Теоретическая информатика - 1

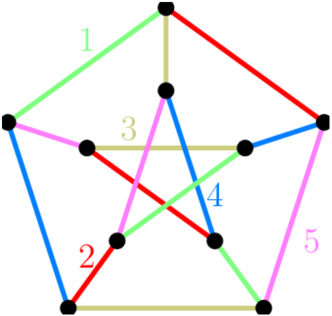
Реберные раскраски, Паросочетания с предпочтениями

Реберные раскраски

C — множество цветов
Реберная раскраска: $c : E \to C$(красим ребра).
Раскраска c правильная, если $c(e) \neq c(e')$ для всяких смежных ребер e, e'.

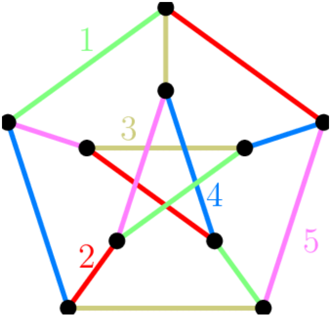
Реберные раскраски

C — множество цветов
Реберная раскраска: $c : E \to C$(красим ребра).
Раскраска c правильная, если $c(e) \neq c(e')$ для всяких смежных ребер e, e'.



Реберные раскраски

C — множество цветов
Реберная раскраска: $c : E \to C$(красим ребра).
Раскраска c правильная, если $c(e) \neq c(e')$ для всяких смежных ребер e, e'.



Иными словами, для каждого цвета множество ребер, раскрашенных в данный цвет — это паросочетание.

Реберные раскраски

Theorem 1 (Кенига о раскраске ребер)

В двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ существует правильная раскраска ребер в D цветов, где D — наибольшая степень вершины.

Доказательство. Индукция по наименьшей степени вершины d, от больших к меньшим.

Доказательство. Индукция по наименьшей степени вершины d, от больших к меньшим.

Базис: $d = D$, т.е. D-регулярный граф.
Покажем, что он удовлетворяет условию теоремы Холла:

Доказательство. Индукция по наименьшей степени вершины d, от больших к меньшим.

Базис: $d = D$, т.е. D-регулярный граф.
Покажем, что он удовлетворяет условию теоремы Холла:

- всякое множество $U_1 \subseteq V_1$ соединено со своими соседками из V_2 ровно $D|U_1|$ ребрами,
- так как у каждой соседки степень тоже D, этих соседок всего не менее чем $\frac{D|U_1|}{D} = |U_1|$.

По теореме Холла есть совершенное паросочетание.

Доказательство. Индукция по наименьшей степени вершины d, от больших к меньшим.

Базис: $d = D$, т.е. D-регулярный граф.
Покажем, что он удовлетворяет условию теоремы Холла:

- всякое множество $U_1 \subseteq V_1$ соединено со своими соседками из V_2 ровно $D|U_1|$ ребрами,
- так как у каждой соседки степень тоже D, этих соседок всего не менее чем $\frac{D|U_1|}{D} = |U_1|$.

По теореме Холла есть совершенное паросочетание.

Удаляем ребра паросочетания, остается $(D-1)$-регулярный двудольный граф, в нем опять есть совершенное паросочетание, и т.д.

Полученные D непересекающихся паросочетаний образуют искомую раскраску ребер G.

Реберные раскраски

Шаг индукции: $d < D$. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — граф.

Реберные раскраски

Шаг индукции: $d < D$. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — граф.

- Строим копию этого графа: $G' = (V_1', V_2', E')$.

Реберные раскраски

Шаг индукции: $d < D$. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — граф.

- Строим копию этого графа: $G' = (V_1', V_2', E')$.
- Эти два графа объединяются в граф
  $G'' = (V_1 \cup V_2', V_2 \cup V_1', E \cup E' \cup E_0)$,
  где E_0 содержит по ребру (v, v') для каждой вершины $v \in V_1 \cup V_2$ степени d.

В G'' наибольшая степень вершины D, а наименьшая $d + 1$.

Реберные раскраски

Шаг индукции: $d < D$. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — граф.

- Строим копию этого графа: $G' = (V_1', V_2', E')$.
- Эти два графа объединяются в граф $G'' = (V_1 \cup V_2', V_2 \cup V_1', E \cup E' \cup E_0)$, где E_0 содержит по ребру (v, v') для каждой вершины $v \in V_1 \cup V_2$ степени d.

