**Теорема 7 (Фари, 1948)**

*Для всякого планарного графа без кратных ребер и без петель существует укладка, в которой все ребра представлены отрезками.*

*Доказательство.* Граф можно предполагать связным.

Рассмотрим произвольную укладку графа, и докажем, что ее можно преобразовать в прямолинейную укладку с сохранением множества граней.

Сперва добавим в граф лишние ребра, чтобы сделать каждую его грань, включая внешнюю, треугольником (триангуляция). После построения укладки эти ребра удалим.

## Лемма о триангуляции

Пусть $G$ — плоский граф без петель, причём в границе каждой грани не менее трёх вершин. Тогда существует триангуляция $T$, остовным подграфом которой является $G$.

*Доказательство.* Пусть $f$ — грань, граница которой не треугольник.

Случай 1: граница связна.

*Внутреннее ребро* грани $f$ = с обеих сторон грань $f$

Раздвоим каждое внутреннее ребро грани $f \Rightarrow$ граница превращается в цикл $Z$, проходящий каждое граничное ребро $f$ ровно один раз и каждое внутреннее ребро ровно два раза ($Z$ может не быть простым, но он реберно-простой). Грань $f$ — внутренняя область цикла $Z$. Триангулировать $f$ = триангулировать внутренность цикла $Z$.

# Лемма о триангуляции

## Вспомогательное утверждение:

Пусть $Z$ цикл с $\geq 3$ вершинами, вершины $Z$ покрашены в $\geq 3$ цветов т.ч. любые две соседние вершины покрашены в разные цвета. Тогда можно триангулировать внутреннюю область $Z$ т.ч. все проведённые диагонали цикла соединяют вершины разных цветов.

*Доказательство.* Индукция по числу вершин.

База для цикла из трёх вершин очевидна, докажем переход.

Пусть $Z = v_1 v_2 \ldots v_k$, $k \geq 4$.

Очевидно, найдётся диагональ $a_i a_{i+2}$, соединяющая две вершины разных цветов.

Эта диагональ разрезает цикл $Z$ на треугольник $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ и меньший цикл $Z'$.

## Лемма о триангуляции

Если в $Z' \geq 3$ цветов, то применим к $Z'$ индукционное предположение и все доказано.

Если в $Z'$ два цвета, то пусть вершина $a_{i+1}$ покрашена в цвет 3, а вершины $Z'$ покрашены в цвета 1 и 2.

Тогда цвета вершин $Z'$ чередуются $\Rightarrow$ число вершин в $Z'$ чётно, то есть $\geq 4$.

$\Rightarrow$ в $Z$ единственная вершина $a_{i+1}$ цвета 3 и хотя бы по две вершины цветов 1 и 2.

Тогда отрежем треугольник диагональю $a_{i+1}a_{i+3}$ и получим меньший цикл $Z''$ с 3 цветами.

Применим к $Z''$ предположение индукции $\Rightarrow$ триангулируем внутренность цикла $Z''$. Утв. доказано.

# Доказательство леммы о триангуляции

Покрасим вершины цикла $Z$ цветами, соответствующими вершинам грани (их $\geq 3$), т.ч. в один цвет были покрашены одинаковые вершины.

Тогда любые две соседние вершины разноцветны.

Вспомогательное утверждение $\Rightarrow$ можем триангулировать внутренность цикла $Z$ так, чтобы проведённые рёбра имели разноцветные концы, то есть, не были петлями, что и требовалось доказать.

# Доказательство леммы о триангуляции

Случай 2: граница $f$ несвязна.

Пусть $x$ и $y$ — две вершины из разных компонент связности. Проведём ребро $xy$ внутри грани $f$.
Это ребро будет внутренним для грани $f$, поэтому длина границы $f$ увеличится на 2. Будем действовать таким образом, пока граница грани не окажется связной.

# Доказательство теоремы Фари

Индукция по количеству вершин.

**Базис**: $|V| = 3$ — представляется треугольником.

**Шаг индукции**. Следствие **??** $\Rightarrow$ есть вершина $v$: $\deg v \le 5$. Докажем, что существует такая вершина, не лежащая на границе внешней грани.

Пусть у всех вершин не на границе внешней грани $\deg \ge 6$.

На границе внешней грани ровно три вершины, степень каждой из них не менее чем 2, и должна быть хотя бы одна вершина степени не менее чем 3, потому что иначе весь граф — треугольник. Тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v \ge 6(|V| - 3) + 3 + 2 + 2 = 6|V| - 11,$$

то есть

$$2|E| \ge 6|V| - 11.$$

Теорема **??** $\Rightarrow 2|E| \le 6|V| - 12$. Противоречие.

Ребра, примыкающие к $v$, принадлежат граням-треугольникам.

Удаляем $v$, на ее месте остается грань. К этой грани применяем триангуляцию.

По предположению индукции, для полученного графа есть прямолинейная укладка с сохранением набора граней. Удаляя диагонали, получаем опять большую грань, граница которой — многоугольник с $\leq 5$ сторонами.

По теореме о художественной галерее всю эту грань может обозревать один сторож. Там, где стоит этот сторож, размещаем вершину $v$; из нее можно провести отрезки во все пять углов. Если сторож стоит в одной из вершин многоугольника, то вершину $v$ можно разместить на небольшом расстоянии от нее.