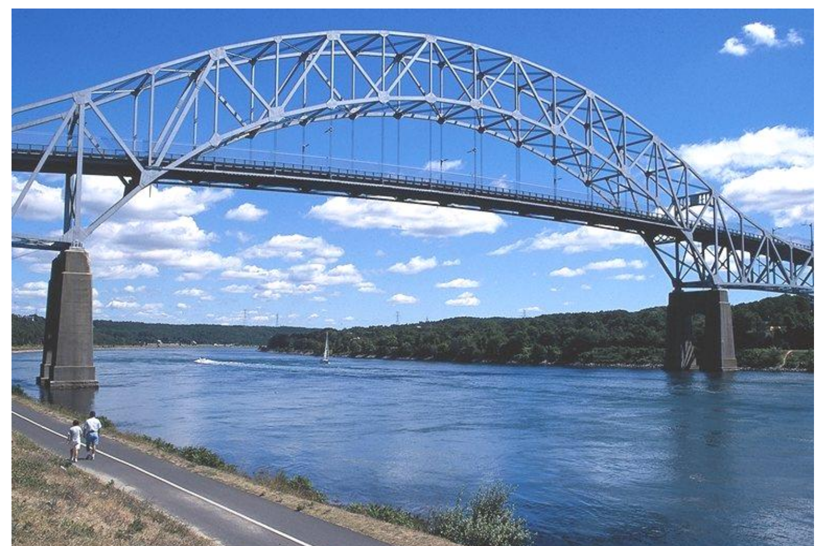
第五章 静力学专题

§5-1 桁架的静态实验与内力计算

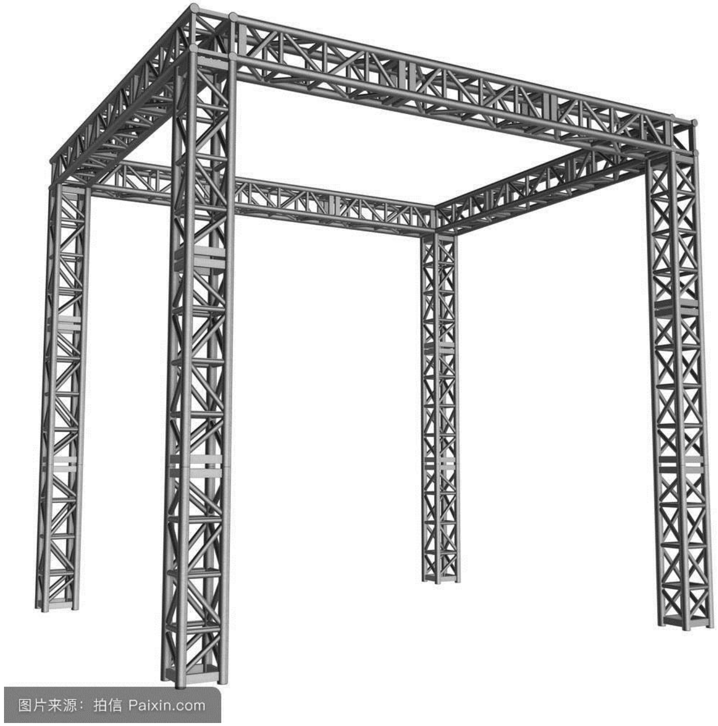
§5-2 摩擦

§5-1 桁架的静态实验与内力计算



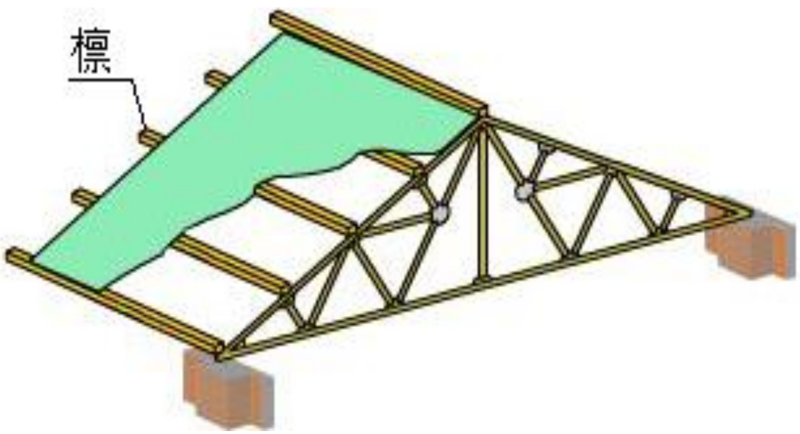
工程中的各种桁架结构

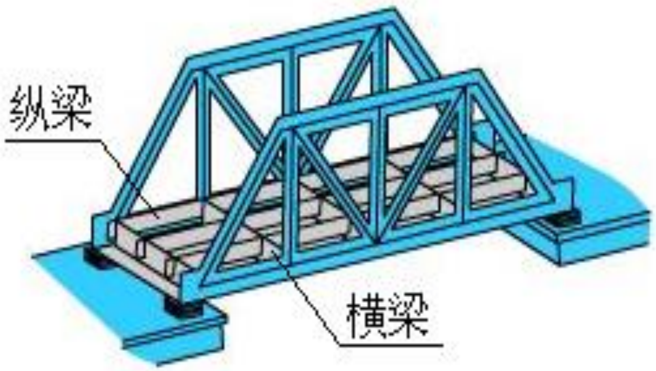
工程中的各种桁架结构



工程中的各种桁架结构

工程桁架是由若干直杆在两端通过焊接、铆接所构成的几何形状不变的工程承载结构。其具有用料省、自重轻、承载能力强等优点，因此在工程中应用广泛。





桁架静力分析的任务

如何进行桁架内力计算？

- **确定桁架的支撑约束力和各杆内力**
- **桁架的设计（安全又经济）**

建立力学模型

↓

分析计算

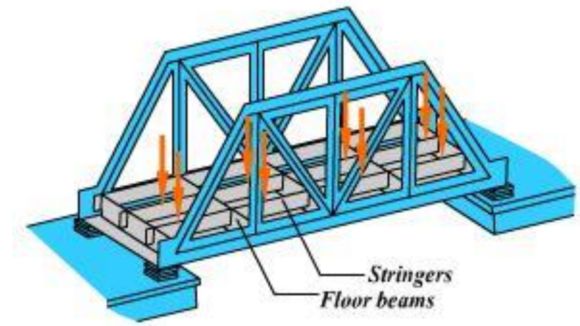
↓

实验验证

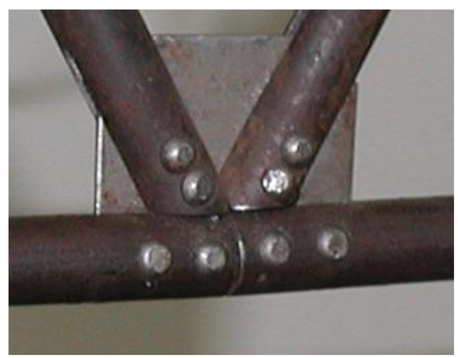
平面桁架模型

平面桁架——各杆件轴线在同一平面

节点——各杆件轴线的交点




焊接


铆接


螺栓连接

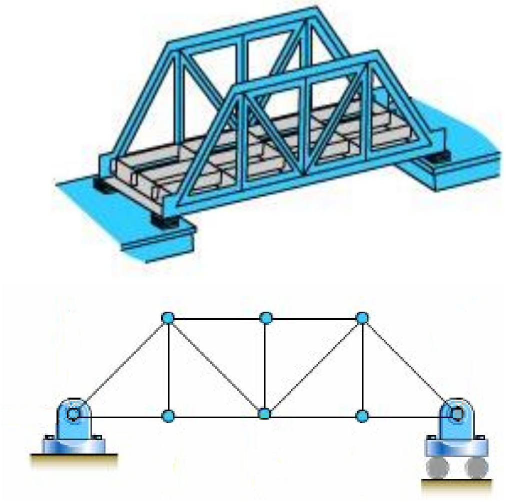
● **平面桁架模型**

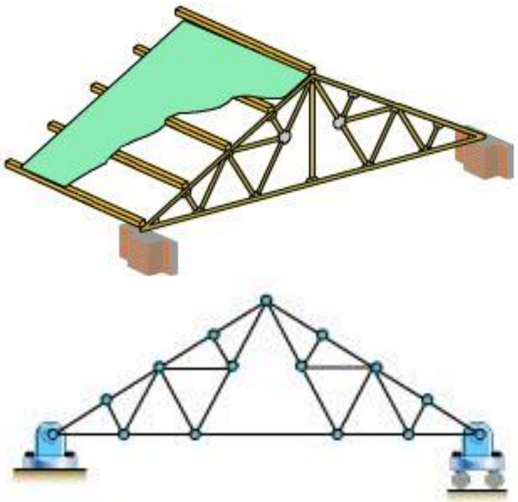
1. 各杆件为直杆，各杆轴线位于同一平面内。

2. 各杆件在节点处均为光滑铰链连接。

3. 各杆件自重不计或平均分布在节点上。载荷作用在节点上且位于桁架几何平面内。

→ **理想桁架** → 桁架中每根杆件均为**二力杆**



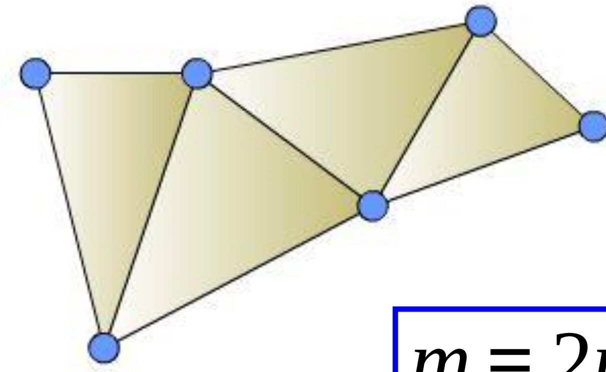


● 平面桁架的杆件内力测量(实验测量)

- **实验目的:** 测量桁架杆件中各杆的受力
- **实验对象:** 几何尺寸相同,连接方式不同(焊.铆.铰)
- **实验方法:** 贴应变片,测变形→力
- **实验结论:** 相同的载荷作用下,不同的连接方式对力的结果影响不大.

