# Типы выборок

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — множество из $n$ элементов.

Набор элементов $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$, $r \geq 1$, называется выборкой объема $r$ из $n$ элементов, или $(n, r)$-выборкой.

Выборки бывают:

- упорядоченные и неупорядоченные
  - *упорядоченные* — порядок элементов важен (т.е., две упорядоченные выборки, отличающиеся лишь порядком элементов, считаются различными);
  - *неупорядоченные* — порядок элементов неважен
- с повторениями и без повторений

# Правило суммы и правило произведения

Типичная задача: число возможных выборок с определенными свойствами.

Полезны два правила:

- *Правило суммы*: если объект $A$ может быть выбран $m$ способами, а другой объект $B$ — другими $n$ способами, то выбор "$A$ или $B$" можно осуществить $m + n$ способами.
- *Правило произведения*: если объект $A$ может быть выбран $m$ способами, и после каждого из таких выборов объект $B$ в свою очередь может быть выбран $n$ способами, то выбор пары $(A, B)$ можно осуществить $mn$ способами.

## Выборки $k$ элементов из $n$:

1. Упорядоченная с повторениями:

$$n^k$$

2. Упорядоченная без повторений (размещения):

$$A_n^k = n!/(n-k)! = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

3. Неупорядоченная без повторений (сочетания):

$$C_n^k = n!/k!(n-k)! = A_n^k/k! = n(n-1)\dots(n-k+1)/k!$$

- число перестановок из $n$ элементов (т.е., различных способов упорядочить $n$ элементов):

$$n!$$

  частный случай $A_n^k$ при $k = n$

4. Неупорядоченная с повторениями (сочетания с повторениями): $\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

*Доказательство:* Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Неупорядоченная выборка с повторениями $k$ элементов из $A$ задается вектором чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i$ — число повторений $a_i$, и

$$x_1 + \cdots + x_n = k.$$

Т.е. число таких выборок равно числу решений этого уравнения в целых неотрицательных числах.

Закодируем решение бинарным вектором:

- $x_i$ соответствует блок из $x_i$ единиц,
- между $x_i$ и $x_{i+1}$ разделитель 0.

Т.е. получаем вектор длины $(n + k - 1)$, содержащий ровно $k$ единиц (и ровно $(n - 1)$ нулей).

Число таких векторов — это число сочетаний $C_{n+k-1}^k$. ЧТД.

# Выборки

Как найти число решений уравнения

$$x_1 + \cdots + x_n = k$$

в целых положительных числах $(x_i > 0,\ k \geq n)$?

Положим $y_i = x_i - 1$ и найдем число решений

$$y_1 + \cdots + y_n = k - n$$

в целых неотрицательных числах $(y_i \geq 0)$:
$\hat{C}_n^{k-n} = C_{n+k-n-1}^{k-n} = C_{k-1}^{n-1}$.

# Число сочетаний: свойства

### Теорема

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

*Доказательство.* Преобразованием:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)!((n-k)+k)}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

# Число сочетаний: бином Ньютона

## Теорема

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

*Доказательство.* Член $a^k b^{n-k}$ участвует в разложении $(a+b)^n$ столько раз, сколько есть способов выбрать $a$ в $k$ множителях из $n$ (и, соответственно, $b$ в $n-k$ множителях из $n$) — а это $C_n^k$.

# Факториал

## Лемма (грубые оценки для n!)

$$(n/e)^n < n! < n^n.$$

*Доказательство.* Верхняя оценка очевидна.
Докажем нижнюю по индукции.

- Базис: $(1/e) < 1!$, верно.
- Шаг индукции: Пусть верно для $n$: $(n/e)^n < n!$.
  Покажем для $(n+1)$.
  $(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)(n/e)^n$ (по предположению индукции);
  Надо показать: $(n+1)(n/e)^n > ((n+1)/e)^{n+1}$;
  Это верно тогда и только тогда, когда $en^n > (n+1)^n$, что в свою очередь равносильно $(1+1/n)^n < e$, что верно (курс матанализа).

# формула Стирлинга

**Теорема (формула Стирлинга)**

$$n! = (1 + o(1))\sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

Доказательство будет в курсе матанализа.