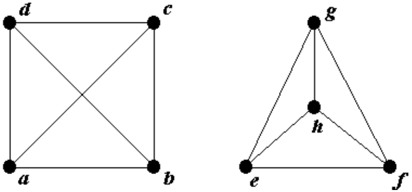
Изоморфные графы

Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ изоморфны, если существует биекция $f : V_1 \to V_2$ такая, что любых двух вершин $u, v \in V_1$ они смежны тогда и только тогда, когда $f(u)$ и $f(v)$ смежны.



$f : a \to e, b \to f, c \to g, d \to h$

Утверждение 2

Два графа изоморфны $\Leftrightarrow$ *вершины одного из них можно перенумеровать так, чтобы матрица смежности этого графа совпала с матрицей смежности второго графа.*

Плоский граф

Граф называется плоским, если его можно изобразить в виде геометрической фигуры на плоскости без пересечения ребер, так что его вершины — это точки плоскости, а ребра — непересекающиеся кривые на ней, соединяющие смежные вершины ("укладка" графа на плоскости).

Более формально, ребра можно изображать ломаными с конечным числом звеньев.

Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его гранями. Неограниченная часть плоскости — тоже грань ("внешняя грань").

Множество граней: F. Плоский граф: $G = (V, E, F)$.

Планарный граф: изоморфный плоскому.

Теорема Фари (докажем позже): Любой планарный граф можно изобразить так, что его ребра — отрезки.

Граф, двойственный данному

$G = (V, E, F)$ плоский связный мультиграф

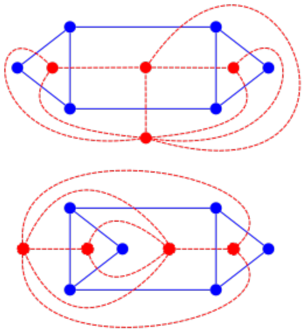
Граф G^*, двойственный G: каждая грань становится вершиной, и каждое ребро исходного графа, служившее границей между двумя гранями, переходит в ребро, соединяющее соответствующие вершины.

Утверждение 3

Для всякого плоского графа G граф G^* тоже плоский, и $(G^*)^* = G$.

Граф, двойственный данному

Двойственность — соответствие между укладками, а не между графами! Для разных укладок одного и того же графа двойственные ему графы могут быть неизоморфными.



Формула Эйлера

Теорема 3 (Формула Эйлера, 1758)

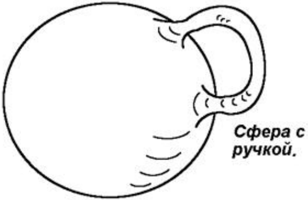
Во всяком связном плоском графе выполняется равенство $|V| - |E| + |F| = 2.$

Следствие 2

Число граней в планарном графе не зависит от его укладки.

Сферы с ручками

Тор = сфера с ручкой: много ручек



Теорема 4 (Обобщение формулы Эйлера)

Для графа, укладываемого на тор с k ручками, выполняется $|V| - |E| + |F| = 2 - 2k$.

В укладке граф связный, каждая грань является областью, т.е. гомеоморфна диску.

Без доказательства и без формальных определений.

Доказательство формулы Эйлера

Доказательство. Индукция по числу граней.

Базис: $|F| = 1$ — это дерево, равенство $|V| - |E| = 1$ выполняется по теореме о деревьях.

Пусть $|F| \geq 2$. Удаляем одно ребро, входящее в цикл; оно разделяло две грани.

Получается граф, в котором $|V|$ вершин, $|E| - 1$ ребер, $|F| - 1$ граней.

Для него, по предположению индукции, выполняется
$|V| - (|E| - 1) + (|F| - 1) = 2$,
откуда следует $|V| - |E| + |F| = 2$.

Границы

Теорема 5

Во всяком планарном графе $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер, где $|V| \geq 3$, выполняется неравенство $|E| \leq 3|V| - 6$.
Если, кроме того, всякий цикл в графе имеет длину не менее чем l, то $|E| \leq \frac{l}{l-2}(|V| - 2)$.

Доказательство. Граф допускает укладку с некоторым множеством граней F.

Утверждение: Длина границы каждой грани не менее чем 3.

Если длина границы 2, то имеем цикл длины 2, т.е., кратное ребро — а по условию их нет. Если длина границы 1, то имеем петлю.

Грани соответствует как минимум три ребра, а ребру соответствует не более двух граней, получаем $3|F| \leq 2|E|$.

Подставим в формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$:

$$3|V| - 3|E| + 2|E| \geq 3|V| - 3|E| + 3|F| = 6$$

$$\Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

Вторая часть: здесь $l|F| \leq 2|E|$, и далее из формулы Эйлера $l|V| - l|E| + 2|E| \geq l|V| - l|E| + l|F| = 2l$, откуда следует требуемое неравенство.

Следствие 3

Во всяком планарном графе $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер есть вершина степени не более чем 5.

Доказательство. Пусть все вершины имеют степень 6 и более. Тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V|.$$

С другой стороны,

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Отсюда вытекает, что $|E| \geq 3|V|$. Противоречие с частью 1 теоремы.