西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY




数学建模—微积分的应用

晏文璟

数学与统计学院 计算科学系

wenjingyan@xjtu.edu.cn

http://gr.xjtu.edu.cn/web/wenjingyan


常见的模型

玩具、照片、飞机、火箭模型…	～实物模型
水箱中的舰艇、风洞中的飞机…	～物理模型
地图、电路图、分子结构图…	～符号模型

模型是为了一定目的，对客观事物进行简缩、抽象、提炼出来的**原型**的替代物。

现实世界与数学模型

数学是科学之母，科学技术离不开数学，它通过建立数学模型与数学产生紧密联系。数学又以各种形式应用于科学技术各领域。数学擅长于处理各种复杂的依赖关系，精细刻画量的变化以及可能性的评估，可以帮助人们探讨原因、量化过程、控制风险、优化管理、合理预测。

现实世界 | 数学模型

现实问题的信息 —表述→ 数学模型

数学模型 —求解→ 数学模型的解答

数学模型的解答 —解释→ 现实问题的解答

现实问题的解答 —验证→ 现实问题的信息

MATHEMATICS IS EVERYWHERE!

数学模型的求解

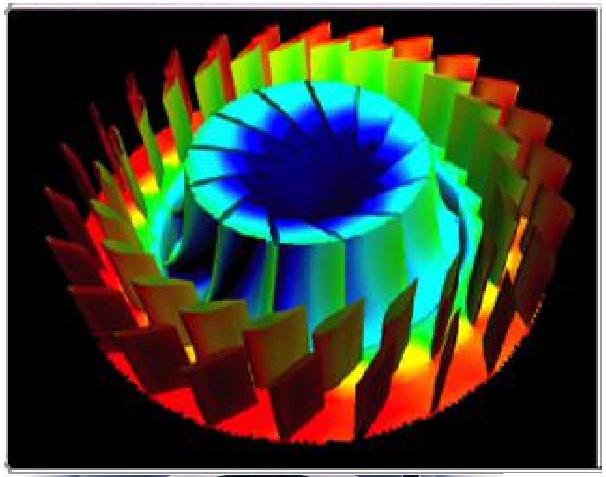
求解方法 → 演绎法 → 解析解

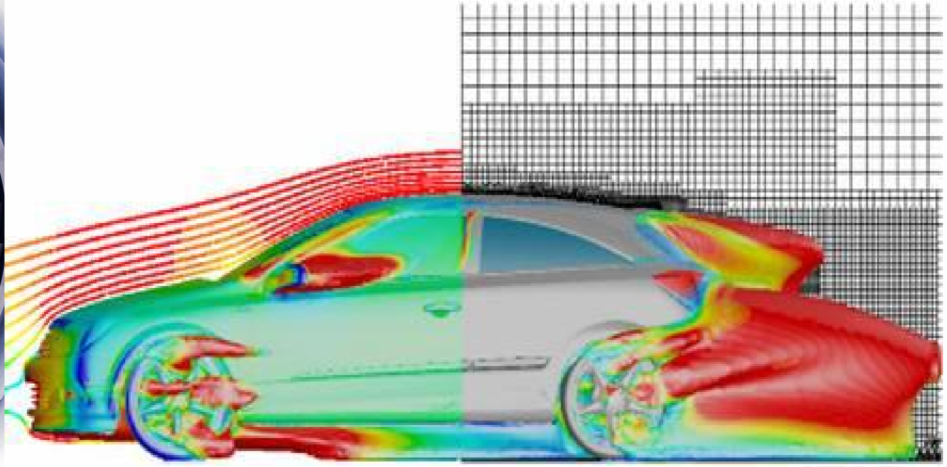
求解方法 → 数值法 → 数值解

　　科学计算是指利用计算机来完成科学研究和工程技术中提出的数学问题的计算，是一种使用计算机解释和预测实验中难以验证的、复杂现象的方法。科学计算是伴随着电子计算机的出现而迅速发展并获得广泛应用的新兴交叉学科，是数学及计算机应用于高科技领域的必不可少的纽带和工具。

科学理论　　科学实验　　科学计算

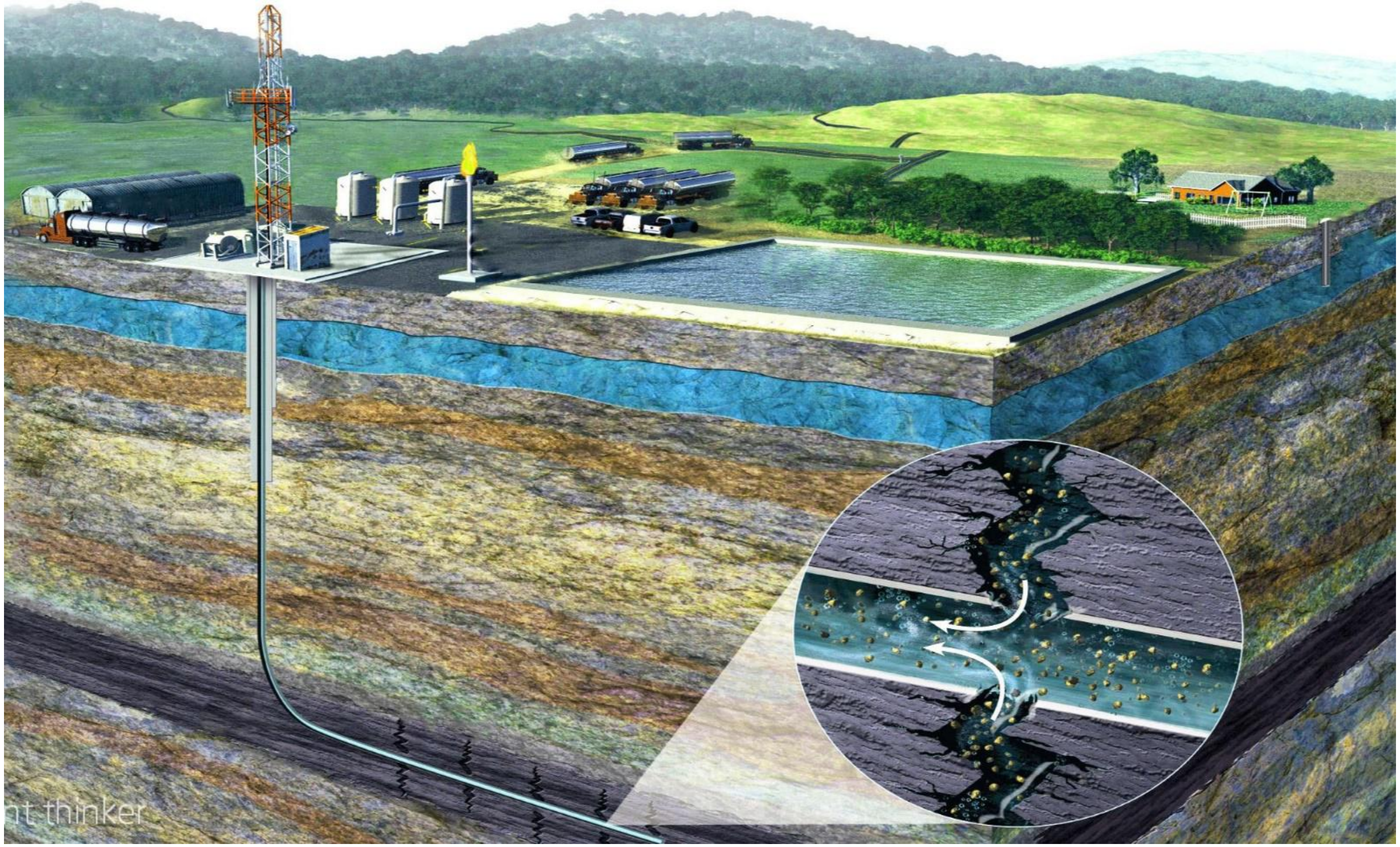
科学计算的应用—重大装备的外形设计



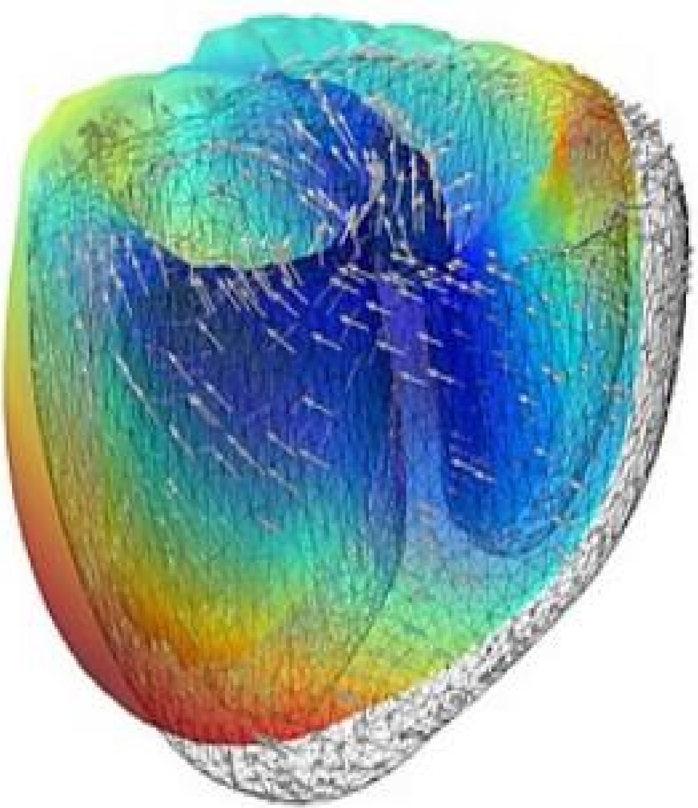


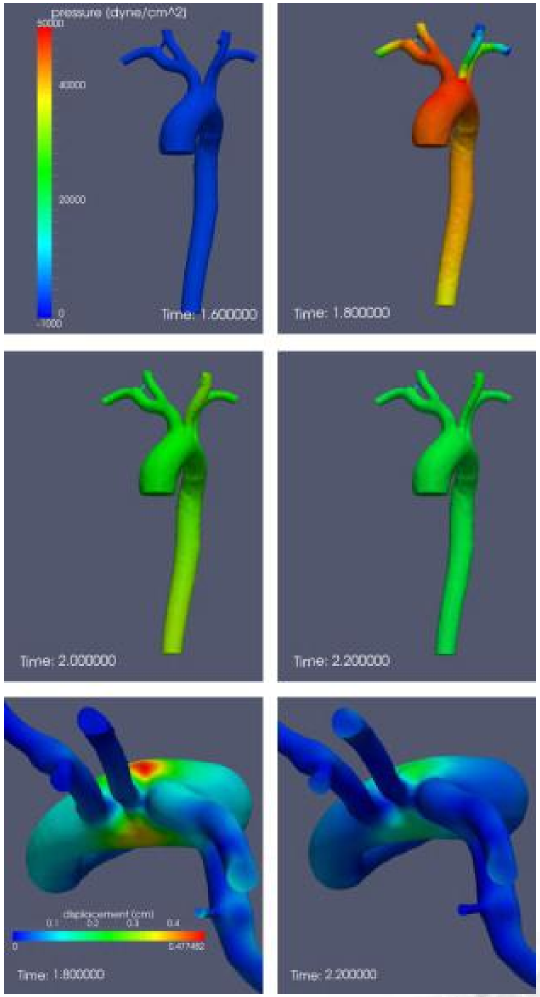
科学计算的应用—反问题的求解及应用

科学计算的应用—致密油气开发



科学计算的应用—心血管模拟





建立数学模型的主要步骤

1. **模型准备**：了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息，并用数学语言来描述问题。

2. **模型假设**：根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，使用精确的语言提出一些恰当的假设。

