Обозначим $R(n,m) = R(2;n,m)$.

Теорема (Верхняя оценка чисел Рамсея)

$$R(n,m) \le C_{n+m-2}^{m-1}.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы Рамсея имеем $R(k;m_1,\ldots,m_d) \le 1 + R(k-1;Q_1,\ldots,Q_d)$.
При $k=2$, $d=2$ получаем

$$R(2;n,m) \le 1 + R(1;R(2,m-1,n),R(2;m,n-1) =$$

по 1.

$$= 1 + R(2;m-1,n) + R(2;m,n-1) - 2 + 1.$$

Таким образом, имеем

$$R(n,m) \le R(n-1,m) + R(n,m-1).$$

По 1. $R(1,m) = 1$. По индукции получаем нужную оценку:

$$R(n,m) \le R(n-1,m) + R(n,m-1) \le C_{n+m-3}^{m-1} + C_{n+m-3}^{m-2} = C_{n+m-2}^{m-1}.$$

Corollary (Верхняя оценка на диагональные числа Рамсея)

$$R(n,n) \le (1+o(1))\frac{4^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}}$$

Доказательство: оценка центрального биномиального коэффициента из лекции про числа Каталана.

Теорема (Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея)

$$R(n,n) \geq 2^{n/2} \textit{ при } n \geq 2.$$

Доказательство. Случай $n = 2$ понятен, так что пусть $n \geq 3$.

Пусть $N < 2^{n/2}$. Всего графов на N вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$.

Идея: если всего графов, содержащих клику, $< \frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$ (аналогично для антиклики), то существует граф, в котором нет ни того, ни другого, т.е. $N < R(n,n)$.

Всего графов на N вершинах, содержащих клику на данных n вершинах $2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}$. Всего n-клик C_N^n.

Всего графов размера N, содержащих n-клику,

$$\leq C_N^n 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} < \frac{N^n}{n!} 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}.$$

Последнее выражение меньше $\frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$, если $N < (n!)^{1/n} 2^{\frac{n-1}{2} - \frac{1}{n}}$.
Т.к. $n! > 2^{n/2} + 1$ при $n \geq 3$, то можно взять $N = [2^{n/2}]$.

Нерешенная задача

Для каких λ верна оценка $R(n,n) > \lambda^{n+o(n)}$?

Наши верхние и нижние оценки: подходит $\lambda = \sqrt{2}$ и не подходит $\lambda = 4$.

Следствие в теории чисел

Теорема (Шур, 1917)

Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то уравнение $x + y = z$ имеет одноцветное решение.

Доказательство. Рассмотрим полный граф, вершины которого натуральные числа, и покрасим ребро (i, j) в тот цвет, в который покрашено число $(j - i)$. По теореме Рамсея в этом графе найдется одноцветный треугольник, то есть три числа $a < b < c$ такие, что числа $x = b - a$, $y = c - b$, $z = c - a$ одного цвета. Что и требовалось (достаточно даже ограниченного — но зависящего от числа цветов — отрезка натурального ряда).

Обобщения

То же верно для сумм не только двух, но и любого конечного числа k элементов:

Теорема (Фолькман-Радо-Сандерс)

Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то существует цвет i и k чисел $x_1, x_2, \dots x_k$, такие что $\forall I \subseteq \{1, \dots, k\}$, $\sum_{j \in I} x_j$ покрашены в цвет i.

/без доказательства/

Более того:

Теорема (Hindman, 1974)

Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то существует цвет i и бесконечная возрастающая последовательность чисел $x_1 < x_2 < \dots$, такая что $\forall I \subseteq \mathbb{N}$, $\sum_{j \in I} x_j$ покрашены в цвет i.

/без доказательства/

Следствие в геометрии

Теорема (Эрдеш, Секереш, 1935)

Для любого натурального k найдется такое N, что из любых N точек на плоскости общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой) найдется k, являющихся вершинами выпуклого k-угольника.

Доказательство теоремы.

Точки *в выпуклом положении*: вершины выпуклого многоугольника;

иначе — *в невыпуклом положении*.

Два утверждения:

1. Из любых пяти точек общего положения найдутся 4 в выпуклом положении.

   Д-во: если выпуклая оболочка нашей пятерки точек — это четырехугольник или пятиугольник, то все ясно, если же это треугольник ABC с точками D, E внутри, то прямая DE пересекает какие-то две стороны треугольника ABC, например, AB и AC, и тогда B,C,D,E в выпуклом положении.
2. Если из $k \geq 4$ точек любые 4 лежат в выпуклом положении, то все лежат в выпуклом положении.

   Д-во: в противном случае какая-то точка P попадет внутрь выпуклой оболочки остальных. Если A — вершина выпуклой оболочки, то луч AP повторно пересечет некоторую сторону BC выпуклой оболочки, и тогда A, B, C, P не будут в выпуклом положении.

Покажем, что можно взять $N = R(4; 5, k)$.

В самом деле, крася четверку точек в первый цвет, если она в невыпуклом положении, и во второй — если в выпуклом, мы найдем либо 5 точек, для которых все четверки первого цвета (что невозможно по 1.), либо k точек таких, что все четверки второго цвета, что нам и нужно по 2.).

Теорема доказана.