Теоретическая информатика - 1

Теория графов — паросочетания, связность

Паросочетания

Паросочетание (matching) — подмножество ребер $M \subseteq E$, где никакие два ребра не имеют общих концов.
Совершенное паросочетание: участвуют все вершины.

Паросочетания

Паросочетание (matching) — подмножество ребер $M \subseteq E$, где никакие два ребра не имеют общих концов.
Совершенное паросочетание: участвуют все вершины.

Теорема 1 (Теорема Холла, 1935)

Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф. Паросочетание, покрывающее V_1, существует $\Leftrightarrow$ $\forall U \subseteq V_1$, $|U| = k$, у вершин U в совокупности есть не менее k смежных вершин в V_2.

Паросочетания

Паросочетание (matching) — подмножество ребер $M \subseteq E$, где никакие два ребра не имеют общих концов.
Совершенное паросочетание: участвуют все вершины.

Теорема 1 (Теорема Холла, 1935)

Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф. Паросочетание, покрывающее V_1, существует $\Leftrightarrow$ $\forall U \subseteq V_1$, $|U| = k$, у вершин U в совокупности есть не менее k смежных вершин в V_2.

Доказательство. $\Rightarrow$ Очевидно: если есть подмножество $\subseteq V_1$ размера k, у которого менее чем k соседей, то паросочетаний U с V_2 не существует.

Доказательство теоремы Холла

$\Leftarrow$ Индукция по $|V_1|$.

Базис: $|V_1| = 1$, и у единственного подмножества размера 1 есть одна смежная вершина в V_2 — это ребро и дает паросочетание.

Доказательство теоремы Холла

$\Leftarrow$ Индукция по $|V_1|$.

Базис: $|V_1| = 1$, и у единственного подмножества размера 1 есть одна смежная вершина в V_2 — это ребро и дает паросочетание.

Индуктивный переход.
Случай 1: Пусть есть подмножество $U_1 \subset V_1$, $|U_1| = k$, у которого ровно k смежных вершин, и пусть $U_2 \subseteq V_2$ — смежные с ними вершины, где $|U_2| = |U_1|$.

Доказательство теоремы Холла

$\Leftarrow$ Индукция по $|V_1|$.

Базис: $|V_1| = 1$, и у единственного подмножества размера 1 есть одна смежная вершина в V_2 — это ребро и дает паросочетание.

Индуктивный переход.
Случай 1: Пусть есть подмножество $U_1 \subset V_1$, $|U_1| = k$, у которого ровно k смежных вершин, и пусть $U_2 \subseteq V_2$ — смежные с ними вершины, где $|U_2| = |U_1|$.

В подграфе на вершинах из U_1 и U_2 у каждого подмножества U_1 размера m есть не менее m соседок из V_2, и, следовательно, из U_2. Тогда, по предположению индукции, есть паросочетание, покрывающее U_1.

Доказательство теоремы Холла

$\Leftarrow$ Индукция по $|V_1|$.

Базис: $|V_1| = 1$, и у единственного подмножества размера 1 есть одна смежная вершина в V_2 — это ребро и дает паросочетание.

Индуктивный переход.
Случай 1: Пусть есть подмножество $U_1 \subset V_1$, $|U_1| = k$, у которого ровно k смежных вершин, и пусть $U_2 \subseteq V_2$ — смежные с ними вершины, где $|U_2| = |U_1|$.

В подграфе на вершинах из U_1 и U_2 у каждого подмножества U_1 размера m есть не менее m соседок из V_2, и, следовательно, из U_2. Тогда, по предположению индукции, есть паросочетание, покрывающее U_1.

Покажем, что в подграфе на вершинах из $V_1 \setminus U_1$ и $V_2 \setminus U_2$ также выполняется условие теоремы, т.е. у всякого подмножества $V_1 \setminus U_1$ размера l есть не менее чем l смежных вершин в $V_2 \setminus U_2$.

Доказательство теоремы Холла

Пусть $W \subseteq V_1 \backslash U_1$ — любое подмножество. Тогда подмножество $U_1 \cup W$ имеет не менее чем $k + l$ смежных вершин по условию.