3. **模型建立**：在假设的基础上，利用适当的数学工具来刻划各变量之间的数学关系，尽量用简单的数学工具建立相应的数学结构。

4. **模型求解**：利用获取的数据资料，针对模型的所有参数进行计算或者做出估计。

建立数学模型的主要步骤

5. **模型分析**：针对所得结果进行数学的分析。

6. **模型检验**：将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来验证模型的准确性、合理性和适用性。如果模型与实际较吻合，则要对计算结果给出其实际含义，并进行解释。如果模型与实际吻合较差，则应该修改假设，再次重复建模过程。

7. **模型应用**：应用方式因问题的性质和建模的目的而异。

数学建模的主要步骤

模型假设

针对问题特点和建模目的

作出合理的、简化的假设

在合理与简化之间作出折中

模型建立

用数学的语言、符号描述问题

发挥想象力

使用类比法

尽量采用简单的数学工具

数学建模的主要步骤

模型求解　各种数学方法、软件和计算机技术

分析检验

与实际现象、数据比较

误差分析、 统计分析、稳定性分析

检验模型的合理性、适用性

模型应用　发挥模型的解释、判断、预见功能

实践—理论—实践

数学建模的主要步骤

实际问题

↓

模型假设：抽象、简化、明确参变量

↓

根据某种“定律”或“规律”建立变量和参数间的一个明确的数学关系，这种关系式就是实际问题在数学意义上的模型

↓

解析地或近似地求解该数学问题

↓

用实际问题的数据检验该模型

通过 ↓ 　　通不过（返回“模型假设”）

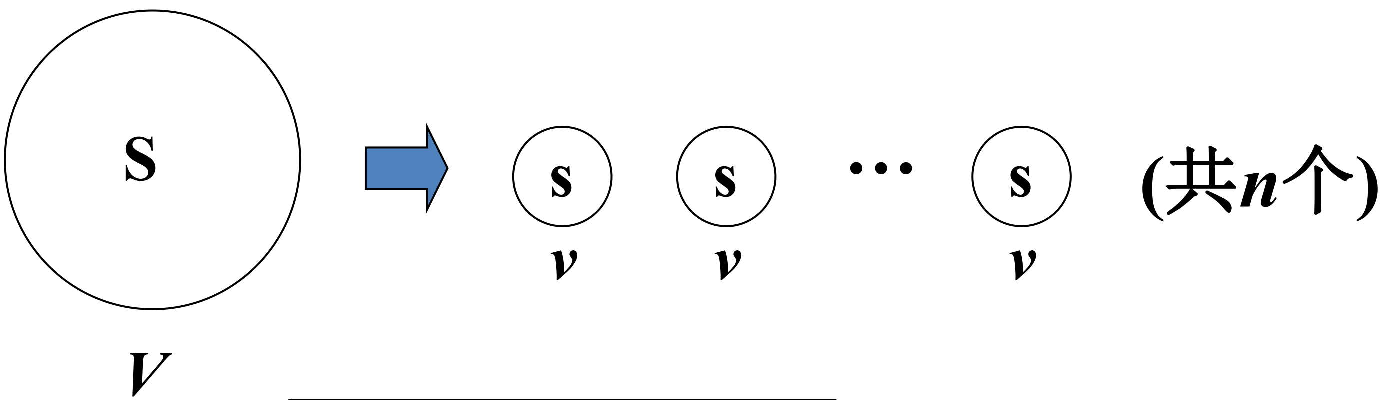
投入使用

1. 包饺子问题

设在包饺子时，通常用1kg面粉和1kg馅能够包100个饺子。这一次馅多了0.4kg，仍然用1kg的面粉，能否将饺子包大一些或包小一些将这些馅用完？并计算此时饺子的个数。

问题分析

面积为S的一个饺子皮，包成体积为V的饺子，若分成n个皮，每个圆面积为s，包成体积为v的饺子。



V和 nv 哪个大? 定性分析

V比 nv大多少? 定量分析

模型假设

（1）饺子的大小和形状是一样的，由饺子馅决定；

（2）饺子皮的厚度是均匀的，体积忽略不计。

饺子皮的厚度一样

$$S = ns \quad (1)$$

$$\boxed{S = ns \Rightarrow V > nv?}$$

模型建立与求解

设大饺子的半径为R，小饺子的半径为r，则饺子皮面积分别为$S=\pi R^2$，$s=\pi r^2$，且$S=ns$，体积分别为$V=dR^3$, $v=dr^3$，从而

$$\left(\frac{V}{v}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{S}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

$$V = n^{\frac{3}{2}} v > nv \qquad (3)$$

可见，对于同样多的饺子皮，饺子大了可以多包些馅。所以在面粉一定的情况下，馅如果多了，应该把饺子包大些，少包一些饺子。

模型应用

假设要包n个大饺子，由于面粉重量一定，则

$$nS=100s, \qquad (4)$$

由饺子馅的重量之比得

$$nV/100v=1.4, \qquad (5)$$

联立上述等式得

$$(140/n)^2=(100/n)^3$$

求解出n大约为51。

2. 双层玻璃的功效

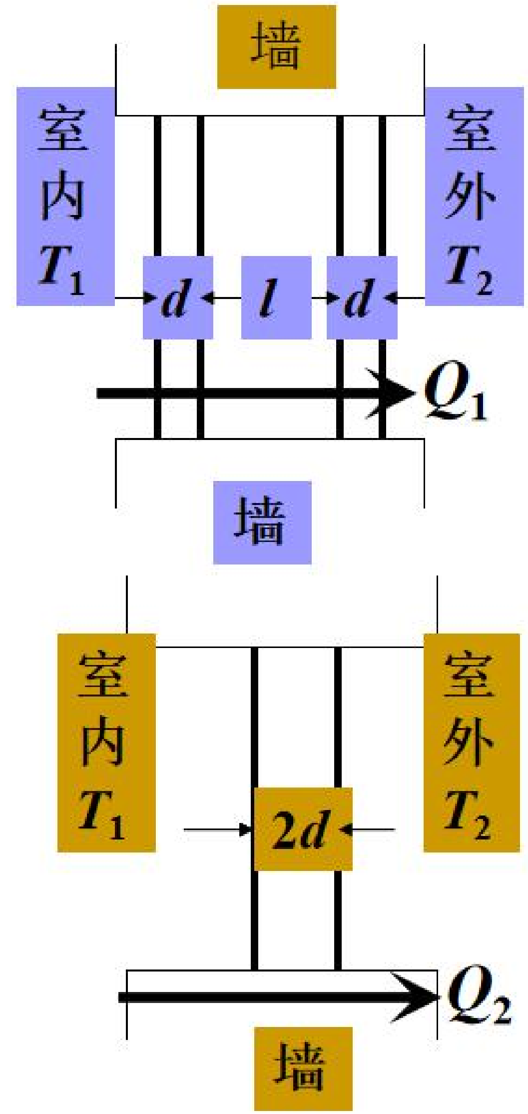
寒冷的北方，许多住房都是通过安装双层玻璃窗保暖，即在窗户上装两层玻璃，中间留有一定的空隙，试比较双层玻璃窗与同样厚度的单层玻璃窗的热量流失情况？

问题分析与假设

1. 双层玻璃窗的两层玻璃的厚度都为d，两层玻璃的间距为l；单层玻璃窗的玻璃厚度为$2d$，所用玻璃材料相同；

2. 热量传播只有传导，没有对流，即假定窗户密封性好，两层玻璃之间的空气是不流动的；

3. 室内室外温度T_1, T_2不变，热传导过程处于稳态，并且单位时间单位面积通过的热量是常数。



模型建立

Q ~单位时间单位面积传导的热量

ΔT~温差，d~材料厚度，k~热传导系数

热传导定律

$$Q = k\frac{\Delta T}{d}$$

模型建立

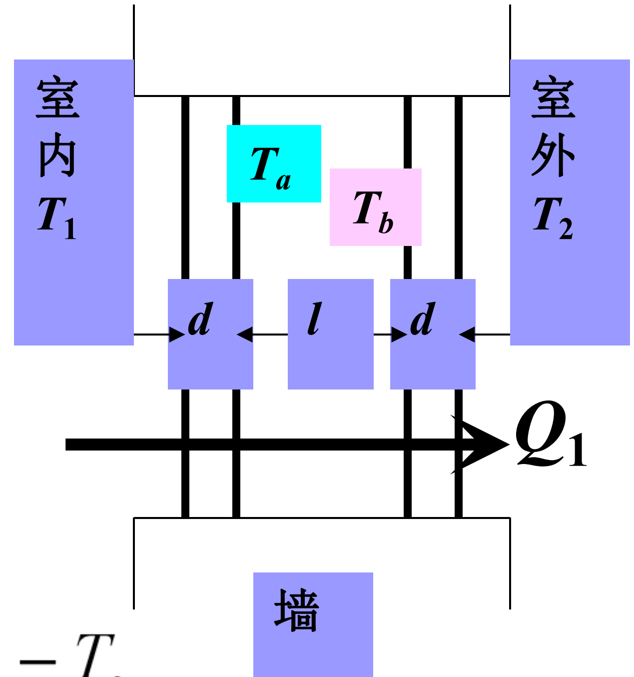
记双层玻璃窗传导的热量Q_1

T_a~内层玻璃的外侧温度

T_b~外层玻璃的内侧温度

k_1~玻璃的热传导系数

k_2~空气的热传导系数



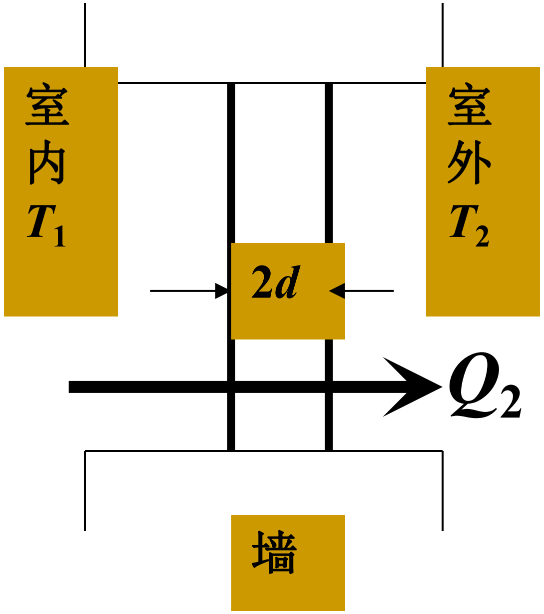
$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d}$$

$$\Rightarrow \quad Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(s+2)}, \quad s = h\frac{k_1}{k_2}, \quad h = \frac{l}{d}$$

