1 Рейтинг

1. Пусть мощность поля F — континуум. V — конечномерное пространство над F, $\dim_F V \geq 2$. Может ли для некоторого счетного набора $\{V_i\}$ собственных подпространств V быть верным равенство
$$\bigcup_i V_i = V.$$

2. Для квадратной матрицы a над полем F обозначим через $tr(a) \in F$ сумму её элементов, стоящих на главной диагонали. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Для $p \in M(n, m, F)$ определим $a_p \in M(m, n, F)^*$ равенством
$$a_p(x) = tr(px)$$
для всех $x \in M(m, n, F)$. Докажите, что отображение $\iota\colon M(n, m, F) \to M(m, n, F)^*$, переводящее p в a_p является линейным изоморфизмом.

3. Пусть $a \in GL(n, F)$, u и v — соответственно столбец и строка из n элементов F. Положим $b = a + uv$. Доказать
   - если $1 + va^{-1}u = 0$, то матрица b вырождена;
   - если $1 + va^{-1}u \neq 0$, то матрица b обратима и верно, что
   $$b^{-1} = a^{-1} - (1 + va^{-1}u)^{-1}a^{-1}uva^{-1}.$$

4. Пусть $a \in M(n, n, \mathbb{R})$ такова, что все диагональные элементы матрицы a больше 1, а все внедиагональные равны 1. Покажите, что ранг a равен n. Выведите из этого утверждения следующую теорему.

   Теорема 1.1. *Рассмотрим набор из n различных точек плоскости, не все из которых лежат на одной прямой. Тогда существуют по меньшей мере n различных прямых, каждая из которых проходит по меньшей мере через 2 точки набора.*

   Для доказательства теоремы рассмотрите матрицу, строки которой пронумерованы данными точками, столбцы - прямыми, которые проходят хотя бы через 2 из данных точек, а на пересечении строки и столбца стоит 0 или 1 в зависимости от того, лежит ли соответствующая точка на соответствующей прямой.

5. Пусть p — простое, $q = p^n$ для какого-то натурального n. Пусть w, r, s, t — натуральные числа. Найти число s-мерных подпространств пространства $\mathbb{F}_q^t$, пересекающих данное r-мерное подпространство $U \leq \mathbb{F}_q^t$ по подпространству размерности w.