2020年小学期数学建模能力提升

决策分析

张春霞

cxzhang@mail.xjtu.edu.cn

Http://cxzhang.gr.xjtu.edu.cn

2020年6月

西安交通大學

主 要 内 容

预备知识

预备知识

随机现象

- 一定的条件下，试验结果不止一个.
- 一次试验可能会出现多种可能结果.

预备知识

随机试验

- 可以在相同条件下重复进行.
- 每次试验的可能结果不止一个，但事先能明确全部可能的结果.
- 进行试验之前不能肯定哪一个结果会出现.
- 例如：
  - 抛掷一枚硬币，观察其出现正面、反面的情况
  - 车站售票处一天内售出的车票张数
  - 从一批元件中抽取一个，测试其使用寿命

预备知识

- **随机变量**：随试验结果的不同而变化的量，是试验结果的函数
- **离散型随机变量**：其所有可能取值为有限个或虽有无限个但可以一一排列
- **连续型随机变量**：其可以取某个区间内的所有值，所有可能取值不能像离散型变量那样一一列出

预备知识

随机变量的分布函数

- 设X为一个随机变量，记

$$F(x)=P(X\le x),\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

- 称$F(x)$为随机变量X的概率分布函数.

性质

1. $\forall x\in R$, $0\le F(x)\le 1$, 且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0;\ F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1;$$

2. $F(x)$是一个非降函数;

3. $F(x)$右连续, 即$F(x+0)=F(x)$.

预备知识

离散型随机变量的分布律

- 设X为离散型随机变量，其可能取值为$\{x_1, x_2, \cdots\}$,则

$$p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \cdots$$

- 称为X的分布律(概率函数)。

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…

性质 $p_i \geq 0 (i = 1, 2 \cdots)$且$p_1 + p_2 + \cdots = 1$

预备知识

连续型随机变量的密度函数

- 设X的分布函数为$F(x)$，若存在一个非负函数$f(x)$，使对任意实数x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- 则称X为连续型随机变量，$f(x)$为其密度函数.

- 性质

1. $f(x) \geq 0,\ -\infty < x < \infty$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$;
3. 对于任意实数a, b, 且$a \leq b$有$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$;
4. 若$f(x)$在点x连续, 则有$F'(x) = f(x)$.

预备知识

- **数学期望**(随机变量取值的平均结果)
  - 离散型变量

$$E(X)=\sum_i x_i p_i$$

  - 连续型变量

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- **方差**(所有可能取值偏离均值的分散程度)

$$Var(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]$$

$$Var(X)=\sum_i \left(x_i-E(X)\right)^2 p_i$$

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f(x)dx$$

预备知识

- **伯努利(Bernoulli)试验**
- 假设试验E只有两种结果A和$\bar{A}$，$P(A)=p$，其中$0<p<1$，$P(\bar{A})=1-p$.
- 将$\boldsymbol{E}$独立地重复进行n次构成的试验称为n重伯努利试验，有时简称伯努利试验.

如：掷硬币(出现正面和反面)、射击(命中和未命中)等

施雨，李耀武. 概率论与数理统计. 西安：西安交通大学出版社, 2003.

预备知识

两点分布

- 在一次试验中，事件A发生的概率为p，不发生的概率为$1-p$.

- 若以X记事件A发生的次数，则其可能取值为1和0，它的分布律为

$$P(X=i)=p^i(1-p)^{1-i},\quad i=0,1$$

X	1	0
p_i	p	$1-p$

这个分布称为两点分布(0-1分布).

预备知识

■ 二项分布

事件A在一次试验中发生的概率为p.

随机变量X表示A在n重伯努利试验中发生的次数，则$X \sim B(n,p)$且

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,\cdots,n$$

均值与方差 $E(X)=np, \qquad Var(X)=np(1-p)$

事件A在n重Bernoulli试验中平均出现次数

施雨，李耀武. 概率论与数理统计. 西安：西安交通大学出版社, 2003.

预备知识

- **泊松(Poisson)分布**
- 若随机变量X的概率函数为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

- 则$X\sim Poisson(\lambda)$.

均值与方差 $E(X)=\lambda,\qquad Var(X)=\lambda$

- 譬如：
  - 某电话局在单位时间内收到的用户呼唤次数;
  - 某公共汽车站在单位时间内来乘车的乘客数.

施雨，李耀武. 概率论与数理统计. 西安：西安交通大学出版社, 2003.

预备知识

- **均匀分布**
- 若连续型随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x<a \text{ or } x>b\end{cases}$$

- 则称 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，记为 $\boldsymbol{X\sim U(a,b)}$.

均值与方差

$$E(X)=\frac{a+b}{2},\qquad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

预备知识

正态(Gauss)分布

- 若连续型随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\quad -\infty<x<+\infty$$

- 其中$\mu,\sigma(\sigma>0)$为常数，则称X服从参数为μ和σ的正态分布，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

均值与方差 $E(X)=\mu,\quad Var(X)=\sigma^2$

预备知识

- **标准正态分布**

- 在正态分布中，若$\mu=0,\sigma=1$，则称X服从标准正态分布$\mathcal{N}(0,1)$，其密度函数和分布函数分别为

密度函数

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\quad -\infty<x<+\infty$$

分布函数

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

重要性质

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

若$X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1)$

预备知识

指数分布

- 若连续型随机变量X具有概率密度

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

- 则称X服从参数为λ的指数分布,记为$X\sim\exp(\lambda)$.
- 指数分布最常见的场合是寿命分布，如电子元件的寿命、电话通话时间、随机服务系统的服务时间等.
- 其重要特征是无记忆性，即

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$$

均值与方差 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda},\quad Var(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

预备知识

- **泊松定理**

在n重伯努利试验中，若事件A在每次试验中发生的概率为p_n(与试验次数n有关).

如果当$n \to \infty$时，$np_n \to \lambda(\lambda > 0$为常数)，则有

$$\lim_{n \to \infty} P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

作用： 对二项分布(n、k很大，p很小)作近似计算.

施雨，李耀武. 概率论与数理统计. 西安：西安交通大学出版社, 2003.

预备知识

- **De Moivre-Laplace中心极限定理**

在n重伯努利试验中，事件A在每次试验中出现的概率为$p(0 < p < 1)$.

μ_n为n次试验中A出现的次数，则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

作用： 对二项分布(n很大)作近似计算.

施雨，李耀武. 概率论与数理统计. 西安：西安交通大学出版社, 2003.

预备知识

■ **置信度(置信水平)**

总体参数落在样本统计值某一区间内的概率，或区间估计的可靠程度.

特定个体对待定命题真实性相信的程度.

95%置信区间：参数的真实值落在相应区间内的概率为95%.

施雨，李耀武. 概率论与数理统计. 西安：西安交通大学出版社, 2003.

决策分析简介

决策分析简介

- **定义**

研究不确定性决策问题的一种系统分析方法，其目的是改进决策过程，从一系列方案中找出一个能满足一定目标的合适方案. —《中国大百科全书》

决策是从一组备选方案中选择所偏爱的方案或行动路线的过程，它渗透到生活的每个方面。决策通常涉及外部世界的不确定性以及个人偏爱的冲突，通常从信息的集聚开始，通过主观概率的估计和审议直到选定最终行动……… —《认知科学百科全书》

决策分析发展简史

- 1738年，Bernoulli提出了效用和期望效用的概念；
- 1950年，Wald用对策论的定理解决了统计决策中的一些基本问题；
- 1954年，Blackwell和Girshick将主观概率和效用理论整合成一个求解统计决策问题的清晰过程；
- 1954年，Savage建立了具有理论体系并形成具有严格的哲学基础和公理框架的统计决策理论；
- 随后，形成以Bayes分析为基础的统计决策理论；
- ……
- 今天，决策分析已形成工业、商业和政府部门制定决策所使用的重要方法.

决策问题示例

- **例1（投资问题）**
  - 一投资者有笔资金要投资，有两个方向供他选择
  - a_1：购买股票，根据市场情况，可净赚5000元，但也可能亏损10000元；
  - a_2：存银行：不论市场情况如何，总可以赚1000元

收益矩阵

	a_1	a_2
θ_1	**5000**	**1000**
θ_2	**−10000**	**1000**

决策问题示例

- 例2（双人博弈问题）
  - 甲乙两人玩一种游戏，双方各自独立出牌
  - 甲：三张牌，分别记为$\theta_1, \theta_2, \theta_3$
  - 乙：三张牌，分别记为a_1, a_2, a_3
  - 按下表计算甲的得分与乙的失分

甲的得分矩阵

	a_1	a_2	a_3
θ_1	**3**	**−2**	**0**
θ_2	**1**	**4**	**−3**
θ_3	**−4**	**−1**	**2**

决策问题示例

- **例3（项目申请问题）**
- 课题组负责人获悉，某一单位有个科研项目要招标，他感到课题组有能力承接该项目，因为研究方向相符，并有一定的研究基础；但其他几个单位也准备投标，而且不乏竞争力.
- 参加投标并中标：耗费相当数量的人力物力，但也有收益.
- 参加投标未中标：耗费相当数量的人力物力，无收益.
- 不参加投标：没有耗费，也无收益.

