1 Линейная алгебра

1. Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор на векторном пространстве V. Докажите, что следующие два утверждения эквивалентны:

   - Существуют подпространства V_0, V_1 пространства V такие, что $V = V_0 \oplus V_1$, $f(v) = 0$ для $v \in V_0$ и $f(v) = v$ для $v \in V_1$.
   - $f^2 = f$.

   Линейный функционал на пространстве V над полем F — это линейное отображение из V в F. Через $V^* = Hom_k(V, k)$ обозначается пространство функционалов (сложение и умножение на скаляр поточечные). Это пространство называется сопряжённым к пространству V.

2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис V. Докажите, что функционалы $e^1, \ldots, e^n$, заданные равенствами $e^i(e_j) = \delta_{i,j}$, образуют базис V^*. Выведите отсюда, что $V \cong V^*$, если V конечномерно.

3. Пусть e_i, $i \in U$ — базис V, где $|U| = \infty$. Образуют ли функционалы e^i, $i \in U$, заданные как и в предыдущей задаче, базис V^*? Верно ли, что $V \cong V^*$.

4. Рассмотрим отображение $\phi_V : V \to (V^*)^*$, заданное равенством $\phi_V(x)(f) = f(x)$, является линейным. Докажите, что это отображение всегда инъективно и сюръективно в случае конечномерного V.

5. Пусть $\alpha : U \to V$ — линейное отображение. Докажите, что $\alpha^* : V^* \to U^*$, заданное равенством $\alpha^*(f) = f\alpha$, тоже является линейным отображением таким, что размерности $Im(\alpha)$ и $Im(\alpha)^*$ совпадают. Докажите, что α сюръективно тогда и только тогда, когда α^* инъектиыно и α инъективно тогда и только тогда, когда α^* сюръектиыно. Проверьте равенство $\alpha^{**}\phi_U = \phi_V\alpha$.

6. Пусть $f, g \in V^*$ таковы, что $f(x)g(x) = 0$ для любого $x \in V$. Доказжите, что либо $f = 0$, либо $g = 0$.

7. Для подпространства V_0 пространства V определим $V_0^\perp = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \forall x \in U\}$. Докажите, что $V_0^\perp$ — подпространство V^*. Докажите, что, если V конечномерно, то $dim(V_0) + dim(V_0^\perp) = dim(V)$.

8. Пусть $V_2 \subset V_1$ — два подпространства V. Докажите, что $V_1^\perp \subset V_2^\perp$.

9. Пусть V конечномерно. Докажите, что набор линейных фнкционалов на V порождает V^* тогда и только тогда, когда пересечение их ядер равно 0. Верно ли это для бесконечномерного V?

10. Пусть $\mathbf{u}$ — базис U, $\mathbf{v}$ — базис V (оба пространства конечномерны), $\alpha : U \to V$ — линейное отображение. Как связаны матрицы $[\alpha]_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}$ и $[\alpha^*]_{\mathbf{v}^*}^{\mathbf{u}^*}$, где $\mathbf{v}^*$ и $\mathbf{u}^*$ — базисы пространств V^* и U^*, построенные по базисам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ как в задаче 2.

11. Пусть V — пространство над бесконечным полемб $x_1, \ldots, x_m$ — ненулевые элементы V. Докажите, что существует функционал на V, который не равен 0 на x_i для всех $1 \leq i \leq m$.