Вычислимость

В математической формализации данные представляются символьными строками.

Алфавит Σ — конечное множество символов.

Строка над алфавитом Σ: конечная последовательность символов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $n \geq 0$, $a_i \in \Sigma$.

Множество всех строк $\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$.

ε — пустая строка

Машина Тьюринга (МТ)

В состав МТ входит:

- неограниченная в обе стороны лента, разделенная на ячейки,
  - в ячейки записываются символы алфавита Σ (входные данные)
  - выделяется особый символ — пробел, заполняющий все остальные клетки ленты
- головка записи-чтения, способная находиться в одном из конечного множества состояний
  - перемещается влево и вправо по ленте
  - читает и записывает в ячейки символы некоторого конечного алфавита
  - работает согласно правилам перехода (алгоритм)
  - правило перехода: в зависимости от текущего состояния и наблюдаемого в текущей клетке символа записать в эту клетку новый символ, перейти в новое состояние и переместиться на одну клетку влево или вправо.
  - терминальное состояние: переход в него означает конец работы (остановку алгоритма).

Машина Тьюринга (МТ)

Два типа МТ:

- МТ, распознающие множество $A \subseteq \Sigma^*$ (дают ответ «да» или «нет»)
  - Два типа терминальных состояний: принимающее («да») и отвергающее («нет»).
- МТ, вычисляющие функцию $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$
  - Значение функции — содержимое ленты после остановки.

Определение (Тьюринг [1937]).

Машина Тьюринга — это семерка $\mathcal{M} = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, \delta, q_{acc}, q_{rej})$:

- Конечное множество Σ — ***входной алфавит***.
- Другое конечное множество Γ — ***рабочий алфавит***
  - содержит все символы, допустимые на ленте,
  - $\Sigma \subset \Gamma$;
  - Γ содержит особый символ — *пробел*: $\sqcup$.
- Конечное множество Q — ***множество состояний***.
- ***Начальное состояние*** $q_0 \in Q$.
- ***Функция переходов*** (правила переходов) $\delta : (Q \backslash q_{acc}, q_{rej}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, +1\}$ определяет поведение машины на каждом шаге. Если машина находится в состоянии $q \in Q$ и обозревает символ $a \in \Gamma$, то $\delta(q, a)$ — это тройка (q', a', d), где $q' \in Q$ — новое состояние, a' — символ, записываемый в ячейке вместо a, и $d \in \{-1, +1\}$ — направление перемещения головки.
- Если машина переходит в ***принимающее состояние*** $q_{acc} \in Q$ или в ***отвергающее состояние*** $q_{rej} \in Q$, то она останавливается.

Конфигурация МТ

Конфигурация МТ — это строка вида $\alpha\mathbf{q}a\beta$, где $\alpha, \beta \in \Gamma^*$, а $q \in Q$, означающаяся, что:

- машина находится в состоянии q,
- головка обозревает указанный символ a,
- на ленте записаны символы $\alpha a\beta$, окруженные бесконечным числом пробелов в обоих направлениях.

Начальная конфигурация $q_0 w$: состояние q_0, головка смотрит на первый символ входной строки w, окруженной пробелами в обоих направлениях $(\ldots \sqcup\sqcup w \sqcup\sqcup \ldots)$.

Функция переходов

На каждом шаге конфигурация машины $\alpha \mathbf{q} a \beta$ однозначно определяет конфигурацию на следующем шаге по функции переходов.

Обозначим:
если $\alpha \neq \varepsilon$: $\alpha = \alpha_0 x$, $x \in \Gamma$;
если $\beta \neq \varepsilon$: $\beta = y \beta_0$, $y \in \Gamma$;

- Если $\delta(q, a) = (q', a', -1)$ (головка едет налево):
  - $\alpha_0 x \mathbf{q} a \beta \vdash \alpha_0 \mathbf{q'} x a' \beta$
  - Если слева от головки на ленте только пробелы, то в следующей конфигурации дописывается новый пробел: $\mathbf{q} a \beta \vdash \mathbf{q'} \sqcup a' \beta$
- Если $\delta(q, a) = (q', a', +1)$ (головка едет направо):
  - $\alpha \mathbf{q} a y \beta_0 \vdash \alpha a' \mathbf{q'} \beta_0$
  - Если справа от головки на ленте только пробелы, то в следующей конфигурации дописывается новый пробел: $\alpha \mathbf{q} a \vdash \alpha a' \mathbf{q'} \sqcup$

Вычисление МТ

Таким образом, однозначно определяется конечная или бесконечная последовательность конфигураций, называемая *вычислением* машины на строке w.

Вычисление может или остановиться на некотором шаге, или продолжаться бесконечно. В этом случае говорят, что машина *зацикливается*.

Распознаваемые множества

Для распознающих МТ:

Строка *принимается* машиной Тьюринга $\mathcal{M}$, если машина останавливается на ней в принимающем состоянии.

Множество, распознаваемое машиной $\mathcal{M}$ — это множество всех строк, которые она принимает:

$$L(M) = \{w \mid \mathbf{q_0} w \vdash \ldots \vdash \alpha \mathbf{q_{acc}} a \beta \text{ для некоторых } \alpha, \beta, a\}$$

Функция переходов

Функцию переходов $\delta : (Q \backslash q_{acc}, q_{rej}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, +1\}$ можно записать в виде таблицы:

- строки соответствуют состояниям
- столбцы — символам рабочего алфавита
- в каждой клетке написана тройка вида (новое состояние, записываемый символ, направление перемещения головки).