求平面桁架各杆内力的方法

以一个铰链三角形框架为基础，每增加一个节点需增加二根杆件，可以构成无余杆的平面桁架-----简单桁架



$$\boxed{m = 2n - 3}$$

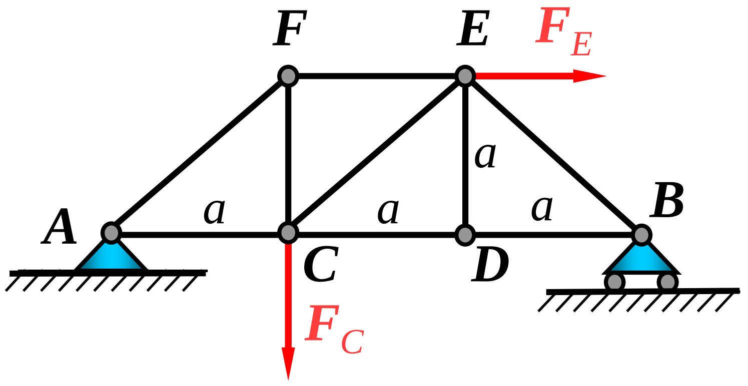
m –杆件数，n –节点数

平面简单桁架（平面静定桁架）

节点法 — 应用共点力系平衡条件，逐一研究桁架上每个节点的平衡。

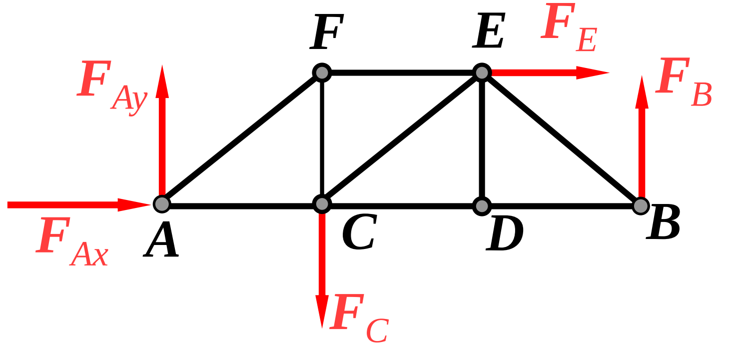
截面法 — 应用平面任意力系的平衡条件，研究桁架由截面(假想)切出的某一部分的平衡。

例1 如图平面桁架，求各杆内力。已知铅垂力F_C=4kN，水平力F_E=2kN。



解： 节点法

1. 取整体为研究对象，受力分析如图。



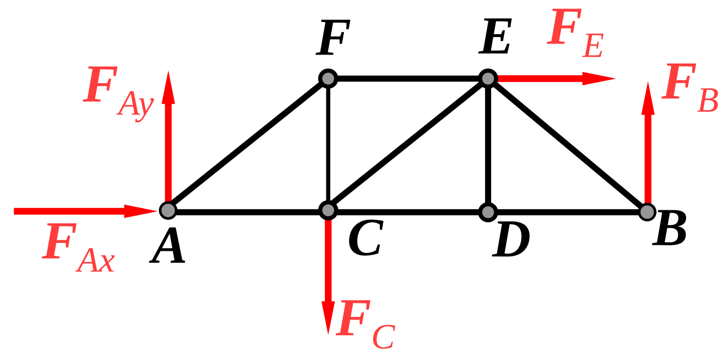
$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_E = 0$$

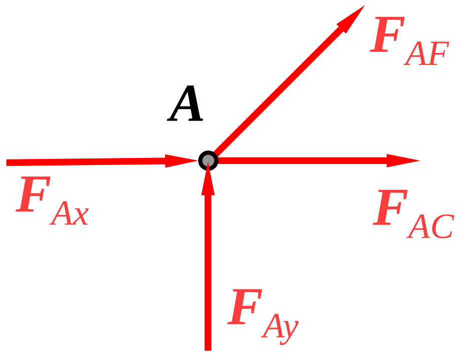
$$\sum F_y = 0, \quad F_B + F_{Ay} - F_C = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_C \times a - F_E \times a + F_B \times 3a = 0$$

F_{Ax}= －2 kN，F_{Ay}= 2 kN，F_B = 2 kN

2. 取节点A，受力分析如图。



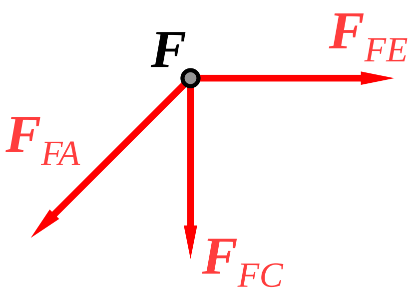


$$\sum F_x = 0,\ F_{Ax} + F_{AC} + F_{AF}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{Ay} + F_{AF}\cos 45^\circ = 0$$

$$F_{AF} = -2\sqrt{2}\ \text{kN},\ \ F_{AC} = 4\ \text{kN}$$

3. 取节点F，受力分析如图。

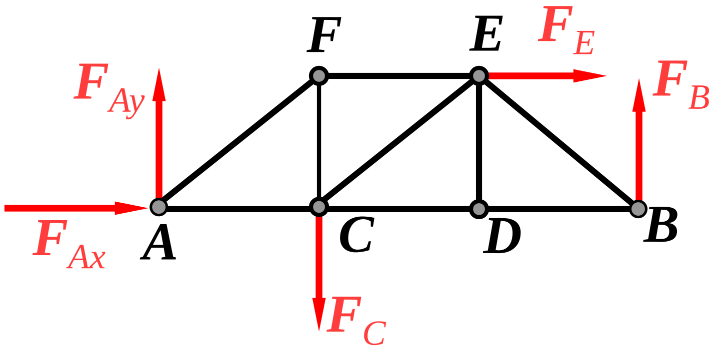


$$\sum F_x = 0,\quad F_{FE} - F_{FA}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad -F_{FC} - F_{FA}\cos 45^\circ = 0$$

$$F_{FE} = -2\ \text{kN},\quad F_{FC} = 2\ \text{kN}$$

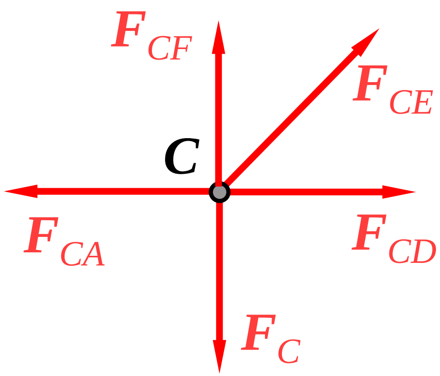
4. 取节点C，受力分析如图。



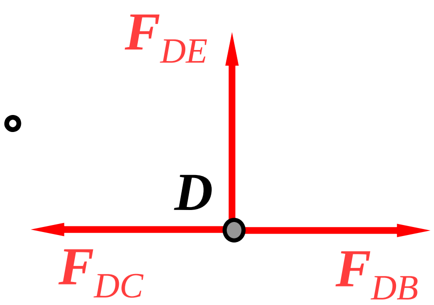
$$\sum F_x = 0,\ -F_{CA} + F_{CD} + F_{CE}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,\ -F_C + F_{CF} + F_{CE}\cos 45^\circ = 0$$

$$F_{CE} = 2\sqrt{2}\ \text{kN},\quad F_{CD} = 2\ \text{kN}$$



5. 取节点D，受力分析如图。

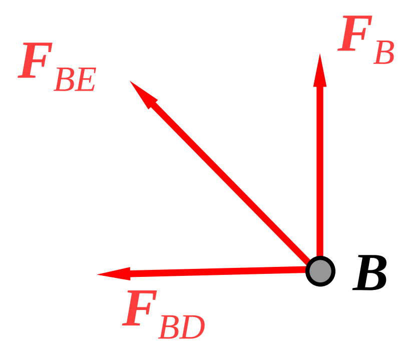


$$\sum F_x = 0,\quad F_{DB} - F_{DC} = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{DE} = 0$$

$$F_{DB} = 2\ \text{kN},\quad F_{DE} = 0$$

6. 取节点B，受力分析如图。

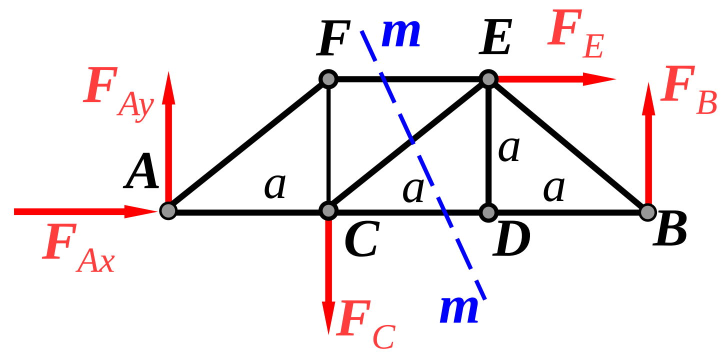


$$\sum F_x = 0,\ -F_{BD} - F_{BE}\cos 45^\circ = 0$$

$$F_{BE} = -2\sqrt{2}\ \text{kN}$$

截面法

1. 取整体为研究对象，受力分析如图。

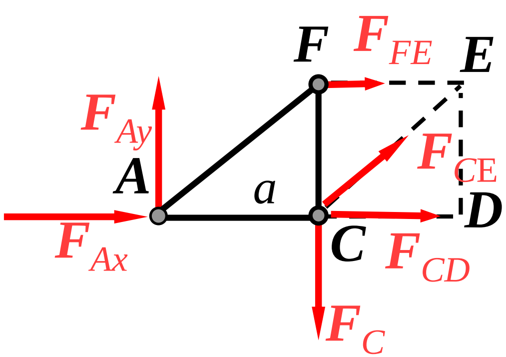


$F_{Ax}=-2\ \mathrm{kN}$

$F_{Ay}=2\ \mathrm{kN}$

$F_B=2\ \mathrm{kN}$

2. 作一截面m-m将三杆截断，取左部分为分离体，受力分析如图。



$$\sum F_x=0,\quad F_{CD}+F_{Ax}+F_{FE}+F_{CE}\cos 45^\circ=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-F_C+F_{CE}\cos 45^\circ=0$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad -F_{FE}\times a-F_{Ay}\times a=0$$

