Теорема Кёнига

Вершинное покрытие графа — это такое множество вершин, что каждое ребро содержит хотя бы одну из них.

Теорема 6 (Кёниг, 1931)

Наибольшее число ребер в паросочетании двудольного графа G равно наименьшему числу вершин в вершинном покрытии графа G.

Доказательство. Применим теорему Геринга к графу G и множествам, состоящим из вершин одной и второй доли. Заметим, что каждый путь можно сократить только до одного ребра, так что наибольшее количество путей есть просто наибольшее паросочетание, а разделяющее множество — это в точности вершинное покрытие.

Теорема Петерсена

k-регулярный граф — степень каждой вершины равна k.

Теорема 7 (Петерсен, 1891)

Во всяком 3-регулярном графе без мостов есть совершенное паросочетание.

Доказательство. Для всякого множества вершин $U \subseteq V$ рассмотрим подграф $G \setminus U$, и в нем все нечетные КС $C_1, \ldots, C_k$.

Докажем утверждение: каждая из этих КС соединена с U в исходном графе G нечетным числом ребер, и не менее чем тремя.

Так как в КС нечетное число вершин, и все они нечетной степени, сумма их степеней нечетна. Из них четное число приходится на внутренние ребра, а оставшееся нечетное число — на внешние. Поскольку каждое ребро входит в цикл, ребро не может быть единственным. Утверждение доказано.

Сумма степеней вершин из $|U|$ равна $3|U|$, и потому ребер, соединяющих $|U|$ с нечетными компонентами связности, всего не более чем $3|U|$.

Так как в каждую нечетную КС идет не менее трех ребер, всего этих компонент не более чем $|U|$. По теореме Татта есть совершенное паросочетание. ЧТД