Хроматическое число графа

Хроматическое число $\chi(G)$: наименьшее число цветов, в которые можно правильно покрасить вершины графа G.

Критерий раскрашиваемости в два цвета:

Теорема 1

Граф двудолен если и только если он не содержит нечетных циклов.

Доказательство: упражнение.

Хроматическое число графа: простые оценки

Лемма 1

Если граф H нельзя покрасить в k цветов, то он содержит индуцированный подграф, в котором степени вершин $\geq k$.

Доказательство. Если $\deg v < k$, то граф $H \setminus v$ также нельзя покрасить в k цветов (иначе покрасим его, а потом докрасим v). Удалим вершину v и продолжим процесс, в итоге останется подграф, в котором все степени не меньше k.

Хроматическое число графа: простые оценки

Следствие 1

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — все вершины графа G, и при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ вершина v_k имеет не более чем d соседей среди вершин $v_1 \ldots, v_{k-1}$. Тогда $\chi(G) \leq d + 1$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\chi(G) > d + 1$.

По лемме 1 в G найдется индуцированный подграф, степени всех вершин которого $\geq d + 1$.

Но вершина этого подграфа с наибольшим номером имеет в нем степень не более d. Противоречие.

Следствие 2

Если степени всех вершин графа G не превосходят d, то $\chi(G) \leq d + 1$.

Доказательство. Пронумеруем вершины в произвольном порядке и применим предыдущее следствие.

Теорема Брукса

Теорема 2 (Брукс, 1941)

Пусть в графе G степени всех вершин $\leq d$. Тогда если $d \geq 3$ и ни одна компонента связности G не является полным графом K_{d+1}, то $\chi(G) \leq d$.
При $d = 2$ неравенство $\chi(G) \leq 2$ выполняется, если ни одна компонента связности не является нечетным циклом.

Вспомогательное утверждение

Пусть u, v — две несмежные вершины графа H.
Рассмотрим графы:

H/uv: вершины u, v склеены в одну (кратные ребра после склеивания сразу делаем простыми),

$H + uv$: добавлено ребро uv.

Утверждение: Граф H можно покрасить в k цветов $\Leftrightarrow$ хотя бы один из этих двух графов можно.

Доказательство утверждения: раскраскам H, в которых вершины u и v одного цвета, соответствуют покраски H/uv, а тем, в которых u и v разного цвета, покраски $H + uv$.

Доказательство теоремы Брукса

Доказательство теоремы Брукса.
Для $d = 2$ утверждение следует из того, что четные циклы и пути легко красятся в два цвета, а других компонент связности в нашем графе нет.

Пусть $d \geq 3$. Можно считать граф G связным.

Предположим противное: пусть для графов с меньшим числом вершин, чем у G, утверждение теоремы Брукса выполняется, а для графа G нет.

Лемма 1 $\Rightarrow$ степени всех вершин графа G равны d (иначе возьмем подграф с таким свойством, связность $\Rightarrow$ совпадает с G).

Рассмотрим любую вершину p графа G, у нее найдутся два несмежных соседа u, v (иначе G совпадает с K_{d+1}).

Рассмотрим граф G/uv (z — вершина, получаемая отождествлением u и v).

- его не покрасить в d цветов в силу утверждения
- он связен
- степени всех его вершин $\leq d$, кроме, возможно, z.
- $\deg p < d$.

По Лемме 1 в G/uv найдется индуцированный подграф H, в котором степени всех вершин $\geq d$.

H получается из некоторого подграфа H' графа G стягиванием ребра uv.

H содержит z, т.к. степени оставшихся и так были не больше d, а из-за связности мы должны были удалить какие-то ведущие в них ребра.

$\Rightarrow$ в H есть вершина z и несколько вершин степени d, которые не смежны с вершинами вне H.

Попробуем теперь покрасить граф $G + uv$.

- граф $\tilde{H}$: состоит из u, v и вершин, не входящих в H'
- $G + uv$ состоит из H' и $\tilde{H}$; эти два графа имеют общее ребро uv, а их вершины, отличные от u и v, не смежны.
- $\Rightarrow$ если мы покрасим каждый из них в d цветов, то, склеивая эти раскраски по ребру uv, получим раскраску $G + uv$.
- Покажем, что степени всех вершин графов H', $\tilde{H}$ не превосходят d.
  - для всех вершин, кроме u и v, это очевидно, и проверить следует лишь что, например, вершина u, имеющая степень $d+1$ в графе $G + uv$, соединена не только с вершинами H' или не только с вершинами $\tilde{H}$.
  - Для H': вершина u соединена с вершиной p, лежащей в $\tilde{H}$.
  - Для $\tilde{H}$: если u соединена только с вершинами $\tilde{H}$, то в H имеем $\deg z < d$ (ребрам, выходящим в H из z, будут соответствовать лишь ребра, выходящие в G из v, причем не все — например, не ребро zp).

Доказательство теоремы Брукса

Таким образом, для графов H', $\tilde{H}$ (оба имеют меньше вершин, чем G) выполняется утверждение теоремы Брукса, так что один из них K_{d+1}.

Это не H', т.к. в H' вершины u и v не имеют общих соседей (такой общий сосед имел бы степень меньше d в H и потому попал бы в $\tilde{H}$).

И это не $\tilde{H}$, поскольку в этом случае степень z в H получается не больше двух — противоречие.