В G'' наибольшая степень вершины D, а наименьшая $d + 1$.

По предположению индукции его ребра красятся.

Из его раскраски извлекается раскраска ребер G.

Реберные раскраски

Theorem 2 (Визинг, 1964)

Во всяком графе существует правильная раскраска ребер в $D+1$ цвет, где D — наибольшая степень вершины.

Реберные раскраски

Theorem 2 (Визинг, 1964)

Во всяком графе существует правильная раскраска ребер в $D+1$ цвет, где D — наибольшая степень вершины.

Замечание: теорема дает очень точную оценку, так как D цветов, очевидно, необходимо.

Реберные раскраски

Лемма 1

Пусть $G = (V, E)$ граф, и пусть

- v — *вершина степени не более чем* k,
- *степень каждого из соседей* v *также не превосходит* k
- *причем степень* k *достигается не более чем для одного из соседей* v.

Тогда если ребра графа $G \setminus \{v\}$ *можно покрасить в* k *цветов, то и ребра графа* G *можно покрасить в* k *цветов.*

Доказательство леммы. Индукцией по k:

Базис, $k = 1$: v — или изолированная вершина, или вершина, связанная ребром с другой вершиной степени 1.

Раскраска графа $G' = G \setminus \{v\}$ в один цвет дополняется покраской дополнительного ребра в единственный цвет.

Доказательство леммы. Индукцией по k:

Базис, $k = 1$: v — или изолированная вершина, или вершина, связанная ребром с другой вершиной степени 1.

Раскраска графа $G' = G \setminus \{v\}$ в один цвет дополняется покраской дополнительного ребра в единственный цвет.

Индуктивный переход.
Пусть $m = \mathrm{deg} v$, $u_1, \ldots, u_m$— соседи v в G:
$\mathrm{deg} u_1 \leq k$, а $\mathrm{deg} u_i \leq k - 1 \; \forall i = 2, \ldots m$.

Доказательство леммы. Индукцией по k:

Базис, $k = 1$: v — или изолированная вершина, или вершина, связанная ребром с другой вершиной степени 1.

Раскраска графа $G' = G \setminus \{v\}$ в один цвет дополняется покраской дополнительного ребра в единственный цвет.

Индуктивный переход.
Пусть $m = \mathrm{deg} v$, $u_1, \ldots, u_m$— соседи v в G:
$\mathrm{deg} u_1 \leq k$, а $\mathrm{deg} u_i \leq k - 1 \; \forall i = 2, \ldots m$.

В G': $\mathrm{deg} u_1 \leq k - 1$, а $\mathrm{deg} u_1 \leq k - 2 \; \forall i = 2, \ldots m$.

Доказательство леммы. Индукцией по k:

Базис, $k = 1$: v — или изолированная вершина, или вершина, связанная ребром с другой вершиной степени 1.

Раскраска графа $G' = G \setminus \{v\}$ в один цвет дополняется покраской дополнительного ребра в единственный цвет.

Индуктивный переход.
Пусть $m = \mathrm{deg} v$, $u_1, \ldots, u_m$— соседи v в G:
$\mathrm{deg} u_1 \leq k$, а $\mathrm{deg} u_i \leq k - 1 \; \forall i = 2, \ldots m$.

В G': $\mathrm{deg} u_1 \leq k - 1$, а $\mathrm{deg} u_1 \leq k - 2 \; \forall i = 2, \ldots m$.

Пусть c — раскраска ребер G' в цвета $\{1, \ldots, k\}$.

Доказательство леммы. Индукцией по k:

Базис, $k = 1$: v — или изолированная вершина, или вершина, связанная ребром с другой вершиной степени 1.

Раскраска графа $G' = G \setminus \{v\}$ в один цвет дополняется покраской дополнительного ребра в единственный цвет.

Индуктивный переход.
Пусть $m = \mathrm{deg} v$, $u_1, \dots, u_m$— соседи v в G:
$\mathrm{deg} u_1 \leq k$, а $\mathrm{deg} u_i \leq k - 1\ \forall i = 2, \dots m$.

В G': $\mathrm{deg} u_1 \leq k - 1$, а $\mathrm{deg} u_1 \leq k - 2\ \forall i = 2, \dots m$.

Пусть c — раскраска ребер G' в цвета $\{1, \dots, k\}$.

