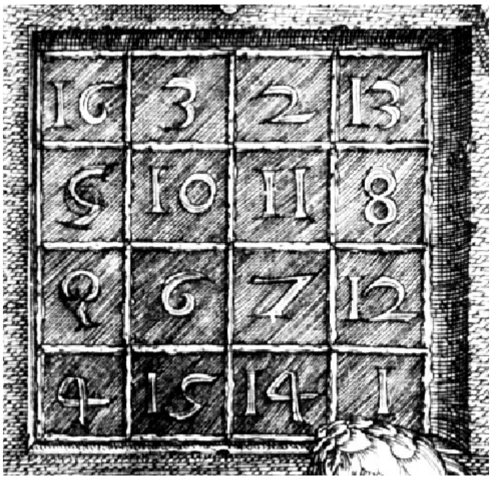
小学期数学建模课程

Dürer 魔方

数学与统计学院
李换琴

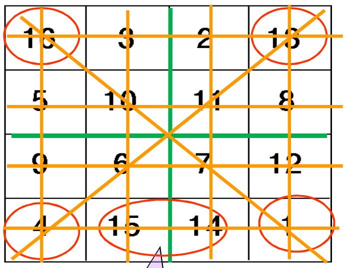
Dürer 魔方



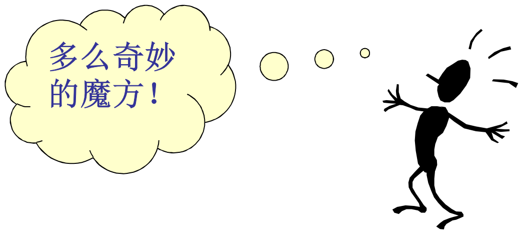
德国著名的艺术家Albrecht Dürer(1471-1521)于1514年曾铸造了一枚名为“Melen cotia I”的铜币。这枚铜币的画面上充满了数学符号、数学数字和几何图形。左图就是铜币右上角的图案。

特点： **Dürer魔方**

Albrecht Dürer's Magic Square



4行4列：每一行之和为34，每一列之和为34，对角线（或次对角线）之和是34，每个小方块中的数字之和是34，四个角上的数字加起来也是34.



版画创造时间：1514年

报纸：请根据格子中已有数字，构造一个Dürer魔方.

6	55	–36	2
4	-38	14	47
9	3	48	–33
8	7	1	11

如何构造Dürer魔方？

是不是给定其中任意7个数就可以构造一个Dürer魔方？

能否随心所欲构造Dürer魔方？

定义：如果4×4数字方，它的每一行、每一列、每一对角线、田字小方块及四个顶角上的数字之和都为一确定的数，则称这个数字方为 Durer 魔方。

例如

1	10	17	20
11	26	5	6
16	3	14	15
20	09	12	7

是一个和为48的Durer 魔方.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

和为4的Durer 魔方.

Dürer魔方有多少个？

如何构造所有的Dürer魔方？

定义：如果4×4数字方，它的每一行、每一列、每一对角线及每个小方块上的数字之和都为一确定的实数，则称这个数字方为 Durer 魔方。

$B=$

1	10	17	20
11	26	5	6
16	3	14	15
20	09	12	7

Albrecht Dürer's Magic Square

$A=$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

设A,B是任意两个Dürer 魔方，定义：$A+B$，kA (k为实数）

$A+B$ 是Dürer魔方吗？√

对任意实数k，kA 是Dürer魔方吗？ √

$\boxed{\text{如何构造所有的Dürer魔方？}}$

任意两个Dürer魔方的任意的线性组合仍是Dürer魔方。

Dürer魔方 ⟷ 4阶方阵

记 $D=\{A=(a_{ij})\in R^{4\times 4}|A$为Dürer魔方$\}$

则D是线性空间$R^{4\times4}$的子空间.

Albrecht Dürer's Magic Square

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

如何构造所有的Dürer魔方?

求出D的一组基,基的任意线性组合就构成了所有Dürer魔方.