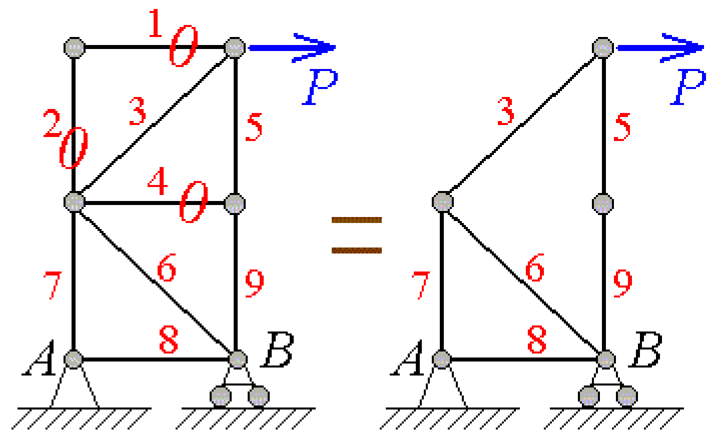
$$F_{CD}=2\ \mathrm{kN},$$

$$F_{CE}=2\sqrt{2}\ \mathrm{kN},$$

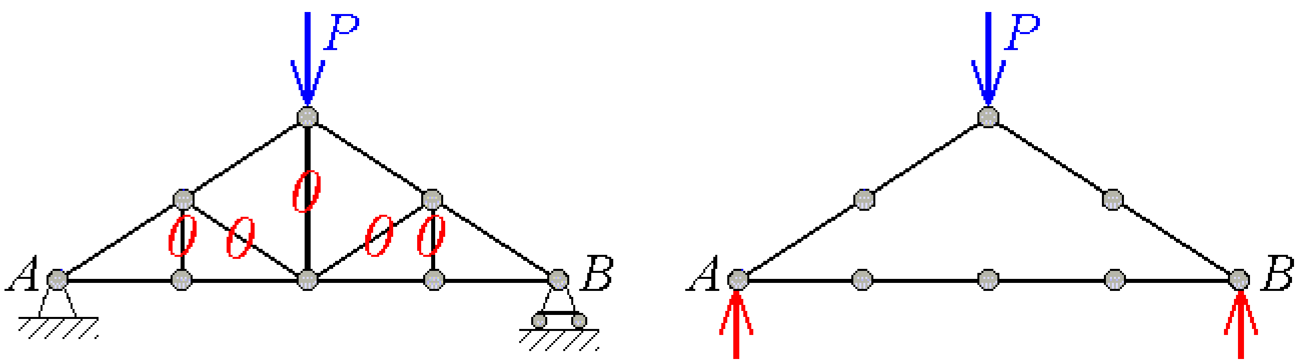
$$F_{FE}=-2\ \mathrm{kN}$$

零杆的确定

（1）若某节点只与两杆相连，节点上无主动力，两杆不平行，则两杆均为零杆。（右图1、2杆）



（2）若某节点与三杆相连，节点上无主动力，两杆平行，则第三杆为零杆。

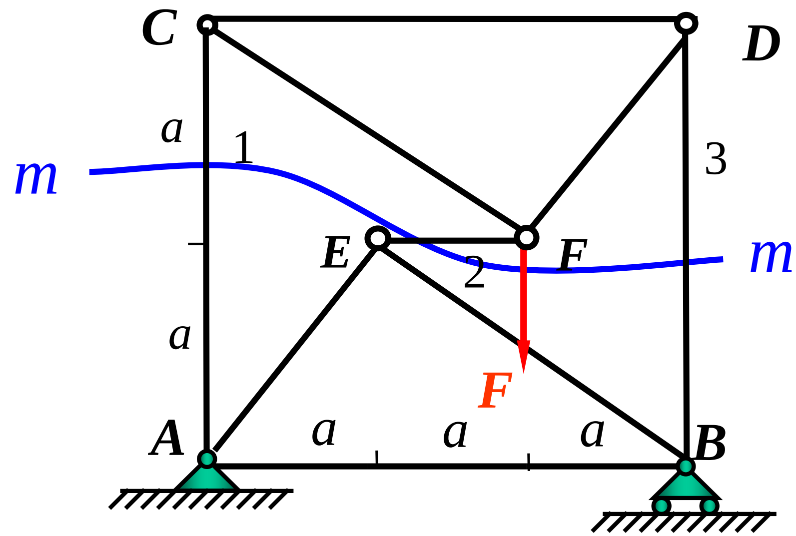


求解技巧

- 首先去掉零杆.
- 求支座反力.
- 节点法通常从未知力少杆件入手,使独立平衡方程数等于未知量个数，避免解联立方程.一般假设杆件受拉力.
- 截面法用截面截得杆件数通常不超过3个.
- 合理使用截面技巧,节点法与截面法结合使用.