Можем считать, что $\mathrm{deg} u_1 = k$, а $\mathrm{deg} u_i = k - 1$ $\forall i = 2, \dots m$.
Если какие-то степени меньше, то можно добавить в граф G' дополнительные вершины, соединить их ребрами с u_i и произвольно раскрасить эти ребра в свободные цвета.

Для цвета i:
$X_i \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$:= подмножество всех соседей убранной вершины v, т.ч. никакие инцидентные им ребра не раскрашены в цвет i.

Для цвета i:
$X_i \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$:= подмножество всех соседей убранной вершины v, т.ч. никакие инцидентные им ребра не раскрашены в цвет i.

Тогда

- u_1 степени $k-1$ попадает ровно в одно из $X_1, \ldots, X_k$,
- $u_2, \ldots, u_m$ степени $k-2$ попадают ровно в два из этих множеств.

Для цвета i:
$X_i \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\} :=$ подмножество всех соседей убранной вершины v, т.ч. никакие инцидентные им ребра не раскрашены в цвет i.

Тогда

- u_1 степени $k-1$ попадает ровно в одно из $X_1, \ldots, X_k$,
- $u_2, \ldots, u_m$ степени $k-2$ попадают ровно в два из этих множеств.

Отсюда $\sum_{i=1}^{k} |X_i| = 2\mathrm{deg} v - 1 < 2k$.

Для цвета i:
$X_i \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\} :=$ подмножество всех соседей убранной вершины v, т.ч. никакие инцидентные им ребра не раскрашены в цвет i.

Тогда

- u_1 степени $k-1$ попадает ровно в одно из $X_1, \ldots, X_k$,
- $u_2, \ldots, u_m$ степени $k-2$ попадают ровно в два из этих множеств.

Отсюда $\sum_{i=1}^{k} |X_i| = 2\deg v - 1 < 2k$.

Пусть $\exists i, j$: $|X_i| > |X_j| + 2$ (цвет i встречается реже).

Для цвета i:
$X_i \subseteq \{u_1, \dots, u_m\} :=$ подмножество всех соседей убранной вершины v, т.ч. никакие инцидентные им ребра не раскрашены в цвет i.

Тогда

- u_1 степени $k-1$ попадает ровно в одно из $X_1, \dots, X_k$,
- $u_2, \dots, u_m$ степени $k-2$ попадают ровно в два из этих множеств.

Отсюда $\sum_{i=1}^{k} |X_i| = 2\mathrm{deg} v - 1 < 2k$.

Пусть $\exists i, j$: $|X_i| > |X_j| + 2$ (цвет i встречается реже).

Рассмотрим подграф $G'_{i,j}$ графа G', образованный ребрами цветов i и j.

Для цвета i:
$X_i \subseteq \{u_1, \dots, u_m\} :=$ подмножество всех соседей убранной вершины v, т.ч. никакие инцидентные им ребра не раскрашены в цвет i.

Тогда

- u_1 степени $k-1$ попадает ровно в одно из $X_1, \dots, X_k$,
- $u_2, \dots, u_m$ степени $k-2$ попадают ровно в два из этих множеств.

Отсюда $\sum_{i=1}^{k} |X_i| = 2\mathrm{deg} v - 1 < 2k$.

Пусть $\exists i, j$: $|X_i| > |X_j| + 2$ (цвет i встречается реже).

Рассмотрим подграф $G'_{i,j}$ графа G', образованный ребрами цветов i и j.

Каждая КС в $G'_{i,j}$ — это или простой путь, или простой цикл; в них чередуются i-ребра и j-ребра. Каждая вершина $\notin X_i \cap X_j$, попадет в одну из этих КС.

Тогда $\exists$ КС, в которой больше вершин из X_i, чем из X_j.

Тогда $\exists$ КС, в которой больше вершин из X_i, чем из X_j.

Эта КС — простой путь, начинающийся с j-ребра в X_i и заканчивающийся или другим j-ребром в другой вершине из X_i, или за пределами $X_i \cup X_j$.

Тогда $\exists$ КС, в которой больше вершин из X_i, чем из X_j.

Эта КС — простой путь, начинающийся с j-ребра в X_i и заканчивающийся или другим j-ребром в другой вершине из X_i, или за пределами $X_i \cup X_j$.

Перекрасим путь, поменяв местами цвета i и j.

При этом $|X_i|$ уменьшится на 1 или на 2, а $|X_j|$ на столько же увеличится.