При этом у вершин из U_1 всего k смежных вершин, которые также смежны с U_2, — и, следовательно, остальные l смежных вершин смежны с W и лежат вне U_2.

Доказательство теоремы Холла

Пусть $W \subseteq V_1 \backslash U_1$ — любое подмножество. Тогда подмножество $U_1 \cup W$ имеет не менее чем $k + l$ смежных вершин по условию.

При этом у вершин из U_1 всего k смежных вершин, которые также смежны с U_2, — и, следовательно, остальные l смежных вершин смежны с W и лежат вне U_2.

Следовательно, условие выполняется, и, по предположению индукции, есть паросочетание, покрывающее $V_1 \backslash U_1$, которое не пересекается с ранее построенным паросочетанием, покрывающим U_1.

Доказательство теоремы Холла

Случай II. У всякого подмножества $U_1 \subset V_1$ есть не менее чем $|U_1| + 1$ смежных вершин.

Доказательство теоремы Холла

Случай II. У всякого подмножества $U_1 \subset V_1$ есть не менее чем $|U_1| + 1$ смежных вершин.

Пусть $(v_1, v_2) \in E$ — произвольное ребро. Подграф, образованный удалением вершин v_1 и v_2, продолжает удовлетворять условию теоремы, поскольку в нем у каждого подмножества $U_1 \subseteq V_1 \setminus \{v_1\}$ остается не менее чем $(|U_1| + 1) - 1$ смежных вершин, за возможной потерей v_2.

Доказательство теоремы Холла

Случай II. У всякого подмножества $U_1 \subset V_1$ есть не менее чем $|U_1| + 1$ смежных вершин.

Пусть $(v_1, v_2) \in E$ — произвольное ребро. Подграф, образованный удалением вершин v_1 и v_2, продолжает удовлетворять условию теоремы, поскольку в нем у каждого подмножества $U_1 \subseteq V_1 \backslash \{v_1\}$ остается не менее чем $(|U_1| + 1) - 1$ смежных вершин, за возможной потерей v_2.

Следовательно, по предположению индукции, в нем есть паросочетание, покрывающее $V_1 \backslash \{v_1\}$. Возвращая v_1, v_2 и ребро (v_1, v_2), получаем искомое паросочетание.

Паросочетания в графах общего вида

- КС — компонента связности
- нечетная КС — КС с нечетным числом вершин
- Для $U \subseteq V$ обозначим $G \setminus U$ индуцированный подграф на $V \setminus U$.

Паросочетания в графах общего вида

- КС — компонента связности
- нечетная КС — КС с нечетным числом вершин
- Для $U \subseteq V$ обозначим $G \backslash U$ индуцированный подграф на $V \backslash U$.

Теорема 2 (Татт, 1947)

В графе $G = (V, E)$ есть совершенное паросочетание $\Leftrightarrow \forall U \subseteq V$ подграф $G \backslash U$ содержит не более $|U|$ нечетных КС.

В частности, условие для $U = \emptyset$ означает, что $|V|$ четно.

Паросочетания в графах общего вида

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $M \subseteq E$ — совершенное паросочетание, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество вершин.

Тогда в $G \backslash U$ для всякой нечетной КС $C \subseteq V \backslash U$ паросочетание M должно содержать хотя бы одно ребро между C и U, т.е., (u_C, v_C), где $u_C \in U$ и $v_C \in C$.

Так как вершины u_C, выбранные для разных таких компонент C, повторяться не могут (тогда это не было бы паросочетанием), получается, что число вершин в U не может быть меньше, чем число нечетных компонент связности.

Паросочетания в графах общего вида

($\Leftarrow$) Пусть совершенного паросочетания нет.
Пусть $\hat{G} = (V, \hat{E})$ граф, полученный из G добавлением максимального числа ребер, так, чтобы в нем все еще не было совершенного паросочетания, но добавление любого дополнительного ребра приводило бы к появлению такового.

Паросочетания в графах общего вида

($\Leftarrow$) Пусть совершенного паросочетания нет.
Пусть $\hat{G} = (V, \hat{E})$ граф, полученный из G добавлением максимального числа ребер, так, чтобы в нем все еще не было совершенного паросочетания, но добавление любого дополнительного ребра приводило бы к появлению такового.