模型建立及求解

记同样厚度的单层玻璃窗传导的热量为Q_2

$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d} \qquad Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(s+2)}$$



双层与单层窗传导的热量之比

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2}{s+2}, \quad s = h\frac{k_1}{k_2}, \quad h = \frac{l}{d} \qquad Q_1 < Q_2$$

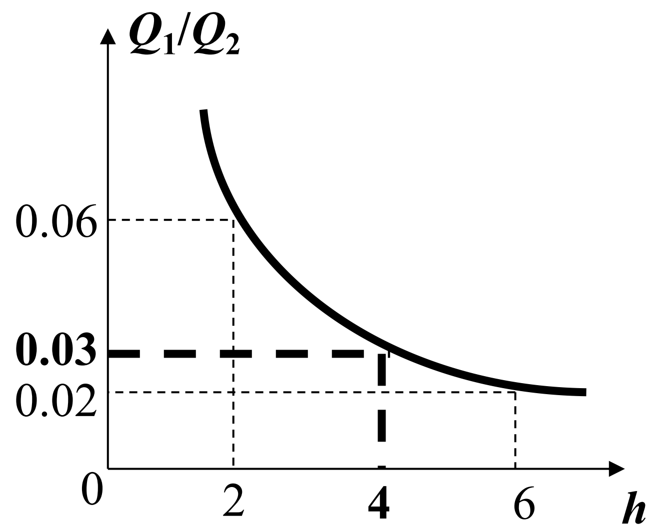
$k_1=4\times10^{-3}\sim8\times10^{-3}$，$k_2=2.5\times10^{-4}$，$k_1/k_2=16\sim32$，$Q_1$比$Q_2$的减少量，作最保守的估计，

取$k_1/k_2=16$ $\Rightarrow$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{8h+1}, \quad h = \frac{l}{d}$$

模型应用

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{1}{8h+1},\quad h=\frac{l}{d}$$



取 $h=l/d=4$，则 $Q_1/Q_2=0.03$，即双层玻璃窗与同样多材料的单层玻璃窗相比，可减少97%的热量损失。

结果分析

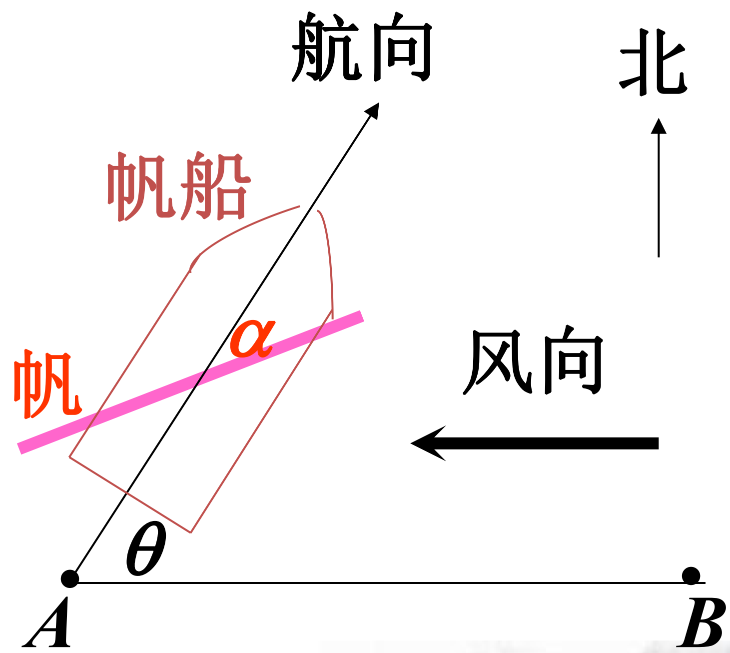
Q1/Q2之所以如此小，是由于房间空气极低的热传导系数 k2, 而这要求空气非常干燥、不流通。实际上，房间通过天花板、墙壁等损失的热量更多。双层窗的功效不会如此之大。

3. 扬帆远航

帆船在海面上乘风远航，确定最佳的航行方向及帆的朝向。

简化问题

海面上东风劲吹，设帆船要从A点驶向正东方的B点，确定起航时的航向θ，以及帆的朝向α.



模型分析

- 风(通过帆)对船的推力w
- 风对船体部分的阻力p

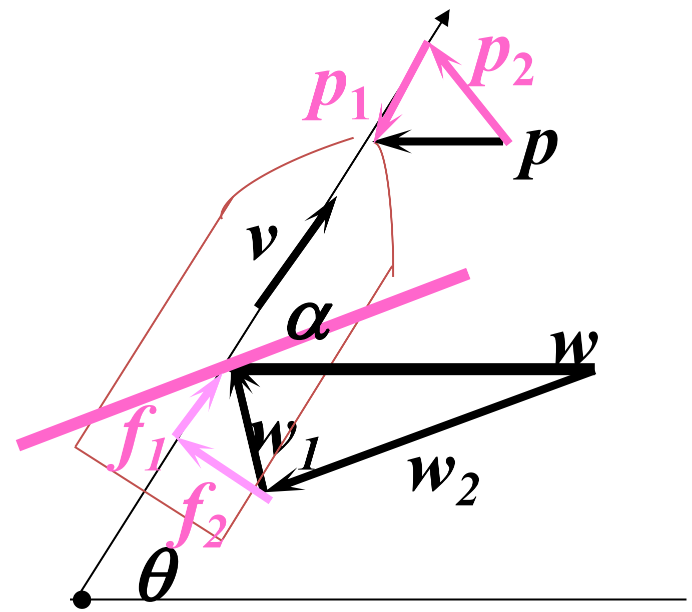
推力w的分解　　$w=w_1+w_2$

$w_1=f_1+f_2$

f_1~航行方向的推力

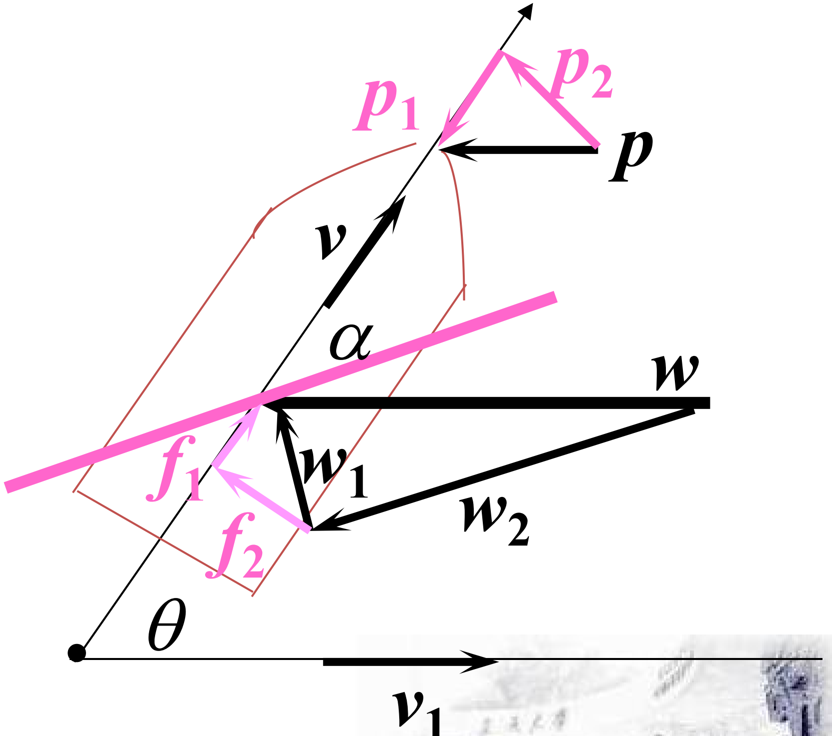
阻力p的分解　　$p=p_1+p_2$

p_1 ~航行方向的阻力



模型假设

- w与帆迎风面积s_1成正比，p与船迎风面积 s_2成正比，比例系数相同且 s_1远大于 s_2。
- w_2与帆面平行，可忽略。
- f_2, p_2垂直于船身，可由舵抵消。
- 航向速度v与力 $f=f_1-p_1$成正比。