Тогда $\exists$ КС, в которой больше вершин из X_i, чем из X_j.

Эта КС — простой путь, начинающийся с j-ребра в X_i и заканчивающийся или другим j-ребром в другой вершине из X_i, или за пределами $X_i \cup X_j$.

Перекрасим путь, поменяв местами цвета i и j.

При этом $|X_i|$ уменьшится на 1 или на 2, а $|X_j|$ на столько же увеличится.

Применяя такое перекрашивание необходимое число раз к наиболее редкому цвету i и наиболее частому цвету j, получим

$$||X_i| - |X_j|| \leq 2$$

для любых двух цветов.

Тогда $\exists$ КС, в которой больше вершин из X_i, чем из X_j.

Эта КС — простой путь, начинающийся с j-ребра в X_i и заканчивающийся или другим j-ребром в другой вершине из X_i, или за пределами $X_i \cup X_j$.

Перекрасим путь, поменяв местами цвета i и j.

При этом $|X_i|$ уменьшится на 1 или на 2, а $|X_j|$ на столько же увеличится.

Применяя такое перекрашивание необходимое число раз к наиболее редкому цвету i и наиболее частому цвету j, получим

$$||X_i| - |X_j|| \leq 2$$

для любых двух цветов.

$\sum_{i=1}^{k} |X_i|$ нечетно $\Rightarrow \exists i$: $|X_i|$ нечетно.

Тогда $\exists$ КС, в которой больше вершин из X_i, чем из X_j.

Эта КС — простой путь, начинающийся с j-ребра в X_i и заканчивающийся или другим j-ребром в другой вершине из X_i, или за пределами $X_i \cup X_j$.

Перекрасим путь, поменяв местами цвета i и j.

При этом $|X_i|$ уменьшится на 1 или на 2, а $|X_j|$ на столько же увеличится.

Применяя такое перекрашивание необходимое число раз к наиболее редкому цвету i и наиболее частому цвету j, получим

$$||X_i| - |X_j|| \leq 2$$

для любых двух цветов.

$\sum_{i=1}^{k} |X_i|$ нечетно $\Rightarrow \exists i$: $|X_i|$ нечетно. $\Rightarrow \exists i$: $|X_i| = 1$, поскольку в противном случае все слагаемые ≥ 2, и их сумма $\geq 2k$.

Пусть $X_i = \{u_l\}$, то есть ни одно из ребер G', инцидентных u_l, не покрашено в цвет i.

Пусть $X_i = \{u_l\}$, то есть ни одно из ребер G', инцидентных u_l, не покрашено в цвет i.

Строим граф $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$: удаляем из G ребро (u_l, v), а также все ребра, покрашенные в G' в цвет i.

Пусть $X_i = \{u_l\}$, то есть ни одно из ребер G', инцидентных u_l, не покрашено в цвет i.

Строим граф $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$: удаляем из G ребро (u_l, v), а также все ребра, покрашенные в G' в цвет i.

Степень v уменьшилась на единицу, и степени всех соседей v также уменьшились на единицу $\Rightarrow$ по предположению индукции ребра $\tilde{G}$ раскрашиваются в $k - 1$ цветов.

Пусть $X_i = \{u_l\}$, то есть ни одно из ребер G', инцидентных u_l, не покрашено в цвет i.

Строим граф $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$: удаляем из G ребро (u_l, v), а также все ребра, покрашенные в G' в цвет i.

Степень v уменьшилась на единицу, и степени всех соседей v также уменьшились на единицу $\Rightarrow$ по предположению индукции ребра $\tilde{G}$ раскрашиваются в $k - 1$ цветов.

Остается вернуть все удаленные из G ребра и покрасить их в цвет i.

Доказательство теоремы Визинга.
Пусть $G = (V, E)$ граф, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, и пусть $D = \mathrm{max}_i \mathrm{deg} v_i$.

Пусть G_i — подграф G на вершинах $v_1, \ldots, v_i$.

Доказательство теоремы Визинга.
Пусть $G = (V, E)$ граф, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, и пусть $D = \max_i \deg v_i$.

Пусть G_i — подграф G на вершинах $v_1, \ldots, v_i$.

Докажем, что ребра каждого G_i можно раскрасить в $D + 1$ цветов. Индукция по i.

Доказательство теоремы Визинга.
Пусть $G = (V, E)$ граф, где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, и пусть $D = \max_i \deg v_i$.