Тогда достаточно построить $U \subseteq V$, удаление которого разбивало бы $\hat{G}$ так, чтобы в нем оставалось более чем $|U|$ нечетных КС — тогда и в G число нечетных КС будет не меньше (удаление одного ребра либо сохранает нечетную КС, либо разбивает ее на две, одна из которых опять нечетная).

Паросочетания в графах общего вида

($\Leftarrow$) Пусть совершенного паросочетания нет.
Пусть $\hat{G} = (V, \hat{E})$ граф, полученный из G добавлением максимального числа ребер, так, чтобы в нем все еще не было совершенного паросочетания, но добавление любого дополнительного ребра приводило бы к появлению такового.

Тогда достаточно построить $U \subseteq V$, удаление которого разбивало бы $\hat{G}$ так, чтобы в нем оставалось более чем $|U|$ нечетных КС — тогда и в G число нечетных КС будет не меньше (удаление одного ребра либо сохранает нечетную КС, либо разбивает ее на две, одна из которых опять нечетная).

$U := \{v \in V | \mathrm{deg} v = |V| - 1\}$.

Паросочетания в графах общего вида

Утверждение. В $\hat{G} \backslash U$ всякая КС — полный граф.

Паросочетания в графах общего вида

Утверждение. В $\hat{G} \setminus U$ всякая КС — полный граф.

Доказательство утверждения. Пусть есть КС $C \subseteq V \setminus U$, которая не является полным графом.

Паросочетания в графах общего вида

Утверждение. В $\hat{G} \backslash U$ всякая КС — полный граф.

Доказательство утверждения. Пусть есть КС $C \subseteq V \backslash U$, которая не является полным графом.

Т.е. существуют вершины $v_1, v_2, v_3 \in C$, для которых $(v_1, v_2), (v_1, v_3) \in \hat{E}$, $(v_2, v_3) \notin \hat{E}$.

Паросочетания в графах общего вида

Утверждение. В $\hat{G} \setminus U$ всякая КС — полный граф.

Доказательство утверждения. Пусть есть КС $C \subseteq V \setminus U$, которая не является полным графом.

Т.е. существуют вершины $v_1, v_2, v_3 \in C$, для которых $(v_1, v_2), (v_1, v_3) \in \hat{E}$, $(v_2, v_3) \notin \hat{E}$.

Т.к. $v_1 \notin U$, то $\exists v_4 \in V$: $(v_1, v_4) \notin \hat{E}$.

Паросочетания в графах общего вида

Утверждение. В $\hat{G} \backslash U$ всякая КС — полный граф.

Доказательство утверждения. Пусть есть КС $C \subseteq V \backslash U$, которая не является полным графом.

Т.е. существуют вершины $v_1, v_2, v_3 \in C$, для которых $(v_1, v_2), (v_1, v_3) \in \hat{E}$, $(v_2, v_3) \notin \hat{E}$.

Т.к. $v_1 \notin U$, то $\exists v_4 \in V$: $(v_1, v_4) \notin \hat{E}$.

$\hat{G}$ $\Rightarrow$ если добавить в него ребро (v_1, v_4), то будет совершенное паросочетание $M_1 \subseteq \hat{E} \cup \{(v_1, v_4)\}$.
Но раз в $\hat{G}$ совершенного паросочетания не было, то $(v_1, v_4) \in M_1$.

Паросочетания в графах общего вида

Утверждение. В $\hat{G} \setminus U$ всякая КС — полный граф.

Доказательство утверждения. Пусть есть КС $C \subseteq V \setminus U$, которая не является полным графом.

Т.е. существуют вершины $v_1, v_2, v_3 \in C$, для которых $(v_1, v_2), (v_1, v_3) \in \hat{E}$, $(v_2, v_3) \notin \hat{E}$.

Т.к. $v_1 \notin U$, то $\exists v_4 \in V$: $(v_1, v_4) \notin \hat{E}$.