模型建立

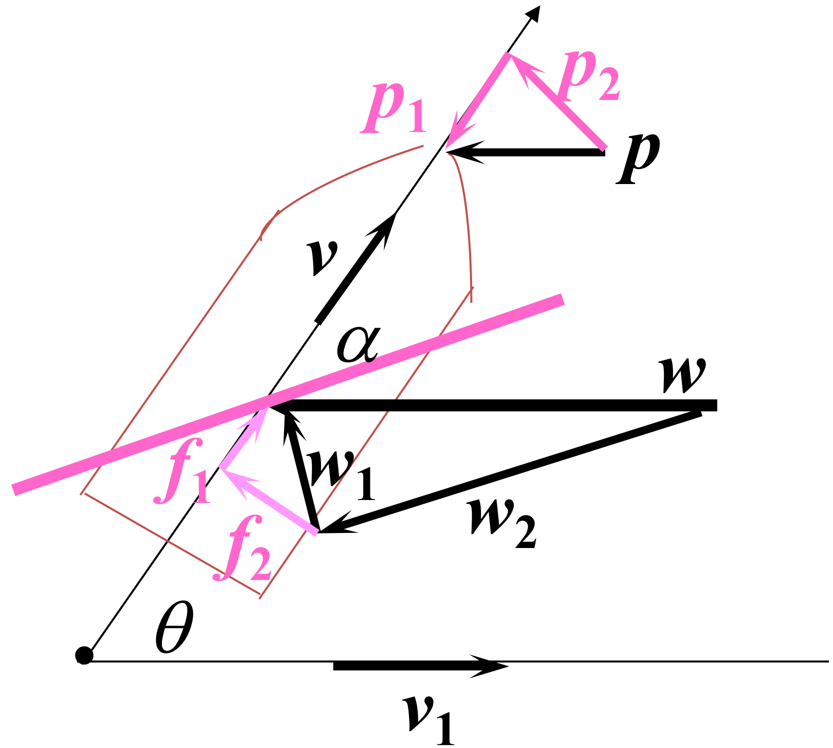
$w = ks_1$， $p = ks_2$

$w_1 = w\sin(\theta - \alpha)$

$f_1 = w_1 \sin\alpha = w \sin\alpha \sin(\theta - \alpha)$

$p_1 = p\cos\theta$

$v = k_1(f_1 - p_1)$



船在正东方向速度分量$v_1 = v\cos\theta$

模型建立

$v_1 = v\cos\theta \quad = k_1(f_1 - p_1)\cos\theta$

$f_1 = w_1\sin\alpha = w\sin\alpha\,\sin(\theta-\alpha) \qquad p_1 = p\cos\theta$

模型求解

求θ,α ,使得 v_1最大

1) 当θ固定时，求α使f_1最大

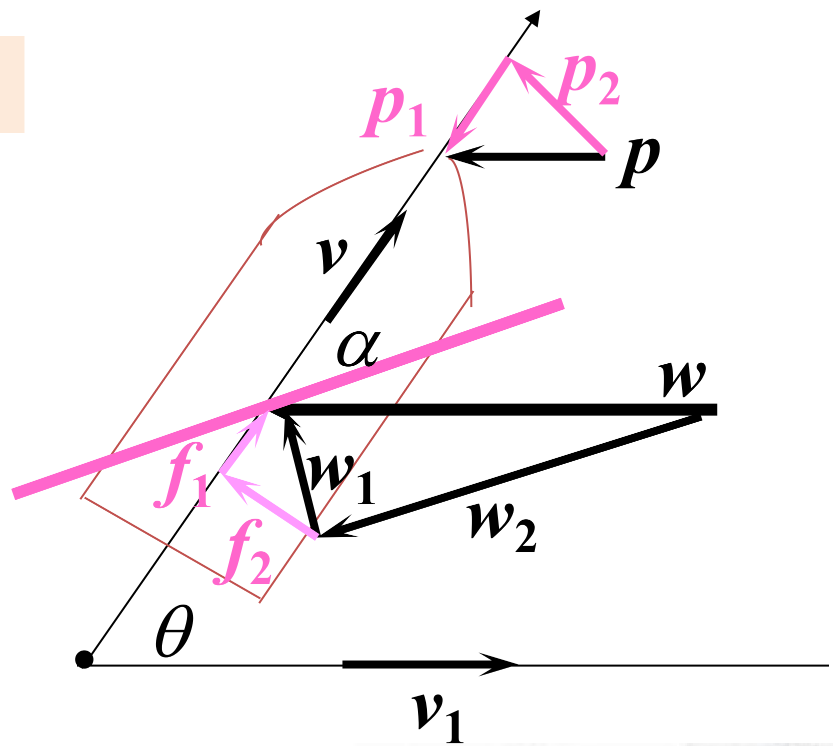
$f_1 = w[\cos(\theta-2\alpha)-\cos\theta]/2$

⇨ $\alpha=\theta/2$ 时 $f_1=w(1-\cos\theta)/2$最大

2) 令$\alpha=\theta/2$,

$v_1 = k_1[w(1-\cos\theta)/2 - p\cos\theta]\cos\theta$

求θ使v_1最大（$w=ks_1,\ p=ks_2$）



模型求解

$$v_1=k_1\,[w(1-\cos\theta)/2-p\cos\theta]\cos\theta$$

$$=(k_1 w/2)[1-(1+2p/w)\cos\theta]\cos\theta$$

$w=ks_1,\ p=ks_2$　　记 $t=1+2s_2/s_1,\ k_2=k_1 w/2$

$$v_1=k_2(1-t\cos\theta)\cos\theta=k_2 t\left[\frac{1}{4t^2}-\left(\cos\theta-\frac{1}{2t}\right)^2\right]$$

$\Rightarrow$ $\cos\theta=\dfrac{1}{2t},\ \left(t=1+\dfrac{2s_2}{s_1}\right),\ \alpha=\dfrac{\theta}{2}$ $\Rightarrow$ v_1最大

$s_1>>s_2$ $\Rightarrow$ $1<t<2$ $\Rightarrow$ $1/4<\cos\theta<1/2$ $\Rightarrow$ $60^\circ<\theta<75^\circ$

备注

- 只讨论起航时的航向，是静态模型.
- 航行过程中终点*B*将不在正东方，应调整θ和α.

4. 椅子能放平稳吗

将四条腿一样长的正方形椅子放在不平的地面上，是否总能设法使它的四条腿同时着地(放稳)？

问题假设

1. 地面为光滑曲面；

2. 相对地面的弯曲程度而言，椅子的腿是足够长的；

3. 只要有一点着地就视为已经着地，即与地面的接触视为几何上的点接触；

4. 椅子的中心不动。

问题分析

用数学语言把椅子位置和四条腿着地的关系表示出来。

椅子位置

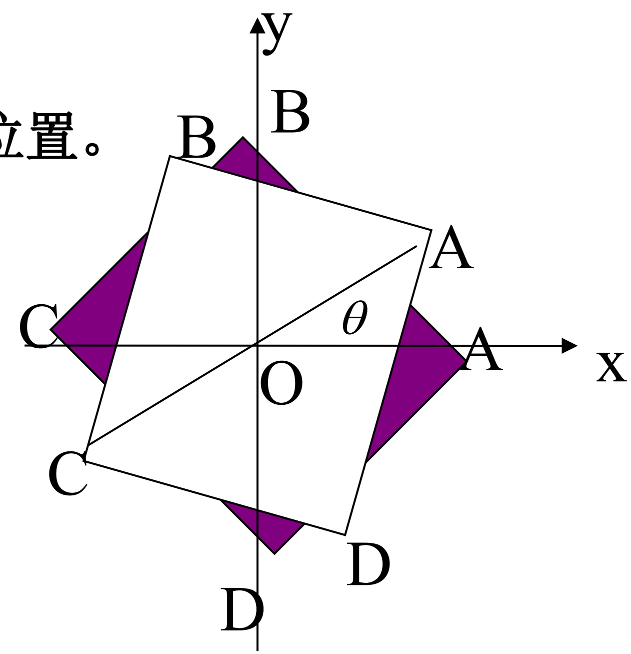
利用正方形(椅脚连线)的对称性。

用θ(对角线与x轴的夹角)表示椅子位置。

四条腿着地

椅脚与地面距离为零，

距离是θ的函数。



四个距离
(四条腿)

→

正方形
对称性

两个距离




问题分析

A, C 两腿与地面距离之和 ~ $f(\theta)$

B, D 两腿与地面距离之和 ~ $g(\theta)$

地面为连续曲面 ⇨ $f(\theta)$, $g(\theta)$是连续函数

椅子在任意位置至少三条腿着地 ⇨ 对任意θ, $f(\theta)$, $g(\theta)$至少一个为0

$$f(\theta)g(\theta)=0$$

不失一般性，设初始时：

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\theta=0, g(0)=0, f(0)>0$$

模型建立

数学命题　　已知 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数, $g(0)=0$,

$f(0)>0$, 且对任意 θ, $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$

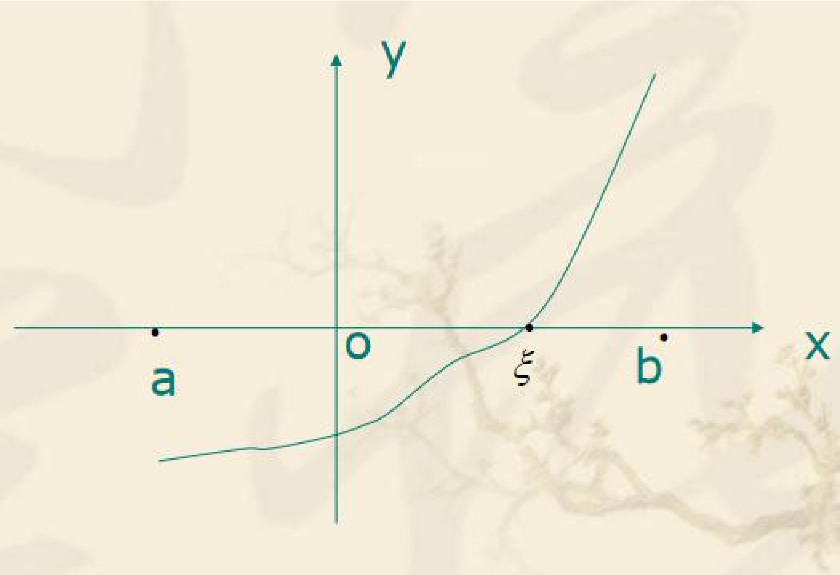
求证：至少存在 $\theta_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得

$$f(\boldsymbol{\theta}_0)=g(\boldsymbol{\theta}_0)=0$$

回忆：连续函数的介值定理

若$\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上连续， $\varphi(a)\varphi(b)<0$,

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使$\varphi(\xi)=0$.