决策问题的分类

- **按决策问题所处条件不同**
- 确定型决策：可提供方案的条件已确定
- 不确定型决策(随机性决策)：决策时条件不确定
  - 风险决策：已知各种情况出现概率，可综合考虑
  - 完全不确定型决策：未知任何信息
- 对抗型决策：包含两个或以上人之间的竞争，决策人不能直接控制所有决策，需考虑对手的策略.

例2为对抗型决策，例1和例3均为不确定型决策

随机性决策

随机性决策问题示例(1)

- **例4(合理配备工人问题)**
- 为保证某种设备正常工作，需配备适量的维修工.
- **假设**
  - 现有同类设备300台，它们之间工作相互独立.
  - 每台设备出故障概率均为0.01.
  - 一台设备的故障由一人处理.
- **问题**
  - 至少需配备多少工人，才能保证设备发生故障但不能得到及时维修的概率小于0.01?

例4(续)

- **求解过程：** 设同一时刻设备发生故障的台数为X，则$X \sim B(300,0.01)$，设需配备工人数为N.

- 问题：找最小的N，使得$P(X \leq N) \geq 0.99$.

$$P(X \leq N) = \sum_{k=0}^{N} P(X=k) \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k e^{-3}}{k!} \geq 0.99,$$

$$1 - \sum_{k=0}^{N} P(X=k) \approx 1 - \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k e^{-3}}{k!}$$

查找泊松分布表，

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!} < 0.01$$

可得$N = 8$.

随机性决策问题示例(2)

例5 (DVD在线租赁问题)

- 顾客缴纳月费成为会员，享受DVD租赁服务。会员只需对感兴趣的DVD在网上提交订单，网站会以快递的方式尽可能满足其要求.
- 会员提交的订单包括多张DVD，基于其偏爱程度排序。网站根据手头的DVD数量和会员的订单进行分发.
- 每个会员每月租赁次数不超过2次，每次可租3张DVD。看完之后，只需将DVD放进网站提供的信封寄回(邮费网站承担)，即可进行下次租赁.

例5(续)

网站准备购买一批新的DVD，通过问卷调查1000个会员，得到想看这些DVD的人数(如下表所示).

表1：对1000个会员调查的部分结果(5种DVD)

DVD名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
人数	200	100	50	25	10

基本假设

- 60%会员每月租赁DVD两次，而另外40%只租一次.
- 网站现有10万会员.

问题：每种DVD至少准备多少张，才能满足下面需求

- 保证想看该DVD的会员中有50%可以在一个月内看到?
- 保证在3个月内至少95%的会员看到该DVD?

例5(续)

问题分析

- 对某种DVD，会员是否租赁有随机性(租赁或不租赁)，可用两点分布描述，假定被租赁的概率为$\boldsymbol{p}$;
- 会员总数为$\boldsymbol{n}$，每个会员租该DVD概率为$\boldsymbol{p}$，且会员是否租赁之间相互独立，于是租赁该DVD的会员数服从二项分布$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})$.
- $\boldsymbol{n}$充分大时，根据中心极限定理，可用正态分布来逼近二项分布，进而求得在一定置信度下满足会员租赁需求的DVD数量下限;
- 考虑部分DVD的可重复利用率，可得到经营者在一定条件下尽量降低成本，并满足会员需求的DVD最小购买量.

例5(续)

求解过程

- 设 $X_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个会员租赁第}j\text{张DVD},\\ 0, & \text{第}i\text{个会员不租赁第}j\text{张DVD},\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,100000$

- 则 X_{ij} 服从两点分布，即

$$P(X_{ij}=1)=p_j,\quad P(X_{ij}=0)=1-p_j$$

其中 p_j 的值见下表2.

表2：会员租赁5种DVD的概率

DVD名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
第j张DVD被租赁概率	$p_1=0.2$	$p_2=0.1$	$p_3=0.05$	$p_4=0.025$	$p_5=0.01$

例5(续)

- 设$Y_j = \sum_{i=1}^{100000} X_{ij}, j = 1,2,\cdots,5$，即10万个会员中租赁第$j$种DVD的总数，由于$X_{ij}(i = 1,2,\cdots,100000)$之间相互独立，因此$Y_j$服从二项分布，即

$$P(Y_j = k) = \binom{100000}{k} p_j^k (1-p_j)^{100000-k}, \quad j = 1,2,\cdots,5$$

- 同时，

$$E(Y_j) = 100000 p_j,$$
$$Var(Y_j) = 100000 p_j \cdot (1-p_j), \ j = 1,2,\cdots,5$$

- 由于租赁该DVD会员人数随机，为了使至少50%会员在一个月内看到该DVD，网站应准备的DVD数量也应有随机性.

例5(续)

- 于是，以它的数学期望作为网站应准备的DVD数量，即

$$E(50\%Y_j)=\frac{1}{2}E(Y_j)=50000p_j,\ j=1,2,\cdots,5$$

- 这样，满足至少50%的会员看到该DVD的概率可以近似为

$$P\left\{50\%Y_j\le \tfrac{1}{2}E(Y_j)\right\}=P\left\{\frac{50\%Y_j-E(50\%Y_j)}{\sqrt{Var(50\%Y_j)}}\le\frac{\frac{1}{2}E(Y_j)-E(50\%Y_j)}{\sqrt{Var(50\%Y_j)}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{50\%Y_j-E(50\%Y_j)}{\sqrt{Var(50\%Y_j)}}\le 0\right\}$$

$$\approx\Phi(0)=\tfrac{1}{2},$$

至少50%的会员看到该DVD的置信度为50%

De Moivre Laplace中心极限定理

例5(续)

- 为提高至少50%的人能看到该片的置信度，需要改变提供的DVD数量.

- 设置信度为99%，即$\Phi(t)=99\%$，查表可得$t=2.33$，即

$$P\left\{\frac{50\%Y_j-E(50\%Y_j)}{\sqrt{Var(50\%Y_j)}}\le 2.33\right\}=99\%,$$

$$\begin{aligned}50\%Y_j &\le E(50\%Y_j)+2.33\times\sqrt{Var(50\%Y_j)}\\ &=\underline{50000Y_j+2.33\times\frac{1}{2}\sqrt{100000p_j\cdot(1-p_j)}},\end{aligned}$$

准备这么多张相应的DVD，则可使至少50%的人在1个月内看到该DVD的置信度提高至99%

例5(续)

- 部分DVD可重复利用
  - 60%会员每月租赁DVD两次，40%租一次.
  - 租两次的会员会将第一次的DVD归还，则可以满足其他会员的要求.
  - 但该张DVD在一个月内被会员第一次还是第二次租赁是随机的，可假设二者等可能发生.
- 于是，该DVD被再次利用的期望值为

$$60\% \times \left(\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 \right) = 30\%$$

例5(续)

- 因此，只需准备所需量的70%即可满足题目中的要求.
- 综上所述，为了以99%的置信度满足至少50%的会员看到某种DVD，需准备该DVD的数量为

$$70\% \times \left[50000 p_j + 2.33 \times \frac{1}{2} \sqrt{100000 p_j \cdot (1 - p_j)} \right]$$

例5(续)

- 由公式

$$70\%\times\left[50000p_j+2.33\times\frac{1}{2}\sqrt{100000p_j\cdot(1-p_j)}\right]$$

- 代入相关数据，即可得到下表3所示的为保证至少50%的人在一个月内看到该DVD，网站需准备的DVD张数.

表3：为了使至少50%的人看到某DVD，网站需准备的DVD张数.

置信度及对应t值		DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
50%	$t=0$	7000	3500	1750	875	350
70%	$t=0.53$	7024	3518	1763	885	356
80%	$t=0.85$	7038	3529	1771	890	360
99%	$t=2.33$	7104	3578	1807	916	375

例5(续)

- 3个月内DVD的流通量相当于1个月内DVD流通了三个周期
- 为了保证在3个月内使95%会员看到其想租的DVD，只需提供一个月内使95%会员看到其想租的DVD总量的1/3
- 以99%的可信度使3个月内95%的会员看到该DVD，网站应准备的张数：

$$\frac{1}{3}\times 70\% \times \left[100000\times 95\%\cdot p_j + 2.33\times 0.95\sqrt{100000\cdot p_j\cdot(1-p_j)}\right]$$

表4：为了使至少95%的人在3个月内看到某DVD，网站需准备的DVD张数.