$\hat{G} \Rightarrow$ если добавить в него ребро (v_1, v_4), то будет совершенное паросочетание $M_1 \subseteq \hat{E} \cup \{(v_1, v_4)\}$.
Но раз в $\hat{G}$ совершенного паросочетания не было, то $(v_1, v_4) \in M_1$.

Аналогично при добавлении ребра (v_2, v_3) получится совершенное паросочетание $M_2 \subseteq \hat{E} \cup \{(v_2, v_3)\}$, где $(v_2, v_3) \in M_2$.

Паросочетания в графах общего вида

$G' := (V, M_1 \cup M_2)$ состоит из отдельных ребер из $M_1 \cap M_2$, а также из циклов четной длины, в которых чередуются ребра из M_1 и M_2.

Паросочетания в графах общего вида

$G' := (V, M_1 \cup M_2)$ состоит из отдельных ребер из $M_1 \cap M_2$, а также из циклов четной длины, в которых чередуются ребра из M_1 и M_2.

Ребра (v_1, v_4) и (v_2, v_3) попадут в такие циклы, поскольку каждое из них принадлежит ровно одному из двух паросочетаний.

Паросочетания в графах общего вида

$G' := (V, M_1 \cup M_2)$ состоит из отдельных ребер из $M_1 \cap M_2$, а также из циклов четной длины, в которых чередуются ребра из M_1 и M_2.

Ребра (v_1, v_4) и (v_2, v_3) попадут в такие циклы, поскольку каждое из них принадлежит ровно одному из двух паросочетаний.

Рассмотрим два случая.

- Если эти ребра попадают в один и тот же цикл, то его можно перестроить, задействовав одно из ребер (v_1, v_2) и (v_1, v_4) — получим совершенное паросочетание для $\hat{G}$.

Паросочетания в графах общего вида

$G' := (V, M_1 \cup M_2)$ состоит из отдельных ребер из $M_1 \cap M_2$, а также из циклов четной длины, в которых чередуются ребра из M_1 и M_2.

Ребра (v_1, v_4) и (v_2, v_3) попадут в такие циклы, поскольку каждое из них принадлежит ровно одному из двух паросочетаний.

Рассмотрим два случая.

- Если эти ребра попадают в один и тот же цикл, то его можно перестроить, задействовав одно из ребер (v_1, v_2) и (v_1, v_4) — получим совершенное паросочетание для $\hat{G}$.
- Если же эти ребра попадают в разные циклы, то в каждом цикле можно взять другие ребра, и опять получится совершенное паросочетание для $\hat{G}$.

Утверждение доказано.

Паросочетания в графах общего вида

Итак, удалением $U \subseteq V$ получатся КС — полные графы, из них не более $|U|$ нечетных.

Строим совершенное паросочетание в $\hat{G}$: четные КС сами с собой; нечетные — соединением одной вершины с произвольной вершиной из U, остальные вершины — сами с собой; оставшиеся вершины из U — между собой.

Противоречие.

Несовершенные паросочетания

odd(G) — число нечетных КС в G.
Теорема о размере максимального паросочетания в графе:

Теорема 3 (Формула Бержа, 1958)

Число вершин, непокрытых наибольшим паросочетанием, равно

$$\max_{U \subseteq V}(odd(G \setminus U) - |U|).$$

Эта величина иногда называется дефектом $d(G)$ графа G.

Замечание: $d(G) = 0$ соответствует теореме Татта.

Несовершенные паросочетания

Доказательство.
($\geq$) Аналогично доказательству простой части теоремы Татта:

Несовершенные паросочетания

Доказательство.
($\geq$) Аналогично доказательству простой части теоремы Татта:

Пусть $M \subseteq E$ — паросочетание, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество вершин, для которого достигается максимум $(\mathrm{odd}(G \setminus U) - |U|)$.

Несовершенные паросочетания

Доказательство.
($\geq$) Аналогично доказательству простой части теоремы Татта:

Пусть $M \subseteq E$ — паросочетание, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество вершин, для которого достигается максимум $(\mathrm{odd}(G \backslash U) - |U|)$.