设A,B是任意两个Dürer 魔方，

$A+B$ 是Dürer魔方吗？√

对任意实数k，kA是Dürer魔方吗？ √

回顾线性空间的相关概念

1、线性空间的判定

2要素：集合V， 数域F；2种运算：加法，数乘

要求：线性运算封闭且满足8条运算规则

2、线性子空间的判定

设W是线性空间V 的非空子集，则W为V的子空间的充要条件是W对V中的线性运算封闭.

3 、线性空间的基、维数，向量的坐标

V中一组线性无关的向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,$\forall\alpha\in V$,有

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \qquad (x_i\in F, i=1,2,\cdots,n)$$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$的一个基,$V$的维数$\dim(V)=n$.

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标.

例如

(1) $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$是线性空间$\mathbf{R}^3$的一个基.

(2) $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

是线性空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$的一个基.

(3)齐次线性方程组$\mathbf{A}x=0$的全部解向量构成$\mathbf{R}^n$的子空间.

$$S=\{x\mid Ax=0\}=span\{\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}\},$$

其中$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是$Ax=0$的基础解系.

基：$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$；　　$\dim(S)=n-r(A)$

如何求Dürer魔方空间的基？

2020/6/28　　数学建模

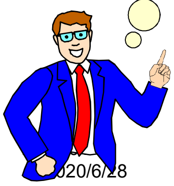
如何求Dürer魔方空间的基？

思想：找一组线性无关的Dürer魔方，且任一Dürer魔方可由这组魔方线性表示。

类似于n维空间的基本单位向量组，利用0和1来构造和为1的最简单的Durer魔方。

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

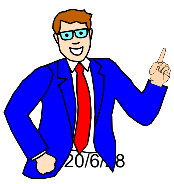
$$Q_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$



得到8个Dürer魔方

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad Q_3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$Q_5=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_6=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_7=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad Q_8=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$



1在第一行中有4种取法，第二行中的1有两种取法。当第二行的1也取定后，第三、四行的1就完全定位了，故共有8个不同的最简方阵，称为基本魔方$Q_1,\cdots,Q_8$

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad Q_3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad Q_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$Q_5=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_6=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_7=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad Q_8=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\because Q_1+Q_4+Q_5+Q_8-Q_2-Q_3-Q_6-Q_7=0$ $Q_1,\ldots,Q_8$线性相关

由 $r_1Q_1+r_2Q_2+r_3Q_3+r_4Q_4+r_5Q_5+r_6Q_6+r_7Q_7=0 \quad \Rightarrow r_i=0$

$\therefore Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$ 线性无关。

问题：能否说 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$ 就是一组基？

$Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$是基 $\Longleftrightarrow$ (1)$Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$线性无关
(2)任一Durer魔方可由$Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$线性表示

任一Durer魔方可否由$Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$线性表示？

$\forall r_1,\cdots,r_7,$

$$r_1Q_1+\cdots+r_7Q_7=\begin{pmatrix}r_1+r_2&r_6&r_5+r_7&r_3+r_4\\r_3+r_5&r_4+r_7&r_1+r_6&r_2\\r_4+r_6&r_2+r_5&r_3&r_1+r_7\\r_7&r_1+r_3&r_2+r_4&r_5+r_6\end{pmatrix}$$

是一个和为$r_1+\cdots+r_7$的Durer魔方.

设A是任一Durer魔方,其和为S, 取$r_1,\cdots,r_7$,使$r_1+\cdots+r_7=S$

则A可以表示为$r_1Q_1+\cdots+r_7Q_7$.

$\Longrightarrow$ 任一Durer魔方可由$Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$ 线性表示.

即$Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$是durer魔方空间的一个基.

