Определение

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V — конечное множество вершин, а $E \subseteq V \times V$ — множество ребер.

Граф можно задать матрицей смежности $A = (a_{ij})$ порядка $|V|$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in E, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Граф неориентированный, если $(u, v) \in E$ влечет $(v, u) \in E$. Иначе граф называется ориентированным (орграф). Если не указано, что граф ориентированный, то подразумевается, что он неориентированный.

Мультиграф: допускаются кратные ребра (в матрице смежности соответствуют натуральным числам).

Две вершины v, u называются смежными, если $(u, v) \in E$.

Вершина v и ребро e называются инцидентными, если $e = (v, u)$ для некоторой вершины u.

Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется петлей.

Степень $\deg(v)$ вершины v — число инцидентных ей ребер (петля считается дважды).

Лемма

1. *Во всяком графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер:* $\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$.
2. *В ориентированном графе сумма входящих степеней равна сумме исходящих степеней.*
3. *Всякий конечный граф содержит четное число вершин нечетной степени.*

Доказательство.
(1) Каждое ребро инцидентно двум вершинам, поэтому его удаление уменьшает сумму степеней всех вершин на 2. Удаляя по очереди все ребра (пусть их k), придем к пустому графу, в котором сумма степеней равна 0. Значит, вначале она была равна $2k$.
(2) В ориентированном случае при удалении ребра как сумма входящих, так и сумма исходящих степеней уменьшается на 1, откуда аналогично следует второе утверждение леммы.
(3) Получено, что сумма степеней вершин четна. А для этого необходимо, чтобы нечетных слагаемых было четное число.

Пути и циклы

Путь, соединяющий вершины v_0 и v_n: последовательность вершин и ребер $v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} v_2 \dots v_n$ из v_0 в v_n, так что $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Если все вершины пути различны, путь называется простым; если различны все ребра — реберно-простым.

Если $v_0 = v_n$, путь называется циклом.

Цикл называется простым (соответственно, реберно-простым), если различны вершины $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ (соответственно, различны все ребра).

Замечание: Если между двумя вершинами есть путь, то есть и простой путь. В частности, если в графе есть цикл, то есть и простой цикл.

Связность

Если две вершины неориентированного графа совпадают или соединены некоторым путем, они называются связанными.

В ориентированном случае связанными называются такие вершины a и b, что существуют пути как из a в b, так и из b в a (либо $a = b$).

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение на множестве X — это подмножество $X \times X$.

Отношение эквивалентности $\sim$ на множестве X — это бинарное отношение, для которого выполнены следующие условия:

- Рефлексивность: $a \sim a$ для любого $a \in X$,
- Симметричность: если $a \sim b$, то $b \sim a$,
- Транзитивность: если $a \sim b$ и $b \sim c$ то $a \sim c$.

Классы эквивалентности

Для каждого $x \in X$ определим класс $C_x = \{y \in X | y \sim x\}$.

Предложение

X разбивается на (непересекающиеся) классы эквивалентности.

Доказательство.
Рефлексивность $\Rightarrow x \in C_x$;
Симметричность $\Rightarrow$ если $x \in C_y$, то $y \in C_x$;
Транзитивность $\Rightarrow$ если $y \in C_x$, то $C_y \subseteq C_x$ (действительно, для всякого $z \in C_y$ имеем $z \sim y \sim x$, следовательно $x \sim z$, то есть $z \in C_x$).
Меняя x и y местами, получаем $C_x \subseteq C_y$, то есть $C_x = C_y$.
Наконец, если C_x и C_y пересекаются, $z \in C_x \cap C_y$, то по доказанному выше $C_x = C_z = C_y$.
ЧТД

Компоненты связности

Связанность — отношение эквивалентности на множестве вершин.

Классы эквивалентности называются компонентами связности (в ориентированном случае иногда говорят компоненты сильной связности).

Граф связный, если в нем ровно одна компонента связности.

Орграф, в котором одна компонента связности, называют сильно связным.

