathcal{R}(k-1; Q_1 \ldots, Q_d)$, то имеется $B \subseteq M_1$, $|B| = Q_i$, т.ч. все $(k-1)$-элементные подмножества $B$ имеют цвет $i$. Без ограничения общности $i = 1$. Тогда в $B$ найдется (по определению $Q_i$):

- либо подмножество мощности $m_i$, все $k$-элементные подмножества которого имеют цвет $i$, для некоторого $i \in \{2, \ldots, d\}$;
- либо подмножество мощности $m_1 - 1$, все $k$-элементные подмножества которого имеют цвет 1.

В первом случае сразу имеем то, что нужно. Во втором случае имеем то, что нужно, после добавления к найденному подмножеству мощности $m_1 - 1$ элемента $a$. ЧТД

Обозначим $R(n, m) = R(2; n, m)$.

## Теорема (Верхняя оценка чисел Рамсея)

$$R(n, m) \leq C_{n+m-2}^{m-1}.$$

Обозначим $R(n, m) = R(2; n, m)$.

## Теорема (Верхняя оценка чисел Рамсея)

$$R(n, m) \leq C_{n+m-2}^{m-1}.$$

*Доказательство.* Из доказательства теоремы Рамсея имеем $R(k; m_1, \ldots, m_d) \leq 1 + R(k-1; Q_1, \ldots, Q_d)$.
При $k = 2$, $d = 2$ получаем

$$R(2; n, m) \leq 1 + R(1; R(2, m-1, n), R(2; m, n-1) =$$

по 1.

$$= 1 + R(2; m-1, n) + R(2; m, n-1) - 2 + 1.$$

Таким образом, имеем

$$R(n, m) \leq R(n-1, m) + R(n, m-1).$$

По 1. $R(1, m) = 1$. По индукции получаем нужную оценку:

$$R(n, m) \leq R(n-1, m) + R(n, m-1) \leq C_{n+m-3}^{m-1} + C_{n+m-3}^{m-2} = C_{n+m-2}^{m-1}.$$

Corollary (Верхняя оценка на диагональные числа Рамсея)

$$R(n,n) \le (1+o(1))\frac{4^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}}$$

*Доказательство:* оценка центрального биномиального коэффициента из лекции про числа Каталана.

Теорема (Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея)

$$R(n, n) \geq 2^{n/2} \text{ при } n \geq 2.$$

## Теорема (Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея)

$$R(n,n) \geq 2^{n/2} \text{ при } n \geq 2.$$

*Доказательство.* Случай $n = 2$ понятен, так что пусть $n \geq 3$.

## Теорема (Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея)

$$R(n,n) \geq 2^{n/2} \text{ при } n \geq 2.$$

*Доказательство.* Случай $n = 2$ понятен, так что пусть $n \geq 3$.

Пусть $N < 2^{n/2}$. Всего графов на $N$ вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$.
Идея: если всего графов, содержащих клику, $< \frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$ (аналогично для антиклики), то существует граф, в котором нет ни того, ни другого, т.е. $N < R(n,n)$.

Всего графов на $N$ вершинах, содержащих клику на данных $n$ вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}$. Всего $n$-клик $C_N^n$.

## Теорема (Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея)

$$R(n,n) \geq 2^{n/2} \textit{ при } n \geq 2.$$

*Доказательство.* Случай $n = 2$ понятен, так что пусть $n \geq 3$.

Пусть $N < 2^{n/2}$. Всего графов на $N$ вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$.

Идея: если всего графов, содержащих клику, $< \frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$ (аналогично для антиклики), то существует граф, в котором нет ни того, ни другого, т.е. $N < R(n,n)$.

Всего графов на $N$ вершинах, содержащих клику на данных $n$ вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}$. Всего $n$-клик $C_N^n$.

Всего графов размера $N$, содержащих $n$-клику,

$$\leq C_N^n 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} < \frac{N^n}{n!} 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}.$$

## Теорема (Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея)

$$R(n,n) \geq 2^{n/2} \textit{ при } n \geq 2.$$

*Доказательство.* Случай $n = 2$ понятен, так что пусть $n \geq 3$.

Пусть $N < 2^{n/2}$. Всего графов на $N$ вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$.

Идея: если всего графов, содержащих клику, $< \frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$ (аналогично для антиклики), то существует граф, в котором нет ни того, ни другого, т.е. $N < R(n,n)$.

Всего графов на $N$ вершинах, содержащих клику на данных $n$ вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}$. Всего $n$-клик $C_N^n$.

Всего графов размера $N$, содержащих $n$-клику,

$$\leq C_N^n 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} < \frac{N^n}{n!} 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}.$$

Последнее выражение меньше $\frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$, если $N < (n!)^{1/n} 2^{\frac{n-1}{2} - \frac{1}{n}}$.

## Теорема (Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея)

$$R(n,n) \geq 2^{n/2} \textit{ при } n \geq 2.$$

*Доказательство.* Случай $n = 2$ понятен, так что пусть $n \geq 3$.

Пусть $N < 2^{n/2}$. Всего графов на $N$ вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$.

Идея: если всего графов, содержащих клику, $< \frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$ (аналогично для антиклики), то существует граф, в котором нет ни того, ни другого, т.е. $N < R(n,n)$.

Всего графов на $N$ вершинах, содержащих клику на данных $n$ вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}$. Всего $n$-клик $C_N^n$.

