第十三章　达朗贝尔原理

达朗贝尔原理 ---“动静法”

研究对象是动力学问题

所用的方法是静力学方法

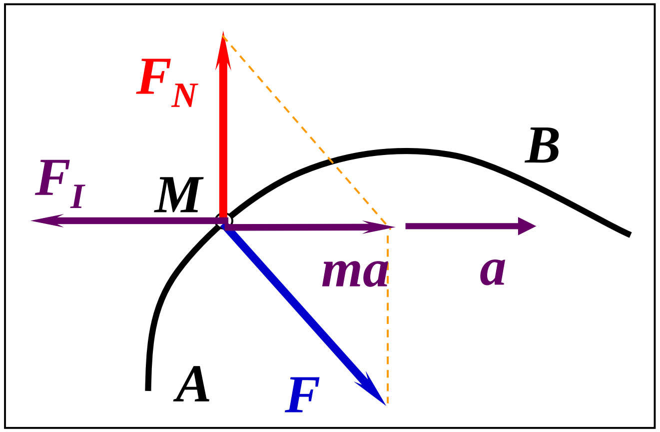
引入惯性力

- 达朗贝尔原理为解决非自由质点系的动力学问题提供了有别于动力学普遍定理的另外一类方法。
- 引进惯性力的概念，进而应用静力学方法研究动力学问题.
- 达朗贝尔原理广泛应用于工程技术中，同时也是分析力学的基础。

§13–1 达朗贝尔原理

1. 质点的惯性力

设质量为m的非自由质点M，在主动力F和约束力F_N作用下沿曲线运动。



$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_N=m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_N+(-m\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

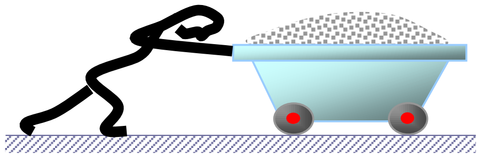
质点的惯性力 $\boldsymbol{F}_I=-m\boldsymbol{a}$

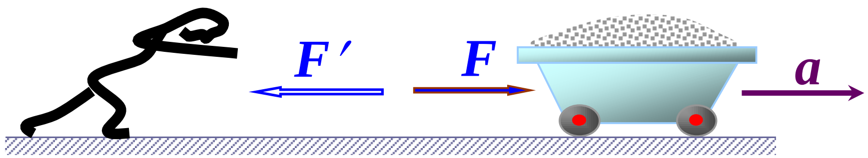
- 质点的惯性力是一个虚假的力。
- 与质点相对动力学中的惯性力不同。

1. 质点的惯性力

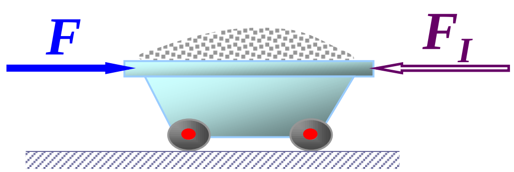
$$F_I = -ma$$

“任何物体都将给予企图改变它运动状态的任何其他物体以阻力.”——刻卜勒（Kepler）

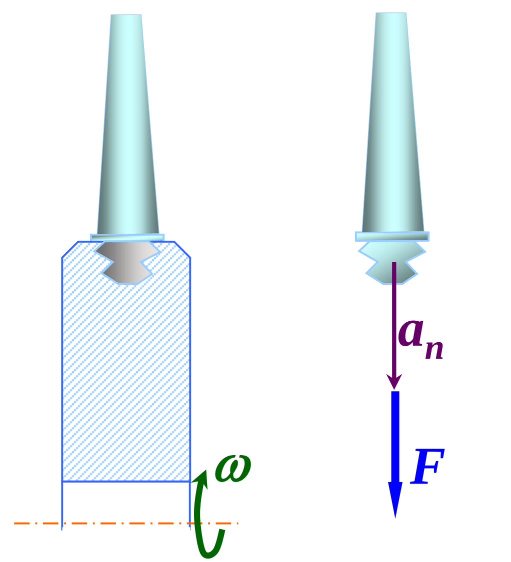




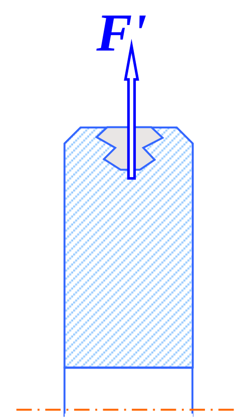
$$F' = F_I$$



惯性力作用在使物体（小车）产生加速度的施力物体（推车人）上



$$F' = F_I$$



2. 质点的达朗贝尔原理

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_N + (-m\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{F}_I = -m\boldsymbol{a}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{F}_I = \boldsymbol{0}}$$

在质点运动的每一瞬时，作用于质点的主动力、约束力和质点的惯性力在形式上构成一平衡力系。这就是**质点的达朗贝尔原理**。

质点达朗贝尔原理的投影形式

$$F_x + F_{Nx} + F_{Ix} = 0$$

$$F_y + F_{Ny} + F_{Iy} = 0$$

$$F_z + F_{Nz} + F_{Iz} = 0$$

3. 质点系的达朗贝尔原理

对于质点系中每个质点有：

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni}+\boldsymbol{F}_{Ii}=\boldsymbol{0} \qquad (i=1,2,3\cdots,n)$$

在质点系运动的任一瞬时，作用于每一质点上的主动力、约束力和该质点的惯性力在形式上构成一平衡力系。这就是质点系的达朗贝尔原理。

对于一般质点系，有n个形式如上式的平衡方程，根据静力学中空间任意力系的平衡条件

$$\sum\boldsymbol{F}_i+\sum\boldsymbol{F}_{Ni}+\sum\boldsymbol{F}_{Ii}=\boldsymbol{0}$$

$$\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)+\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ni})+\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii})=\boldsymbol{0}$$

3. 质点系的达朗贝尔原理

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} + \boldsymbol{F}_{Ii} = \boldsymbol{0} \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots, n)$$

$$\sum \boldsymbol{F}_i + \sum \boldsymbol{F}_{Ni} + \sum \boldsymbol{F}_{Ii} = \boldsymbol{0}$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ni}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii}) = \boldsymbol{0}$$

- 上式中的求和可以对质点系中任何一部分进行，而不限于对整个质点系，因此，该式并不表示仅有2个平衡方程，而仍是n个独立的平衡方程。

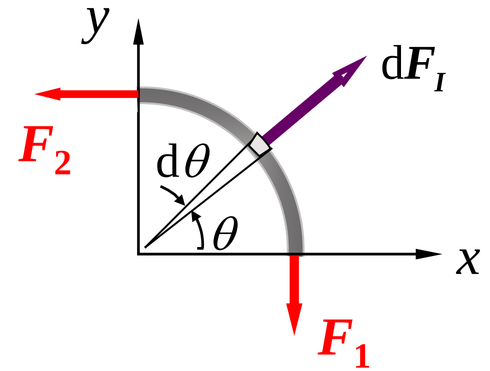
- 各质点的主动力和约束反力可以是质点系的外力，也可是内力。在求和过程中所有内力都将自动抵消。

$$\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum \boldsymbol{F}_{Ii} = \boldsymbol{0}$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii}) = \boldsymbol{0}$$