Пусть G_i — подграф G на вершинах $v_1, \dots, v_i$.

Докажем, что ребра каждого G_i можно раскрасить в $D + 1$ цветов. Индукция по i.

Базис: G_1 — это одинокая вершина, раскрасить можно.

Доказательство теоремы Визинга.
Пусть $G = (V, E)$ граф, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, и пусть $D = \mathrm{max}_i \mathrm{deg} v_i$.

Пусть G_i — подграф G на вершинах $v_1, \ldots, v_i$.

Докажем, что ребра каждого G_i можно раскрасить в $D + 1$ цветов. Индукция по i.

Базис: G_1 — это одинокая вершина, раскрасить можно.

Шаг индукции: если G_{i-1} можно раскрасить, то, по лемме для графа G_i, вершины $v = v_i$ и числа $k = D + 1$, граф G_i тоже можно раскрасить в $D + 1$ цветов.

Реберные раскраски

Теорема Визинга $\Rightarrow$ два класса графов:

- Класс 1: ребра красится в D цветов,
- Класс 2: в $D+1$ цвет.

Реберные раскраски

Теорема Визинга $\Rightarrow$ два класса графов:

- Класс 1: ребра красится в D цветов,
  - двудольные графы
  - почти все случайные графы
  - планарные графы при $D \geq 7$
- Класс 2: в $D + 1$ цвет.
  - некоторые планарные графы при $D \leq 5$

Реберные раскраски

Теорема Визинга $\Rightarrow$ два класса графов:

- Класс 1: ребра красится в D цветов,
  - двудольные графы
  - почти все случайные графы
  - планарные графы при $D \geq 7$
- Класс 2: в $D+1$ цвет.
  - некоторые планарные графы при $D \leq 5$

Открытые вопросы

Планарные графы с $D = 6$?

Реберные раскраски

Теорема Визинга $\Rightarrow$ два класса графов:

- Класс 1: ребра красится в D цветов,
  - двудольные графы
  - почти все случайные графы
  - планарные графы при $D \geq 7$
- Класс 2: в $D + 1$ цвет.
  - некоторые планарные графы при $D \leq 5$

Открытые вопросы

Планарные графы с $D = 6$?

Задача проверки, имеет ли произвольный граф класс 1, является NP-полной задачей (не известно полиномиального по времени алгоритма) — снова 1000000 от института Клэя за решение.

Паросочетания с предпочтениями

У каждой вершины можно задать порядок на множестве инцидентных ей ребер: $<_v \subseteq E \times E$ (предпочтения).

Паросочетание M называется устойчивым, если не существует $(v_1, v_2) \in E \backslash M$, которое удовлетворяет следующим условиям:

- ребро (v_1, v_2) у v_1 стоит выше в списке предпочтений, чем его текущая пара $(v_1, v_2') \in M$ (либо v_1 не состоит в паре);
- симметричное условие для v_2: ребро (v_1, v_2) у него стоит выше в списке предпочтений, чем его текущая пара $(v_1', v_2) \in M$ (либо v_2 не состоит в паре)

Варианты:

- n мужчин, n женщин, полный порядок ($K_{n,n}$)
- ориентированные ребра

Паросочетания с предпочтениями

У каждой вершины можно задать порядок на множестве инцидентных ей ребер: $<_v \subseteq E \times E$ (предпочтения).

Паросочетание M называется устойчивым, если не существует $(v_1, v_2) \in E \setminus M$, которое удовлетворяет следующим условиям:

- ребро (v_1, v_2) у v_1 стоит выше в списке предпочтений, чем его текущая пара $(v_1, v_2') \in M$ (либо v_1 не состоит в паре);
- симметричное условие для v_2: ребро (v_1, v_2) у него стоит выше в списке предпочтений, чем его текущая пара $(v_1', v_2) \in M$ (либо v_2 не состоит в паре)

Варианты:

- n мужчин, n женщин, полный порядок ($K_{n,n}$)
- ориентированные ребра

Теорема 1 (об устойчивых браках, Гейл и Шепли, 1962)

Во всяком двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$, для всяких предпочтений $\{\leq_v\}_{v \in V_1 \cup V_2}$ существует устойчивое паросочетание.

Доказательство. Алгоритм, строящий такое паросочетание (V_1 — юноши, V_2 — невесты).

Доказательство. Алгоритм, строящий такое паросочетание (V_1 — юноши, V_2 — невесты).