Описание МТ

$\mathcal{M} = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, \delta, q_{acc}, q_{rej})$ — МТ. Ее можно записать в виде символьной строки (как и любую информацию).

Описание МТ $\mathcal{M}$ — это строка $\sigma(M) \in \{0,1\}^*$, определяемая следующим образом.
Пусть

- $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$
- $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_l\}$
- $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}, \ldots, a_m\}$, где $a_m = \sqcup$
- начальное состояние q_1, принимающее состояние $q_{acc} = q_n$, отвергающее состояние $q_{rej} = q_{n-1}$.

Тогда

$$\sigma(\mathcal{M}) = 1^l 0 1^m 0 1^n 0 \left(\prod_{\delta(q_i, a_j) = (q_k, a_r, d)} 1^i 0 1^j 0 1^k 0 1^r 0 1^{d+1} 0 \right)$$

Неразрешимая задача: проблема остановки

Всякой МТ со входным алфавитом $\{0, 1\}$ можно дать на входе ее собственное описание $\sigma(M)$. Определим

$L_1 = \{\sigma(M) | \sigma(M) \in L(M)\}$ — МТ, принимающие свое описание

$L_0 = \{\sigma(M) | \sigma(M) \notin L(M)\}$ — МТ, не принимающие свое описание.

Теорема

Множество L_0 не распознается никакой машиной Тьюринга.

Доказательство

Доказательство. Диагональный метод Кантора.

Предположим, что существует МТ M_0, распознающая множество L_0: $L(M_0) = L_0$.

Рассмотрим строку $\sigma(M_0)$. Имеем эквивалентные условия:

$$\sigma(M_0) \in L(M_0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

(по определению M_0)

$$\sigma(M_0) \in L_0$$

$$\Longleftrightarrow$$

(по определению L_0)

$$\sigma(M_0) \notin L(M_0).$$

Противоречие.

Про множество L_1

Для множества L_1 можно показать, что:

- оно распознается машиной Тьюринга,
- однако эта машина Тьюринга непременно будет зацикливаться на некоторых строках.

  Иными словами, в классе машин Тьюринга, останавливающихся на любой входной строке, множество L_1 также неразрешимо.

Эквивалентность машин Тьюринга

Рассмотрим вариант МТ с лентой, бесконечной вправо и ограниченной слева:

- где $\sharp$ — метка начала ленты,
- начальная конфигурация $\sharp q_0 w$,
- переход по метке начала всегда должен переводить головку направо $(+1)$.

Эквивалентные МТ: распознающие то же самое множество входных строк.

Теорема

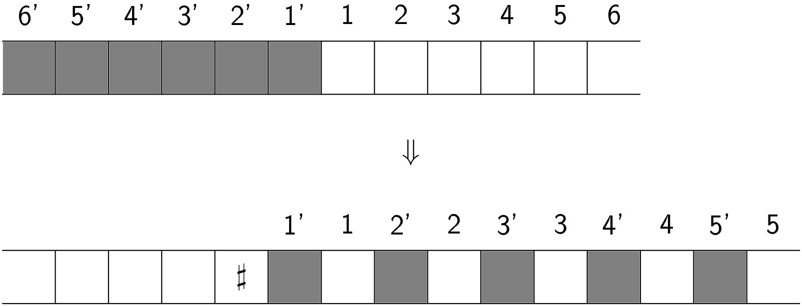
Для любой МТ общего вида (с лентой, бесконечной в обе стороны) существует эквивалентная ей МТ с лентой, бесконечной в одну сторону.

Доказательство

Доказательство конструктивное, то есть мы построим по любой МТ эквивалентную ей с объявленным свойством.

Во-первых, произвольно занумеруем ячейки рабочей ленты МТ и определим новое расположение информации на ленте.

Затем перенумеруем ячейки, причем будем считать, что символ «$\sharp$» не содержится в алфавите МТ:



Доказательство

Изменим МТ:

- каждому состоянию старой МТ соответствует несколько состояний новой (для «серых» клеток и для «белых», двойной сдвиг и т.п.);
- изменим сдвиг головки так, чтобы в одной группе состояний машина работала как в «серой» зоне, а в другой — как в «белой»
- необходимые изменения при смене зоны (достижении символа $\sharp$)

Изменение команд

Команда $\delta(s, x) = (p, y, +1)$ заменяется на:

$\delta(s, x) = (s_1, y, +1)$ (новое состояние s_1 для двойного сдвига)
$\delta(s_1, a) = (p, a, +1)$ (для любого $a \in \Sigma$)
(в «белой» зоне)

$\delta(s', x) = (s'_1, y, -1)$ (правый сдвиг меняется на левый)
$\delta(s'_1, a) = (p', a, -1)$
(в «серой» зоне)

$\delta(s'_1, \sharp) = (s'_2, \sharp, +1)$
$\delta(s'_2, a) = (p, a, +1)$
(переход в «белую» зону)

Начальное состояние: q_0
Принимающее состояние: q_{acc} и q'_{acc} (можем их отождествить) $\square$