置信度及对应t值		DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
50%	$t=0$	4434	2217	1109	555	222
70%	$t=0.53$	4449	2228	1117	560	226
80%	$t=0.85$	4458	2235	1122	564	228
99%	$t=2.33$	4499	2266	1144	580	238

随机性决策问题的特点

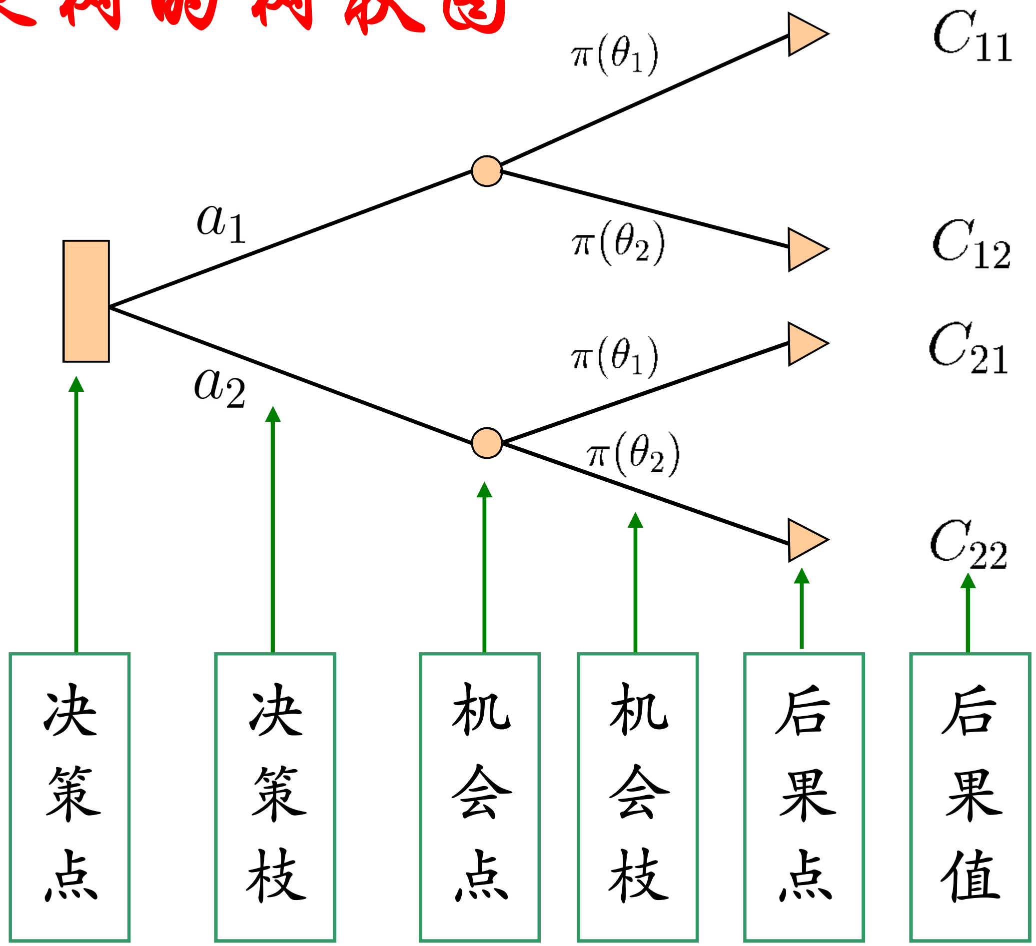
- **自然状态**：凡是能够引起决策问题不确定性的因素
- **随机性决策问题的特点**
  - 决策人面临选择，可以选择的行动(备选方案)不唯一；
  - 自然状态存在不确定性，由于自然状态的不确定性导致后果不确定；
  - 后果的价值待定.

随机性决策问题的要素

- **行动集(方案集)**：记为$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$，决策人可能采取行动的集合；若有观测值，也称策略集.
- **自然状态集(状态空间、参数空间)**：所有可能的自然状态，记为$\boldsymbol{\Theta}=\{\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2,\cdots,\boldsymbol{\theta}_n\}$.
- **后果集**：记为$\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{c}_{ij},\boldsymbol{i}=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\boldsymbol{m};\boldsymbol{j}=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\boldsymbol{n}\}$，决策问题的各种可能后果.
- **信息集(样本空间、观测空间)**：决策时，为了获取与自然状态$\boldsymbol{\Theta}$有关的信息以减少不确定性，通过调查研究得到的观测值.

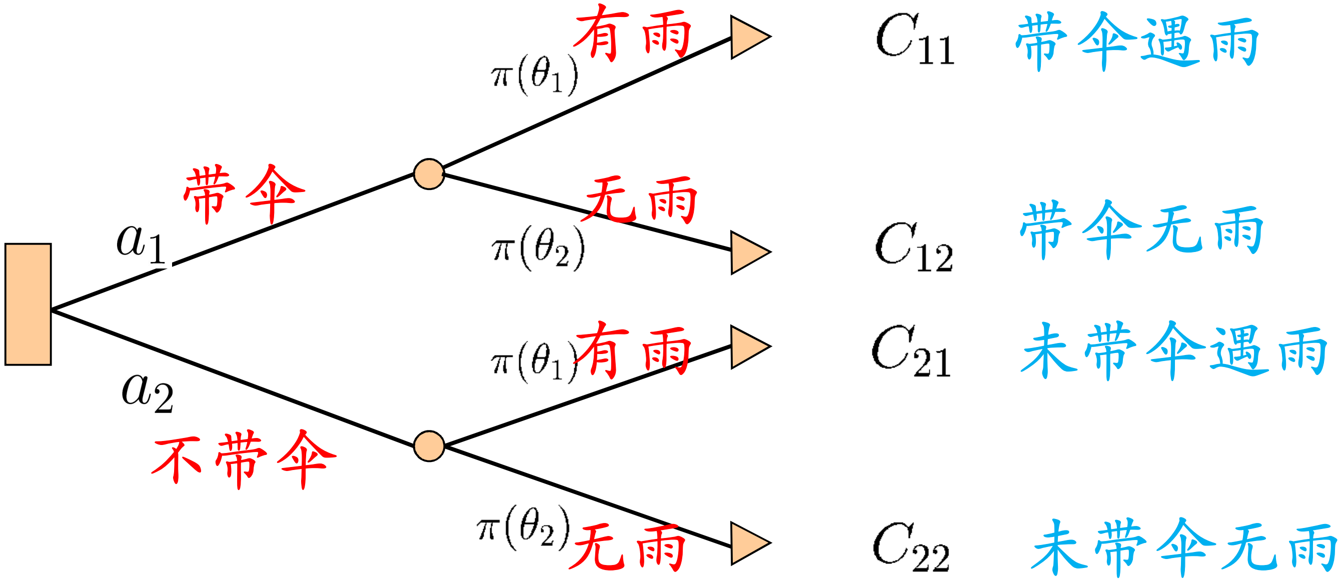
随机性决策问题的分析方法

- **决策树的树状图**



决策树的树状图示例

- **出门带伞问题：** 尽可能少地增加决策人的负担的情况下避免淋雨



注： 树状图不仅可以表示单步决策问题，也可以表示复杂的多级决策问题.

岳超源. 决策理论与方法. 北京: 科学出版社, 2002.

随机性决策问题的求解步骤

- 1.构造决策问题：为决策问题提供可能的解决方案并确定目标.
- 2.确定各种决策可能的后果并设定各种后果的概率.
- 3.确定各种后果对决策人的实际价值(对后果的偏爱).
- 4.备选方案的评价与比较，选择最满意的决策
  - 方案优劣的依据是各种决策的期望效用，使其最大化

岳超源. 决策理论与方法. 北京: 科学出版社, 2002.

效用函数

效用函数的定义

- 在决策问题中，后果集有时是用语言描述的，评价时需要量化，即使后果集是用数量表达的，不同的人对其认识也不同.
- 如何对后果集进行合理的量化?
- **定义** 在集合$\boldsymbol{P}$上的实值函数$\boldsymbol{u}$,若它和$\boldsymbol{P}$上的优先关系"$\succ$"一致，即

$$P_1, P_2 \in P, P_1 \succ P_2 \Longleftrightarrow u(P_1) \geq u(P_2)$$

则称$\boldsymbol{u}$为效用函数.

注： $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{c_1}; \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{c_2}, \cdots, \boldsymbol{p_r}, \boldsymbol{c_r}\}$：各种后果及其出现的概率组合

"$\succ$"表示若$\boldsymbol{P_1} \succ \boldsymbol{P_2}$，则决策人只选$\boldsymbol{P_1}$，而不选$\boldsymbol{P_2}$

效用函数的构造

- 针对一个具体决策问题，如何构造效用函数？
- 离散型后果
  - 确定后果之间的优先序和优先程度
- 连续型后果
  - 通过分析找到$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{c})$的若干特征，求特征点的效用，连成光滑曲线

离散型后果效用函数的构造

- 设后果集为离散型，即$\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_r\}$，则构造其效用函数的主要步骤为

1. 选定$c_1, c_2 \in C$，使$c_2 \succ c_1$，令$u(c_1)=0$，$u(c_2)=1$.
2. 对$c_2 \succ c_3 \succ c_1$，求$\alpha(0<\alpha<1)$，使$c_3 \sim \alpha c_2+(1-\alpha)c_1$，则$u(c_3)=\alpha u(c_2)+(1-\alpha)u(c_1)$，其中$a \sim b$表示决策人对$a$和$b$的偏爱程度无差异.
3. 若$c_4 \prec c_1$，求$\alpha(0<\alpha<1)$，使$c_1 \sim \alpha c_2+(1-\alpha)c_4$，则$u(c_1)=\alpha u(c_2)+(1-\alpha)u(c_4)$，所以$u(c_4)=\alpha/(\alpha-1)$.