Описание алгоритма:

Первый шаг:

- каждый юноша делает предложение первой девушке в своем списке
- каждая девушка заключает помолвку с наиболее предпочтительным женихом из сделавших ей предложение.

Доказательство. Алгоритм, строящий такое паросочетание (V_1 — юноши, V_2 — невесты).

Описание алгоритма:

Первый шаг:

- каждый юноша делает предложение первой девушке в своем списке
- каждая девушка заключает помолвку с наиболее предпочтительным женихом из сделавших ей предложение.

Каждый следующий шаг:

- каждый не помолвленный юноша делает предложение следующей девушке в своем списке — неважно, помолвлена она или нет.

Доказательство. Алгоритм, строящий такое паросочетание (V_1 — юноши, V_2 — невесты).

Описание алгоритма:

Первый шаг:

- каждый юноша делает предложение первой девушке в своем списке
- каждая девушка заключает помолвку с наиболее предпочтительным женихом из сделавших ей предложение.

Каждый следующий шаг:

- каждый не помолвленный юноша делает предложение следующей девушке в своем списке — неважно, помолвлена она или нет.
- Если девушка получает предложение от более предпочтительного жениха, чем ее текущий жених, то она расторгает текущую помолвку и заключает помолвку с наиболее предпочтительным женихом из тех, кто сделал ей предложение.

Постепенно заключаются помолвки, все более предпочтительные для невест, и все менее предпочтительные для женихов. Ни один юноша не делает предложения одной и той же девушке дважды.

Постепенно заключаются помолвки, все более предпочтительные для невест, и все менее предпочтительные для женихов. Ни один юноша не делает предложения одной и той же девушке дважды.

Корректность алгоритма:

Конечность алгоритма: Алгоритм завершается, поскольку на каждом шаге хотя бы один юноша делает предложение какой-то девушке, а так как каждый юноша последовательно движется по своему списку предпочтений, общее число шагов ограничено сверху суммой длин этих списков.

Устойчивость полученного паросочетания M:
Для всякой несложившейся пары $(v_1, v_2) \in E \backslash M$ рассмотрим следующие случаи.

Устойчивость полученного паросочетания M:
Для всякой несложившейся пары $(v_1, v_2) \in E \backslash M$ рассмотрим следующие случаи.

- v_1 никогда не делал предложения $v_2 \Rightarrow$ к моменту завершения алгоритма у него была более предпочтительная невеста, чем v_2, и, женившись на ней, менять ее на v_2 он не захочет. Т.е. существует v_2', т.ч. $(v_1, v_2') \in M$, и это ребро выше в предпочтении v_1, чем (v_1, v_2).

Устойчивость полученного паросочетания M:
Для всякой несложившейся пары $(v_1, v_2) \in E \backslash M$ рассмотрим следующие случаи.

- v_1 никогда не делал предложения $v_2 \Rightarrow$ к моменту завершения алгоритма у него была более предпочтительная невеста, чем v_2, и, женившись на ней, менять ее на v_2 он не захочет. Т.е. существует v_2', т.ч. $(v_1, v_2') \in M$, и это ребро выше в предпочтении v_1, чем (v_1, v_2).
- v_1 делал предложение v_2, но получил отказ $\Rightarrow$ к этому моменту у v_2 был более предпочтительный жених, которого она могла сменить только на еще более предпочтительного. Т.е. $\exists v_1'$, т.ч. $(v_1', v_2) \in M$, и это ребро выше в предпочтении v_2, чем (v_1, v_2).

Устойчивость полученного паросочетания M:
Для всякой несложившейся пары $(v_1, v_2) \in E \setminus M$ рассмотрим следующие случаи.

- v_1 никогда не делал предложения $v_2 \Rightarrow$ к моменту завершения алгоритма у него была более предпочтительная невеста, чем v_2, и, женившись на ней, менять ее на v_2 он не захочет. Т.е. существует v_2', т.ч. $(v_1, v_2') \in M$, и это ребро выше в предпочтении v_1, чем (v_1, v_2).
- v_1 делал предложение v_2, но получил отказ $\Rightarrow$ к этому моменту у v_2 был более предпочтительный жених, которого она могла сменить только на еще более предпочтительного. Т.е. $\exists v_1'$, т.ч. $(v_1', v_2) \in M$, и это ребро выше в предпочтении v_2, чем (v_1, v_2).
- v_1 делал предложение v_2, получил согласие, а потом был брошен ею $\Rightarrow$ у v_2 есть более предпочтительный жених. Т.е. $\exists v_1'$, т.ч. $(v_1', v_2) \in M$, и это ребро выше в предпочтении v_2, чем (v_1, v_2).