例 已知飞轮直径D，其截面面积A，材料密度ρ（$\mathrm{kg/m^3}$），以匀角速度ω在水平面内转动。求飞轮截面张力。

解：研究对象四分之一飞轮，受力分析



运动分析： $a_n = \dfrac{D}{2}\omega^2$

$$\mathrm{d}F_I = (\rho \cdot A\mathrm{d}s) \cdot a_n = \frac{D}{2}\rho A\omega^2 \mathrm{d}s = \frac{D^2}{4}\rho A\omega^2 \mathrm{d}\theta$$

$$\sum F_x = 0: \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}F_I \cdot \cos\theta - F_2 = 0$$

$$F_2 = \frac{D^2}{4}\rho A\omega^2 \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0^\circ\right) = \frac{D^2}{4}\rho A\omega^2$$

$$\sum F_y = 0: \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}F_I \cdot \sin\theta - F_1 = 0$$

$$F_1 = \frac{D^2}{4}\rho A\omega^2 \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0^\circ\right) = \frac{D^2}{4}\rho A\omega^2$$

$$F_1 = F_2 = \rho A v^2$$

应用动力学普遍定理，如何求解？

§13-2　刚体惯性力系的简化

1. 惯性力系的主矢和主矩

质点的惯性力　$\boldsymbol{F}_I = -m\boldsymbol{a}$

质点系的惯性力系　$\boldsymbol{F}_{Ii} = -m_i \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, 2, 3\cdots, n)$

主矢　$\boldsymbol{F}_{IR} = \sum \boldsymbol{F}_{Ii} = -\sum m_i \boldsymbol{a}_i = -m\boldsymbol{a}_C$

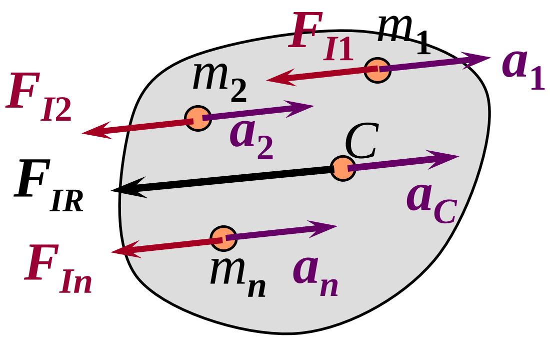
惯性力系的主矢与运动形式无关，与简化中心无关。

主矩　$\boldsymbol{M}_{IO} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii}) = \sum \boldsymbol{r}_i \times (-m_i \boldsymbol{a}_i)$

惯性力系的主矩与运动形式有关，与简化中心有关。

2. 刚体平行移动

$$F_{Ii}=-m_i a_i=-m_i a_C$$



主矢 $\boxed{F_{IR}=-\sum m_i a_i=-m a_C}$

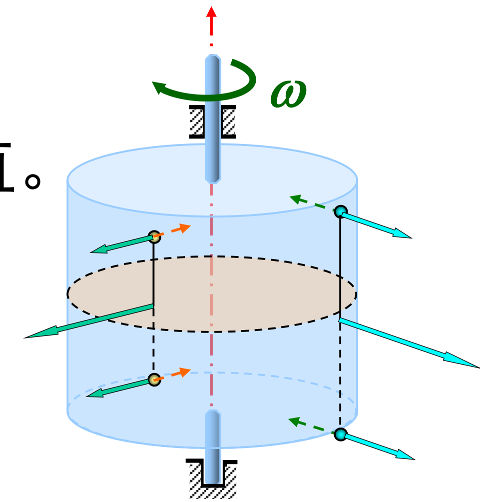
主矩
$$M_{IO}=\sum M_O(F_{Ii})=\sum -r_i\times m_i a_C$$
$$=-\left(\sum m_i r_i\right)\times a_C=-m r_C\times a_C$$

当简化中心为质心C时，$M_{IC}=0$

结论： 平动刚体的惯性力系可以简化为通过质心的合力，其大小等于刚体的质量与加速度的乘积，方向与加速度方向相反。

3. 刚体定轴转动

刚体有质量对称面，且转轴与对称面垂直。



$$\boldsymbol{F}_{Ii}=-m_i\boldsymbol{a}_i=-m_i(\boldsymbol{a}_i^{\tau}+\boldsymbol{a}_i^{n})$$

向转轴O点简化

主矢 $\boxed{\boldsymbol{F}_{IR}=-\sum m_i\boldsymbol{a}_i=-m\boldsymbol{a}_C}$

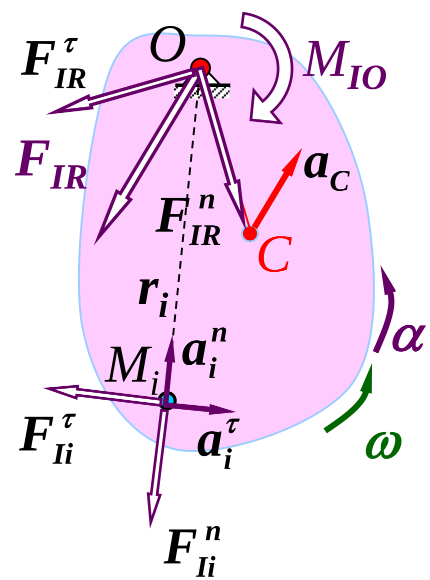
$$=\boldsymbol{F}_{IR}^{\tau}+\boldsymbol{F}_{IR}^{n}$$

主矩 $M_{IO}=\sum M_O(\boldsymbol{F}_{Ii})$

$$=\sum[M_O(\boldsymbol{F}_{Ii}^{\tau})+M_O(\boldsymbol{F}_{Ii}^{n})]=\sum M_O(\boldsymbol{F}_{Ii}^{\tau})$$

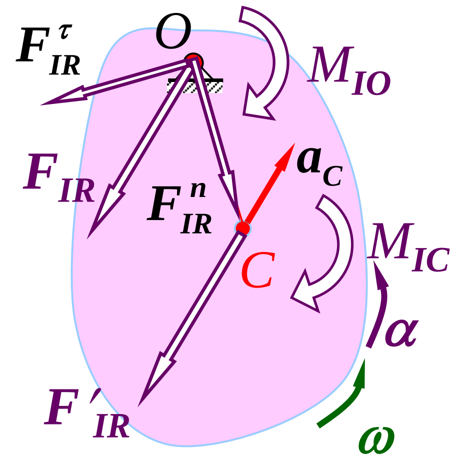
$$=\sum -m_i a_i^{\tau}\cdot r_i=-\sum m_i r_i^2\alpha$$

$$\boxed{M_{IO}=-J_O\alpha}$$



3. 刚体定轴转动

刚体有质量对称面，且转轴与对称面垂直。



向质心C点简化

主矢 $\boxed{\boldsymbol{F}'_{IR}=\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C}$

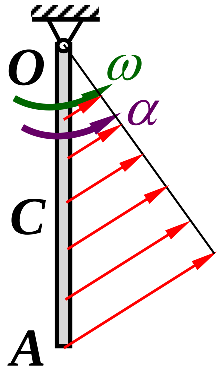
主矩 $M_{IC}=M_{IO}+M_C(\boldsymbol{F}_{IR})$

$$=M_{IO}+M_C(\boldsymbol{F}_{IR}^{\tau})=-J_z\alpha+F_{IR}^{\tau}\cdot r_C=-(J_z-mr_C^2)\alpha$$

$$\boxed{M_{IC}=-J_C\alpha}$$

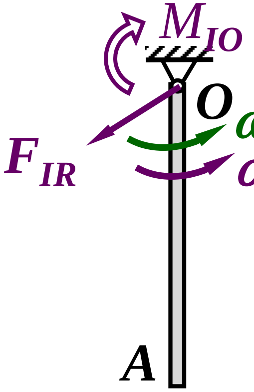
结论：刚体绕与对称面垂直的定轴转动时，惯性力系可以简化为对称面内的一个力和一个力偶。该力等于ma_C，方向与a_C方向相反，作用在轴(质心)上；该力偶的矩等于$J_O\alpha$ ($J_C\alpha$)，转向与α相反。

例 图示均质杆OA质量为m，长为l，绕O点作定轴转动，角速度为ω，角加速度为α，计算杆上惯性力系向O点和质心C简化的结果。



解：运动分析

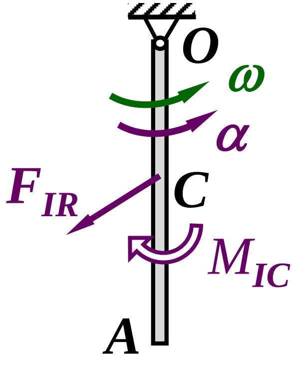
$$a_C=\frac{l}{2}\sqrt{\omega^4+\alpha^2}$$