模型求解

1. 将椅子旋转90^o，对角线AC和BD互换。由 $g(0)=0$，$f(0) > 0$，知 $f(\pi/2)=0$, $g(\pi/2)>0$。

2.令 $h(\theta)= f(\theta)-g(\theta)$, 则 $h(0)>0$ 和 $h(\pi/2)<0$。

3. 由 f, g 的连续性，得到 h为连续函数, 根据连续函数的基本性质, 必存在θ_0 ($0< \theta_0 < \pi/2$) , 使$h(\theta_0)=0$, 即 $f(\theta_0) = g(\theta_0)$ 。

4. 因为 $f(\theta) \bullet g(\theta)=0$, 所以 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

建模的关键

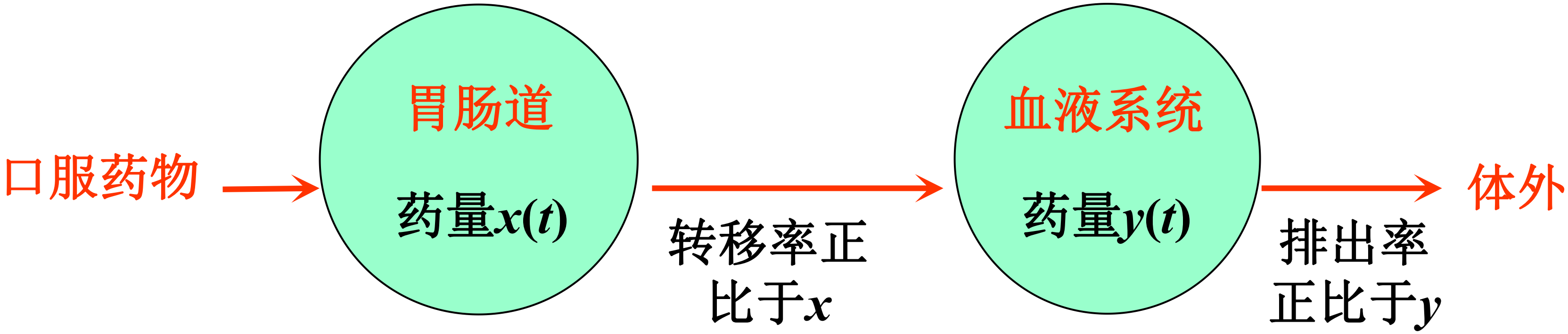
用θ表示椅子的位置
用 $f(\theta)$, $g(\theta)$表示椅腿与地面的距离

5. 如何施救药物中毒

两位家长带着孩子急匆匆来到医院急诊室。诉说两小时前孩子一次误吞下11片治疗哮喘病、剂量100mg/片的氨茶碱片，已出现呕吐、头晕等不良症状。按照药品使用说明书，氨茶碱的成人用量是100~200mg / 次，儿童是3~5 mg/kg。过量服用可使血药浓度(单位血液容积中的药量)过高，100μg/ml浓度会出现严重中毒，200μg/ml浓度可致命。

医生需要判断：孩子的血药浓度会不会达到100~200 μg/ml；如果会达到，应采取怎样的紧急施救方案。

问题分析



一般认为血液系统内药物的分布，即血药浓度是均匀的。

血液系统对药物的吸收率 (胃肠道到血液系统的转移率) 和排出率可以由**半衰期**确定。半衰期可以从药品说明书上查到。

问题分析

血药浓度=药量/血液总量

通常，血液总量约为人体体重的7~8%，体重50~60 kg的成年人有4000ml左右的血液。

目测孩子的体重约为成年人的一半，可认为其血液总量约为2000ml。

临床施救的办法：

1. 口服活性炭来吸附药物，可使药物的排出率增加到原来（人体自身）的2倍。

2. 体外血液透析，药物排出率可增加到原来的6倍， 但是安全性不能得到充分保证。




模型假设

设胃肠道中的药量 $x(t)$, 血液系统中药量 $y(t)$，时间 t 以孩子误服药的时刻为起点（t=0）。

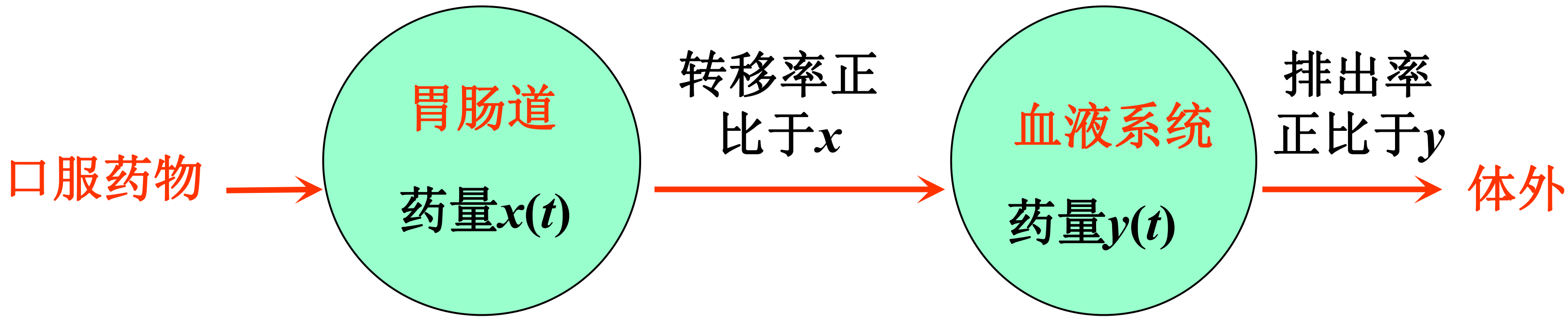
1. 胃肠道中药物向血液的转移率与 $x(t)$ 成正比，比例系数 λ (>0)，总剂量1100mg药物在 t=0 瞬间进入胃肠道。

2. 血液系统中药物的排出率与 $y(t)$ 成正比，比例系数 μ (>0)，t=0 时血液中无药物。

3. 氨茶碱被吸收的半衰期为5小时，排出的半衰期为6小时。

4. 孩子的血液总量为2000ml。

模型建立



$x(t)$下降速度与 $x(t)$ 成正比(比例系数 λ), 总剂量 1100mg 药物在 t=0 瞬间进入胃肠道。

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x, \quad x(0) = 1100$$

$y(t)$由吸收而增长的速度是 λx，由排出而减少的速度与 $y(t)$ 成正比 (比例系数 μ) , t=0 时血液中无药物。

$$\frac{dy}{dt} = \lambda x - \mu y, \quad y(0) = 0$$

模型求解

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x, \quad x(0) = 1100 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1100\, e^{-\lambda t}$$

药物吸收的半衰期为5小时 $\Rightarrow$ $x(5) = x(0)/2$

$$\Rightarrow \quad 1100 e^{-5\lambda} = 1100/2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = (\ln 2)/5 = 0.1386$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda x - \mu y = -\mu y + 1100\,\lambda e^{-\lambda t}$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1100\,\lambda}{\lambda - \mu}\left(e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}\right)$$

模型求解

药物排出的半衰期为6小时, 只考虑血液中对药物的排出

$$\frac{dy}{dt} = -\mu y$$

$$y(\tau) = a,\ y(\tau+6) = a/2$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = ae^{-\mu(t-\tau)}$$

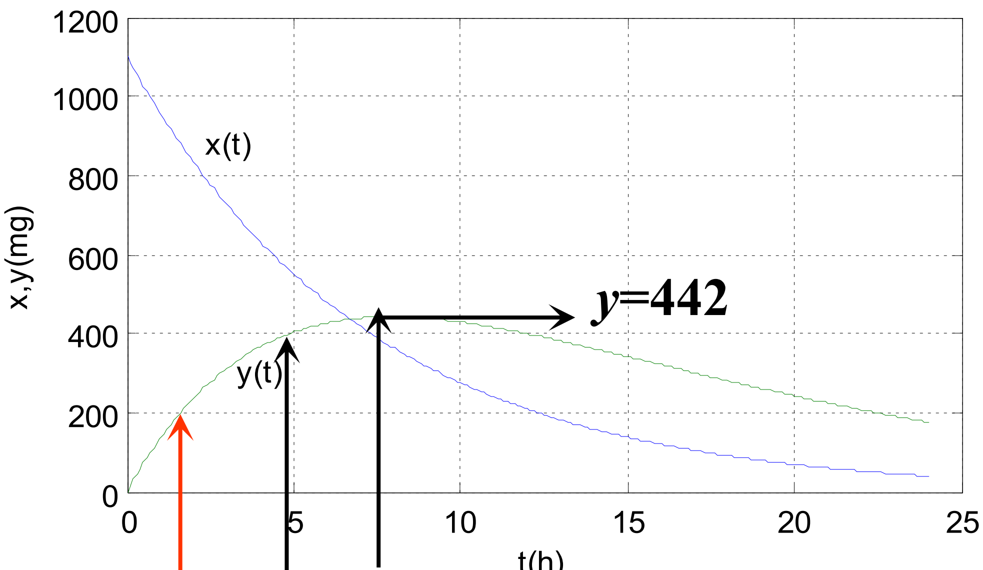
$$\Rightarrow \quad \mu = (\ln 2)/6 = 0.1155$$

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

结果分析

胃肠道药量 $x(t) = 1100\,e^{-0.1386\,t}$

血液系统药量 $y(t) = 6600(e^{-0.1155t} - e^{-0.1386t})$



t=7.89

t=1.62

t=4.87

血液总量 2000ml

血药浓度 100μg/ml

$\Leftrightarrow$ **$y(t)$ =200mg** $\Rightarrow$ 严重中毒

血药浓度200μg/ml

$\Leftrightarrow$ **$y(t)$ =400mg** $\Rightarrow$ 致命

$y(2)$=236.5，孩子到达医院前已严重中毒，如不及时施救，约3小时后将致命！

施救方案

口服活性炭使药物排出率 μ 增至原来的2倍。

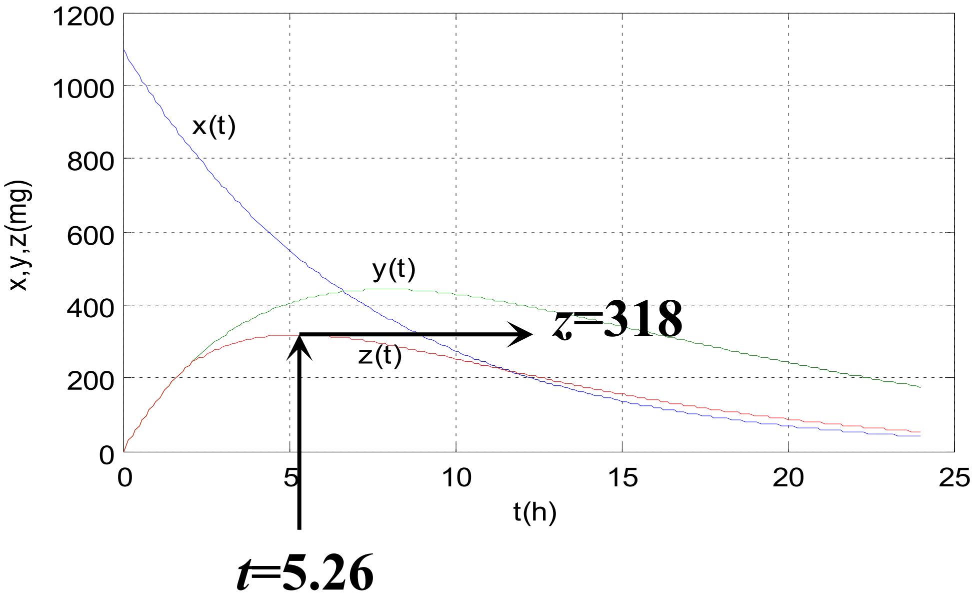
孩子到达医院 (t=2) 就开始施救，血液中的药量记作$z(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda x - \mu z,\ t \ge 2, \quad x = 1100\,e^{-\lambda t}, \quad z(2) = 236.5$$