思考题

用截面法求杆1，2，3的内力。



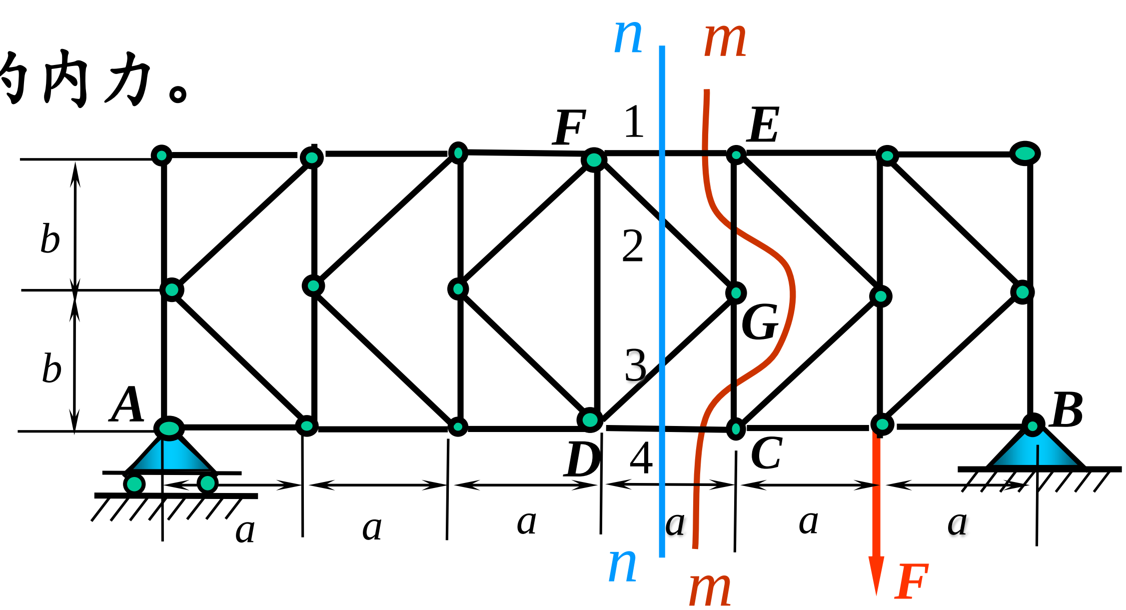
用截面m，并取上半部分。

$\sum F_x = 0,$ 求出杆2的内力F_2。

$\sum M_C = 0,$ 求出杆3的内力F_3。

$\sum M_D = 0,$ 求出杆1的内力F_1。

用截面法求杆1，2的内力。



先用截面m

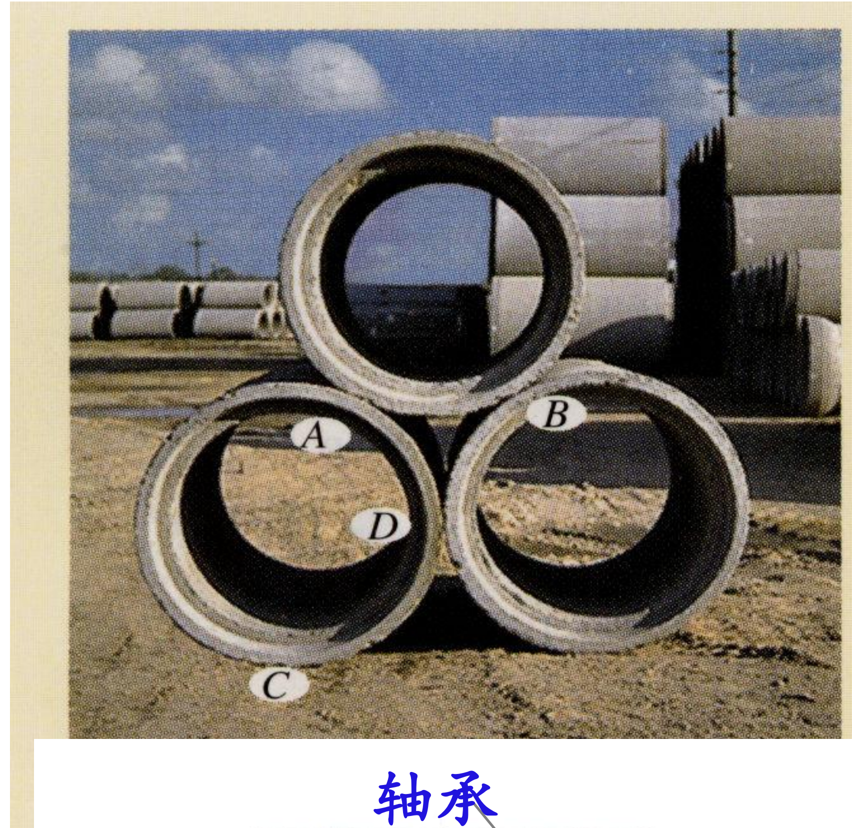
$\sum M_C = 0,$

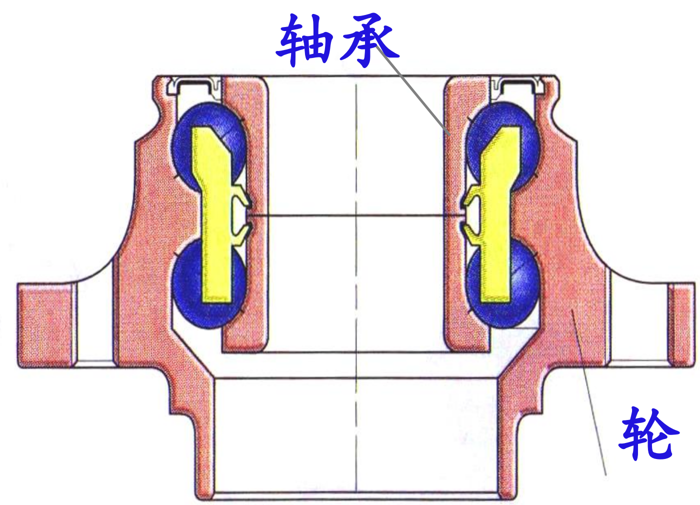
再用截面n

$\sum M_D = 0,$

§5-2 摩擦

剎车器利用摩擦力制动





轴承中摩擦力增加磨损

1. 滑动摩擦的概念

当一物体沿着另一物体的表面（或接触面）滑动或具有滑动趋势时，在该表面接触处的公切面内会产生阻力的现象称为滑动摩擦，简称摩擦。

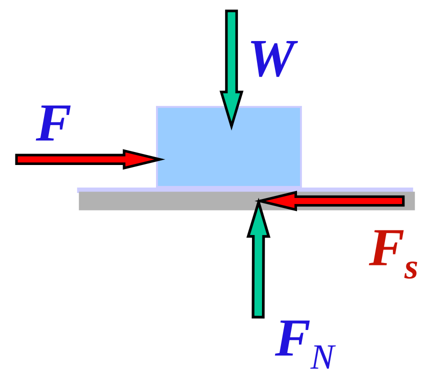
这个切向阻力称为滑动摩擦力，简称摩擦力。

滑动摩擦的分类

静（滑动）摩擦：仅出现相对滑动趋势而未发生运动时的摩擦。一般用F_s（static）表示。

动（滑动）摩擦：已发生相对滑动的物体间的摩擦。一般用F_d 表示。

1. 滑动摩擦的概念



$F=0$ 无滑动趋势 $F_s=0$

$0<F<F_c$ 有滑动趋势 $F_s=F$

$F=F_c$ 临界滑动 $F_s=F_{max}$

静滑动摩擦力

方向：与相对滑动趋势方向相反

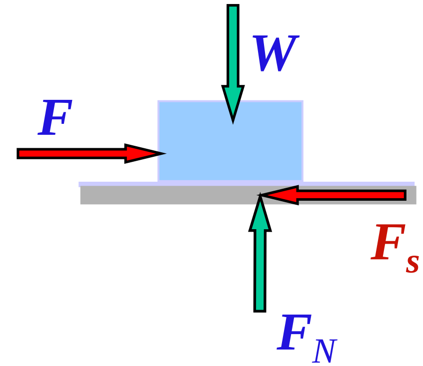
大小：$0\leq F_s\leq F_{max}$—变化范围

最大值：$F_{max}=f_sF_N$，

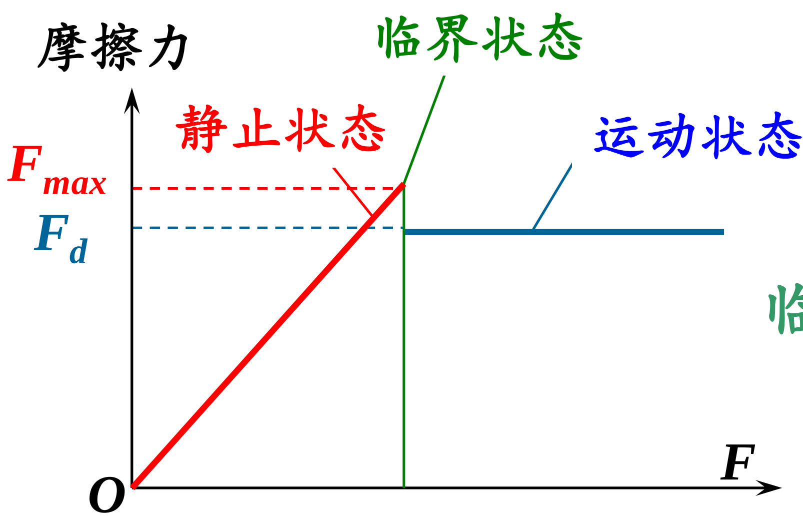
f_s—静滑动摩擦系数

1. 滑动摩擦的概念

$F > F_c$ **滑动** $F_d = f F_N$



动滑动摩擦力
- 方向：与相对滑动方向相反
- 大小：$F_d = f F_N$—近似常量
- f—动滑动摩擦系数



静止状态：$0 < F_s < F_{max}$

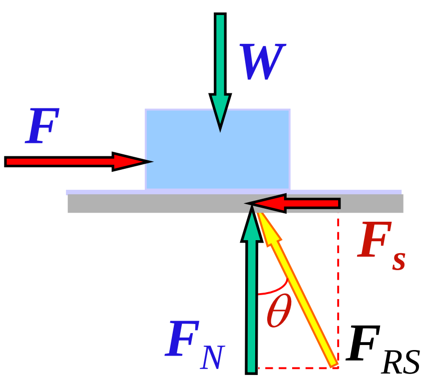
临界状态：$F_s = F_{max} = f_s F_N$

运动状态：$F_d = f F_N$

2. 滑动摩擦的性质 ♣摩擦角与自锁现象

*摩擦力与法向反力的合力称为**全反力**，通常用F_{RS}表示。

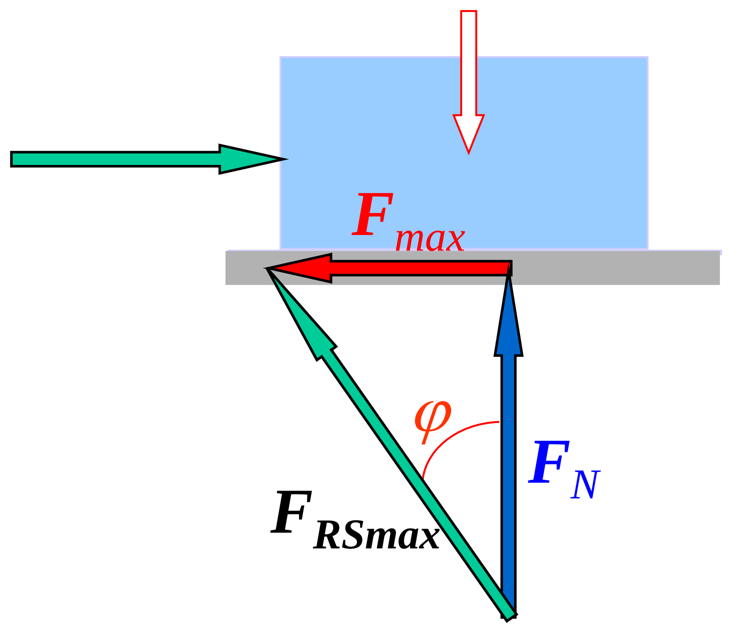
$$F_{RS}=F_N+F_S$$



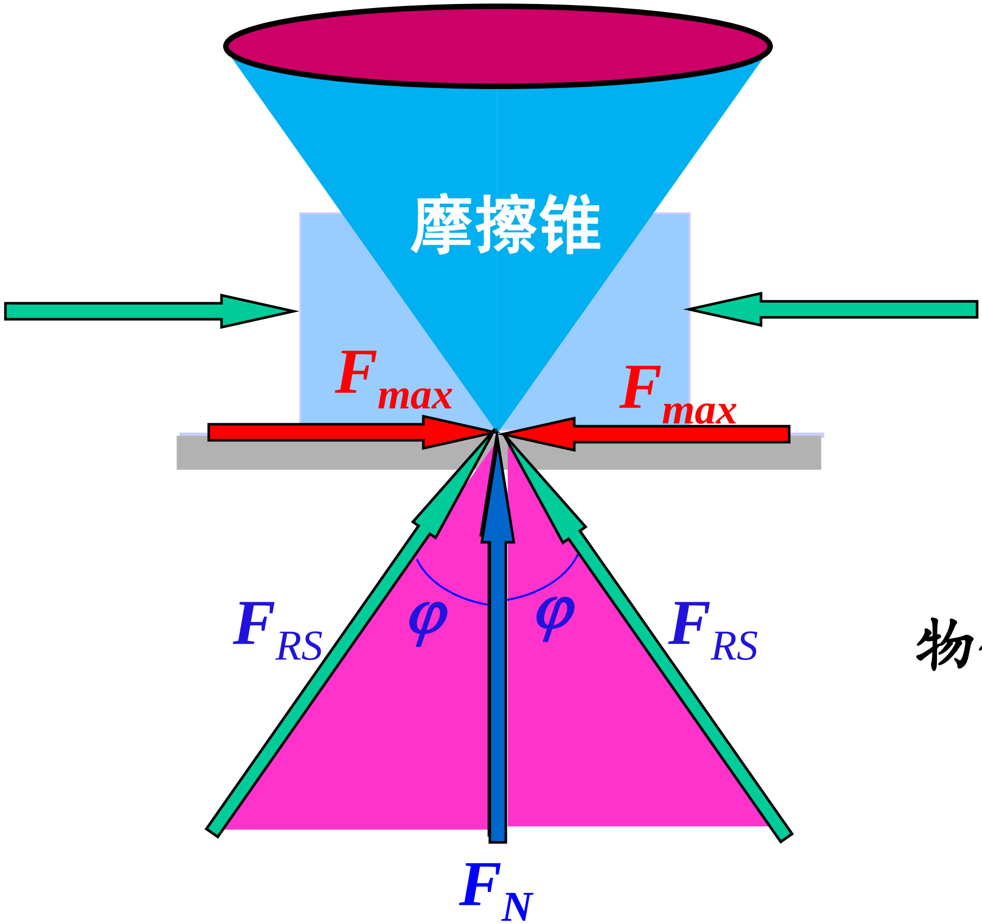
全反力F_{RS}与法向约束力F_N作用线之间的夹角θ 表示。

*全反力与接触面法线间夹角的最大值称为**摩擦角**。

$$\tan\varphi=\frac{F_{max}}{F_N}=\frac{f_sF_N}{F_N}=f_s$$



2. 滑动摩擦的性质 ♣摩擦角与自锁现象



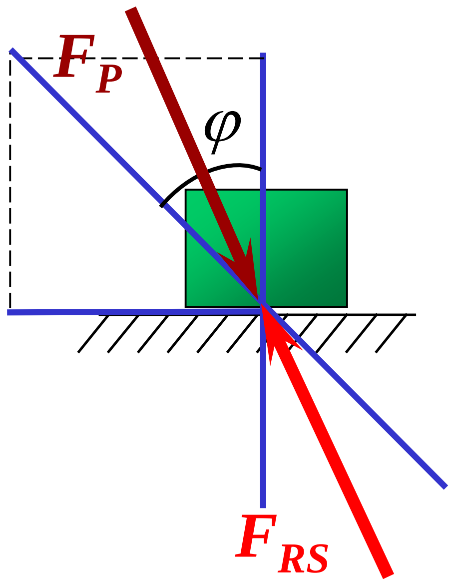
- 摩擦角是静摩擦力取值范围的几何表示。
- 三维受力状态下，摩擦角变为摩擦锥。

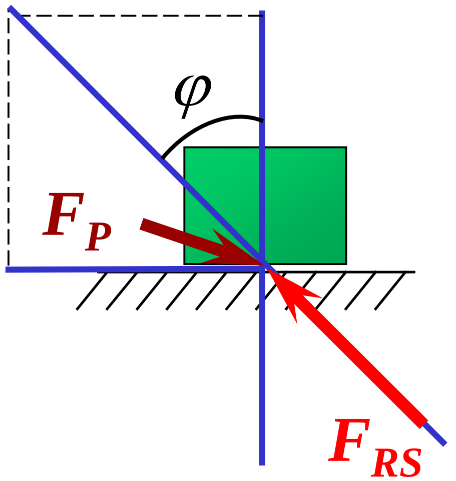
物体平衡范围$0 \leq F_s \leq F_{max}$也可以表示为$0 \leq \theta \leq \varphi$。

2. 滑动摩擦的性质 ♣摩擦角与自锁现象

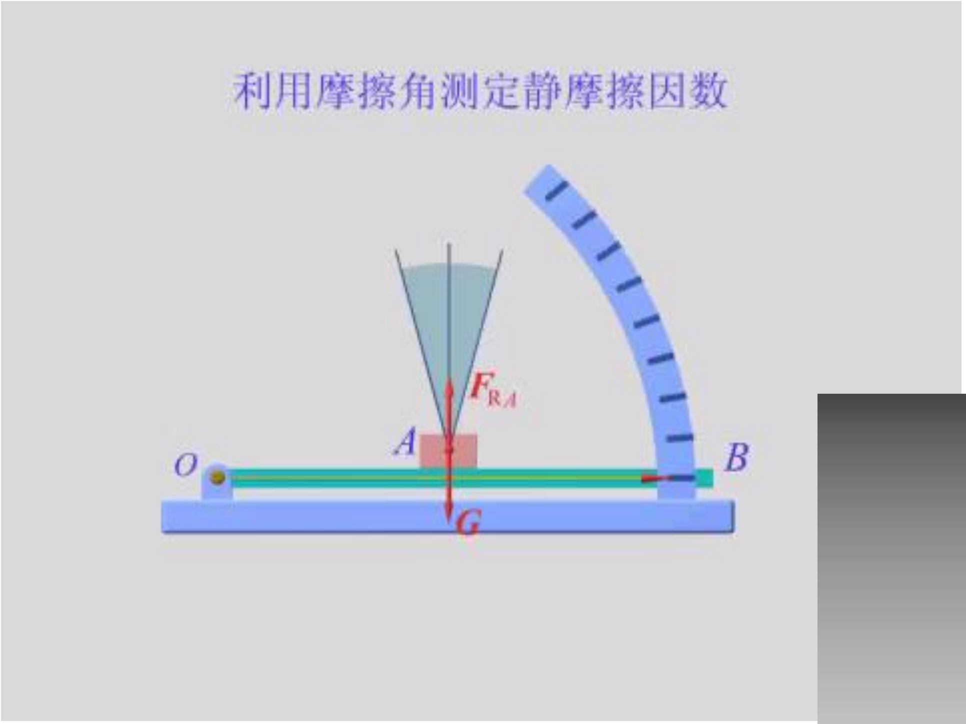
当主动力合力的作用线位于摩擦锥以内时，无论主动力合力多大，约束力都可与之平衡，此现象称为自锁。