离散型后果效用函数的构造(续)

4. 若$c_5 \succ c_2$，求$\alpha(0 < \alpha < 1)$，使$c_2 \sim \alpha c_5 + (1-\alpha)c_1$，则$u(c_2) = \alpha u(c_5) + (1-\alpha)u(c_1)$, 所以$u(c_5) = 1/\alpha$.

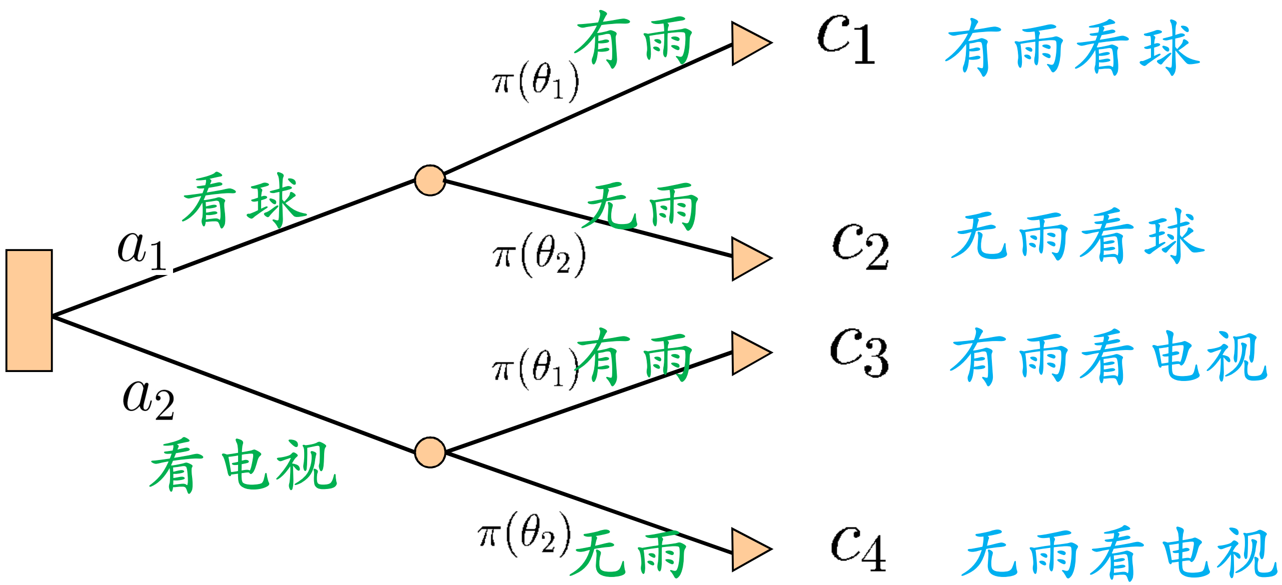
5. 一致性检验. 设$c_5 \succ c_4 \succ c_3$, 且c_5, c_4, c_3已知, 由$c_4 \sim \alpha c_5 + (1-\alpha)c_3$, 可求得$u'(c_4)$, 若$u'(c_4)$与$u(c_4)$不符, 则重复上述第2-4步，直到一致性检验通过.

离散型后果效用函数的构造示例

- **例6** 天气预报说球赛时可能会下雨，一足球爱好者需决定是否去球场看球.
- 对此人而言，不下雨去球场看球是最理想的，若下雨，则留在家中看电视转播为好；不下雨在家看电视虽然不如下雨看电视，但比下雨去球场看球挨淋要强.
- 试设定各种后果的效用值。
- a_1：看球；a_2：看电视.
- c_1：下雨看球；c_2：无雨看球；c_3：下雨看电视；c_4：无雨看电视.

离散型后果效用函数的构造示例(续)

- $\boldsymbol{a_1}$： 看球； $\boldsymbol{a_2}$ ： 看电视。
- $\boldsymbol{c_1}$： 下雨看球； $\boldsymbol{c_2}$： 无雨看球；$\boldsymbol{c_3}$： 下雨看电视；$\boldsymbol{c_4}$： 无雨看电视。
- 首先构造该问题的决策树，如下图所示。由题意，决策人对4种后果的优劣排序是：$\boldsymbol{c_2 \succ c_3 \succ c_4 \succ c_1}$.



离散型后果效用函数的构造示例(续)

效用函数的构造过程

1. 令$u(c_1)=0, u(c_2)=1.$

2. 询问决策人，下雨在家看电视这种后果(c_3)与去球场看球有多大概率下雨被淋(c_1)相当，若决策人的回答是0.3，则$c_3 \sim 0.7c_2+0.3c_1$, $u(c_3)=0.7\times u(c_2)=0.7.$

3. 询问决策人，无雨看电视(c_4)与去球场看球有多大概率下雨被淋(c_1)相当，若回答是0.6，则$c_4 \sim 0.4c_2+0.6c_1$，得$u(c_4)=0.4\times u(c_2)=0.4.$

4. 进行一致性检验.

离散型后果效用函数的构造示例(续)

■ 一致性检验的过程

以上c_3和c_4的效用值都是通过c_2和c_1的比较设定的. 在进行一致性检验时c_3和c_4加上另一个后果, 比如c_2, 则由$c_2 \succ c_3 \succ c_4$, 要求决策人判断, c_3是c_2和c_4的何种组合的确定当量. 设决策人认为$c_3 \sim 0.4c_2{+}0.6c_4$, 由此求得$u\prime(c_3) = 0.66$, 与第2步所设定的0.7并不一致. 于是, 需重复第2、3步, 若决策人设定的$u(c_3)$不变, 将$u(c_4)$调整为0.5, 决策人仍认为$c_3 \sim 0.4c_2 + 0.6c_4$, 则可通过一致性检验.

风险的度量

- **风险**
  - 后果的损失严重程度
  - 后果出现损失的可能性大小
- **风险的度量方式1-方差**

设方案a_i的后果为收益y_i, y_i的概率密度函数为$p_i(y_i)$, 期望值为$\bar{y}_i$, 则其方差为

$$\sigma_i^2 = Var(y_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y_i - \bar{y}_i)^2 p_i(y_i) dy_i,$$

在用方差度量风险时, 其值越大风险越大.

风险的度量

风险的度量方式2-自方差

主要考虑可能的损失时, 可用自方差s_i^2来度量风险. 设c为决策人设定的临界值, 即收益小于c的部分看作风险.

$$s_i^2 = Var(y_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y_i - c)^2 p_i(y_i) dy_i,$$

自方差具有集中研究风险的特点, 但不可靠.

风险的度量

- **风险的度量方式3-临界概率**

临界概率定义为

$$P(y_i \le c) = \int_{-\infty}^{c} p_i(y_i)dy_i = F_i(c),$$

它是临界值c以下的概率密度函数的积分, 所描述的是企业破差、倒闭等状态的概率.

可直接解释风险的含义，容易被企业负责人接受

决策准则

决策准则

风险型决策

- 决策人无法确知未来的真实自然状态，但可以给出各种可能出现的自然状态$\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta_2}, \cdots, \boldsymbol{\theta_n}$及各种状态出现的概率$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta_1}), \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta_2}), \cdots, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta_n})$.

准则1-最大可能值准则

- 在方案$\boldsymbol{a_i}$的所有后果中，以出现可能性最大的后果，作为评价$\boldsymbol{a_i}$优越的数值指标$\boldsymbol{v_i}$，即

$$
\begin{aligned}
v_k &= \max_{1\le i\le m} v_i = \max_{1\le i\le m} u_{ti} = \max_{1\le i\le m} \boxed{u(\theta_t, a_i)} \\
&= \min_{1\le i\le m} \left(-u(\theta_t, a_i)\right) = \min_{1\le i\le m} \left(\boxed{l(\theta_t, a_i)}\right),
\end{aligned}
$$

采用$\boldsymbol{a_i}$出现$\boldsymbol{\theta_t}$的效用

采用$\boldsymbol{a_i}$出现$\boldsymbol{\theta_t}$的损失

决策准则

- **最大可能值准则的具体过程**

  - 若后果为效用，令$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_t) = \max\limits_{j} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_j)$，则$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_{ti} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{a}_i)$，

    应选$\boldsymbol{a}_k$使

$$v_k = \max_{i=1}^{m} v_i = \max_{i=1}^{m} u_{ti}$$

  - 若后果为损失，令$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_t) = \max\limits_{j} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_j)$，则$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{l}_{ti} = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{a}_i)$，

    应选$\boldsymbol{a}_k$使

$$v_k = \min_{i=1}^{m} v_i = \min_{i=1}^{m} l_{ti}$$

决策准则

- 例7 设某一决策问题的损失矩阵如表5所示.

表5：损失矩阵

θ_j	$\pi(\theta_j)$	a_1	a_2	a_3
θ_1	0.2	7	6.5	6
θ_2	0.5	3	4	5
θ_3	0.3	4	1	0

根据最大可能性准则, $\pi(\theta_2)=\max\limits_{1\le j\le m}\pi(\theta_j)$, 即$\pi(\theta_2)$的概率最大, 方案$a_1,a_2,a_3$的排序数值指标分别为3,4,5, 其中对应损失最小的是方案a_1, 损失为3.