Замечание: Компонента связности является связным графом. Компонента связности орграфа является сильно связным орграфом.

Доказательство: для вершин u, v одной компоненты связности (или сильной связности для орграфа) есть путь P из u в v в исходном графе, а доказать надо, что есть путь в компоненте. Это следует из того, что любая промежуточная вершина пути P в исходном графе связана как с u, так и с v, так что все они действительно лежат в компоненте связности.

В неориентированном случае между вершинами из разных компонент связности ребер нет. В ориентированном случае все ребра между вершинами двух компонент A и B направлены в одну сторону (либо все из A в B, либо все из B в A).

Эйлеровы циклы

Эйлеров путь: путь без повторяющихся ребер, проходящий по всем ребрам графа.
Эйлеров путь, возвращающийся в исходную вершину: эйлеров цикл.

Теорема

Связный граф содержит эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ все вершины в нем имеют четную степень.
Связный граф содержит эйлеров путь $\Leftrightarrow$ он содержит две или ни одной вершины нечетной степени.

Доказательство.

$\Rightarrow$ очевидно: эйлеров путь, проходя каждую промежуточную вершину, использует два инцидентных ей ребра; следовательно, степени всех вершин, кроме начала и конца, четны. Аналогично для цикла.

$\Leftarrow$ индукцией по количеству ребер. Докажем для пути.

Рассмотрим путь между двумя вершинами нечетной степени. Удалим его.

Граф, возможно, распадется на компоненты связности, в каждой из которых степени всех вершин будут четными.

Следовательно, в них по индукционному предположению будут существовать эйлеровы циклы.

Будем двигаться в исходном графе по удаленному пути.

Каждый раз, встречая вершину из очередной не обойденной компоненты, будем обходить ее по эйлерову циклу этой компоненты и продолжать движение по пути.

Ориентированные графы

Теорема

Сильно связный ориентированный граф содержит эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ каждая его вершина имеет равные степень захода и степень исхода.

Сильно связный ориентированный граф содержит эйлеров путь $\Leftrightarrow$ все его вершины, кроме, возможно двух, имеют равные степень захода и степень исхода.

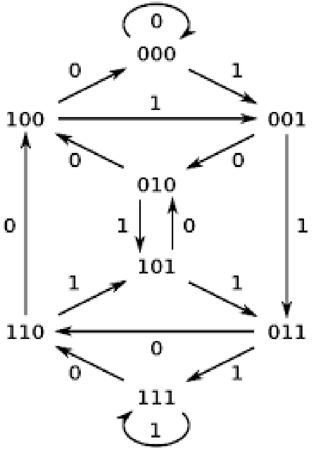
Из двух особых вершин одна имеет степень исхода на единицу большую, чем степень захода, а другая — степень захода на единицу большую, чем степень исхода.

Доказательство: упражнение.

Граф де Брейна (de Bruijn) порядка n для k-символьного алфавита Σ:

- множество вершин $V = \Sigma^n$.
- k исходящих дуг у каждой вершины $w_1 \dots w_n \in \Sigma^n$: для всех $b \in \Sigma$ дуга из $w_1 \dots w_n$ в $w_2 \dots w_n b$.

Для $n = 3$, $k = 2$:



Теорема

В графе де Брейна существует эйлеров цикл. Существует строка длины $k^{n+1}+n$, содержащая все подстроки длины $n+1$.

Доказательство. В каждой вершине wb ($w \in \Sigma^{n-1}$, $b \in \Sigma$) ровно k входящих дуг, идущих из всех вершин вида aw, для $a \in \Sigma$. Поэтому эйлеров цикл есть.

Искомая строка строится так:

- сперва записывается произвольная n-символьная строка w^0,
- затем, начиная с вершины w^0, проходится весь эйлеров цикл
- при этом символы, соответствующие посещаемым дугам, приписываются к строке.

При прохождении дуги b из вершины aw в вершину wb последние $n+1$ символов строки равны awb, и все подстроки так обходятся.
ЧТД