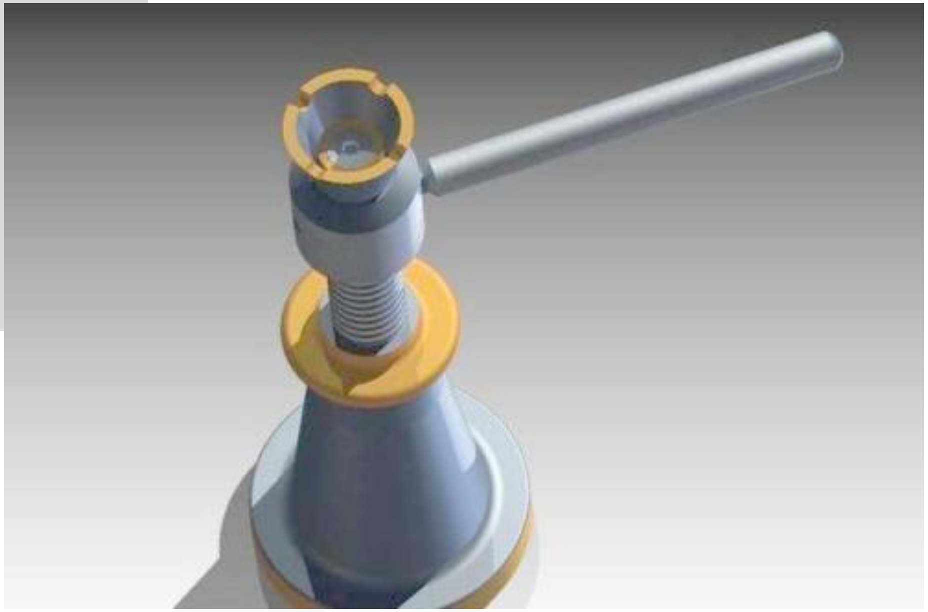
当主动力合力的作用线落在摩擦锥以外时，无论主动力合力多小，物块一定会滑动。



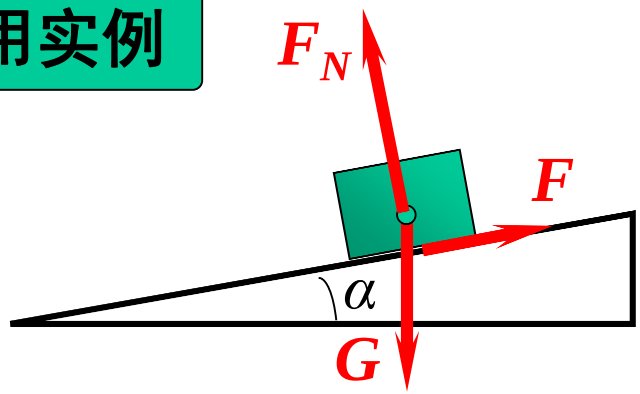


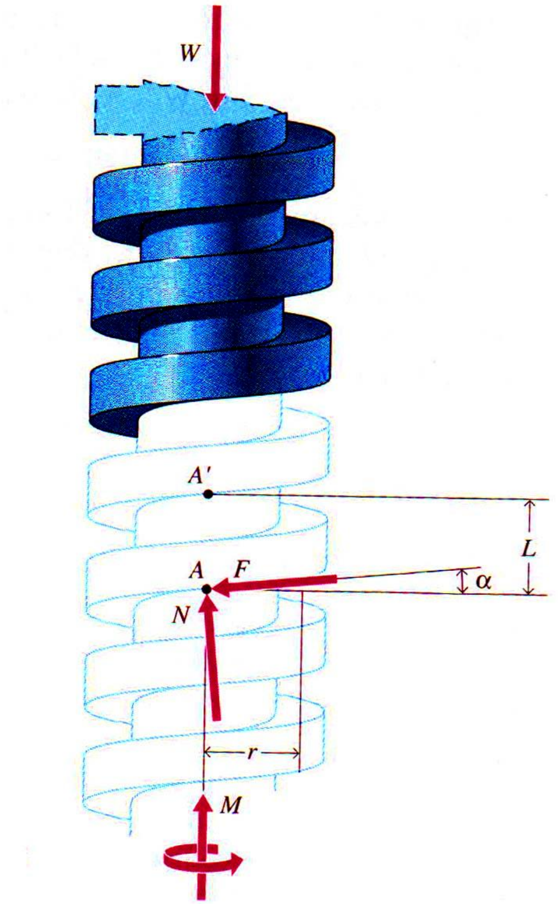
工程应用实例





工程应用实例





$$F = G\sin\alpha,$$

$$F_N = G\cos\alpha$$

由 $F \le F_{max} = f_s F_N$

$$G\sin\alpha \le f_s G\cos\alpha$$

$$\tan\alpha \le f_s = \tan\varphi$$

$$\alpha \le \varphi$$

3. 考虑滑动摩擦时的平衡问题

Problems Involving Dry Friction

考虑摩擦时的平衡问题仍通过平衡条件求解。但要特别注意摩擦力的分析，其中重要的是判断摩擦力的方向和大小。

1. 受力图中多了摩擦力；

2. 除静力学平衡方程外还有补充方程：

$$F_s \leq f_s F_N$$

3. 所得结果可能是一个范围

4. 可求解不等式，也可在极限情况求解等式，再根据物理意义确定范围。

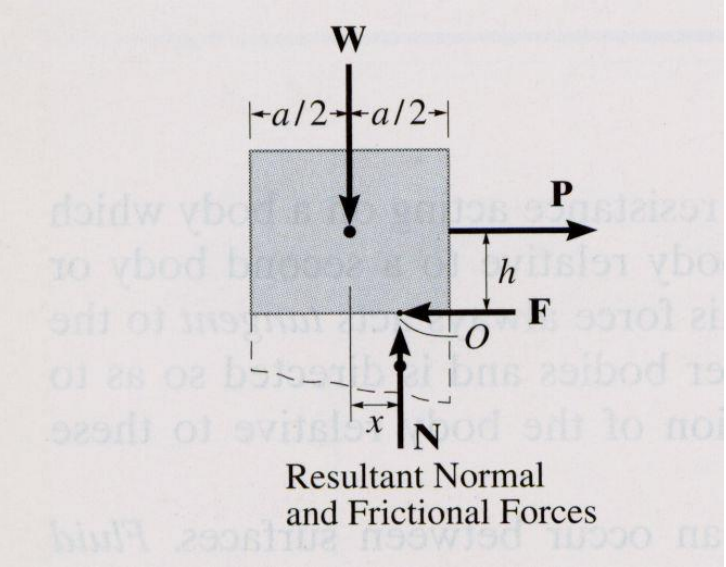
3. 考虑滑动摩擦时的平衡问题

（a）Equilibrium（平衡）

No translation $F = P$

No tipping $Wx = Ph$

$x = Ph/W$

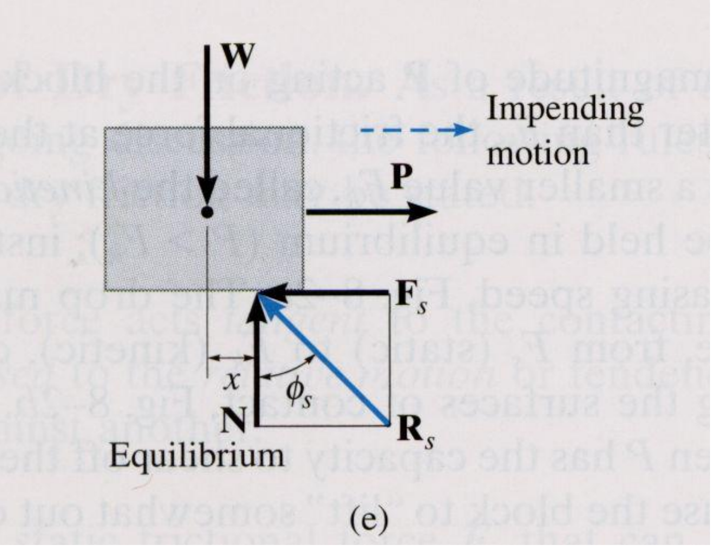


（b）Impending Motion(临界运动)

No translation $F_s = f_s N$

No tipping $Wx = Ph$

$x = Ph/W$



(c) Motion（运动）

Translation（平移运动）

No tipping（无翻倒）

$$F_d = f_d N$$

3. 考虑滑动摩擦时的平衡问题

通常有以下两种考虑摩擦的平衡问题：

(1) 判断物体是否平衡，并求滑动摩擦力。

(按非临界平衡处理)。

1. 选取研究对象
2. 假设物体处于平衡状态
3. 受力分析
4. 列平衡方程解出平衡条件
5. 判断是否平衡$F_s \leq F_{max}$，确定摩擦力的大小

- 摩擦力的指向可以假定，大小由平衡方程决定。
- 未知量个数=独立方程个数
- 相当于“有上限的约束反力”.

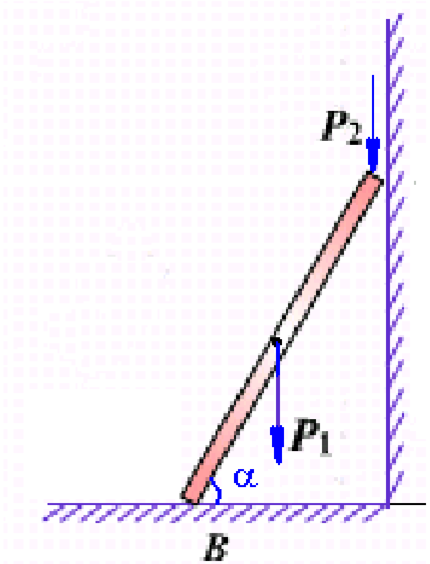
3. 考虑滑动摩擦时的平衡问题

通常有以下两种考虑摩擦的平衡问题：

(2) 确定物体的平衡范围(按临界平衡处理)：

1. 选取研究对象
2. 确定平衡的极限状态（摩擦力的方向）
3. 受力分析
4. 列平衡方程解出平衡条件，根据具体物理意义定解。

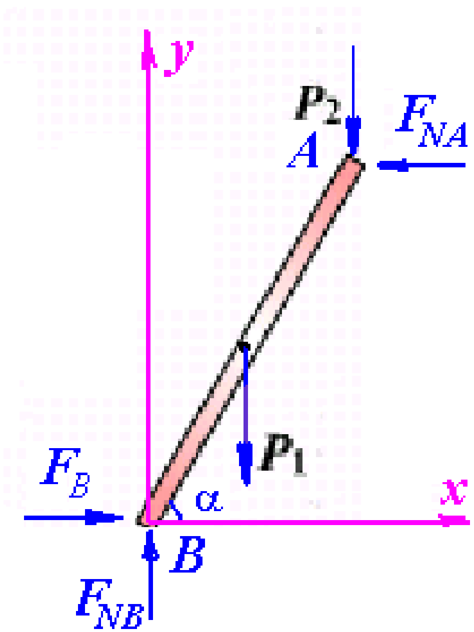
- 根据物体的运动趋势来判断其接触处的摩擦力方向，不能任意假设
- 未知量个数>独立方程个数，应用 $F_{max}= f_s F_N$ 作为补充方程
- 相当于“大小未知的主动力”.



例 已知：梯子长L，重100N，与地面夹角α=75°，地面摩擦系数为f_{sB}=0.4，墙面光滑。求：重为P_2=700N的人，能否爬到梯子顶端而不致使梯子滑倒？地面对梯子的摩擦力F_B=?