利用基$Q_1,\ldots,Q_7$构造Dürer魔方

任取一组实数$r_1, r_2, \cdots, r_7$,

$$D = r_1Q_1 + r_2Q_2 + r_3Q_3 + r_4Q_4 + r_5Q_5 + r_6Q_6 + r_7Q_7$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline r_1+r_2 & r_6 & r_5+r_7 & r_3+r_4 \\ \hline r_3+r_5 & r_4+r_7 & r_1+r_6 & r_2 \\ \hline r_4+r_6 & r_2+r_5 & r_3 & r_1+r_7 \\ \hline r_7 & r_1+r_3 & r_2+r_4 & r_5+r_6 \\ \hline \end{array}$$ 就是一个durer魔方。

至此，我们可以随心所欲构造Durer魔方了.

例如取 $r_1=8, r_2=8, r_3=7, r_4=6, r_5=-2, r_6=3, r_7=4$

就得到版画上的durer魔方。

令 $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline r_1+r_2 & r_6 & r_5+r_7 & r_3+r_4 \\ \hline r_3+r_5 & r_4+r_7 & r_1+r_6 & r_2 \\ \hline r_4+r_6 & r_2+r_5 & r_3 & r_1+r_7 \\ \hline r_7 & r_1+r_3 & r_2+r_4 & r_5+r_6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 16 & 3 & 2 & 13 \\ \hline 5 & 10 & 11 & 8 \\ \hline 9 & 6 & 7 & 12 \\ \hline 4 & 15 & 14 & 1 \\ \hline \end{array}$

解得 $r_1=8, r_2=8, r_3=7, r_4=6, r_5=-2, r_6=3, r_7=4$

$$D = 8Q_1 + 8Q_2 + 7Q_3 + 6Q_4 - 2Q_5 + 3Q_6 + 4Q_7$$

故版画上的Durer魔方在该基下的坐标为$(8,8,7,6,-2,3,4)^T$

练习 请构造一个和为20的Dürer魔方.

是否还有其它方法求durer魔方的基？

求Dürer魔方空间的基---方法2

$$\text{Durer 魔方} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \end{pmatrix}$$

约束条件

$$\begin{aligned} & y_1+y_2+y_3+y_4=y_5+y_6+y_7+y_8 \\ & =y_9+y_{10}+y_{11}+y_{12}=y_{13}+y_{14}+y_{15}+y_{16} \\ & =y_1+y_5+y_9+y_{13}=y_2+y_6+y_{10}+y_{14} \\ & =y_3+y_7+y_{10}+y_{15}=y_4+y_8+y_{12}+y_{16} \\ & =y_1+y_4+y_{13}+y_{16} \\ & =y_1+y_2+y_5+y_6=y_3+y_4+y_7+y_8 \\ & =y_9+y_{10}+y_{13}+y_{14}=y_{10}+y_{12}+y_{15}+y_{16} \\ & =y_1+y_6+y_{11}+y_{16}=y_4+y_7+y_{10}+y_{13} \end{aligned}$$

Durer魔方空间与方程组Ay=0的解空间同构

$$\Leftrightarrow Ay=0$$

$$\Rightarrow r(A)=9$$

自由未知量为7个，因此4阶Durer魔方空间的维数为7.

[b,c]=rref(A)

独立变量序号

c =

1 2 3 4 5 6 7 9 11

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \end{pmatrix}$$

B=null(A,'r')

求得一个基础解系为

B =

1	0	1	−1	0	0	0
1	−1	0	0	0	0	1
−1	1	0	1	0	0	0
−1	0	−1	1	1	1	0
−1	1	−1	1	1	0	0
−1	0	0	1	0	1	0
1	−1	1	−1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	−1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	−1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1

```
For i=1:7
reshape(B(:,i),4,4)
end
```

2020/6/28

求得durer魔方空间的一个基为

$$P_1=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\-1&0&1&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad P_3=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&1&-1&0\\-1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&1&0&0\\1&-1&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad P_5=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad P_6=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P_7=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

任取一组实数$k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6,k_7$,

就得到一个durer魔方

$$D=k_1P_1+k_2P_2+k_3P_3+k_4P_4+k_5P_5+k_6P_6+k_7P_7$$

可见：durer魔方的基不唯一；$Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$称为标准基.