决策准则

准则2-贝叶斯准则

- 按照贝叶斯准则，在以效用表示后果时应该用期望效用 $\boldsymbol{E_i(u_{ij})}$ 作为评价 $\boldsymbol{a_i}$ 的指标，即

$$v_i = E_i(u_{ij}) = E^{\pi}\left[u(\theta_j, a_i)\right] = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\pi(\theta_j)$$

- 决策人应该选择方案 $\boldsymbol{a_k}$ 使期望效用达到最大，即

$$E_k = \max_{1\le i\le m}\{v_i\} = \max_{1\le i\le m}\left\{E_i(u_{ij})\right\} = \max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\pi(\theta_j)\right\}$$

决策准则

- 若以损失表示后果，则应使用期望损失$E_i(l_{ij})$评价方案a_i的优劣，应选择方案a_k使期望损失达最小，即

$$E_k=\min_{1\le i\le m}\{v_i\}=\min_{1\le i\le m}\left\{E_i(l_{ij})\right\}=\min_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n}l_{ij}\pi(\theta_j)\right\}$$

- 在例7中，各行动方案的期望损失为

$$E_1=\sum_{j=1}^{n}l_{1j}\pi(\theta_j)=7\times0.2+3\times0.5+4\times0.3=4.1,$$

$$E_2=\sum_{j=1}^{n}l_{2j}\pi(\theta_j)=6.5\times0.2+4\times0.5+1\times0.3=3.6,$$

$$E_3=\sum_{j=1}^{n}l_{3j}\pi(\theta_j)=6\times0.2+5\times0.5+0\times0.3=3.7,$$

- 所以，根据期望损失最小化准则，应选择行动方案a_2.

决策准则

准则3-伯努利准则

- 该准则要求先确定决策人的实际价值，即效用函数，若采用损失，则应该是效用函数的负值，再根据贝叶斯原则寻找最优方案.

准则4-E-V准则

- 贝叶斯准则只采用后果的均值(期望损失$\boldsymbol{E_i(l_{ij})}$)作为评价方案优劣的标准，而忽略了风险因素.
- 为了兼顾风险，可选用E-V准则，即均值-方差准则.

决策准则

E-V准则介绍

- 设自然状态$\boldsymbol{\theta_j}$的概率分布为$\boldsymbol{\pi(\theta_j)}$，方案$\boldsymbol{a_i(i=1,2,\cdots,m)}$的期望损失为

$$E_i(l_{ji}) = E\left[l(\theta_j, a_i)\right] = \sum_{j=1}^{n} l_{ji}\pi(\theta_j)$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(l_{ji} - E_i(l_{ji})\right)^2 \pi(\theta_j)$$

- 若方案$\boldsymbol{a_k}$的损失的均值和方差均不大于$\boldsymbol{a_i}$：$\boldsymbol{E_k(l_{jk}) \le E_i(l_{ji})}$且$\boldsymbol{\sigma_k}^2 \le \boldsymbol{\sigma_i}^2$，且至少一个不等式严格成立，则$\boldsymbol{a_k}$优于$\boldsymbol{a_i}$.

决策准则

- **E-V准则的应用**

表6：例7中各种方案的E-V值.

	a_1	a_2	a_3
均值：E_i	4.1	3.6	3.7
方差：${\sigma_i}^2$	2.29	3.79	6.01

- **不存在符合E-V准则的方案.**

这种情况下, 可利用评价函数$f(E,V)$的值来作判别. 常用的评价函数有$f_i(E,V)=E_i+\alpha\sigma_i$, $f_i(E,V)=E_i+\alpha\sigma_i^2$, 或者$f_i(E,V)=E_i+\alpha(E_i^2+\sigma_i^2)$. $f_i(E,V)$的值越小, 方案a_i越优. 其中, α表示决策人的风险程度.

决策准则

- **准则5-不完全信息情况下的决策准则**
- 在状态概率分布的估计不可靠或未知时，可以采用下式评价方案$\boldsymbol{a_i}$的优劣

$$v_i = \lambda \cdot E_i + (1-\lambda) \cdot s_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} l_{ji} \pi(\theta_j) + (1-\lambda) \max_{1 \le j \le n} \left| l_{ji} \right|$$

- 其中，$\boldsymbol{\lambda(0 \le \lambda \le 1)}$是所估计的概率分布的可靠系数。$\boldsymbol{v_i}$越小，$\boldsymbol{a_i}$越优.
- 该准则实际上是贝叶斯准则($\boldsymbol{v_i = E_i}$)与求解严格不确定性问题Wald悲观准则($\boldsymbol{v_i = s_i}$)的线性组合.
- 对自然状态估计可靠的部分作为风险问题，用贝叶斯准则($\boldsymbol{\lambda \cdot E_i}$)估计；不可靠的部分作为严格不确定性问题，用Wald的悲观准则($\boldsymbol{v_i = (1-\lambda) s_i}$)求解.

完全不确定型决策准则

- 知道有几种可能的自然状态发生，但各种状态发生的概率未知
- 准则1--乐观法
  - 决策者意在追求最大效益。先计算每一方案的最大收益值，再比较找出其中的最大者，并采用使最大收益达到最大的方案.
- 准则2——悲观法
  - 决策者意在安全保险。先计算每一方案的最小收益，找出其中的最大值，并采取使最小收益达到最大的方案.

完全不确定型决策准则

- **准则3——乐观系数法**
  - 采取折中的方法。引入参数$\boldsymbol{t}(\mathbf{0} \le \boldsymbol{t} \le \mathbf{1})$，称$\boldsymbol{t}$为乐观系数。决策时，先适当选取一个$\boldsymbol{t}$值；
  - 对各方案$\boldsymbol{a_i}$，求出$\boldsymbol{t}\max\limits_{j}\boldsymbol{a_{ij}} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\min\limits_{j}\boldsymbol{a_{ij}}$；
  - 最后作比较，找出使其 达到最大的方案.
- **准则4——等可能法**
  - 因不能估计各状态出现概率，决策者认为相差不大.
  - 采用将各状态的概率取成相等值的办法将问题转化为风险型决策问题，借助相应的期望值法来决策.

完全不确定型决策

- 对完全不确定性决策问题，不论怎么决策，最终的策略都不能称为最佳策略.
- 采取什么方法决策与决策者的心理状态有关.
- 即使同一决策者，在处理不同决策问题时也可能采取不同办法.
  - 决定购买几元钱的彩票时，会采取乐观法
  - 决定如何投资积蓄时，会采取悲观法
- 要作出符合实际的决策，需多作调查研究，以便对未来自然状态的出现作出符合客观实际的预测.

决策问题举例

- **例8(离散报童模型)** 设某商品的需求量$\boldsymbol{\theta}$为离散变量，其取值范围为$\boldsymbol{\Theta}=\{\boldsymbol{\theta}_1,\cdots,\boldsymbol{\theta}_n\}$，$\boldsymbol{\theta}$取值$\boldsymbol{\theta}_i$的概率为$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\theta}_i)$，$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\theta}_i)=\mathbf{1}$;
- 记该商品的进货量为$\boldsymbol{\alpha}$(决策变量)，若$\boldsymbol{\alpha}>\boldsymbol{\theta}$，进货过量，每单位进货过剩将造成$\boldsymbol{k}_0$元过量损失;
- 若$\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\theta}$，进货不足，每单位进货不足将造成$\boldsymbol{k}_u$元的不足损失.
- **如何确定该商品的最佳进货量?**

决策问题举例(续)

- **解：** 当$\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\theta}$时，将有过量损失$\boldsymbol{k_0(\alpha-\theta)}$；当$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\theta}$时，将有不足损失$\boldsymbol{k_u(\theta-\alpha)}$。
- 故总期望损失

$$\mathrm{K}_\alpha = \sum_{\theta=\theta_1}^{\alpha} k_0(\alpha-\theta)P(\theta) + \sum_{\theta=\alpha}^{\theta_n} k_u(\theta-\alpha)P(\theta)$$

- 可以证明：若$\boldsymbol{\alpha}^*$为报童的最优进货量，则必有

$$K_{\alpha^*} < K_{\alpha^*+1} \text{且} K_{\alpha^*} \leq K_{\alpha^*-1}$$

$$\sum_{\theta=\theta_1}^{\alpha^*-1} P(\theta) < \frac{k_u}{k_0+k_u} \leq \sum_{\theta=\theta_1}^{\alpha^*} P(\theta)$$

思考题

- 某决策问题的收益矩阵如下表所示.

θ_i	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
$\pi(\boldsymbol{\theta_i})$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1
a_1	2	3	7	6	1	2	1.5
a_2	4	8	6	9	3	4	2
a_3	6	4	3	10	12	6	5

- 试用以下准则分别求解:
- (1) 最大可能值准则;　　(2) Bayes准则;
- (3) E-V准则;　　(4) 伯努利准则(设$u = 0.1c^2$).

贝叶斯决策

预备知识

- **Bayes分析**

- 条件概率：设A、B为随机试验E中的事件，$\pi(A|B)$表示在事件B发生的条件下A发生的概率，且有$\pi(A|B)=\pi(AB)/\pi(B)$.