解：本题属于判断平衡并求解摩擦力。

假设平衡，研究对象：人–梯，受力如图所示。



$$\sum F_y = 0 \qquad F_{NB} - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$$

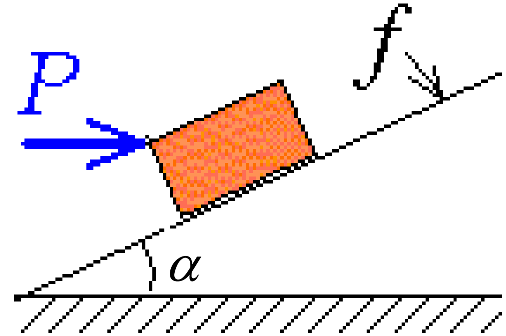
$$F_{NB} L\cos\alpha - F_B L\sin\alpha - P_1 L/2\sin\alpha = 0$$

$$F_{NB}\text{=800N},\ F_B\text{=201N}$$

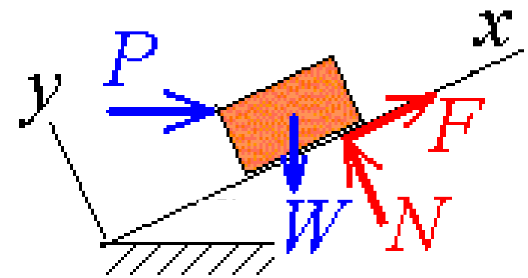
$$F_{B\max} = F_{NB} f_{sB} = 320N \qquad F_B < F_{B\max}$$

所以梯子平衡 F_B=201N

例 已知：α, f, 物块重W。
求：平衡时P力的范围。



解：(1) P较小时，物块有下滑趋势，
摩擦力向上。



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F + P\cos\alpha - W\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - P\sin\alpha - W\cos\alpha = 0$$

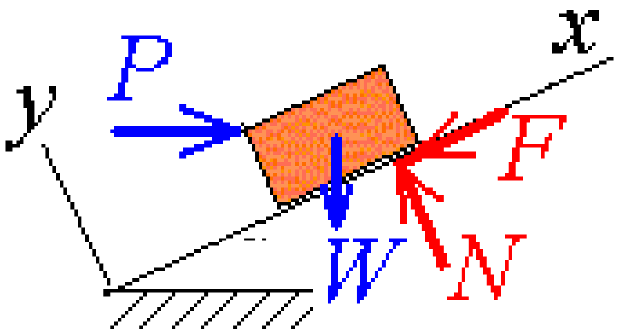
补充条件： $F \le fN$

$$W\sin\alpha - P\cos\alpha \le f(W\cos\alpha + P\sin\alpha)$$

$$P \ge W\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}, \quad f = \tan\varphi_m$$

$$P \ge W\frac{\sin\alpha\cos\varphi_m - \cos\alpha\sin\varphi_m}{\cos\alpha\cos\varphi_m + \sin\alpha\sin\varphi_m} = W\tan(\alpha - \varphi_m)$$

(2) P较大时，物块有上滑趋势，摩擦力向下.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F + P\cos\alpha - W\sin\alpha = 0$$

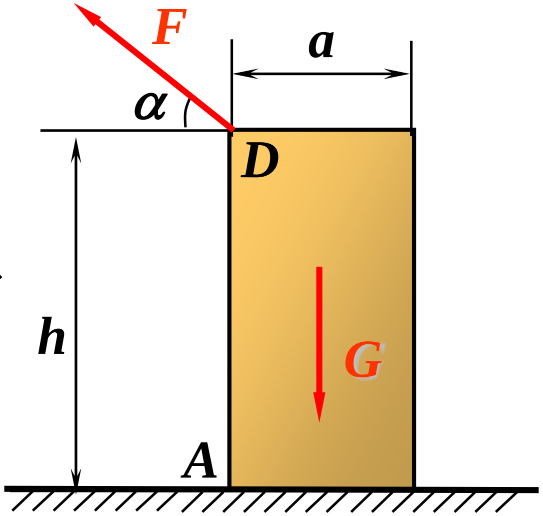
$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - P\sin\alpha - W\cos\alpha = 0$$

$$P \le W\tan(\alpha + \varphi_m)$$

(3) 总结以上：

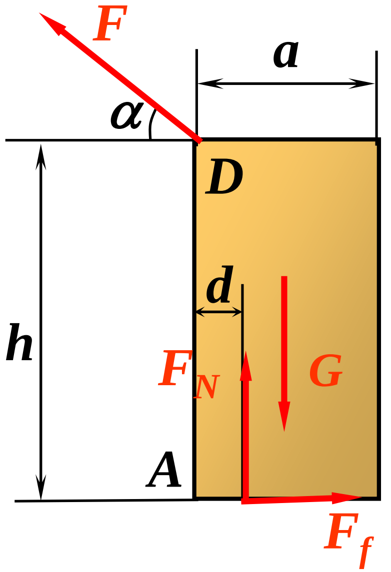
$$W\tan(\alpha + \varphi_m) \ge P \ge W\tan(\alpha - \varphi_m)$$

例 图示匀质木箱重G=5kN，它与地面间的静摩擦系数 f_s=0.4。图中h=2a=2m，α=30°。（1）问当D处的拉力F=1kN时，木箱是否平衡？（2）求能保持木箱平衡的最大拉力。



1. 判断木箱是否平衡

取木箱为研究对象，受力分析如图。



$$\sum F_x = 0,\qquad F_f - F\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0,\qquad F_N - G + F\sin\alpha = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\ hF\cos\alpha - G\frac{a}{2} + F_N d = 0$$

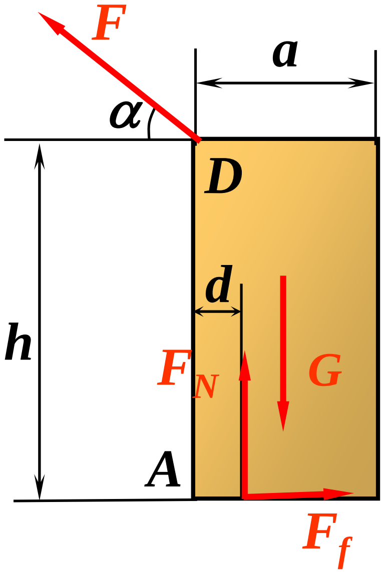
$F_f = 866\text{N}$
$F_N = 4500\text{N}$
$d = 0.171\text{m}$

$F_{max} = f_s F_N = 1800\ \text{N}$ $F_f < F_{max}$，木箱不滑动。

d =0.171 m > 0，木箱不会翻倒。

未知量3=独立平衡方程数3

2. 求平衡时最大拉力，即求滑动临界与翻倒临界时的最小力F。



$$\sum F_x = 0,\quad F_f - F\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_N - G + F\sin\alpha = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad hF\cos\alpha - G\frac{a}{2} + F_N d = 0$$

木箱发生滑动的条件为

$$F_f = F_{max} = f_s F_N$$

$$F_{滑} = \frac{f_s G}{\cos\alpha + f_s\sin\alpha} = 1876\text{N}$$

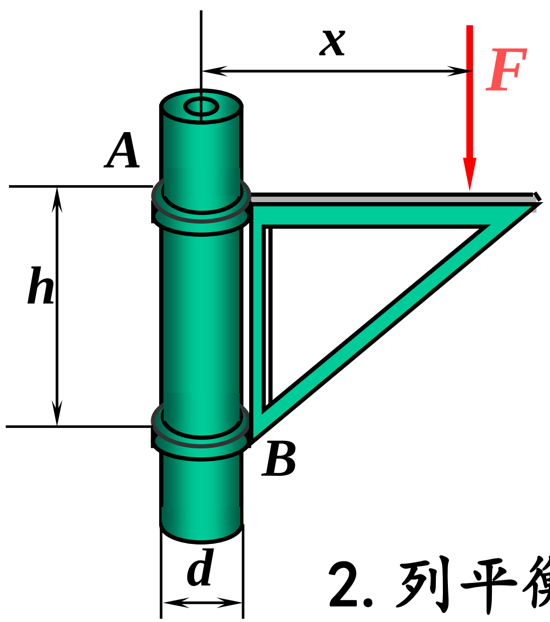
木箱绕A点翻倒的条件为$d = 0$，则 $F_{翻} = \dfrac{Ga}{2h\cos\alpha} = 1443\text{ N}$

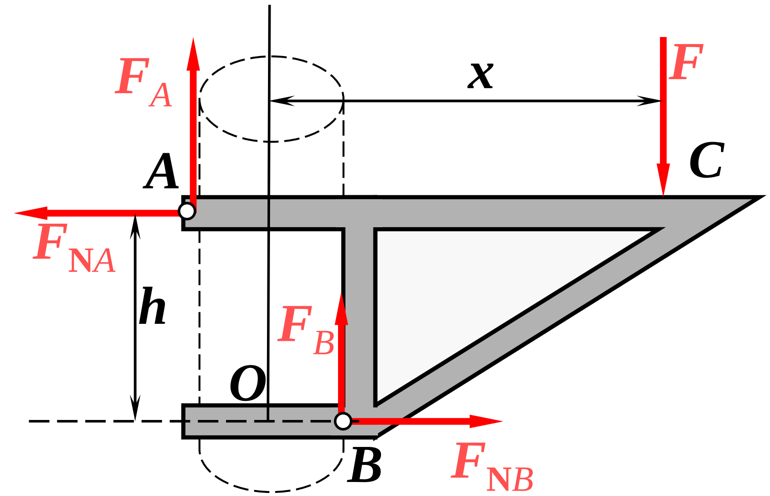
由于$F_{翻}<F_{滑}$，所以保持木箱平衡的最大拉力为

$$F = F_{翻} = 1443\text{ N}$$

例 一活动支架套在固定圆柱的外表面，且h=20cm。假设支架和圆柱之间的静摩擦系数f_s =0.25。问作用于支架的主动力F的作用线距圆柱中心线至少多远才能使支架不致下滑（支架自重不计）。

1. 取支架为研究对象，受力分析。





2. 列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{NA} + F_{NB} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A + F_B - F = 0$$

$$\sum M_O = 0, \quad hF_{NA} - \frac{d}{2}(F_A - F_B) - xF = 0$$

补充方程

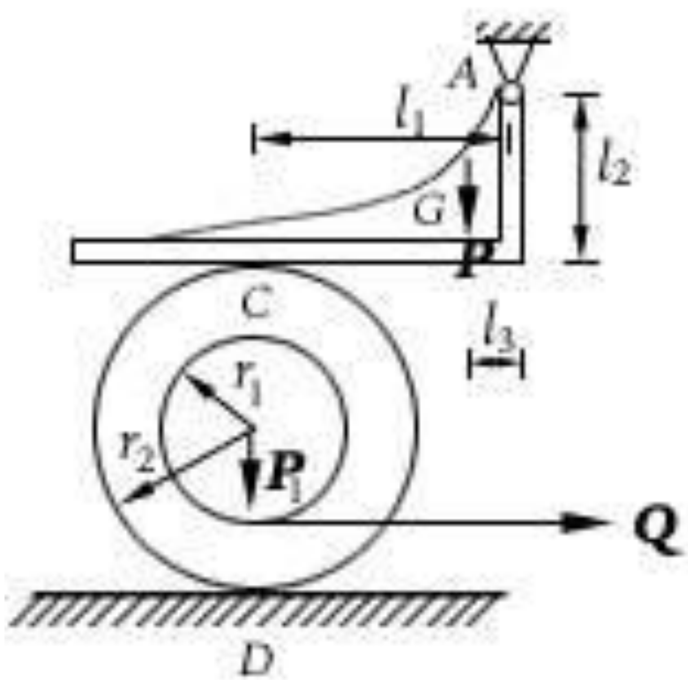
$$F_A = f_s \times F_{NA}, \quad F_B = f_s \times F_{NB}$$