λ=0.1386 (不变)，μ =0.1155*2=0.2310

$$z(t) = 1650\,e^{-0.1386\,t} - 1609.5\,e^{-0.2310\,t}, \quad t \ge 2$$

施救方案



- 施救后血液中药量 $z(t)$显著低于$y(t)$。
- $z(t)$最大值低于致命水平。
- 要使$z(t)$在施救后立即下降，可算出μ至少应为0.4885。

若采用体外血液透析，μ可增至0.1155*6=0.693，血液中药量下降更快。请大家试着建立这种施救措施的数学模型并分析效果。

6. 恋爱模型

考虑恋人Romeo与Juliet之间的恋爱关系。显然，他们对彼此的感觉应该会随时间发生变化。于是有了下面的问题：

(1) Romeo和Juliet对彼此的感觉怎样随时间变化？

(2) 当Juliet对Romeo的恨日益增加时，Romeo会越来越疯狂地爱上Juliet 吗？

(3) 假定他们是彼此相爱的，那么他们的恋爱关系是经得起时间的考验，还是最终无疾而终？

试建立数学模型来回答这些问题。




问题分析与模型假设

- 定义和量化爱和恨两种感情是第一个困难；

- 爱的对立面不一定是恨；爱、恨两种感情是可以共存的，你可以喜欢一个人的某些方面，但同时厌恶他/她的其他方面；

- 假定你对另一个方的感情只受到你对她/他的喜欢程度或者她/他对你的喜欢程度的影响，但其它因素的影响未必总能忽略；

- 假定每对恋人的恋爱风格是不变的，但应该意识到适应性和学习能力可以改变这一点。

问题分析与模型假设

R(t)---- 在 t 时刻 Romeo 对 Juliet 的感情

R(t)>0, Romeo 爱着Juliet

R(t)=0, Romeo 对 Juliet的态度是中立的

R(t)<0, Romeo 恨着Juliet

J(t)---- 在t时刻 Juliet 对 Romeo 的感情

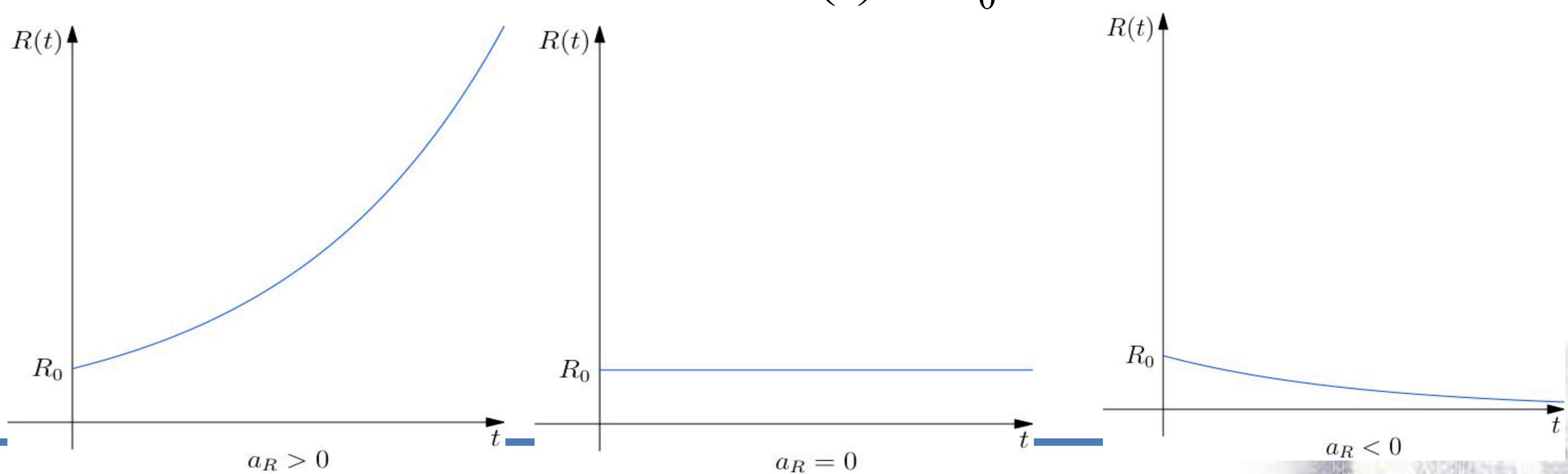
为了描述 Romeo 和 Juliet对彼此感情随时间的变化情况，下面就需要建立关于dR(t)/dt 与dJ(t)/dt的方程。

模型一

假定Romeo与Juliet是相互有感情的，Romeo对Juliet的感情的变化仅依赖于他自己对Juliet的感觉。假定依赖性是线性的，那么就有

$$\frac{dR(t)}{dt} = a_R R(t), \quad R(0) = R_0$$

如果系数 a_R 是常数，则解为 $R(t) = R_0 e^{a_R t}$.



类似地，对 Juliet 做同样的假设, 得到

$$\frac{dJ(t)}{dt} = a_J J(t), \quad J(0) = J_0.$$

两个方程联立得

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dR(t)}{dt} = a_R R(t), & R(0) = R_0 \\ \dfrac{dJ(t)}{dt} = a_J J(t), & J(0) = J_0 \end{cases}}$$

这就是描述Romeo与Juliet的感情随时间的变化情况的第一个数学模型。

如果你是Romeo或Juliet，你能接受这个模型？
那么，莎剧中的Romeo与Juliet又是怎谈恋爱的？

模型二：莎剧第一幕中的Romeo与Juliet

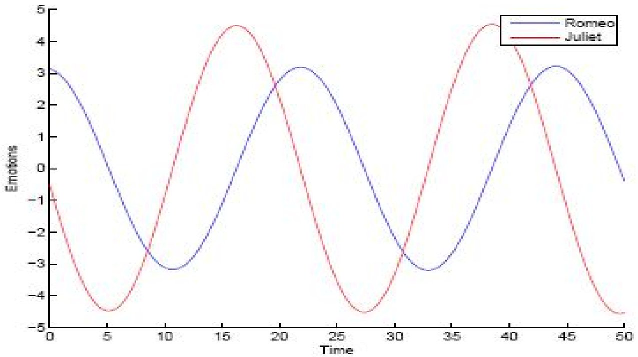
起初，**Romeo** 表达了他的爱慕，吸引了**Juliet**的眼睛。然而，当他想表达多一点的热情时，她却冷淡下来了。接着，他就往后退了一些，**Juliet**却再次热情起来了。这个过程就这么循环往复下去了。如果这对明星恋人不在剧本中死去，那么这种“热冷”循环能否一直持续下去？

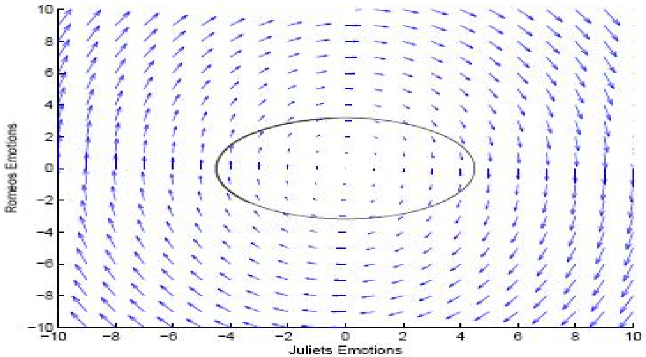
可以看出，Juliet对Romeo的感情变化与Romeo对她的过分热情成反比，Romeo的感情变化与Juliet对他的鼓励成正比，所以模型为：

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= p_R J\\ \frac{dJ}{dt} &= p_J R\end{aligned}}$$

$$\boxed{p_R>0,\ p_J<0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_R \\ p_J & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-p_R p_J}$$





初值：R(0)=3.14, J(0)= -0.5

结论： Romeo 和Juliet 的感情会持久地周期振荡下去。

“爱情如周期曲线，幸福似小数循环”

一般而言，**Romeo 对 Juliet的感情变化不仅依赖于他自己对Juliet的感情，还要受到 Juliet对他的感情的影响。假设这个依赖程度是线性的，那么**

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= a_R R + p_R J \\ \frac{dJ}{dt} &= p_J R + a_J J \end{aligned}}$$

----反映受自己鼓励的程度

----反映受对方鼓励的程度

(a_R, p_R) 刻画Romeo 的恋爱风格

(a_J, p_J) 刻画Juliet 的恋爱风格

这是一般意义上的恋爱动力学演化的线性模型。

Romeo 的恋爱风格可分为四类：

(1) **Eager beaver** (爱情至上者)：$a_R>0,\ p_R>0$

(2) **Narcissistic nerd** (自恋的书呆子)：$a_R>0,\ p_R<0$

(3) **Cautious lover** (谨慎的恋人)：$a_R<0,\ p_R>0$

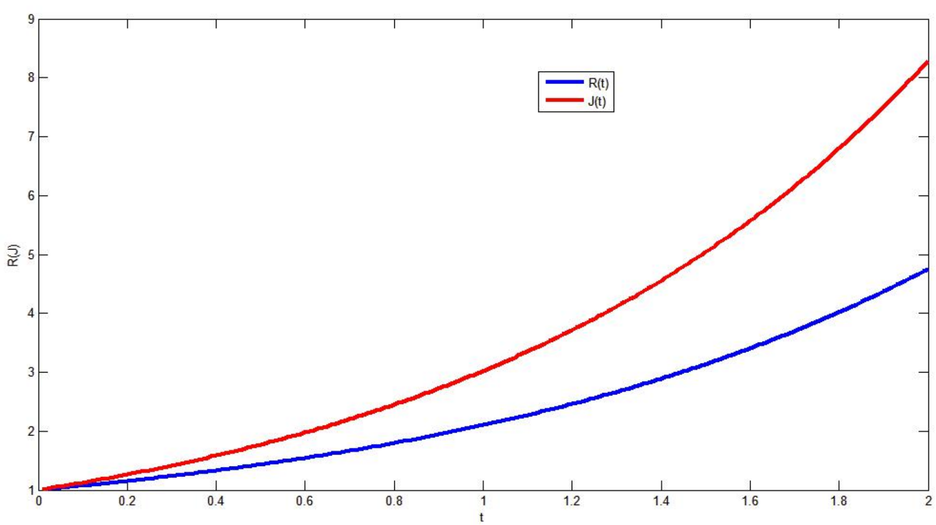
(4) **Hermit** (隐士的爱情)：$a_R<0,\ p_R<0$

Juliet的恋爱风格 (a_J,p_J)也可类似讨论。

模型应用

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= a_R R + p_R J \\ \frac{dJ}{dt} &= p_J R + a_J J\end{aligned}}$$