向转轴O点简化

$$F_{IR}=ma_C=\frac{ml}{2}\sqrt{\omega^4+\alpha^2}$$

$$M_{IO}=J_O\alpha=\frac{1}{3}ml^2\alpha$$



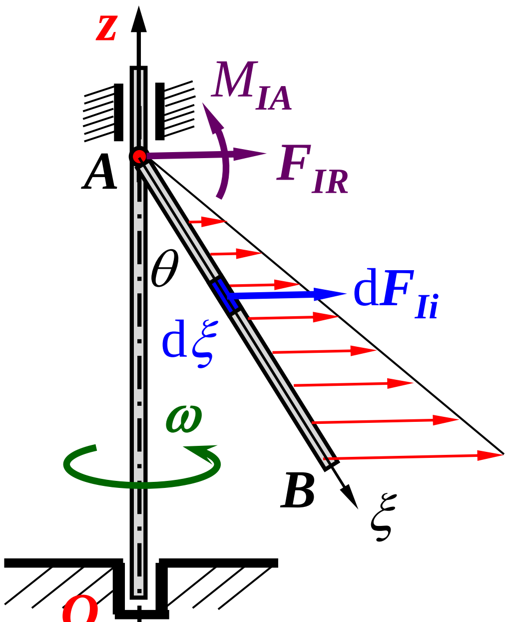
向质心C点简化

$$F_{IR}=ma_C=\frac{ml}{2}\sqrt{\omega^4+\alpha^2}$$

$$M_{IC}=J_C\alpha=\frac{1}{12}ml^2\alpha$$

例 图示均质杆AB质量为m，长为l，与铅垂线的夹角为θ，以匀角速度ω绕铅垂轴Oz转动，计算杆上惯性力系向A点的简化结果。

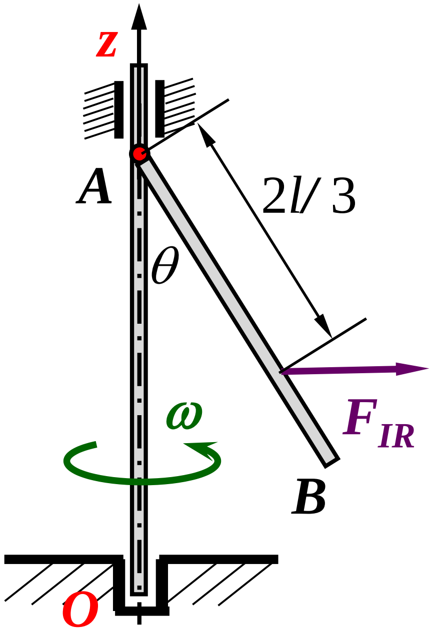
解：运动分析



$$a_n = \xi\omega^2 \sin\theta$$

$$\mathrm{d}F_{Ii} = \mathrm{d}m \cdot a_n$$

$$= \frac{m}{l}\mathrm{d}\xi \cdot \xi\omega^2 \sin\theta$$



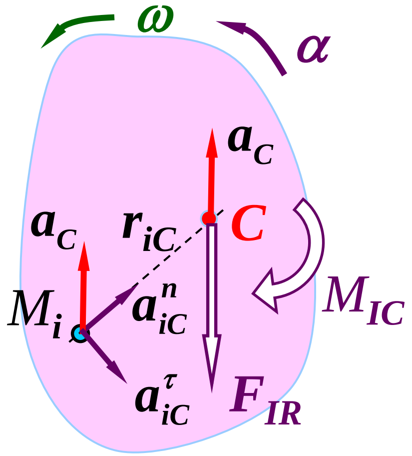
$$F_{IR} = \int_0^l \mathrm{d}F_{Ii} = \int_0^l \frac{m}{l}\cdot\xi\omega^2 \sin\theta \mathrm{d}\xi = \frac{ml\omega^2}{2}\sin\theta$$

$$M_{IA} = \int_0^l \mathrm{d}F_{Ii}\cdot\xi\cos\theta = \frac{ml^2\omega^2}{3}\sin\theta\cos\theta$$

4. 刚体平面运动

刚体有质量对称面，且此平面与刚体运动平面平行。

$$\boldsymbol{F}_{Ii} = -m_i \boldsymbol{a}_i = -m_i(\boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{iC}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{iC}^{n})$$



向质心C点简化

主矢 $\boxed{\boldsymbol{F}_{IR} = -\sum m_i \boldsymbol{a}_i = -m\boldsymbol{a}_C}$

主矩 $M_{IC} = \sum M_C(\boldsymbol{F}_{Ii})$

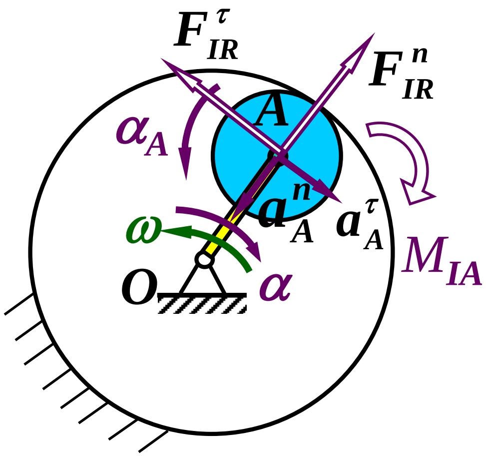
$$= \sum [M_C(\boldsymbol{F}_{IC}) + M_C(\boldsymbol{F}_{IiC}^{\tau}) + M_C(\boldsymbol{F}_{IiC}^{n})]$$

$$= \sum M_C(\boldsymbol{F}_{IiC}^{\tau}) = \sum -m_i a_{iC}^{\tau} \cdot r_{iC}$$

$$\boxed{M_{IC} = -J_C \alpha}$$

结论：刚体在与质量对称面平行的平面内运动时，惯性力系可以简化为对称面内的一个力和一个力偶。该力等于$m\boldsymbol{a}_C$，方向与$\boldsymbol{a}_C$反向，作用在质心上；力偶矩等于$J_C\alpha$，转向与α相反。

例 设均质齿轮A与一大齿轮内啮合，齿轮A的质量为m，半径为r，OA杆长为l。若OA杆以角速度ω、角加速度α转动，转向如图。在图示位置，计算齿轮A的惯性力系向O点简化的结果。



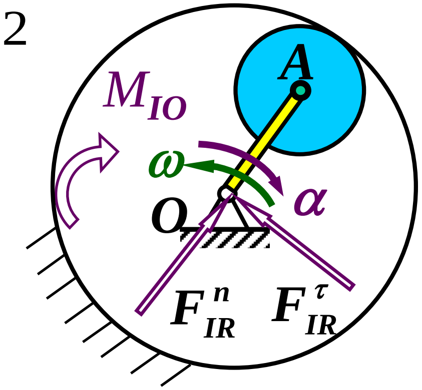
解：运动分析

$$a_A^{\tau} = l\alpha \qquad a_A^n = l\omega^2 \qquad \alpha_A = \frac{l\alpha}{r}$$

向质心A点简化

$$F_{IR}^{\tau} = ml\alpha \qquad F_{IR}^{n} = ml\omega^2$$

$$M_{IA} = J_A\alpha_A = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{l\alpha}{r} = \frac{mlr\alpha}{2}$$