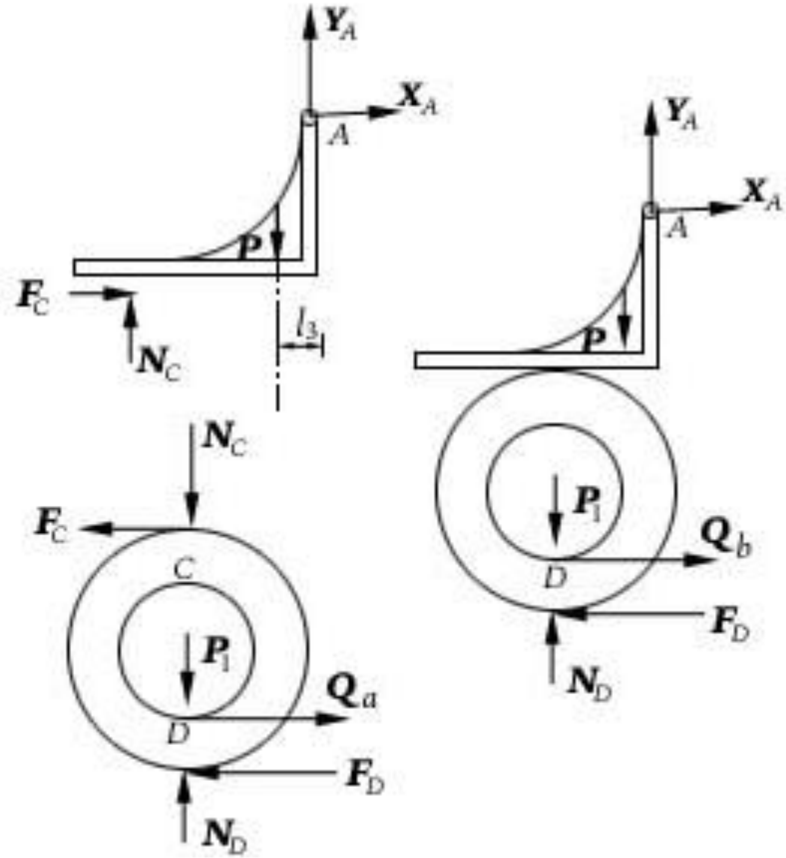
3. 联立求解

$$F_{NA} = F_{NB} = 2F$$

$$x = 40\,\mathrm{cm}$$

在图示机构中，已知：悬挂着的三脚架的重量是P，轮轴重P_1, 尺寸l_1、l_2、l_3、r_1、r_2如图所示，C、D处的静摩擦系数均为f, 且$l_1 > l_2$，滚动摩阻略去不计。试求机构平衡时水平拉力Q的最大值

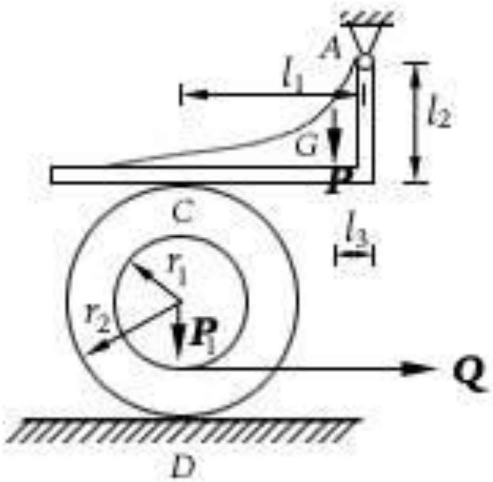




2011陕西省大学生力学竞赛理论力学题

未知量7 >独立平衡方程数6

解：（1）假设C处先滑

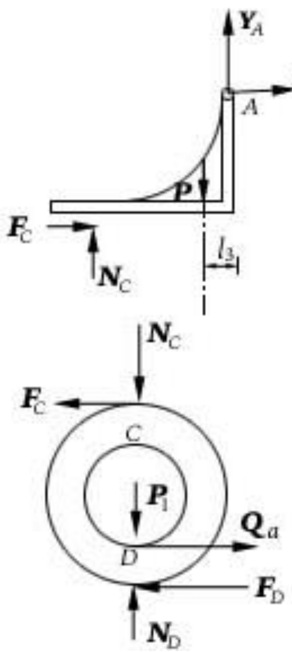


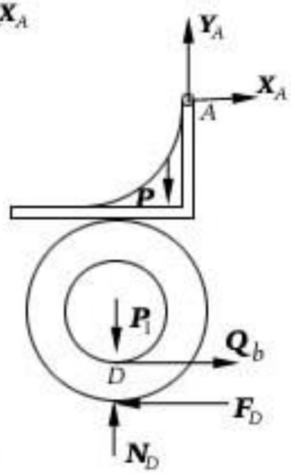
1）对三脚架　$\sum M_A = 0$　　$Pl_3 - N_C l_1 + F_C l_2 = 0$

$$\boxed{F_C = fN_C}\qquad F_C = \frac{fPl_3}{(l_1 - fl_2)}$$

2）对轮　$\sum M_D = 0$　　$-Q_a(r_2 - r_1) + F_C' \cdot 2r_2 = 0$

$$F_C' = F_C \qquad \boxed{Q_a = \frac{2r_2 fl_3 P}{(r_2 - r_1)(l_1 - fl_2)}}$$





（2）假设D处先滑

1）对整体　　$\sum M_A = 0$

$$Pl_3 + P_1 l_1 - N_D l_1 + Q_b(l_2 + r_1 + r_2) - F_D(l_2 + 2r_2) = 0$$

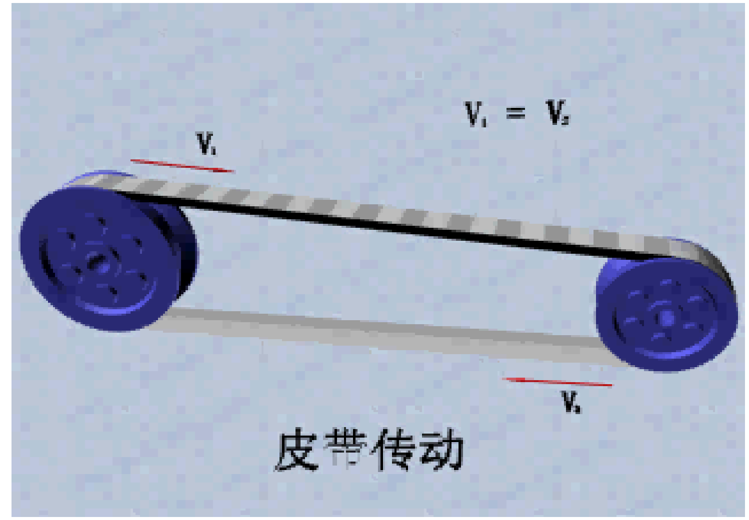
$$\boxed{F_D = fN_D}$$

2）对轮

$\sum M_C = 0$　　$Q_b(r_1 + r_2) - F_D \cdot 2r_2 = 0$

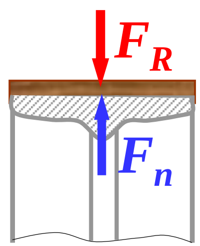
$$\boxed{Q_b = \frac{2r_2 f(Pl_3 + P_1 l_1)}{r_1(l_1 + fl_2) + r_2(l_1 - fl_2)}} \qquad \boxed{Q = min[Q_a，\ Q_b]}$$

工程实例—皮带轮传动机构



带截面　　　　最大摩擦力

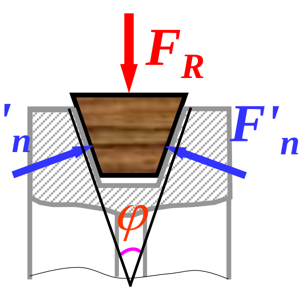
平带



扁平矩形

$$F = f_s F_n = f_s F_R$$

V带



梯形

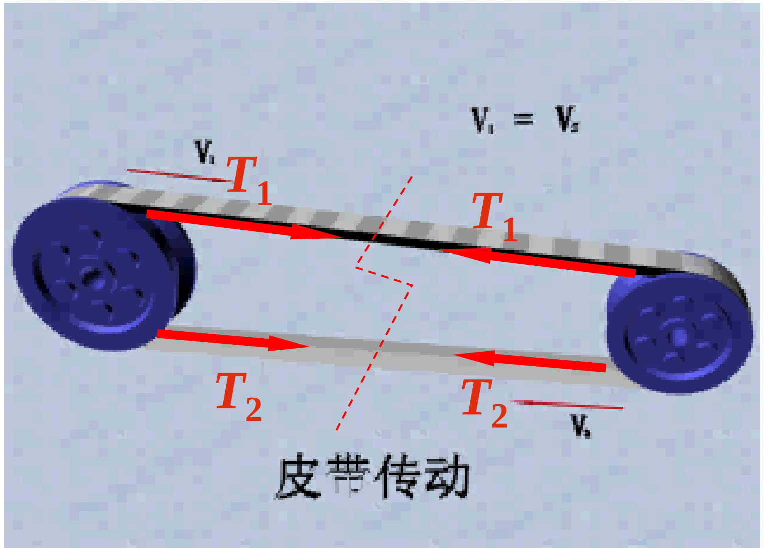
$$F' = 2 f_s F'_n = f_s F_R \Big/ \sin\frac{\varphi}{2}$$

φ—带轮槽角

$\varphi = 38^\circ$　　$F' \approx 3.07F = f_V F_R$

f_V—当量摩擦系数

平带中的拉力

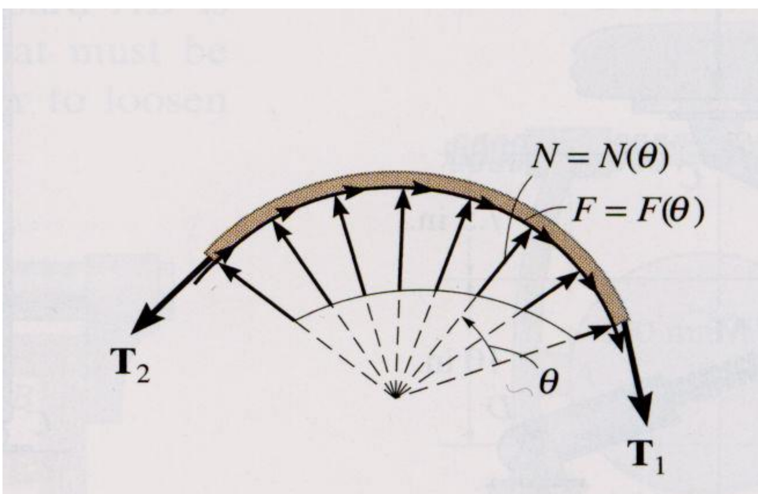


$$\sum F_x = 0$$

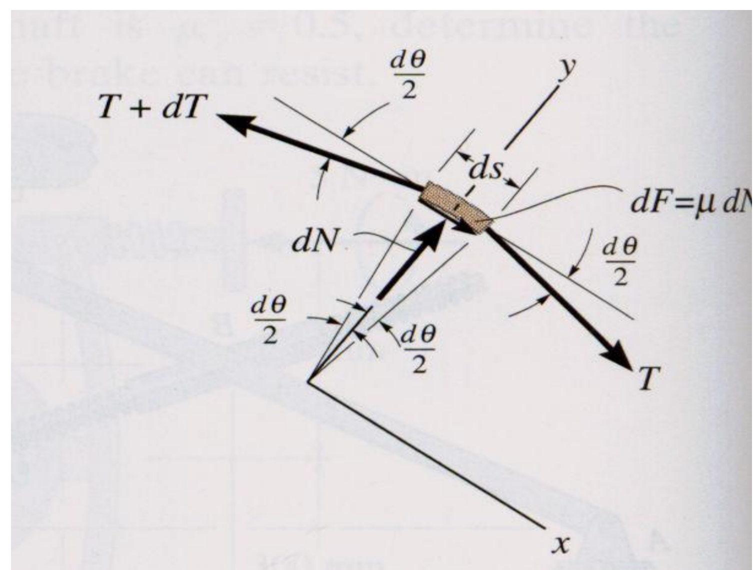
$$\sum F_y = 0$$

$$T\cos\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) + \mu \mathrm{d}N - \left(T + \mathrm{d}T\right)\cos\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) = 0$$

$$\mathrm{d}N - \left(T + \mathrm{d}T\right)\sin\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) - T\sin\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) = 0$$



(b)



平带中的拉力

$$T\cos\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+\mu\mathrm{d}N-\left(T+\mathrm{d}T\right)\cos\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)=0$$

$$\mathrm{d}N-\left(T+\mathrm{d}T\right)\sin\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-T\sin\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)=0$$

$$\sin\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\approx\frac{\mathrm{d}\theta}{2},\cos\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\approx 1$$