В $G \backslash U$ во всякой нечетной КС $C \subseteq V \backslash U$ есть

- или вершина, не покрытая паросочетанием M,
- или вершина $v_C \in C$, для которой паросочетание M содержит ребро (u_C, v_C), где $u_C \in U$.

Вершины u_C для разных таких КС C не повторяются.

Несовершенные паросочетания

Доказательство.
($\geq$) Аналогично доказательству простой части теоремы Татта:

Пусть $M \subseteq E$ — паросочетание, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество вершин, для которого достигается максимум $(\mathrm{odd}(G \setminus U) - |U|)$.

В $G \setminus U$ во всякой нечетной КС $C \subseteq V \setminus U$ есть

- или вершина, не покрытая паросочетанием M,
- или вершина $v_C \in C$, для которой паросочетание M содержит ребро (u_C, v_C), где $u_C \in U$.

Вершины u_C для разных таких КС C не повторяются.

Отсюда нечетных КС, в которых есть непокрытая вершина, не менее чем $(\mathrm{odd}(G \setminus U) - |U|)$.

($\leq$): Пусть $k = \max_{U \subseteq V}(\mathrm{odd}(G \setminus U) - |U|)$.

($\leq$): Пусть $k = \max_{U \subseteq V}(\mathrm{odd}(G \setminus U) - |U|)$.
В граф добавляем k новых вершин $\{v_1, \ldots, v_k\}$ и соединяем ребрами со всеми вершинами из V. Покажем, что полученный граф G' удовлетворяет условию теоремы Татта.

($\leq$): Пусть $k = \max_{U \subseteq V}(\mathrm{odd}(G \setminus U) - |U|)$.
В граф добавляем k новых вершин $\{v_1, \ldots, v_k\}$ и соединяем ребрами со всеми вершинами из V. Покажем, что полученный граф G' удовлетворяет условию теоремы Татта.

Для всякого $U' \subseteq V \cup \{v_1, \ldots v_k\}$ рассмотрим два случая:

- если не все вершины $\{v_1, \ldots v_k\}$ попали в U', то после удаления U' останется связный граф (т.е., не более 1 нечетной КС).

($\leq$): Пусть $k = \max_{U \subseteq V}(\mathrm{odd}(G \setminus U) - |U|)$.
В граф добавляем k новых вершин $\{v_1, \dots, v_k\}$ и соединяем ребрами со всеми вершинами из V. Покажем, что полученный граф G' удовлетворяет условию теоремы Татта.

Для всякого $U' \subseteq V \cup \{v_1, \dots v_k\}$ рассмотрим два случая:

- если не все вершины $\{v_1, \dots v_k\}$ попали в U', то после удаления U' останется связный граф (т.е., не более 1 нечетной КС).
- если в $\{v_1, \dots v_k\} \subseteq U'$ попали все новые вершины, то по сути из исходного графа G удаляются $|U'| - k$ вершин.

($\leq$): Пусть $k = \max_{U \subseteq V}(\mathrm{odd}(G \setminus U) - |U|)$.
В граф добавляем k новых вершин $\{v_1, \ldots, v_k\}$ и соединяем ребрами со всеми вершинами из V. Покажем, что полученный граф G' удовлетворяет условию теоремы Татта.

Для всякого $U' \subseteq V \cup \{v_1, \ldots v_k\}$ рассмотрим два случая:

- если не все вершины $\{v_1, \ldots v_k\}$ попали в U', то после удаления U' останется связный граф (т.е., не более 1 нечетной КС).
- если в $\{v_1, \ldots v_k\} \subseteq U'$ попали все новые вершины, то по сути из исходного графа G удаляются $|U'| - k$ вершин. Оценим число образующихся нечетных КС:
  $\mathrm{odd}(G' \setminus U') - (|U'| - k) \leq k$;
  $\mathrm{odd}(G' \setminus U') \leq |U'|$.

($\leq$): Пусть $k = \max_{U \subseteq V}(\mathrm{odd}(G \setminus U) - |U|)$.
В граф добавляем k новых вершин $\{v_1, \ldots, v_k\}$ и соединяем ребрами со всеми вершинами из V. Покажем, что полученный граф G' удовлетворяет условию теоремы Татта.