向O点简化

$$F_{IR}^{\tau} = ml\alpha \qquad F_{IR}^{n} = ml\omega^2$$

$$M_{IO} = M_{IA} - F_{IR}^{\tau} \cdot l = \frac{mlr\alpha}{2} - ml^2\alpha$$

小结

- 惯性力系的**主矢**与刚体的运动形式**无关**。
- 惯性力系的**主矩**与刚体的运动形式**有关**。

向质心C点简化

平行移动	$\boxed{\boldsymbol{F}_{IR} = -\sum m_i \boldsymbol{a}_i = -m\boldsymbol{a}_C}$	$\boxed{M_{IC} = 0}$
定轴转动	$\boxed{\boldsymbol{F}_{IR} = -\sum m_i \boldsymbol{a}_i = -m\boldsymbol{a}_C}$	$\boxed{M_{IC} = -J_C\alpha}$
平面运动	$\boxed{\boldsymbol{F}_{IR} = -\sum m_i \boldsymbol{a}_i = -m\boldsymbol{a}_C}$	$\boxed{M_{IC} = -J_C\alpha}$

§13-3　刚体达朗贝尔原理–动静法应用

在任意瞬时，虚加的刚体的惯性力系与作用在刚体上的其他外力形式上组成平衡力系。

$$\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum \boldsymbol{F}_{Ii} = \boldsymbol{0} \qquad \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii}) = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{F}_{IR} = \sum \boldsymbol{F}_{Ii} = -m\boldsymbol{a}_C \Longrightarrow \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} = m\boldsymbol{a}_C$$

质心运动定理

$$\boldsymbol{M}_{IO} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{Ii}) = \sum \boldsymbol{r}_i \times (-m_i \boldsymbol{a}_i)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i)$$

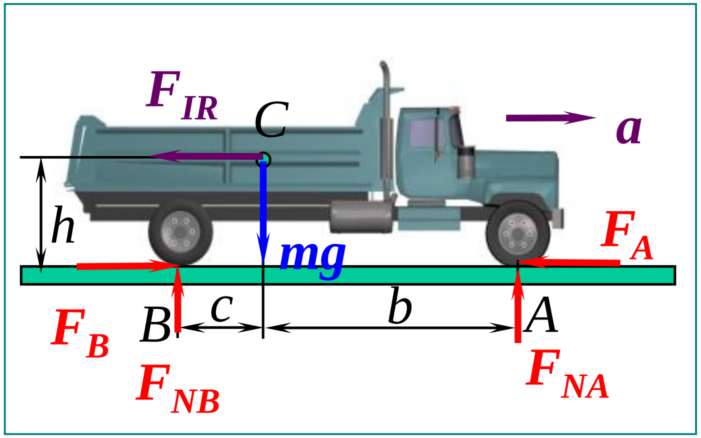
$$= \Sigma\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m_i \boldsymbol{v}_i\right) + \Sigma\left(\boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$= -\boldsymbol{M}_{IO}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

对定点的动量矩定理

例 汽车连同货物的总质量是m ，其质心C离前后轮的水平距离分别是b和c,离地面的高度是h。当汽车以加速度a沿水平道路行驶时，求地面给前、后轮的铅直反力。轮子的质量不计。



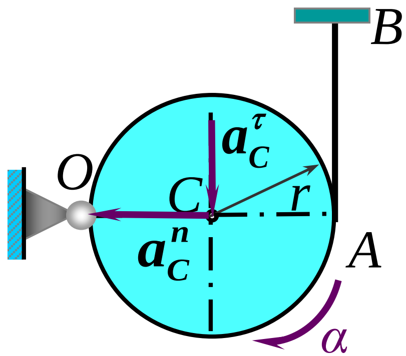
解：研究对象：汽车连同货物，受力分析

惯性力系合成：$F_{IR}= ma$

$$\sum M_B = 0 \ , \quad F_{IR}h - mgc + F_{NA}(b+c) = 0$$

$$\sum M_A = 0 \ , \quad F_{IR}h + mgb - F_{NB}(b+c) = 0$$

$$F_{NA} = \frac{m(gc - ah)}{b+c} \qquad F_{NB} = \frac{m(gb + ah)}{b+c}$$

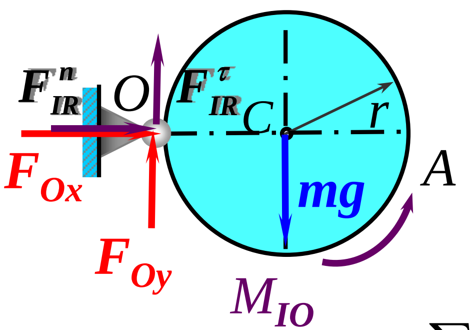


例　如图所示，匀质圆盘的半径为r，质量为m，可绕水平轴O转动。突然剪断绳，求此时圆盘的角加速度和轴承O处的反力。

解：研究圆盘，圆盘定轴转动

$$F_{IR}^{\tau} = ma_C^{\tau} = mr\alpha \qquad F_{IR}^{n} = ma_C^{n} = mr\omega^2 = 0$$

$$M_{IO} = J_O\alpha = \frac{3}{2}mr^2\alpha$$



受力分析，加惯性力和惯性力偶

（向转轴简化）

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ox} = 0$$

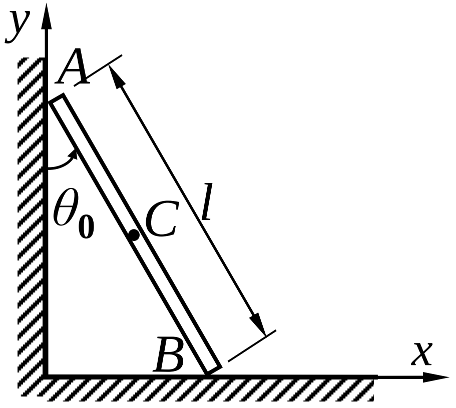
$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Oy} + F_{IR}^{\tau} = 0$$

$$\sum M_O = 0, \qquad M_{IO} - mgr = 0$$

$$\boxed{F_{Ox} = 0 \quad F_{Oy} = -\frac{2mg}{3} \quad \alpha = \frac{2g}{3r}}$$

讨论　惯性力系若向C点简化？

例 均质细杆AB，长l，质量为m，两端分别沿铅垂墙和水平面滑动，不计摩擦。求杆开始滑动时$(\theta=\theta_0)$的角加速度与墙的约束反力。



解 以杆为研究对象，杆作平面运动

其质心的坐标为：$x_C=\dfrac{l}{2}\sin\theta \qquad y_C=\dfrac{l}{2}\cos\theta$

质心的加速度为：

$$\ddot{x}_C=-\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta+\frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta$$

$$\ddot{y}_C=-\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta-\frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta$$

$$\theta=\theta_0 \qquad \dot{\theta}=\dot{\theta}_0=0 \qquad \ddot{\theta}=\ddot{\theta}_0$$

$$a_{Cx}=\frac{l}{2}\ddot{\theta}_0\cos\theta_0$$

$$a_{Cy}=-\frac{l}{2}\ddot{\theta}_0\sin\theta_0$$

$$F_{Ix} = ma_{Cx} \quad F_{Iy} = ma_{Cy} \quad M_{IC} = J_C\alpha = \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}_0 \quad a_{Cx} = \frac{l}{2}\ddot{\theta}_0\cos\theta_0$$

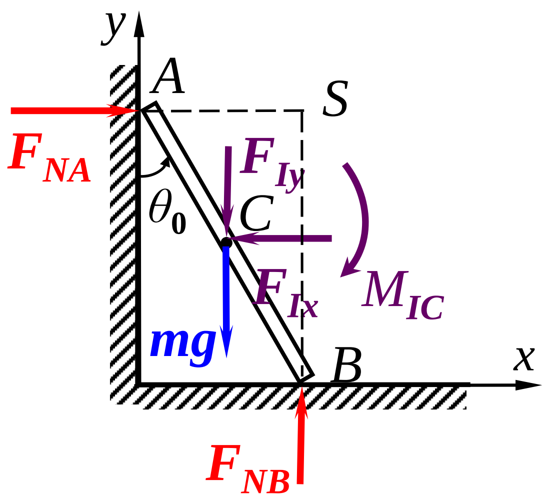
受力如图所示,加惯性力(力偶)

$$a_{Cy} = -\frac{l}{2}\ddot{\theta}_0\sin\theta_0$$

$$\sum M_S(F) = 0 \quad -M_{IC} - F_{Ix}\cdot\frac{l}{2}\cos\theta_0 + (F_{Iy}+mg)\cdot\frac{l}{2}\sin\theta_0 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{NA} - F_{Ix} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{NB} - F_{Iy} - mg = 0$$