Всего графов размера $N$, содержащих $n$-клику,

$$\leq C_N^n 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} < \frac{N^n}{n!} 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}.$$

Последнее выражение меньше $\frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$, если $N < (n!)^{1/n} 2^{\frac{n-1}{2} - \frac{1}{n}}$.
Т.к. $n! > 2^{n/2} + 1$ при $n \geq 3$, то можно взять $N = [2^{n/2}]$.

# Нерешенная задача

Для каких $\lambda$ верна оценка $R(n, n) > \lambda^{n+o(n)}$?

Наши верхние и нижние оценки: подходит $\lambda = \sqrt{2}$ и не подходит $\lambda = 4$.

## Нерешенная задача

Для каких $\lambda$ верна оценка $R(n,n) > \lambda^{n+o(n)}$?

Наши верхние и нижние оценки: подходит $\lambda = \sqrt{2}$ и не подходит $\lambda = 4$.

## Пол Эрдеш о числах Рамсея:

Erdös asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6,6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens.

# Следствие в теории чисел

## Теорема (Шур, 1917)

*Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то уравнение $x + y = z$ имеет одноцветное решение.*

*Доказательство.* Рассмотрим полный граф, вершины которого натуральные числа, и покрасим ребро $(i, j)$ в тот цвет, в который покрашено число $(j - i)$. По теореме Рамсея в этом графе найдется одноцветный треугольник, то есть три числа $a < b < c$ такие, что числа $x = b - a$, $y = c - b$, $z = c - a$ одного цвета. Что и требовалось (достаточно даже ограниченного — но зависящего от числа цветов — отрезка натурального ряда).

# Обобщения

То же верно для сумм не только двух, но и любого конечного числа $k$ элементов:

## Теорема (Фолькман-Радо-Сандерс)

*Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то существует цвет $i$ и $k$ чисел $x_1, x_2, \ldots x_k$, такие что $\forall I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, $\sum_{j \in I} x_j$ покрашены в цвет $i$.*

/без доказательства/

# Обобщения

То же верно для сумм не только двух, но и любого конечного числа $k$ элементов:

## Теорема (Фолькман-Радо-Сандерс)

*Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то существует цвет $i$ и $k$ чисел $x_1, x_2, \ldots x_k$, такие что $\forall I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, $\sum_{j \in I} x_j$ покрашены в цвет $i$.*

/без доказательства/

Более того:

## Теорема (Hindman, 1974)

*Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то существует цвет $i$ и бесконечная возрастающая последовательность чисел $x_1 < x_2 < \ldots$, такая что $\forall I \subseteq \mathbb{N}$, $\sum_{j \in I} x_j$ покрашены в цвет $i$.*

/без доказательства/

# Следствие в геометрии

### Теорема (Эрдеш, Секереш, 1935)

*Для любого натурального $k$ найдется такое $N$, что из любых $N$ точек на плоскости общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой) найдется $k$, являющихся вершинами выпуклого $k$-угольника.*

# Следствие в геометрии

### Теорема (Эрдеш, Секереш, 1935)

*Для любого натурального $k$ найдется такое $N$, что из любых $N$ точек на плоскости общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой) найдется $k$, являющихся вершинами выпуклого $k$-угольника.*

*Доказательство теоремы.*

Точки *в выпуклом положении*: вершины выпуклого многоугольника;

иначе — *в невыпуклом положении*.

Два утверждения:

1. Из любых пяти точек общего положения найдутся 4 в выпуклом положении.

Два утверждения:

1. Из любых пяти точек общего положения найдутся 4 в выпуклом положении.

   Д-во: если выпуклая оболочка нашей пятерки точек — это четырехугольник или пятиугольник, то все ясно, если же это треугольник ABC с точками D, E внутри, то прямая DE пересекает какие-то две стороны треугольника ABC, например, AB и AC, и тогда B,C,D,E в выпуклом положении.

Два утверждения:

1. Из любых пяти точек общего положения найдутся 4 в выпуклом положении.

   Д-во: если выпуклая оболочка нашей пятерки точек — это четырехугольник или пятиугольник, то все ясно, если же это треугольник ABC с точками D, E внутри, то прямая DE пересекает какие-то две стороны треугольника ABC, например, AB и AC, и тогда B,C,D,E в выпуклом положении.
2. Если из $k \geq 4$ точек любые 4 лежат в выпуклом положении, то все лежат в выпуклом положении.

Два утверждения:

1. Из любых пяти точек общего положения найдутся 4 в выпуклом положении.

   Д-во: если выпуклая оболочка нашей пятерки точек — это четырехугольник или пятиугольник, то все ясно, если же это треугольник ABC с точками D, E внутри, то прямая DE пересекает какие-то две стороны треугольника ABC, например, AB и AC, и тогда B,C,D,E в выпуклом положении.
2. Если из $k \geq 4$ точек любые 4 лежат в выпуклом положении, то все лежат в выпуклом положении.

   Д-во: в противном случае какая-то точка P попадет внутрь выпуклой оболочки остальных. Если $A$ — вершина выпуклой оболочки, то луч $AP$ повторно пересечет некоторую сторону $BC$ выпуклой оболочки, и тогда $A, B, C, P$ не будут в выпуклом положении.

Покажем, что можно взять $N = R(4; 5, k)$.

В самом деле, крася четверку точек в первый цвет, если она в невыпуклом положении, и во второй — если в выпуклом, мы найдем либо 5 точек, для которых все четверки первого цвета (что невозможно по 1.), либо $k$ точек таких, что все четверки второго цвета, что нам и нужно по 2.).

Теорема доказана.