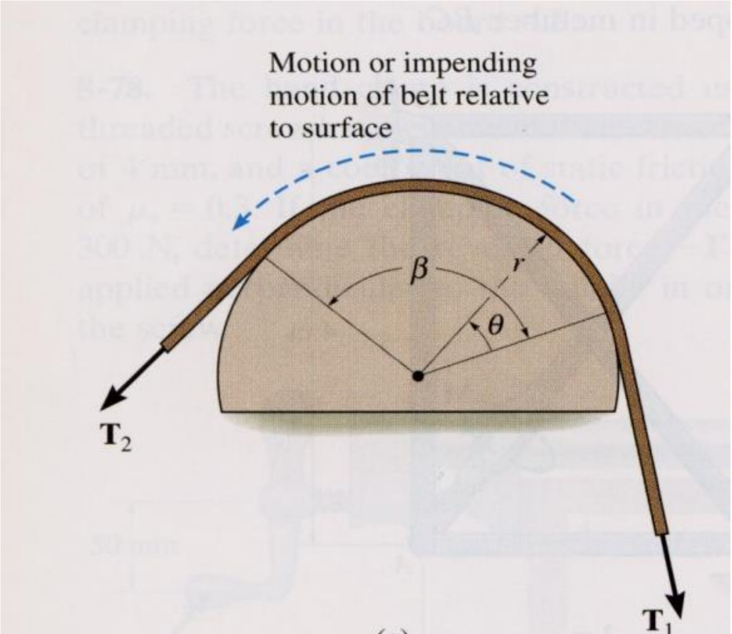
$$\mu\mathrm{d}N=\mathrm{d}T$$

$$\mathrm{d}N=T\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=\mu\mathrm{d}\theta$$

$$T=T_1\left(\theta=0\right)\qquad T=T_2\left(\theta=\beta\right)$$

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{T}=\mu\int_0^{\beta}\mathrm{d}\theta\qquad \ln\frac{T_2}{T_1}=\mu\beta$$



(a)

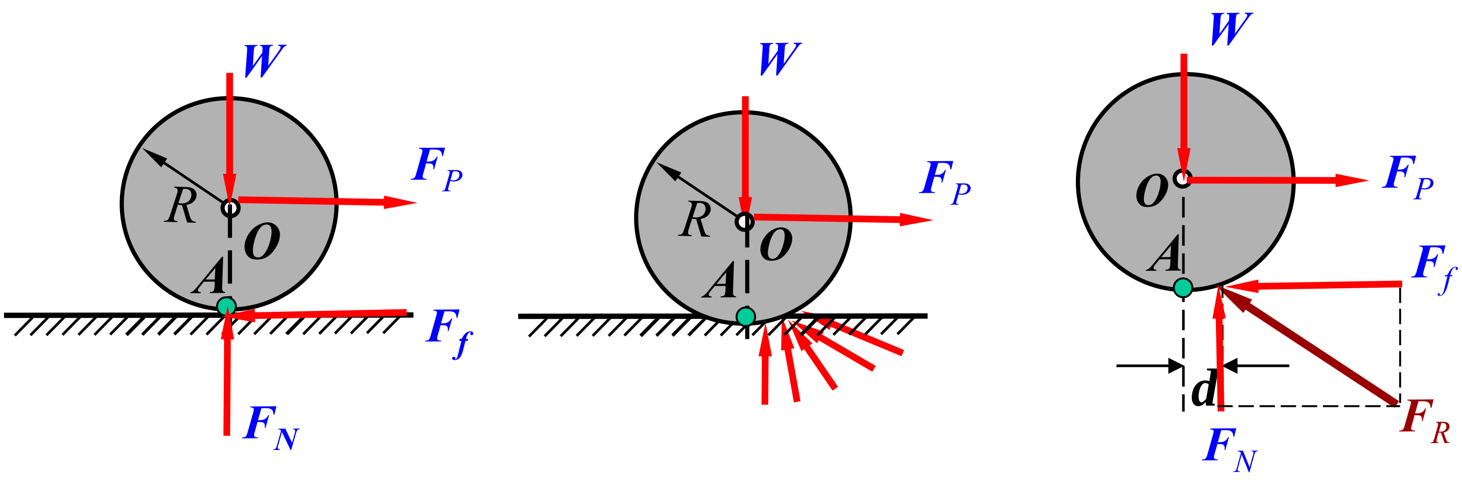
$$\boxed{T_2=T_1e^{\mu\beta}}$$

4. 滚动摩阻的概念

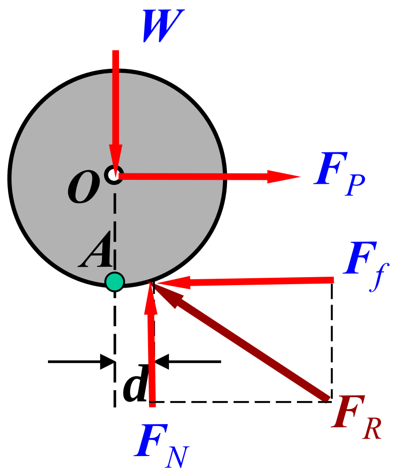
♦ 滚动摩阻的定义

当一物体沿着另一物体的表面滚动或具有滚动的趋势时，除可能受到滑动摩擦力外，还受到一个阻力偶的作用。这个阻力偶称为滚动摩阻。

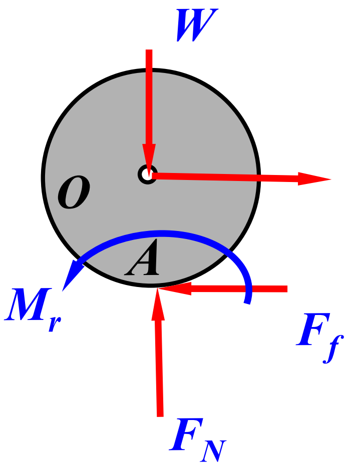
♦ 滚动摩阻性质与产生原因



W，F_N组成阻止滚动的力偶，即滚阻力偶 M_r。



$$M_r = F_N\, d$$



♦ 滚动摩阻定律

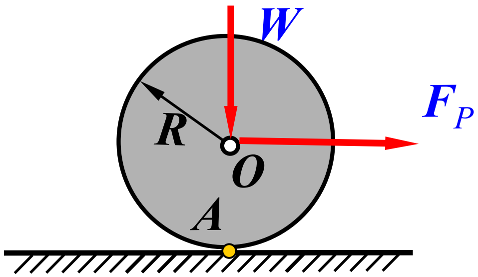
实验表明：滚动摩阻力偶矩具有极限值$M_{r,max}$，力偶矩超过$M_{r,max}$，滚子就不能保持平衡。

$$M_{r,max}=F_N\,\delta$$

δ称为滚阻系数，具有长度量纲

例 匀质轮子的重量W=10kN，半径R=0.5m；已知轮子与地面的滚阻系数δ=0.005m，摩擦系数f_s=0.2，问轮子是先滚还是先滑？

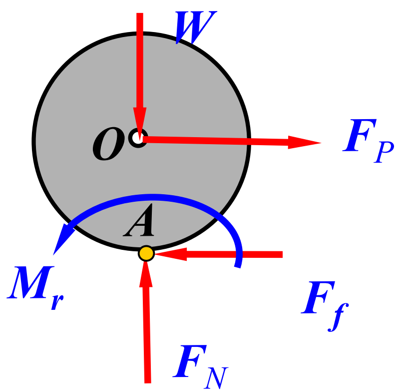
取轮子为研究对象，受力分析如图。



$$\sum F_x = 0,\quad F_P - F_f = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_N - W = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_r - F_P R = 0$$



讨论滑动： 临界时 $F_f = F_{max} = f_s F_N$

$$F_{P1} = F_f = f_s F_N = 0.2 \times 10 = 2\text{kN}$$

讨论滚动： 临界时 $M_r = M_{r,max} = \delta F_N$

$$F_{P2} = \frac{M_r}{R} = \frac{\delta F_N}{R} = 0.1\text{kN}$$

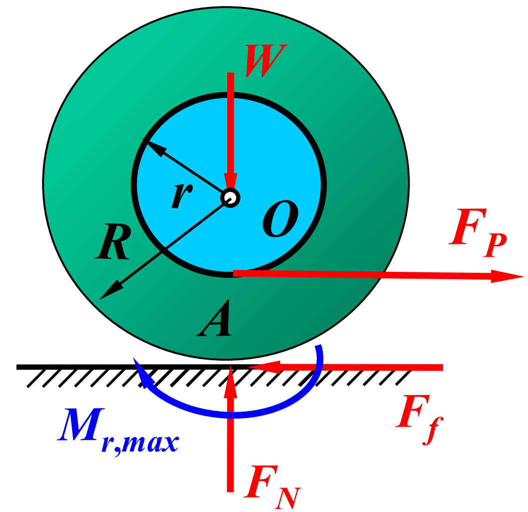
$$\boxed{\frac{\delta}{R} \ll f_s}$$

📖 讨论　轮子只滚动而不滑动的条件 $\frac{\delta}{R} < f_s$

例　匀质轮子的重量W=300N，由半径R=0.4m和半径r=0.1m两个同心圆固连而成。已知轮子与地面的滚阻系数δ=0.005m，摩擦系数f_s=0.2，求拉动轮子所需力F_P的最小值。

轮子可能发生的三种运动趋势：

1. 向左滚动趋势。
2. 向右滚动趋势。
3. 滑动趋势。



1. 轮不滑动，处于向左滚动的临界状态。

$$\sum F_x = 0,\quad F_P - F_f = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_N - W = 0$$

$$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\quad rF_P - M_{r,max} - F_f R = 0$$

临界时　$M_{r,max} = \delta F_N$

$$F_P = \frac{-M_{r,max}}{R - r} = -5\text{N}$$

负值说明轮不可能有向左滚动的趋势。

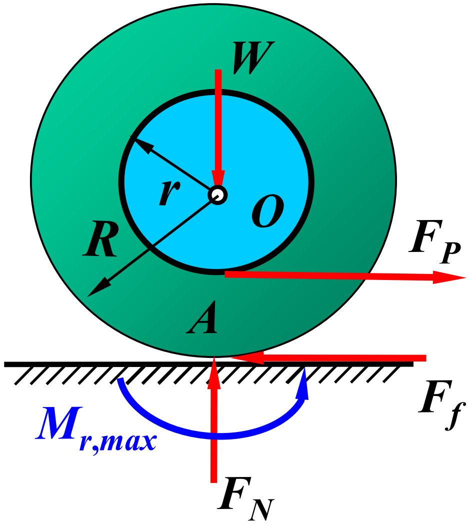
2. 轮不滑动，处于向右滚动的临界状态。

$$\sum F_x = 0,\quad F_P - F_f = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_N - W = 0$$

$$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\quad rF_P + M_{r,max} - F_f R = 0$$

$$F_P = \frac{M_{r,max}}{R-r} = 5\mathrm{N}$$



此时滑动摩擦力为　$F_P = F_f = 5\mathrm{N}$

3. 轮处于滑动的临界状态。

$$F_P = F_{max} = f_s F_N = 60\mathrm{N}$$

结论是：轮子向右滚动。

问题：绳与水平夹角变化，力值不变；结果会发生什么现象？实验观察！

本章小结

1．桁架内力计算：一种典型的力学建模问题

2．桁架内力计算：节点法；截面法

3．摩擦力与约束反力的区别，

摩擦角和自锁现象，

考虑摩擦的平衡问题.