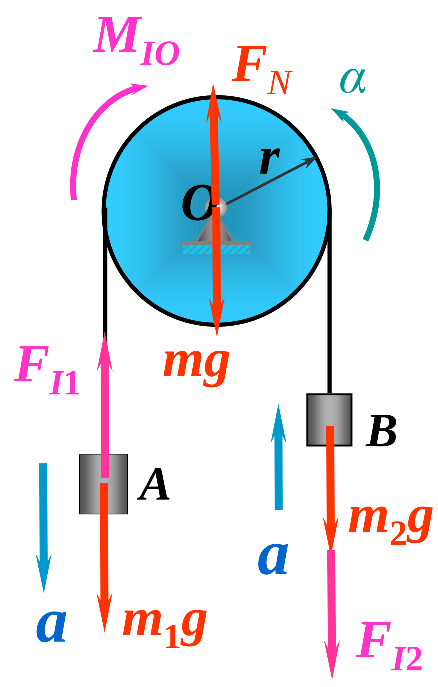


$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta_0$$

$$F_{NA} = \frac{3mg}{4}\sin\theta_0\cos\theta_0$$

$$F_{NB} = mg(1-\frac{3}{4}\sin^2\theta_0)$$

例 如图所示，匀质滑轮的半径为r，质量为m，可绕水平轴转动。轮缘上跨过的软绳的两端各挂质量为$m_1(A)$和m_2 (B)的重物,且$m_1>m_2$。绳的重量不计，绳与滑轮之间无相对滑动，轴承摩擦忽略不计。求重物的加速度和轴承反力。



解：系统为研究对象，受力分析

$$F_{I1}=m_1a \qquad F_{I2}=m_2a$$

$$M_{IO}=J_O\alpha=\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{a}{r}=\frac{1}{2}mar$$

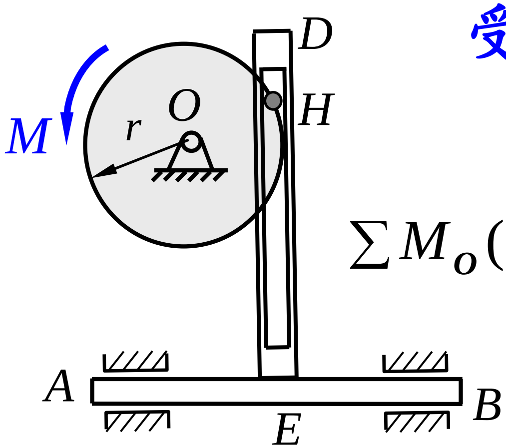
$$\sum F_y=0,\ F_N-mg-m_1g-m_2g+F_{I1}-F_{I2}=0$$

$$\sum m_O(\boldsymbol{F})=0,\ (m_1g-F_{I1}-F_{I2}-m_2g)r-M_{IO}=0$$

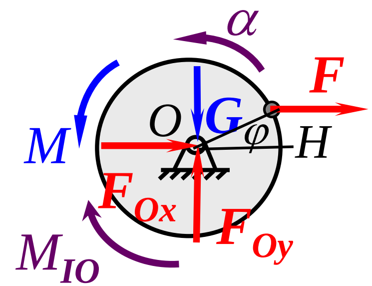
$$F_N=mg+m_1g+m_2g-m_1a+m_2a=0$$

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m}g$$

例　曲柄滑道机构如图所示。已知轮O半径为r，对转轴的转动惯量为J，轮上作用一不变的转矩M，滑槽ABD的质量为m，与滑道的摩擦系数为f，其它摩擦略去不计，求轮的转动微分方程。



解：研究轮O，定轴转动，受力分析



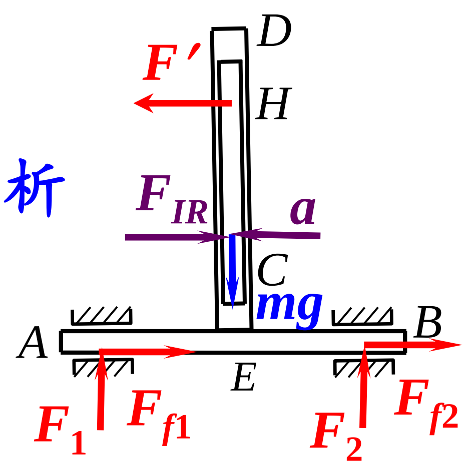
$$M_{IO} = J\alpha = J\ddot{\varphi}$$

$$\sum M_O(F) = 0 \quad M - M_{IO} - Fr\sin\varphi = 0$$

$$M = J\ddot{\varphi} + Fr\sin\varphi$$

$$F_{IR} = ma$$

研究滑槽ABD，平动，受力分析



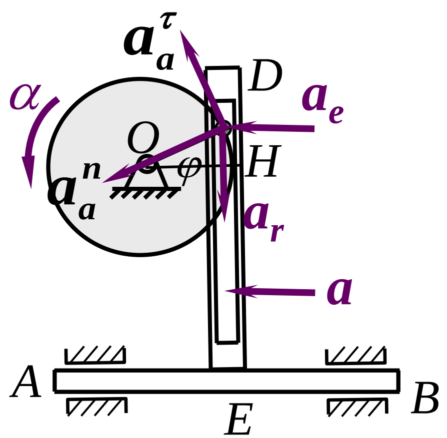
$$\sum F_y = 0 \quad F_1 + F_2 - mg = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{IR} + F_{f1} + F_{f2} - F' = 0$$

$$F' = fmg + ma$$

$$M = J\ddot{\varphi} + Fr\sin\varphi$$

$$F' = fmg + ma$$



补充运动关系，取销钉为动点，滑槽*ABD*为动系

$$\boldsymbol{a}_a^\tau + \boldsymbol{a}_a^n = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e$$

$$a_a^\tau = r\ddot{\varphi}, \qquad a_a^n = r\dot{\varphi}^2, \qquad a_e = a$$

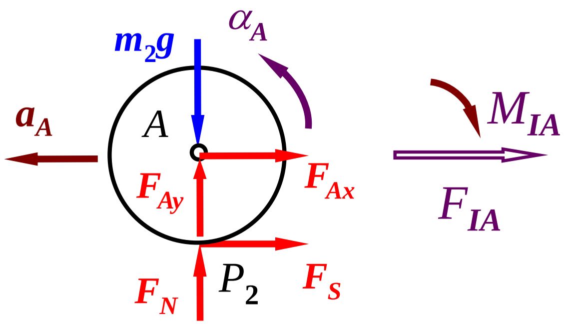
$$-a_a^\tau \sin\varphi - a_a^n \cos\varphi = -a_e$$

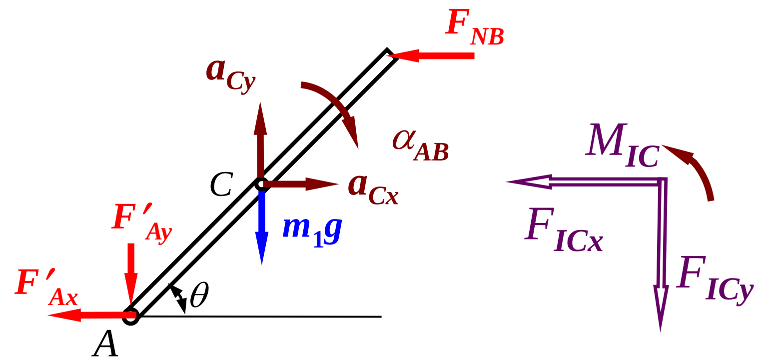
$$a = r\ddot{\varphi}\sin\varphi + r\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

$$M = (J + mr^2\sin^2\varphi)\ddot{\varphi} + mr^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + fmgr\sin\varphi$$