Для всякого $U' \subseteq V \cup \{v_1, \ldots v_k\}$ рассмотрим два случая:

- если не все вершины $\{v_1, \ldots v_k\}$ попали в U', то после удаления U' останется связный граф (т.е., не более 1 нечетной КС).
- если в $\{v_1, \ldots v_k\} \subseteq U'$ попали все новые вершины, то по сути из исходного графа G удаляются $|U'| - k$ вершин. Оценим число образующихся нечетных КС:
  $\mathrm{odd}(G' \setminus U') - (|U'| - k) \leq k$;
  $\mathrm{odd}(G' \setminus U') \leq |U'|$.
  Тогда, по теореме Татта, существует совершенное паросочетание в G'. После удаления из графа дополнительных вершин остается не более чем k вершин, не покрытых этим паросочетанием.

Связность и разделяющие множества

Пусть $V_1, V_2 \subseteq V(G)$. Множество $X \subseteq V(G)$ называется (V_1, V_2)-разделяющим, если в графе $G \backslash X$ нет путей из V_1 в V_2.

Связность и разделяющие множества

Пусть $V_1, V_2 \subseteq V(G)$. Множество $X \subseteq V(G)$ называется (V_1, V_2)-разделяющим, если в графе $G \setminus X$ нет путей из V_1 в V_2.

Теорема 4 (Геринг, 2000)

Пусть $V_1, V_2 \subseteq V(G)$, $k \in \mathbb{N}$ натуральное число. Тогда верно ровно одно из двух условий:

1. *В $V(G)$ найдется подмножество U, $|U| < k$, разделяющее V_1 и V_2;*
2. *В G найдется не менее k простых путей из V_1 в V_2, попарно не имеющих общих вершин.*

Доказательство.
Понятно, что 1) и 2) одновременно выполняться не могут: разделяющее множество обязано содержать хотя бы по одной вершине из каждого из путей из V_1 в V_2.

Доказательство.
Понятно, что 1) и 2) одновременно выполняться не могут: разделяющее множество обязано содержать хотя бы по одной вершине из каждого из путей из V_1 в V_2.

Таким образом, требуется доказать НЕ 1) $\Rightarrow$ 2) — то есть, если любое (V_1, V_2)-разделяющее множество содержит $\geq k$ вершин, то найдутся k путей из V_1 в V_2.

Доказательство.

Понятно, что 1) и 2) одновременно выполняться не могут: разделяющее множество обязано содержать хотя бы по одной вершине из каждого из путей из V_1 в V_2.

Таким образом, требуется доказать НЕ 1) $\Rightarrow$ 2) — то есть, если любое (V_1, V_2)-разделяющее множество содержит $\geq k$ вершин, то найдутся k путей из V_1 в V_2.

Индукция по $|V|$.

База для $|V| = 1$ очевидна.

Индуктивный переход. Будем удалять ребра до тех пор, пока любое (V_1, V_2)-разделяющее множество содержит $\geq k$ вершин. Когда-то это закончится (если только $|V_1 \cap V_2| < k$ — но если $|V_1 \cap V_2| \geq k$, то имеется k одновершинных путей из V_1 в V_2).

Доказательство.
Понятно, что 1) и 2) одновременно выполняться не могут: разделяющее множество обязано содержать хотя бы по одной вершине из каждого из путей из V_1 в V_2.

Таким образом, требуется доказать НЕ 1) $\Rightarrow$ 2) — то есть, если любое (V_1, V_2)-разделяющее множество содержит $\geq k$ вершин, то найдутся k путей из V_1 в V_2.

Индукция по $|V|$.

База для $|V| = 1$ очевидна.

Индуктивный переход. Будем удалять ребра до тех пор, пока любое (V_1, V_2)-разделяющее множество содержит $\geq k$ вершин. Когда-то это закончится (если только $|V_1 \cap V_2| < k$ — но если $|V_1 \cap V_2| \geq k$, то имеется k одновершинных путей из V_1 в V_2).

Итак, при удалении ребра xy образуется (V_1, V_2)-разделяющее множество Z, $|Z| < k$.