- $A_j(j=1,2,\cdots,n)$为n个互不相容的事件，且$\pi\left(A_j\right)>0$.

- $\bigcup_{j=1}^{n}A_j=S$，则$\{A_j\}_{j=1}^{n}$是样本空间S的一个划分.

- 对任意事件B，由全概率公式，有

$$\pi(B)=\sum_{j=1}^{n}\pi(B\mid A_j)\pi(A_j)$$

预备知识

- **Bayes定理**
- 贝叶斯公式

$$\pi(A_k \mid B)=\frac{\pi(A_k B)}{\pi(B)}=\frac{\pi(B \mid A_k)\pi(A_k)}{\sum_{j=1}^{n}\pi(B \mid A_j)\pi(A_j)}$$

- B为随机事件的结果或观测值;
- $\pi(A_1),\pi(A_2),\cdots,\pi(A_n)$为先验概率分布;
- $\pi(A_1|B),\pi(A_2|B),\cdots,\pi(A_n|B)$为后验概率分布.

施雨，李耀武. 概率论与数理统计. 西安：西安交通大学出版社, 2003.

贝叶斯决策

- 求解随机性决策问题的基础是设定自然状态的概率分布和后果的损失函数，但准确设定自然状态是很困难的事。
- 为了改进自然状态概率分布的准确性，可利用其后验分布来描述概率分布。
- 实际应用中，需估计的随机变量是未来的自然状态$\boldsymbol{\Theta}$，通过随机试验所观察到的往往是与之相关的另一随机变量$\boldsymbol{X}$的值。
- 对连续型随机变量$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{\Theta}$，其条件概率密度函数为

$$\pi(\theta \mid x)=\frac{f(x \mid \theta)\pi(\theta)}{m(x)}$$

贝叶斯决策

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{f(x \mid \theta)\pi(\theta)}{m(x)}$$

- $\pi(\theta)$：θ的先验概率密度函数；
- $f(x|\theta)$：θ出现时，x的条件密度函数，也称为似然函数；
- $m(x)$： x的边缘密度；
- $\pi(\theta|x)$：观测值为x时的后验概率密度函数.

θ连续 $$m(x) = \int_{\theta \in \Theta} f(x \mid \theta)\pi(\theta) d\theta$$

θ离散 $$m(x_k) = \sum_i p(x_k \mid \theta_i)\pi(\theta_i)$$

贝叶斯决策

- 为了准确地估计自然状态 Θ,需通过随机试验获取新信息，而观察所得是与Θ相关的另一随机变量X的值x。
- 当决策人通过随机试验得到观测值x后,需基于x和某种决策规则δ去选择适当的行动a，使得$a=\delta(x)$。
- 其中，
  - 决策规则 δ： 样本空间到决策空间的映射
  - 样本空间：随机试验得到的观测值x组成的集合
  - 决策空间：所有可能的决策规则的集合
- 当决策人根据观测值x和决策规则δ采取行动a，而真实的自然状态为θ时，相应的损失为 $l(\theta,a)=l(\theta,\delta(x))$.

贝叶斯决策

- 风险函数：给定自然状态$\boldsymbol{\theta}$，采取决策规则$\boldsymbol{\delta}$时，损失函数$\boldsymbol{l(\theta,\delta(x))}$对随机试验后果$\boldsymbol{x}$的期望值，记为$\boldsymbol{R(\theta,\delta)}$，即

$$R(\theta,\delta)=E_{\theta}^{X}\left[l(\theta,\delta(x))\right]$$

$\boldsymbol{X}$为连续型随机变量 $$R(\theta,\delta)=\int_{x\in X} l(\theta,\delta(x))f(x\mid\theta)dx$$

$\boldsymbol{X}$为离散型随机变量 $$R(\theta,\delta)=\sum_{x\in X} l(\theta,\delta(x))p(x\mid\theta)$$

问题：决策分析时自然状态$\boldsymbol{\theta}$未知，只能对其设定先验概率，用风险函数关于$\boldsymbol{\theta}$的期望值来描述实际损失.

贝叶斯决策

- **贝叶斯风险**：若自然状态的先验概率为$\pi(\theta)$，决策人采取决策δ，把风险函数$R(\theta,\delta)$关于自然状态θ的期望值称为贝叶斯风险，记为$r(\pi,\delta)$，即

$$r(\pi,\delta)=E^{\pi}\left[R(\theta,\delta)\right]=E^{\pi}\left\{E_{\theta}^{X}\left[l(\theta,\delta(x))\right]\right\}$$

Θ和X为连续型随机变量时

$$r(\pi,\delta)=\int_{\theta\in\Theta}R(\theta,\delta)\pi(\theta)d\theta=\int_{\theta\in\Theta}\int_{x\in X}\pi(\theta)l(\theta,\delta(x))f(x\,|\,\theta)dxd\theta$$

Θ和X为离散型随机变量时

$$r(\pi,\delta)=\sum_{\theta\in\Theta}R(\theta,\delta)\pi(\theta)=\sum_{\theta\in\Theta}\sum_{x\in X}\pi(\theta)l(\theta,\delta(x))p(x\,|\,\theta)$$

贝叶斯决策

- 如果$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\delta}_1)<\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\delta}_2)$，则策略$\boldsymbol{\delta}_1$优于$\boldsymbol{\delta}_2$，记为$\boldsymbol{\delta}_1 \succ \boldsymbol{\delta}_2$.
- 对于先验分布$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})$，若策略空间存在某个策略$\boldsymbol{\delta}^{\pi}$，使得对任意的$\boldsymbol{\delta}\in\boldsymbol{\Delta}$，有$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\delta}^{\pi})<\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\delta})$，则称$\boldsymbol{\delta}^{\pi}$是贝叶斯规则(Bayes策略).
- 贝叶斯规则$\boldsymbol{\delta}^{\pi}$是最优决策规则，它能使贝叶斯风险达到极小.
- 考虑贝叶斯风险时应选择$\boldsymbol{\delta}^{\pi}$，使

$$r(\pi,\delta^{\pi})=\min_{\delta\in\Delta}\left\{r(\pi,\delta)\right\}$$

贝叶斯决策

- 不存在观测值的决策问题称为无观察数据问题。此时，$\boldsymbol{\delta = a}$，$\boldsymbol{R(\theta,\delta) = l(\theta,a)}$，$\boldsymbol{r(\pi,\delta) = r(\pi,a_i) = v_i}$.
- 以上是用损失函数描述决策后果的情况.
- 若采用效用函数代替损失函数，则:
- $\boldsymbol{R(\theta,\delta)}$相应的是真实的自然状态为$\boldsymbol{\theta}$、采用策略$\boldsymbol{\delta}$时收益性后果的期望效用;
- $\boldsymbol{r(\pi,\delta)}$相应的是先验概率为$\boldsymbol{\pi(\theta)}$、采用策略$\boldsymbol{\delta}$时收益性后果的期望效用.

贝叶斯决策

- 由贝叶斯决策准则，当观察值为$\boldsymbol{x}$，先验分布为$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})$时，最优决策规则为贝叶斯规则

$$\delta^{\pi}:r(\pi,\delta^{\pi})=\min_{\delta\in\Delta}\{r(\pi,\delta)\}$$

其中

$$r(\pi,\delta)=\begin{cases}\int_{\theta\in\Theta}\int_{x\in X}\pi(\theta)l(\theta,\delta(x))f(x\mid\theta)dxd\theta, & \text{连续变量}\\ \sum_{\theta\in\Theta}\sum_{x\in X}\pi(\theta)l(\theta,\delta(x))p(x\mid\theta). & \text{离散变量}\end{cases}$$

- 选$\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\pi}}$使$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\delta})$达到极小，就是贝叶斯分析的正规型.

贝叶斯决策

- 利用正规型求解实际问题时，需求出$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})$使$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\delta})$达到极小，求解过程往往较困难.

- 由于自然状态的先验概率分布$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})$、似然函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$和损失函数$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}))$均受一定条件限制(为有限值)，根据Fubini定理，可交换积分顺序，即

$$
\begin{aligned}
r(\pi,\delta) &= \int_{\theta\in\Theta}\int_{x\in X}\pi(\theta)l(\theta,\delta(x))f(x|\theta)dxd\theta \\
&= \int_{x\in X}\underbrace{\boxed{\int_{\theta\in\Theta}\pi(\theta)l(\theta,\delta(x))f(x|\theta)d\theta}}_{r'}dx
\end{aligned}
$$

为极小化上式，应对每个$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$，选择一个$\boldsymbol{\delta}$ 使$\boldsymbol{r}'$达到极小.