试比较运用动力学三大定理

刚体平面运动动力学方程与动静法的对比：





$$J_A\alpha_A = F_sR$$

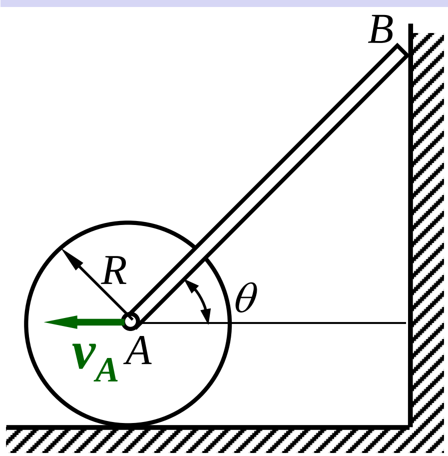
$$m_2a_A = -F_s - F_{Ax}$$

$$m_1a_{Cx} = -F_{NB} - F'_{Ax}$$

$$m_1a_{Cy} = -m_1g - F'_{Ay}$$

$$J_C\alpha_{AB} = \frac{l}{2}\sin\theta(F'_{Ax} - F_{NB} - F'_{Ay})$$

$\sum M_{P_2} = 0 \qquad M_{IA} + F_{Ax}R + F_{IA}R = 0$



$\sum F_x = 0 \qquad -F_{NB} - F'_{Ax} - F_{ICx} = 0$

$\sum M_A = 0$

$$\frac{l}{2}\cos\theta(m_1g + F_{ICy}) = M_{ICx} + F_{ICy}\frac{l}{2}\sin\theta + F_{NB}l\sin\theta$$

“动静法”解题步骤

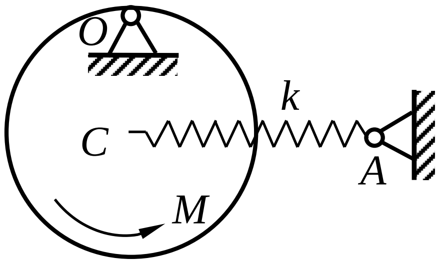
1. 选取合适研究对象；
2. 对研究对象进行的受力分析，画出受力图；
3. 运动分析，给研究对象施加惯性力(力偶)；
4. 列平衡方程
5. 求解

思考：动静法与动力学普遍定理求解动力学问题相比，有何优缺点?

优点：已知运动求力，加惯性力（偶），系统平衡，可充分应用静力学各种平衡方程,方程形式(矩心)非常灵活;涵盖了平面运动微分方程.适宜求解刚体突然解除约束问题。

缺点：加速度分析较为复杂；容易掩盖系统动力学特性。

例 质量为m、半径为R的均质圆盘，可绕轴O在铅垂面内转动。在质心C上连有一弹簧，刚度系数为k，弹簧另一端固定在A点，初始水平，且$CA=2R$为弹簧原长。圆盘在常力偶M的作用下，由最低位置无初速度地转到最高位置。试求圆盘到达最高位置时，轴承O的约束反力。



解：受力分析

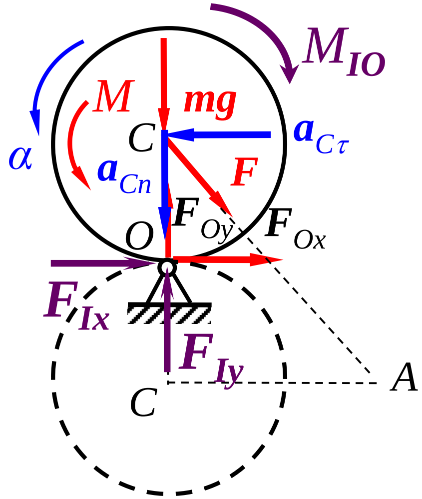
$$\sum W = -2Rmg + \frac{1}{2}k\left(\delta_1^2 - \delta_2^2\right) + M\varphi$$

$$\delta_1 = 0 \qquad \delta_2 = 2\sqrt{2}R - 2R$$

$$T_1 = 0 \qquad T_2 = \frac{1}{2}J_O\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega^2$$

$$\sum W = T_2 - T_1$$

$$\omega^2 = \frac{4}{3mR^2}\left(M\pi - 2Rmg - 0.343kR^2\right)$$



运动分析

$$F_{Ix} = mR\alpha \qquad \Sigma F_x = 0 \qquad F_{Ix} + F_{Ox} + F\cos 45^\circ = 0$$

$$F_{Iy} = mR\omega^2 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad F_{Iy} + F_{Oy} - mg - F\cos 45^\circ = 0$$

$$M_{IO} = J_O\alpha \qquad \Sigma M_O = 0 \qquad -M_{IO} + M - FR\cos 45^\circ = 0$$

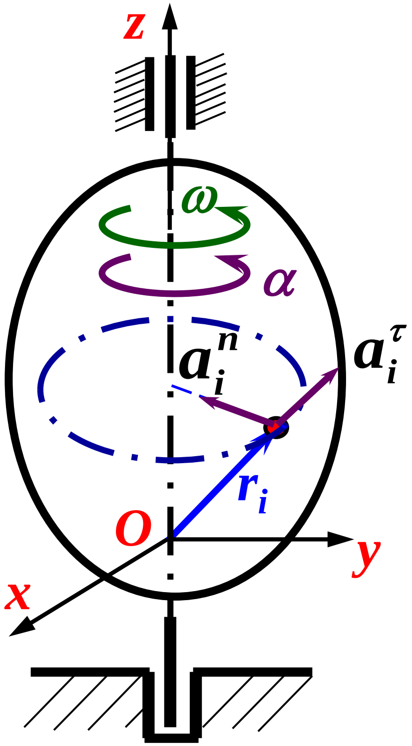
$$\alpha = \frac{2\left(M - 0.586kR^2\right)}{3mR^2} \qquad F_{Ox} = -\frac{2M}{3R} - 0.195kR \qquad F_{Oy} = 3.667mg + 1.043kR - 4.189\frac{M}{R}$$

§ 13–4　转动刚体的轴承动反力

1. 转动刚体的轴承动反力

一般转动刚体的惯性力系简化

$\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$　　$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$　　$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\boldsymbol{k}$



刚体上任意点的加速度

$$\boldsymbol{a}_i^\tau = \alpha\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_i = \alpha(x_i\boldsymbol{j} - y_i\boldsymbol{i})$$

$$\boldsymbol{a}_i^n = \omega\boldsymbol{k}\times(\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_i) = -\omega^2(x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j})$$

刚体上任意点的惯性力

$$\boldsymbol{F}_{Ii} = -m_i\boldsymbol{a}_i = m_i(\alpha y_i + \omega^2 x_i)\boldsymbol{i} + m_i(-\alpha x_i + \omega^2 y_i)\boldsymbol{j}$$

1. 转动刚体的轴承动反力

$$\boldsymbol{F}_{Ii}=-m_i\boldsymbol{a}_i=m_i(\alpha y_i+\omega^2 x_i)\boldsymbol{i}+m_i(-\alpha x_i+\omega^2 y_i)\boldsymbol{j}$$

主矢 $\boldsymbol{F}_{IR}=\sum\boldsymbol{F}_{Ii}=m(\alpha y_C+\omega^2 x_C)\boldsymbol{i}+m(-\alpha x_C+\omega^2 y_C)\boldsymbol{j}$

主矩（向O点简化）

$$\boldsymbol{M}_{IO}=\sum\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{Ii}=(J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2)\boldsymbol{i}+(J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2)\boldsymbol{j}-J_z\alpha\boldsymbol{k}$$