Свойства полученного устойчивого паросочетания

- для $K_{n,n}$ образуется n пар

Свойства полученного устойчивого паросочетания

- для $K_{n,n}$ образуется n пар
- оптимально для мужчин (т.е. каждый мужчина женат на наиболее предпочтительной им женщине среди всех устойчивых паросочетаний)

Свойства полученного устойчивого паросочетания

- для $K_{n,n}$ образуется n пар
- оптимально для мужчин (т.е. каждый мужчина женат на наиболее предпочтительной им женщине среди всех устойчивых паросочетаний)
- самое худшее для женщин (т.е. каждая женщина замужем за наименее предпочтительным мужчиной среди всех устойчивых паросочетаний)

Доказательство оптимальности для мужчин

Возможная пара (m, w): $\exists$ стабильное паросочетание с такой парой.

Доказательство оптимальности для мужчин

Возможная пара (m, w): $\exists$ стабильное паросочетание с такой парой.

Наилучший возможный партнер $w = best(m)$ *для* m: наиболее предпочтительный среди возможных пар (m, w).

Доказательство оптимальности для мужчин

Возможная пара (m, w): $\exists$ стабильное паросочетание с такой парой.

Наилучший возможный партнер $w = best(m)$ *для* m: наиболее предпочтительный среди возможных пар (m, w).

Предположим, что в паросочетании GS, выданным алгоритмом, есть мужчина, который не с наилучшей возможной партнершей. Значит, его наилучшая возможная партнерша ему отказала.

Рассмотрим первое событие X, когда мужчине отказала наилучшая возможная партнерша во время работы GS: $w = \text{best}(m)$ отказала m, чтобы быть (или продолжать быть) с мужчиной m', более предпочтительным, чем m.

Так как (m, w) возможная пара, то $\exists$ стабильное паросочетание S' с такой парой.

Обозначим партнершу m' в S' за $w' \neq w$. Пара (m', w') — возможная.

Обозначим партнершу m' в S' за $w' \neq w$. Пара (m', w') — возможная.

Алгоритм GS $\Rightarrow$ во время события X

- m' еще не был отвергнут $\mathrm{best}(m')$ $\Rightarrow$ и никем из возможных партнерш, в том числе w'

Обозначим партнершу m' в S' за $w' \neq w$. Пара (m', w') — возможная.

Алгоритм GS $\Rightarrow$ во время события X

- m' еще не был отвергнут $\mathrm{best}(m')$ $\Rightarrow$ и никем из возможных партнерш, в том числе w'
- m' состовит в паре с w, т.е. мужчине m' отказали все женщины в его списке предпочтений выше w

$\Rightarrow$ w' после w в списке m'.

Обозначим партнершу m' в S' за $w' \neq w$. Пара (m', w') — возможная.

Алгоритм GS $\Rightarrow$ во время события X

- m' еще не был отвергнут $\mathrm{best}(m')$ $\Rightarrow$ и никем из возможных партнерш, в том числе w'
- m' состовит в паре с w, т.е. мужчине m' отказали все женщины в его списке предпочтений выше w

$\Rightarrow$ w' после w в списке m'.

Противоречие со стабильностью S': $(m, w), (m', w') \in S'$, но оба w и m' предпочитают друг друга относительно их пар в S'. Оптимальность для мужчин доказана.

Обозначим партнершу m' в S' за $w' \neq w$. Пара (m', w') — возможная.

Алгоритм GS $\Rightarrow$ во время события X

- m' еще не был отвергнут $\text{best}(m') \Rightarrow$ и никем из возможных партнерш, в том числе w'
- m' состовит в паре с w, т.е. мужчине m' отказали все женщины в его списке предпочтений выше w

$\Rightarrow$ w' после w в списке m'.

Противоречие со стабильностью S': $(m, w), (m', w') \in S'$, но оба w и m' предпочитают друг друга относительно их пар в S'. Оптимальность для мужчин доказана.

Доказательство "наихудшести" для женщин: упражнение (аналогично с использованием оптимальности GS для мужчин) Случай $K_{n,n}$: упражнение.