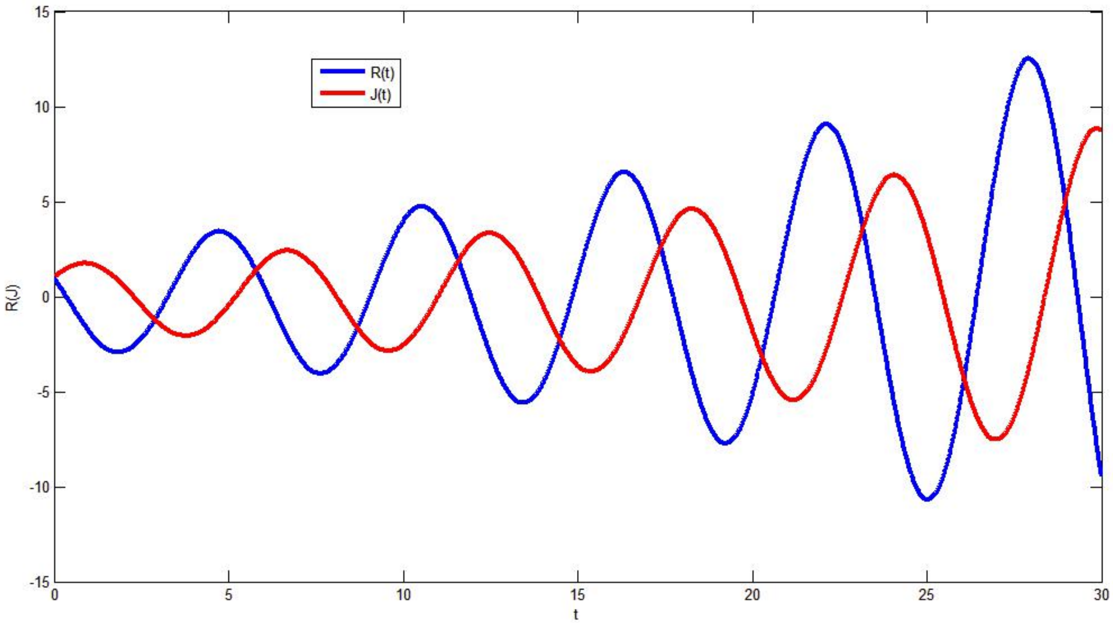
Case 1. $a_R = 0.5,\ p_R = 0.2,\ a_J = 0.7,\ p_J = 0.5$



事实上, 随着时间的流逝, Romeo对 Juliet的感情和 Juliet对 Romeo的感情会越来越强。他们的恋爱关系会一直持续下去。

模型应用

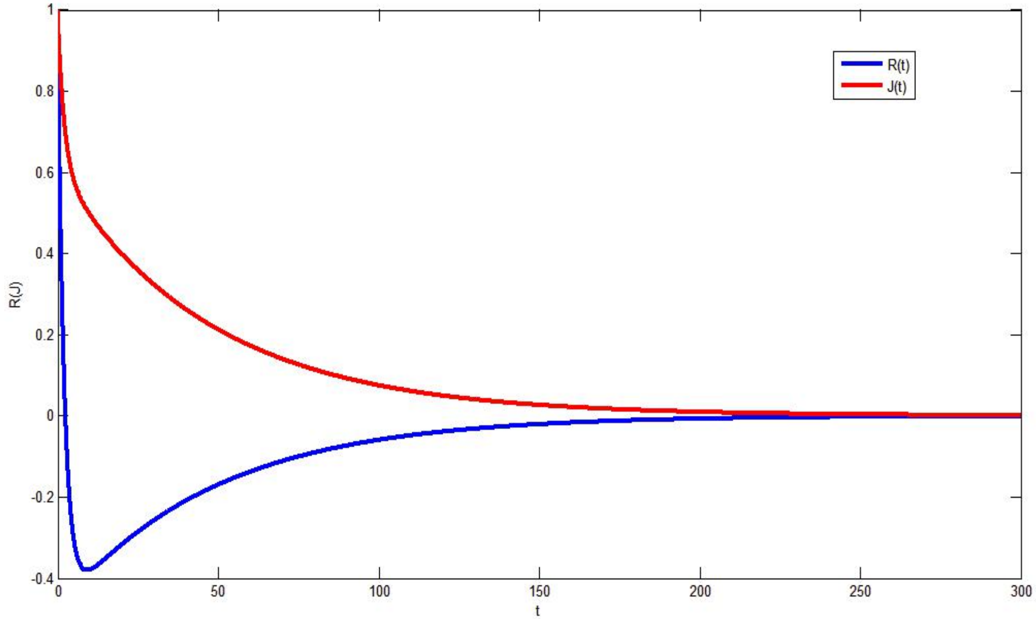
Case 2. $a_R = -0.6,\ p_R = -2.0,\ a_J = 0.7,\ p_J = 0.8$



Romeo与 **Juliet**之间的关系确实会持续下去，因为他们最终不会对彼此感到中立。 但是，由于双方都在摇摆，我们看到他们表达了彼此之间越来越强烈的爱与恨。

模型应用

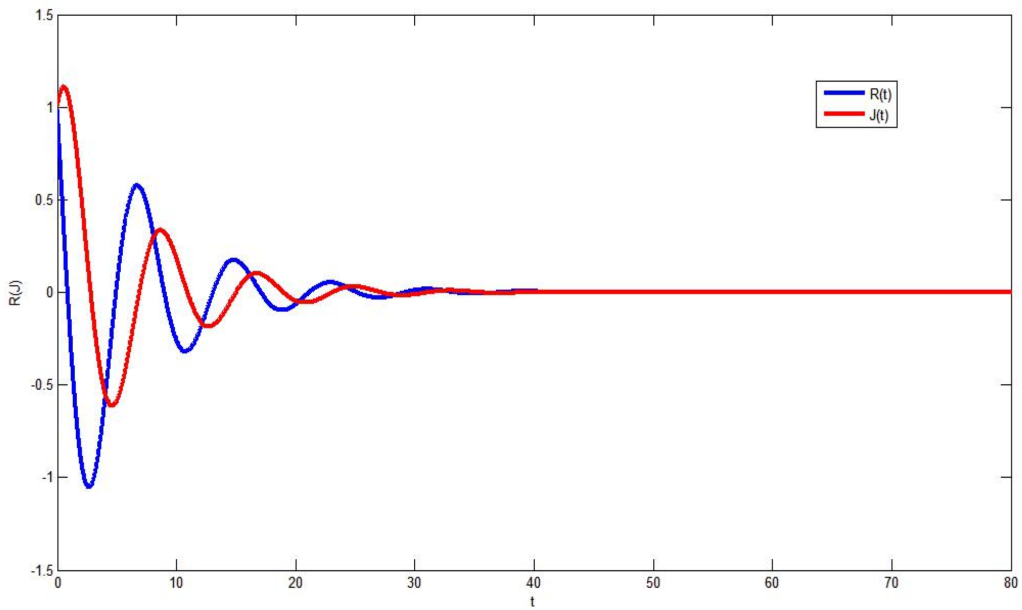
Case 3. $a_R = -0.4,\ p_R = -0.3,\ a_J = -0.1,\ p_J = -0.1$



Romeo与 Juliet的关系终结，最终 R(t)=0, J(t)=0.

模型应用

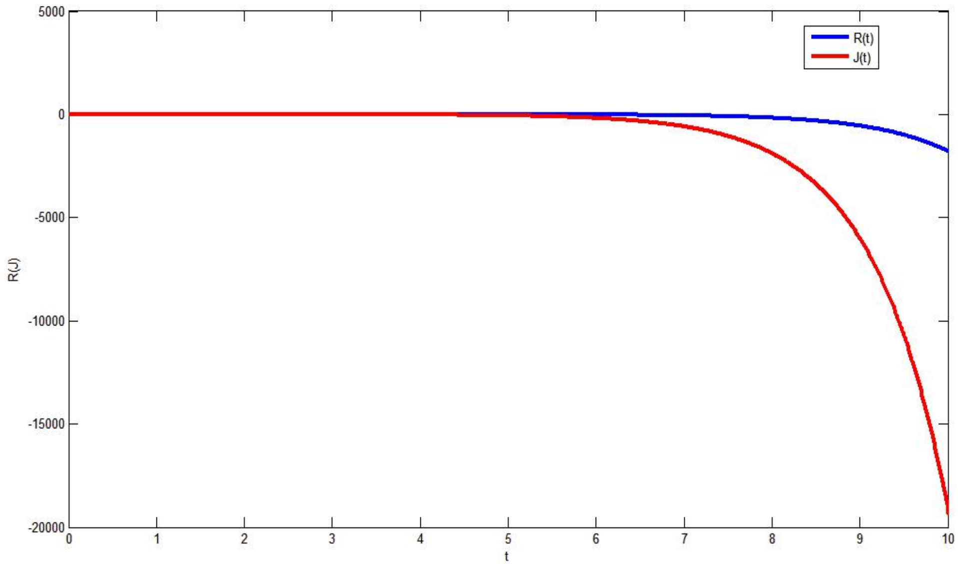
Case 4. $a_R = -0.1, p_R = -1.0, a_J = -0.2, p_J = 0.6$