J_{xz}、J_{yz}、J_z分别为刚体对相应坐标轴的惯性积和转动惯量

$$\boldsymbol{F}_{IR}=F_{Ix}\boldsymbol{i}+F_{Iy}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{M}_{IO}=M_{Ix}\boldsymbol{i}+M_{Iy}\boldsymbol{j}+M_{Iz}\boldsymbol{k}$$

1. 转动刚体的轴承动反力

$$\boldsymbol{F}_{IR} = F_{Ix}\boldsymbol{i} + F_{Iy}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{F}_{R} = F_{Rx}\boldsymbol{i} + F_{Ry}\boldsymbol{j} + F_{Rz}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}_{IO} = M_{Ix}\boldsymbol{i} + M_{Iy}\boldsymbol{j} + M_{Iz}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}_{O} = M_{Ox}\boldsymbol{i} + M_{Oy}\boldsymbol{j} + M_{Oz}\boldsymbol{k}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Rx} + F_{Ix} = 0$$

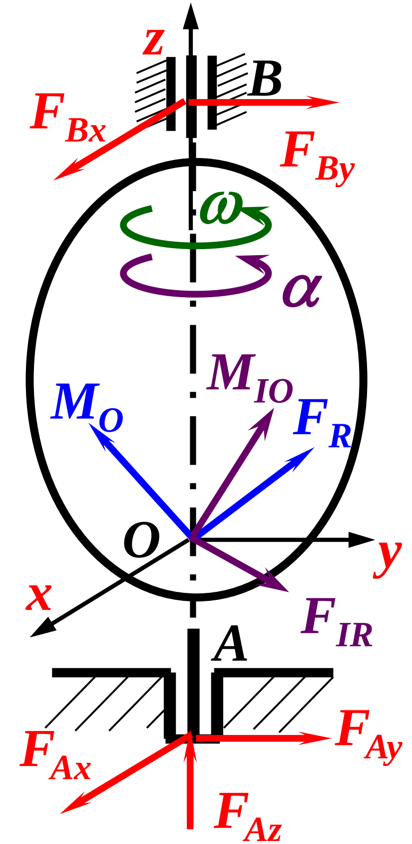
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_{By} + F_{Ry} + F_{Iy} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad F_{Az} + F_{Rz} = 0$$

$$\sum M_x = 0 \qquad F_{Ay}\overline{OA} - F_{By}\overline{OB} + M_{Ox} + M_{Ix} = 0$$

$$\sum M_y = 0 \qquad F_{Bx}\overline{OB} - F_{Ax}\overline{OA} + M_{Oy} + M_{Iy} = 0$$

$$\sum M_z = 0 \qquad M_{Oz} + M_{Iz} = 0$$



1. 转动刚体的轴承动反力

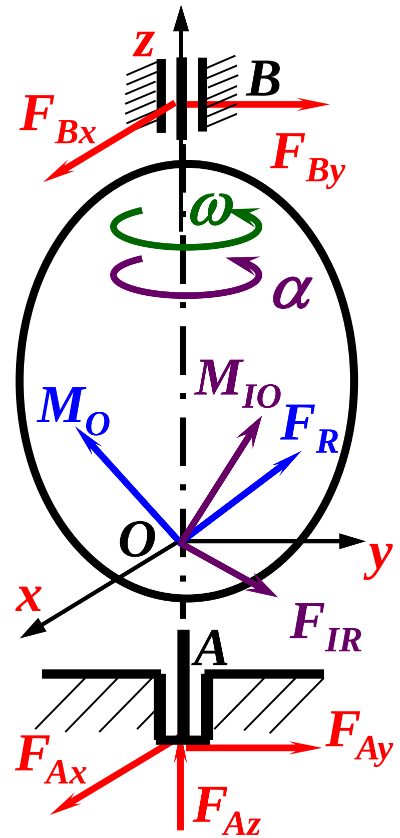
$$F_{Ax}=\frac{1}{\overline{AB}}\left[\left(M_{Oy}-F_{Rx}\overline{OB}\right)+\left(M_{Iy}-F_{Ix}\overline{OB}\right)\right]$$

$$F_{Ay}=-\frac{1}{\overline{AB}}\left[\left(M_{Ox}+F_{Ry}\overline{OB}\right)+\left(M_{Ix}+F_{Iy}\overline{OB}\right)\right]$$

$$F_{Az}=-F_{Rz}$$

$$F_{Bx}=-\frac{1}{\overline{AB}}\left[\left(M_{Oy}+F_{Rx}\overline{OA}\right)+\left(M_{Iy}+F_{Ix}\overline{OA}\right)\right]$$

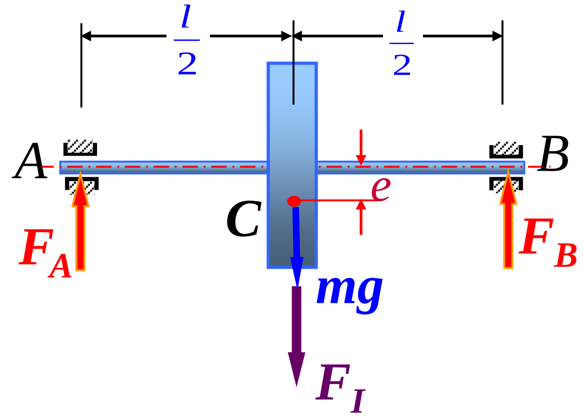
$$F_{By}=\frac{1}{\overline{AB}}\left[\left(M_{Ox}-F_{Ry}\overline{OA}\right)+\left(M_{Ix}-F_{Iy}\overline{OA}\right)\right]$$



定轴转动刚体轴承处的反力由两部分组成：一部分为主动力系所引起的静反力；另一部分是由转动刚体的惯性力系所引起的附加动反力。

例 转子质量m=20kg，偏心距e=0.1mm，转速n=12000r/min。求：当质心C转到最低位置时轴承所受的压力。

解：研究对象转子，受力分析



运动分析 $\omega=\frac{2\pi n}{60}=400\pi\left(\mathrm{rad/s}\right)$

$$F_I=me\omega^2$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0 \qquad -F_A\cdot l+\left(F_I+mg\right)\frac{l}{2}=0$$

$$\sum F_y=0 \qquad F_A+F_B-F_I-mg=0$$

$$F_A=F_B=\frac{1}{2}mg+\frac{1}{2}me\omega^2$$

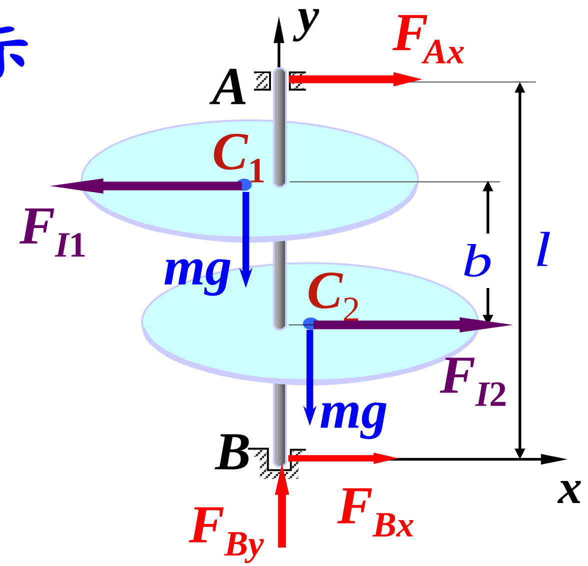
静反力 $F_A'=F_B'=\frac{1}{2}mg=98\mathrm{N}$

附加动反力 $F_A''=F_B''=\frac{1}{2}me\omega^2=1577\mathrm{N}$

$$\frac{F''}{F'}\approx16(\text{倍})$$

例 两圆盘质量均为m，对称偏心距均为e，ω=常量。求图示位置A、B轴承反力。

解：研究对象转子，受力分析如图示



运动分析:转动 $a_{C1}=a_{C2}=e\omega^2$

$$F_{I1}=F_{I2}=me\omega^2=F_I$$

$$\sum F_x=0 \qquad F_{Ax}+F_{Bx}=0$$

$$\sum F_y=0 \qquad F_{By}-2mg=0$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0 \qquad -F_{Ax}\cdot l+F_I\cdot b=0$$