Заметим, что множество $Z \cup x$ было разделяющим и до удаления ребра xy, а тогда $|Z| = k - 1$, $|Z \cup x| = k$. Аналогично для $Z \cup y$.

Заметим, что множество $Z \cup x$ было разделяющим и до удаления ребра xy, а тогда $|Z| = k - 1$, $|Z \cup x| = k$. Аналогично для $Z \cup y$.

Два случая:
Случай 1: одно из множеств $Z \cup x$, $Z \cup y$ совпадает с V_1, а второе с V_2. В качестве k путей из V_1 в V_2 можно взять вершины Z и ребро xy.

Заметим, что множество $Z \cup x$ было разделяющим и до удаления ребра xy, а тогда $|Z| = k - 1$, $|Z \cup x| = k$. Аналогично для $Z \cup y$.

Два случая:
Случай 1: одно из множеств $Z \cup x$, $Z \cup y$ совпадает с V_1, а второе с V_2. В качестве k путей из V_1 в V_2 можно взять вершины Z и ребро xy.

Случай 2: одно из множеств $Z \cup x$, $Z \cup y$ отлично и от V_1, и от V_2. Обозначим это множество W, тогда $|W| = k$, $W \neq V_1$, $W \neq V_2$ и W — (V_1, V_2)-разделяющее множество в нашем графе.

Заметим, что множество $Z \cup x$ было разделяющим и до удаления ребра xy, а тогда $|Z| = k - 1$, $|Z \cup x| = k$. Аналогично для $Z \cup y$.

Два случая:
Случай 1: одно из множеств $Z \cup x$, $Z \cup y$ совпадает с V_1, а второе с V_2. В качестве k путей из V_1 в V_2 можно взять вершины Z и ребро xy.

Случай 2: одно из множеств $Z \cup x$, $Z \cup y$ отлично и от V_1, и от V_2. Обозначим это множество W, тогда $|W| = k$, $W \neq V_1$, $W \neq V_2$ и W — (V_1, V_2)-разделяющее множество в нашем графе.

Заметим, что никакой путь из V_1 в W не проходит через вершины (непустого!) множества $V_2 \backslash W$ — иначе бы W не разделяло V_1 и V_2.

Выкинем из нашего графа множество вершин $V_2 \setminus W$ — обозначим новый граф G_1.

Заметим, что любое (V_1, W)-разделяющее множество в G_1 является (V_1, W)-разделяющим и в старом, поскольку то, что мы выкинули, никак не помогает добраться из V_1 в W. Следовательно, оно является и (V_1, V_2)-разделяющим, ибо любой путь из V_1 в V_2 заходит в W.

Поэтому в нем не менее k вершин.

Выкинем из нашего графа множество вершин $V_2 \setminus W$ — обозначим новый граф G_1.

Заметим, что любое (V_1, W)-разделяющее множество в G_1 является (V_1, W)-разделяющим и в старом, поскольку то, что мы выкинули, никак не помогает добраться из V_1 в W. Следовательно, оно является и (V_1, V_2)-разделяющим, ибо любой путь из V_1 в V_2 заходит в W.

Поэтому в нем не менее k вершин.

Но $|V(G_1)| < |V(G)| \Rightarrow$ по предположению индукции имеется k непересекающихся путей из V_1 в W. Аналогично, имеется k непересекающихся путей из W в V_2.

Выкинем из нашего графа множество вершин $V_2 \setminus W$ — обозначим новый граф G_1.

Заметим, что любое (V_1, W)-разделяющее множество в G_1 является (V_1, W)-разделяющим и в старом, поскольку то, что мы выкинули, никак не помогает добраться из V_1 в W. Следовательно, оно является и (V_1, V_2)-разделяющим, ибо любой путь из V_1 в V_2 заходит в W.

Поэтому в нем не менее k вершин.

Но $|V(G_1)| < |V(G)| \Rightarrow$ по предположению индукции имеется k непересекающихся путей из V_1 в W. Аналогично, имеется k непересекающихся путей из W в V_2.