贝叶斯决策

- 由于观测值$\boldsymbol{x}$的边缘分布为$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})>\mathbf{0}$，因此，使$\boldsymbol{r}'$达到极小，必然会使

$$
\begin{aligned}
r'' &= \left(m(x)\right)^{-1}\int_{\theta\in\Theta}\pi(\theta)l(\theta,\delta(x))f(x\,|\,\theta)d\theta \\
&= \int_{\theta\in\Theta} l(\theta,\delta(x))\left[\frac{\pi(\theta)f(x\,|\,\theta)}{m(x)}\right]d\theta = \int_{\theta\in\Theta} l(\theta,\delta(x))\pi(\theta\,|\,x)d\theta
\end{aligned}
$$

达到极小。若$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\theta}$为离散变量，则

$$
r'' = \sum_{\theta\in\Theta} l(\theta,\delta(x))\boxed{\pi(\theta\,|\,x)}
$$

后验概率分布

后验期望损失极小化

贝叶斯决策

- **贝叶斯分析的扩展型**
- 由于$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}$，若对每一个给定的$\boldsymbol{x}$，选定一个$\boldsymbol{a}$，使$\boldsymbol{r}''$达到极小，等价于使得$\boldsymbol{r}'$极小，从而可找到最优的贝叶斯策略$\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\pi}}$.
- 该方法称为贝叶斯分析的扩展型(Schlaifer, 1961).
- 利用该方法求得的最优决策策略$\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\pi}}$最终可能有多个.

贝叶斯决策

结论

- 对每个观察值$\boldsymbol{x}$，选择行动$\boldsymbol{a}$，使之对给定$\boldsymbol{x}$时自然状态$\boldsymbol{\theta}$的后验分布$\boldsymbol{\pi(\theta|x)}$的期望损失为极小，或者使

$$r' = \int_{\theta\in\Theta} l(\theta, \delta(x)) f(x\,|\,\theta)\pi(\theta)d\theta$$

极小化，即求得贝叶斯策略$\boldsymbol{\delta^{\pi}}$.

扩展型贝叶斯分析的流程

原始信息：先验分布$\boldsymbol{\pi(\theta)}$

追加样本信息：观察值$\boldsymbol{x}$

利用Bayes定理，获得后验分布$\boldsymbol{\pi(\theta|x)}$(或计算$\boldsymbol{r'}$)

找出使后验损失最小的策略$\boldsymbol{\delta^{\pi}}$

扩展型贝叶斯分析的说明

- 1. 使

$$r' = \int_{\theta\in\Theta} l(\theta,\delta(x)) f(x\mid\theta)\pi(\theta)d\theta$$

$$r'' = \sum_{\theta\in\Theta} l(\theta,\delta(x))\pi(\theta\mid x)$$

达极小的行动可能不止一个，此时会有多个贝叶斯策略$\boldsymbol{\delta^{\pi}}$.

- 2. 贝叶斯扩展型比正规型更直观，尤其是计算$\boldsymbol{r'}$时，不需计算$\boldsymbol{m(x)}$，故更容易计算.

扩展型贝叶斯分析的说明

- 3. 许多分析人员只承认扩展型，理由是：
  - $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})$描述了在获得观察值$\boldsymbol{x}$后关于$\boldsymbol{\theta}$的分布，比$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})$更客观。因此，只要损失函数是由效用导出的(考虑了决策者的价值判断、风险偏好)，则评价行动$\boldsymbol{a}$的优劣时就应使用后验期望损失.
  - $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\delta})$是根据$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})$求出的，仅使用$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})$来确定行动并不一定恰当.
- 4. 有时，所有策略$\boldsymbol{\delta}$的贝叶斯风险$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\delta})$是无穷大，此时无法进行正规型Bayes分析；只要此类问题在后验期望损失为有限值时，就可以使用扩展型Bayes分析方法求解.

信息的价值

- Bayes分析可通过随机试验获得观察值$\boldsymbol{x}$，来改进决策者设定的$\boldsymbol{\theta}$的先验概率$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})$，从而减少期望损失.
- 进行随机试验需要费用，进行试验时应考虑经济上的合理性.
- **1. 完全信息的期望价值**
- 假设通过试验可获得$\boldsymbol{\theta}$的完全信息.
- 决策者事先知道$\boldsymbol{\theta}$的确切值，可根据这种状态选择使损失最小的行动，进而使期望损失极小化.
- 此时的期望损失为

$$E^{\pi}\left[\min_{a\in A} l(\theta,a)\right]$$

信息的价值

- 当决策者不知道$\boldsymbol{\theta}$的确切情况时，只能在行动集中选一个行动使期望损失极小化.

- 此时的期望损失为

$$\min_{a\in A} E^{\pi}\left[l(\theta,a)\right]$$

- 上述两式之差称为完全信息的期望价值(expected value of perfect information)，简记为EVPI，即

$$\text{EVPI}=\min_{a\in A} E^{\pi}\left[l(\theta,a)\right]-E^{\pi}\left[\min_{a\in A} l(\theta,a)\right]$$

信息的价值

- 例7中EVPI的计算

某决策问题的损失矩阵

θ_j	$\pi(\theta_j)$	a_1	a_2	a_3
θ_1	0.2	7	6.5	6
θ_2	0.5	3	4	5
θ_3	0.3	4	1	0

- 对于$E^{\pi}[\min_{\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}} l(\theta,a)]$，在三种自然状态下，决策者采取的最优行动分别为$a_3, a_2$和$a_3$，故

$$E^{\pi}\left[\min_{a\in A} l(\theta,a)\right]=6\times0.2+3\times0.5+0\times0.3=2.7$$

信息的价值

$$\min_{a\in A} E^{\pi}\left[l(\theta,a)\right] = E^{\pi}\left[l(\theta,a_2)\right] = 3.6$$

$$\text{EVPI} = \min_{a\in A} E^{\pi}\left[l(\theta,a)\right] - E^{\pi}\left[\min_{a\in A} l(\theta,a)\right] = 0.9$$

- 即使能获得自然状态的完全信息，其价值只是0.9.
- 只有当试验的费用小于等于0.9时，才值得进行.

用于试验的费用应低于完全信息的期望价值EVPI！

信息的价值

- **2. 采样信息的期望价值**

- 任何试验(采样)不能获得完全信息，有必要研究采样所获得信息的价值.

- 不进行试验时的期望损失为$\min\limits_{a\in A}E^{\pi}[l(\theta,a)]$，采样获得新信息后的期望损失是Bayes风险的极小值，即

$$r(\pi,\delta^{\pi})=\min_{\delta\in\Delta}\{r(\pi,\delta)\}=\min_{\delta\in\Delta}\left\{E^{\pi}\left[E_{\theta}^{X}(l(\theta,\delta(x)))\right]\right\}$$

- 采样信息的期望价值(expected value of sampling information, EVSI)定义为

$$\text{EVSI}=\min_{a\in A}E^{\pi}\left[l(\theta,a)\right]-\min_{\delta\in\Delta}\left\{E^{\pi}\left[E_{\theta}^{X}(l(\theta,\delta(x)))\right]\right\}$$

贝叶斯分析实例1

- **例9（油井钻探问题）**
- 某公司拥有一块可能有石油的土地，可以自己钻井，也可以租给其他公司开采；
- 出租土地的两种租约：
  - 无条件出租，租金45万元；
  - 租金依产量而定，产量在20万桶或以上时，每桶提成5元；不足20万桶时不收租金.
- 钻井费用：75万元，有油时加采油设备费25万元，每桶油价为15元；
- 油的产量经离散化后分4种状态：无油、产量5万桶、产量20万桶、产量50万桶.

例9(续)

表7：各种状态的主观概率分布

油产量	50万桶	20万桶	5万桶	无油
θ_j	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
$\pi(\theta_j)$	0.1	0.15	0.25	0.5

决策人风险中立，决策人应采取什么行动？

例9(续)

- **油井钻探问题的求解**
  - 解：将决策人自己钻井记为a_1，无条件出租记为a_2，有条件出租为a_3，由于决策人风险中立,可设$u_{ij}=c_{ij}/$万元，令$l(y)=-u(y)$，效用为：