Romeo与 Juliet的关系不会持久，因为彼此之间的感情最终变得中立。

模型应用

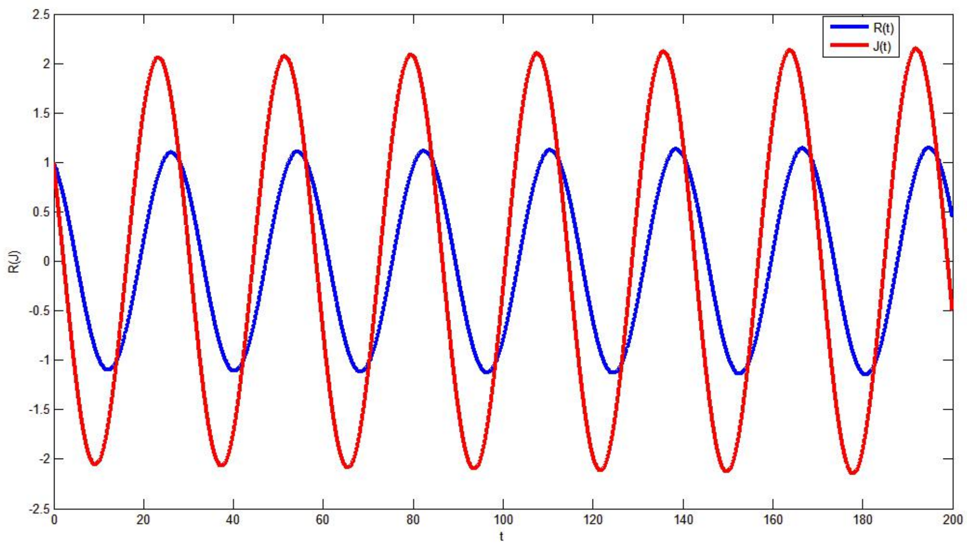
Case 5. $a_R = -1.0,\ p_R = 0.2,\ a_J = 1.4,\ p_J = -2.5$



从某种意义上说， Romeo与 Juliet的关系确实存在。 他们彼此之间有着非常强烈的感情，只是消极的感情。 他们的关系之所以持续是因为他们的感情最终不会彼此变得中立。

模型应用

Case 6. $a_R = -0.3,\ p_R = 0.2,\ a_J = 0.3,\ p_J = -0.7$



事实上， Romeo与 Juliet有着可预测的正弦感。

也就是说，他们的关系将继续存在。

模型三

尽管Romeo对Juliet的爱慕是会做出积极的响应，但是可以想象到，当Juliet对Romeo的爱使他感到没法呼吸的时候，他将会做出反抗。反过来，如果Juliet怀有足够多的敌意的话， Romeo 可能会决心对她好一点，因此，可用logistic 函数取代 J 和G。

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ(1-|J|)\\ \frac{dJ}{dt} &= cR(1-|R|) + dJ\end{aligned}}$$

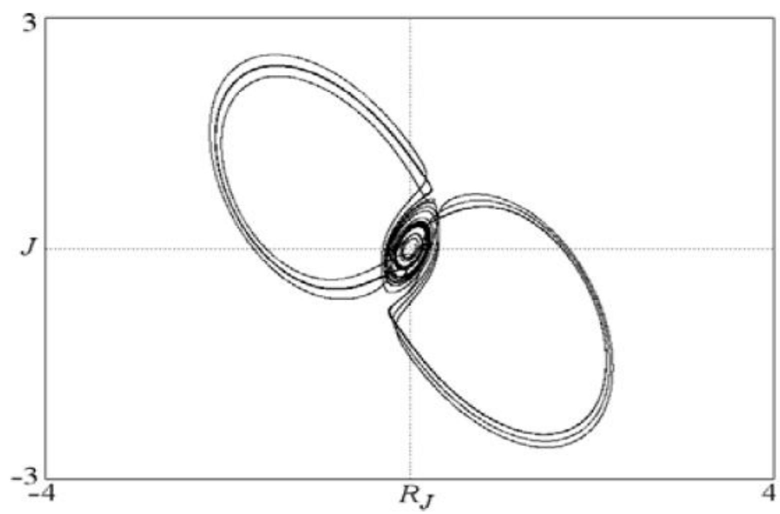
模型四

假定有另外一个女孩Grace也爱上了Romeo，情况变得复杂了。考虑最简单的情况，即假定Juliet和Grace彼此不知道对方的存在，而Romeo对她们两人的恋爱风格是一样的。Grace对Romeo的感情会影响Romeo对Juliet的感情，反过来也是一样。假定这两个影响的程度是相同的，那么就有

$$
\begin{aligned}
dR_J/dt &= aR_J + b(J-G) \\
dJ/dt &= cR_J + dJ \\
dR_G/dt &= aR_G + b(G-J) \\
dG/dt &= eR_G + fG
\end{aligned}
$$

模型五

$$dR_J / dt = aR_J + b(J - G)(1 - |J - G|)$$
$$dJ / dt = cR_J(1 - |R_J|) + dJ$$
$$dR_G / dt = aR_G + b(G - J)(1 - |G - J|)$$
$$dG / dt = eR_G(1 - |R_G|) + fG$$



7. 警犬缉毒最佳搜索路线

1.问题提出

在电影、电视剧中经常看到缉毒军警在警犬的帮助下，追踪毒贩或者毒品的画面，我缉毒大队截获情报通常只是知道毒贩躲藏在某一个区域，或者有一批毒品存放在某地区，具体地点并不确定，缉毒警察只好利用警犬搜索，要想尽快找到毒品，警犬是沿什么方向进行搜索呢?

2.问题分析

毒品在大气中散发着特有的气味，警犬可以根据毒品的气味去搜索，要想尽快找到毒品，一条警犬在某点处嗅到气味后，应该沿着气味最浓的方向搜索，也就是气味变化最大的方向搜索，这问题可以利用梯度与方向导数的知识来解决，因为梯度方向就是方向导数变化最大的方向。

3.模型建立与求解

地面上某处藏有毒品，以该处为坐标原点建立笛卡尔坐标系，已知毒品在大气中散发着特有的气味，设气味浓度在地表xOy平面上的分布为$f(x,y)=e^{-(2x^2+3y^2)}$，一条警犬在$(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$点处嗅到气味后，沿着气味最浓的方向搜索，求警犬搜索的路线。

先求函数$f(x,y)=e^{-(2x^2+3y^2)}$的梯度，即

$$\mathrm{grad} f=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(-4xe^{-(2x^2+3y^2)},-6ye^{-(2x^2+3y^2)}).$$

设警犬的搜索路线函数为$y=y(x)$，沿$y=y(x)$的任一点的切向量为

$$dr=(dx,dy).$$

一条警犬沿着气味最浓的方向搜索，就是要沿着气味浓度变化最大的方向搜索，根据方向导数与梯度的关系，即警犬沿着梯度方向去搜索，因此警犬的运动方向与警犬搜索路线的切线方向平行，即

$$(-4xe^{-(2x^2+3y^2)},-6ye^{-(2x^2+3y^2)})//(dx,dy),$$

因而

$$\frac{dx}{-4xe^{-(2x^2+3y^2)}}=\frac{dy}{-6ye^{-(2x^2+3y^2)}},$$

化简为

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{3y},$$

故警犬的搜索路线函数$y=y(x)$满足

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{2x}=\dfrac{dy}{3y}, \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

解之得

$$y=\frac{y_0}{x_0^{3/2}}x^{3/2},$$

所以警犬在点$(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$处只需要沿着曲线$y=\dfrac{y_0}{x_0^{3/2}}x^{3/2}$搜索，就能以最快的速度找到毒品。

4.拓展应用

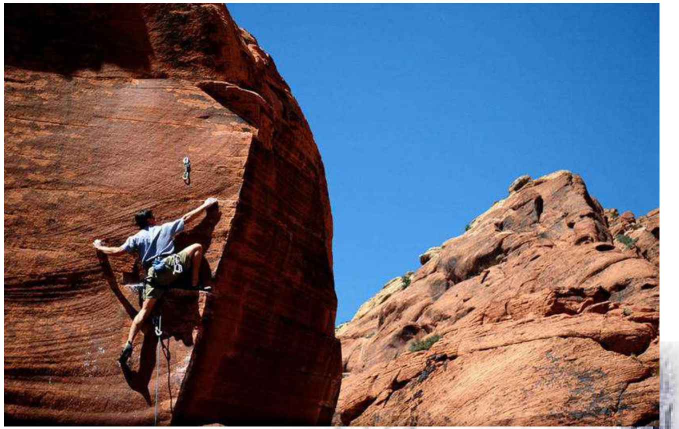
攀岩运动是一项惊险刺激的运动，同时也是一项锻炼人的意志品质的运动它要求每一个参加者必须按最陡峭的路线攀登，以尽可能快地升高其高度。现有一个攀岩爱好者，要攀登一个表面曲面方程为$z=125-2x^2-3y^2$的山岩，已知他的出发地点是山岩脚下的点$P_0(5,5,0)$，请求出其攀岩路线Γ。

因为已知Γ在曲面Σ上，所以只要求出Γ在xOy坐标面上的投影曲线L的方程就可以了。由于攀岩的方向在xOy坐标面上的投影向量就是函数$f(x,y)=125-2x^2-3y^2$的梯度向量，即

$$\mathrm{grad}f=(-4x,-6y).$$

这一方向也就是曲线L的切线方向，所以曲线L必须满足

$$\frac{dx}{-2x}=\frac{dy}{-3y},$$



这是一个可分离变量方程，两边积分可得

$$3\ln x = 2\ln y + \ln C,$$

即 $x^3 = Cy^2$，根据 $x=5$ 时有 $y=5$，所以 $C=5$，从而得到 L 的方程为 $x^3 = 5y^2$

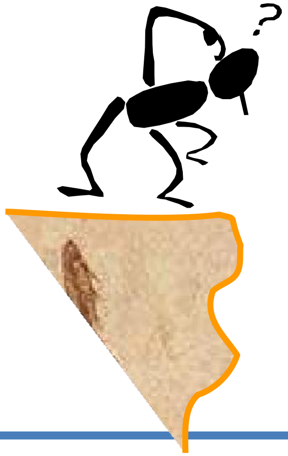
于是得到 L 的方程为

$$\begin{cases} z = 125 - 2x^2 - 3y^2, \\ x^3 = 5y^2. \end{cases}$$

课后作业1

崖高的估算

假如你站在崖顶且身上带着一只具有跑表功能的计时器，想用扔下一块石头听回声的方法来估计山崖的高度。假定你能准确地测定时间，怎样来推算山崖的高度呢，请你分析一下这个问题。






课后作业 2　　孤岛传染病问题

考虑在一个人口数量为N的孤岛上，有一种高传染性的病在蔓延。由于是一部分到岛外旅游的居民回来使该岛感染了这种疾病，现用模型

$$\frac{dX}{dt}=kX(N-X)$$

预测在某时刻将会被感染的人数，其中k>0为常数。问：

(1) 列出这个模型所隐含的两条主要假设。这些假设有什么依据？

(2) 把X作为t的函数，求解此模型；

(3) 设岛上的人口有5000人。在传染期的不同时刻被感染人数如下表：

天数 t	2	6	10
被感染的人数 X	1887	4087	4853
$\ln(X/(N-X))$	-0.5	1.5	3.5

试利用此数据估计模型中的常数，并预测t=12天时被感染的人数。