Заметим, что пути из V_1 в W и из W в V_2 не могут пересекаться, кроме как по общему концу в W — это бы означало, что W не разделяет V_1 и V_2.
Склеим два наших набора по k путей $\Rightarrow$ получим k непересекающихся путей из V_1 в V_2.

Теорема Менгера

Теорема 5 (Менгер, 1927)

Пусть вершины a и b связного графа G не соединены ребром. Тогда наименьшее число вершин (a, b)-разделяющего множества равно наибольшему числу непересекающихся по вершинам путей, соединяющих a и b.

В формулировке теоремы подразумевается, что разделяющее множество не содержит a и b, а пути не пересекаются по вершинам, не являющимся начальной или конечной.

Доказательство. Достаточно рассмотреть граф $G - a - b$ и применить теорему Геринга к множествам V_1, V_2, где V_1 — множество соседей a, V_2 — множество соседей b (а k — наименьшая мощность (V_1, V_2)-разделяющего множества).

Теорема Кёнига

Вершинное покрытие графа — это такое множество вершин, что каждое ребро содержит хотя бы одну из них.

Теорема 6 (Кёниг, 1931)

Наибольшее число ребер в паросочетании двудольного графа G равно наименьшему числу вершин в вершинном покрытии графа G.

Доказательство. Применим теорему Геринга к графу G и множествам, состоящим из вершин одной и второй доли. Заметим, что каждый путь можно сократить только до одного ребра, так что наибольшее количество путей есть просто наибольшее паросочетание, а разделяющее множество — это в точности вершинное покрытие.

Теорема Петерсена

k-регулярный граф — степень каждой вершины равна k.

Теорема 7 (Петерсен, 1891)

Во всяком 3-регулярном графе без мостов есть совершенное паросочетание.

Теорема Петерсена

k-регулярный граф — степень каждой вершины равна k.

Теорема 7 (Петерсен, 1891)

Во всяком 3-регулярном графе без мостов есть совершенное паросочетание.

Доказательство. Для всякого множества вершин $U \subseteq V$ рассмотрим подграф $G \setminus U$, и в нем все нечетные КС $C_1, \ldots, C_k$.

Докажем утверждение: каждая из этих КС соединена с U в исходном графе G нечетным числом ребер, и не менее чем тремя.

Теорема Петерсена

k-регулярный граф — степень каждой вершины равна k.

Теорема 7 (Петерсен, 1891)

Во всяком 3-регулярном графе без мостов есть совершенное паросочетание.

Доказательство. Для всякого множества вершин $U \subseteq V$ рассмотрим подграф $G \setminus U$, и в нем все нечетные КС $C_1, \ldots, C_k$.

Докажем утверждение: каждая из этих КС соединена с U в исходном графе G нечетным числом ребер, и не менее чем тремя.

Так как в КС нечетное число вершин, и все они нечетной степени, сумма их степеней нечетна. Из них четное число приходится на внутренние ребра, а оставшееся нечетное число — на внешние. Поскольку каждое ребро входит в цикл, ребро не может быть единственным. Утверждение доказано.

Теорема Петерсена

k-регулярный граф — степень каждой вершины равна k.

Теорема 7 (Петерсен, 1891)

Во всяком 3-регулярном графе без мостов есть совершенное паросочетание.

Доказательство. Для всякого множества вершин $U \subseteq V$ рассмотрим подграф $G \setminus U$, и в нем все нечетные КС $C_1, \ldots, C_k$.

Докажем утверждение: каждая из этих КС соединена с U в исходном графе G нечетным числом ребер, и не менее чем тремя.

Так как в КС нечетное число вершин, и все они нечетной степени, сумма их степеней нечетна. Из них четное число приходится на внутренние ребра, а оставшееся нечетное число — на внешние. Поскольку каждое ребро входит в цикл, ребро не может быть единственным. Утверждение доказано.

Сумма степеней вершин из $|U|$ равна $3|U|$, и потому ребер, соединяющих $|U|$ с нечетными компонентами связности, всего не более чем $3|U|$.
Так как в каждую нечетную КС идет не менее трех ребер, всего этих компонент не более чем $|U|$. По теореме Татта есть совершенное паросочетание. ЧТД