表8：各种状态与策略组合的效用

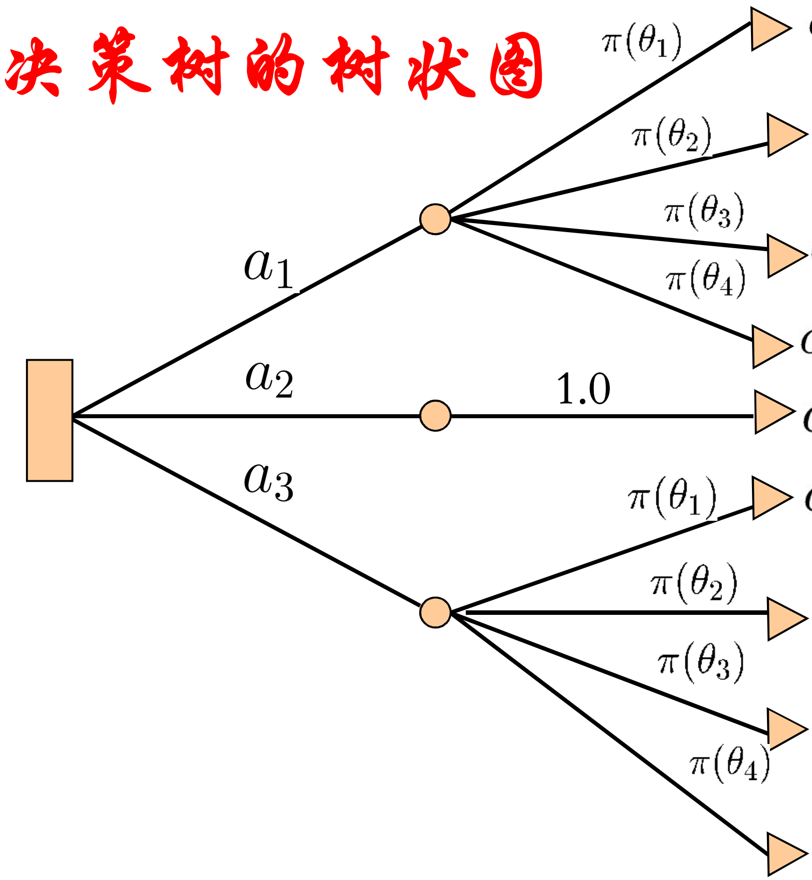
自然状态 →

决策 ↓

a_i \ c_{ij} \ θ_j		$\boldsymbol{\theta_1}$	$\boldsymbol{\theta_2}$	$\boldsymbol{\theta_3}$	$\boldsymbol{\theta_4}$
		50万桶	20万桶	5万桶	无油
$\boldsymbol{a_1}$	自己钻井	650	200	−25	−75
$\boldsymbol{a_2}$	无条件出租	45	45	45	45
$\boldsymbol{a_3}$	条件出租	250	100	0	0

例9(续)

- 决策树的树状图



收入	效用	损失
$c_{11}=650$万元	650	−650
$c_{12}=200$万元	200	−200
$c_{13}=-25$万元	−25	25
$c_{14}=-75$万元	−75	75
$c_{23}=45$万元	45	−45
$c_{31}=250$万元	250	−250
$c_{32}=100$万元	100	−100
$c_{33}=0$万元	0	0
$c_{34}=0$万元	0	0

例9(续)

- 在无观察时，$R=l$，$r(\pi,a_i)=\sum_{j=1}^{4} l(\theta_j,a_i)\pi(\theta_j)$.

$$
\begin{aligned}
r(\pi,a_1)&=\sum_{j=1}^{4} l(\theta_j,a_1)\pi(\theta_j)\\
&=-650\times 0.1-200\times 0.15+25\times 0.25+75\times 0.5\\
&=-51.25,
\end{aligned}
$$

$$
r(\pi,a_2)=\sum_{j=1}^{4} l(\theta_j,a_2)\pi(\theta_j)=-45,
$$

$$
r(\pi,a_3)=\sum_{j=1}^{4} l(\theta_j,a_3)\pi(\theta_j)=-250\times 0.1-100\times 0.15+0=-40.
$$

风险$\boldsymbol{r}$小者优先，故 $\boldsymbol{\delta^{\pi}=a_1}$为贝叶斯策略，即决策人应该自己钻井.

贝叶斯分析实例2

例10（油井钻探问题进一步探讨）

- 设通过地质勘探(试验费12万元)获得该地区的地质构造类型$x_k(k=1,2,3,4)$的信息.

表9：似然函数$p(x_k|\theta_j)(k,j=1,2,3,4)$的取值

$\theta_j \backslash x_k$	x_1	x_2	x_3	x_4
θ_1	7/12	1/3	1/12	0
θ_2	9/16	3/16	1/8	1/8
θ_3	11/24	1/6	1/4	1/8
θ_4	3/16	11/48	13/48	5/16

例10(续)

- **问题**
- (1) 求后验概率$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_j|\boldsymbol{x}_k)$.
- (2) 进行贝叶斯分析，求贝叶斯规则.
- (3) 讨论正规型贝叶斯分析的求解步骤.
- (4) 求完全信息期望值EVPI和采样信息期望值EVSI.

例10(续)

- **求解过程**
- 解：(1) 根据贝叶斯公式

$$\pi(\theta_j \mid x_k) = \frac{p(x_k \mid \theta_j)\pi(\theta_j)}{m(x_k)} = \frac{p(x_k \mid \theta_j)\pi(\theta_j)}{\sum_{i=1}^{4} p(x_k \mid \theta_i)\pi(\theta_i)}$$

表10：后验概率$\boldsymbol{\pi(\theta_j|x_k)}$的取值

θ_j \ x_k	x_1	x_2	x_3	x_4
θ_1	0.166	0.153	0.037	0
θ_2	0.240	0.129	0.083	0.091
θ_3	0.327	0.191	0.278	0.152
θ_4	0.267	0.526	0.602	0.758

例10(续)

- (2) 作扩展型分析. 将采取行动 a_i 时的后验期望损失 r'' 记作 q_i，则：

给定x_1: $q_1 = -115.7$, $q_2 = -33$, $q_3 = -53.5$, 故选a_1;

给定x_2: $q_1 = -69.1$, $q_2 = -33$, $q_3 = -39.2$, 故选a_1;

给定x_3: $q_1 = 23.4$, $q_2 = -33$, $q_3 = -5.6$, 故选a_2;

给定x_4: $q_1 = 54.4$, $q_2 = -33$, $q_3 = 2.9$, 故选a_2.

于是，可得下面的信息

例10(续)

x_k	Bayes行动a_k	期望损失q_k	边缘分布$m(x_k)$
x_1	a_1	-115.7	0.351
x_2	a_1	-69.1	0.218
x_3	a_2	-33	0.225
x_4	a_2	-33	0.206

根据以上分析，进行地质勘探试验的期望损失为

$$\sum_{k=1}^{4} q_k m(x_k) = -69.89$$

例10(续)

- (3) 该问题的非随机性策略集见下表

	x_1	x_2	x_3	x_4
δ_1	a_1	a_1	a_1	a_1
δ_2	a_1	a_1	a_1	a_2
δ_3	a_1	a_1	a_1	a_3
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
δ_{81}	a_3	a_3	a_3	a_3

正规型分析需对策略集中的$\boldsymbol{\delta_i, i = 1, 2, \cdots, 81}$按下式计算:

$$r(\pi,\delta_i)=\sum_j\sum_k l(\theta_j,\delta_i(x_k))p(x_k\mid\theta_j)\pi(\theta_j)$$

使得$\boldsymbol{r(\pi, \delta_i)}$最小的$\boldsymbol{\delta}$即贝叶斯策略$\boldsymbol{\delta^{\pi}}$.

例10(续)

- (4) 采样信息期望值EVSI的计算

$$\min_{a\in A} E^{\pi}\left[l(\theta,a)\right]=r(\pi,\delta^{*})=-51.25$$

- 问题(2)中进行扩展型Bayes分析时已考虑了试验费用12万元，计算价值时要计入此部分.

$$\min_{\delta\in\Delta}\left\{E^{\pi}\left[E_{\theta}^{X}(l(\theta,\delta(x)))\right]\right\}=-12+\sum_{k} q_k m(x_k)=-12-65.91=-77.91$$

$$\begin{aligned}\mathrm{EVSI}&=\min_{a\in A} E^{\pi}\left[l(\theta,a)\right]-\min_{\delta\in\Delta}\left\{E^{\pi}\left[E_{\theta}^{X}(l(\theta,\delta(x)))\right]\right\}\\&=-51.25+77.91=26.66(\text{万元})\end{aligned}$$

例10(续)

- (4) 完全信息期望值EVPI的计算
- 由于

$$E^{\pi}\left[\min_{a\in A} l(\theta,a)\right]$$
$$=l(\theta_1,a_1)\pi(\theta_1)+l(\theta_2,a_1)\pi(\theta_2)+l(\theta_3,a_2)\pi(\theta_3)+l(\theta_4,a_2)\pi(\theta_4)$$
$$=-650\times 0.1-200\times 0.15-45\times 0.25-45\times 0.5=-128.75$$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{EVPI}&=\min_{a\in A} E^{\pi}\left[l(\theta,a)\right]-E^{\pi}\left[\min_{a\in A} l(\theta,a)\right]\\&=-51.25+128.75=77.5(\text{万元})\end{aligned}}$$

小结

- 随机决策问题的分析方法(树状图)
- 随机决策问题的求解步骤
- 效用函数的构造与选择
- 决策准则
- 贝叶斯决策

参考资料

- 岳超源. 决策理论与方法. 北京: 科学出版社, 2002.
- 西北工业大学数学建模指导委员会. 数学建模简明教程. 北京: 高等教育出版社，2008.
- 茆诗松. 贝叶斯统计. 北京: 中国统计出版社, 2008.
- 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- 林齐宁. 决策分析. 北京: 北京邮电大学出版社, 2003.
- 罗党, 王淑英. 决策理论与方法. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- Berger JO(贾乃光，吴喜之译). 北京：统计决策论及贝叶斯分析. 中国统计出版社, 1998.

课后作业

- 决策分析讲义中的练习题
- 在计算机上实现合理配备工人、DVD在线租赁、油井钻探等问题的计算
- 查阅Bayes决策分析的相关资料
- 熟悉并掌握用matlab或其他软件实现：常见统计分布的密度函数、分布函数的计算及随机数的产生

Thanks！ Any Questions？