由前面讨论，我们得到了durer魔方空间的基，从而给定7个数$r_1,\cdots,r_7$，就可以确定一个Dürer魔方.

$$D=\begin{pmatrix}r_1+r_2 & r_6 & r_5+r_7 & r_3+r_4\\ r_3+r_5 & r_4+r_7 & r_1+r_6 & r_2\\ r_4+r_6 & r_2+r_5 & r_3 & r_1+r_7\\ r_7 & r_1+r_3 & r_2+r_4 & r_5+r_6\end{pmatrix}$$

例1 根据下表中的数字构造Durer魔方。

令$r_1+r_2=6, r_4+r_6=9, r_7=8$, $r_1+r_3=7, r_1+r_6=14, r_3=48$, $r_5+r_6=11$, 求得$r_1,\cdots,r_7$代入D得

6			
		14	
9		48	
8	7		11

⇨

6	55	-36	2
4	-38	14	47
9	3	48	-33
8	7	1	11

1. 知道四方格中任意7个数就可以确定一个**Dürer** 魔方吗？

不是的。例如

6	14	48	11
7			
9			
8			

2. 知道哪些位置上的数字，才能唯一确定一个**4**阶**Dürer** 魔方？

知道哪些位置上的数字，可唯一确定一个**Dürer** 魔方？

$$\text{Durer 魔方} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \end{pmatrix}$$

约束条件

$$\begin{aligned} & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = y_5 + y_6 + y_7 + y_8 \\ & = y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} = y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} \\ & = y_1 + y_5 + y_9 + y_{13} = y_2 + y_6 + y_{10} + y_{14} \\ & = y_3 + y_7 + y_{10} + y_{15} = y_4 + y_8 + y_{12} + y_{16} \\ & = y_1 + y_4 + y_{13} + y_{16} \\ & = y_1 + y_2 + y_5 + y_6 = y_3 + y_4 + y_7 + y_8 \\ & = y_9 + y_{10} + y_{13} + y_{14} = y_{10} + y_{12} + y_{15} + y_{16} \\ & = y_1 + y_6 + y_{10} + y_{16} = y_4 + y_7 + y_{10} + y_{13} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Ay = 0$$

$$\Rightarrow r(A) = 9$$

自由未知量为7个，因此4阶Durer魔方空间的维数为7.

2020/6/28

[b,c]=rref(A)　　　　独立变量序号

```
c =

     1     2     3     4     5     6     7     9    11
```

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \end{pmatrix}$$

自由未知量：$y_8, y_{10}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}$

知道自由未知量所在位置的数字，就可唯一确定一个**Dürer** 魔方。

2020/6/28　　　　数学建模

6			
		14	
9		48	
8	7		11

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \end{pmatrix}$$

自由变量位置不唯一

思考：如何判定哪7个位置可以作为自由变量？

2020/6/28　　　　数学建模

作 业

1、编制程序,用户输入n, 即可产生一个和为n的Dürer魔方。

2、加工一种食用油需要精炼若干种原料油并把它们混合起来。原料油的来源有两类共5种：植物油VEG1，植物油VEG2，非植物油OIL1，非植物油OIL2，非植物油OIL3。购买每种原料油的价格（英镑/吨）如表1所示，最终产品以150英镑/吨的价格出售。植物油和非植物油需要在不同的生产线上进行精炼。

每月能够精炼的植物油不超过**200**吨，非植物油不超过**250**吨；在精炼过程中，重量没有损失，精炼费用可忽略不计。最终产品要符合硬度的技术条件。按照硬度计量单位，它必须在**3~6**之间。假定硬度的混合是线性的，而原材料的硬度如表**2**所示。为使利润最大，应该怎样指定它的月采购和加工计划。

表1 原料油价格（单位：英镑/吨）

原料油	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
价格	110	120	130	110	115

表2 原料油硬度表

原料油	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
硬度值	8.8	6.1	2.0	4.2	5.0