附加动反力 $F_{Bx}=-F_{Ax}=-\dfrac{b}{l}me\omega^2$

静反力 $F_{By}=2mg$

2. 消除附加动反力的条件

·转子的静平衡和动平衡

消除附加动反力的条件：转轴为中心惯性主轴

惯性主轴–通过刚体上一点使两个相关的惯性积同时为零的坐标轴，称为刚体关于该坐标原点的惯性主轴。

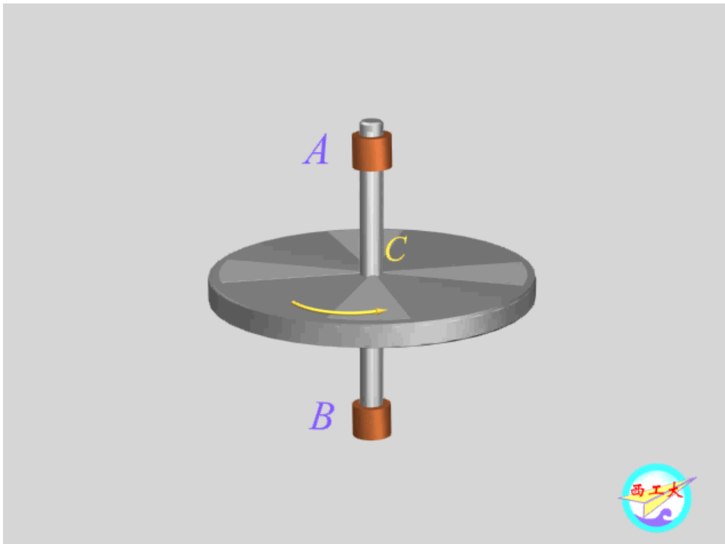
中心惯性主轴–通过质心的惯性主轴。

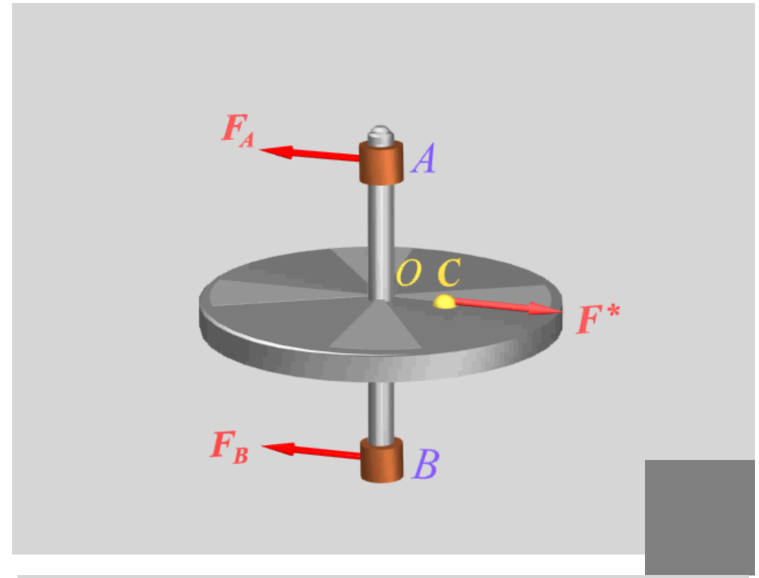
消除附加动反力的技术：转子的静平衡与动平衡

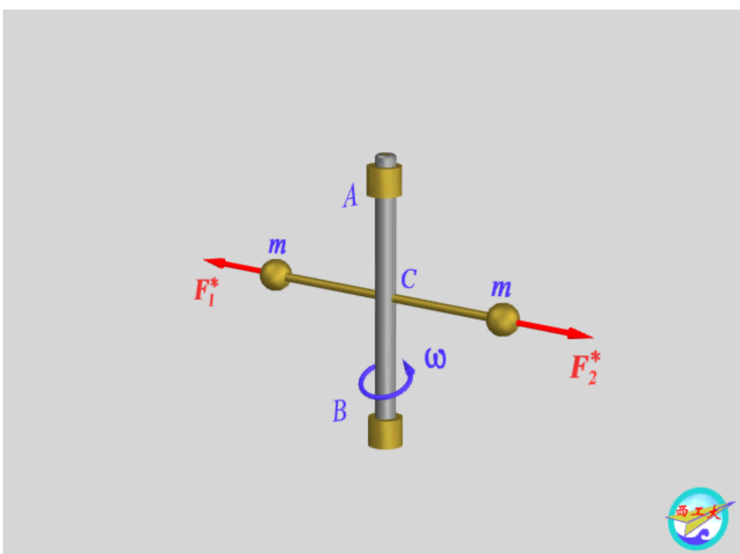
- 静平衡　质心过转轴的情况（不偏心）称为静平衡。
- 动平衡　当刚体绕任何一个中心惯性主轴作匀角速转动时，其惯性力自成平衡，这种现象称为动平衡。

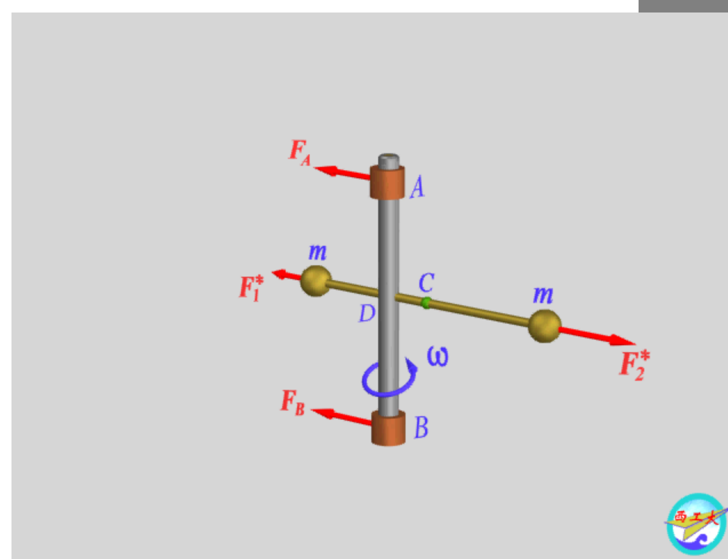
转子的静平衡和动平衡

静平衡----解决转子的偏心问题



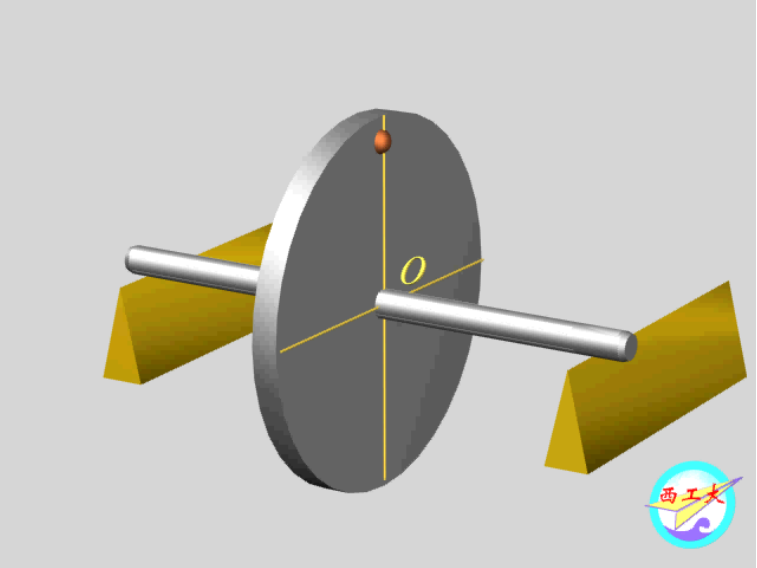


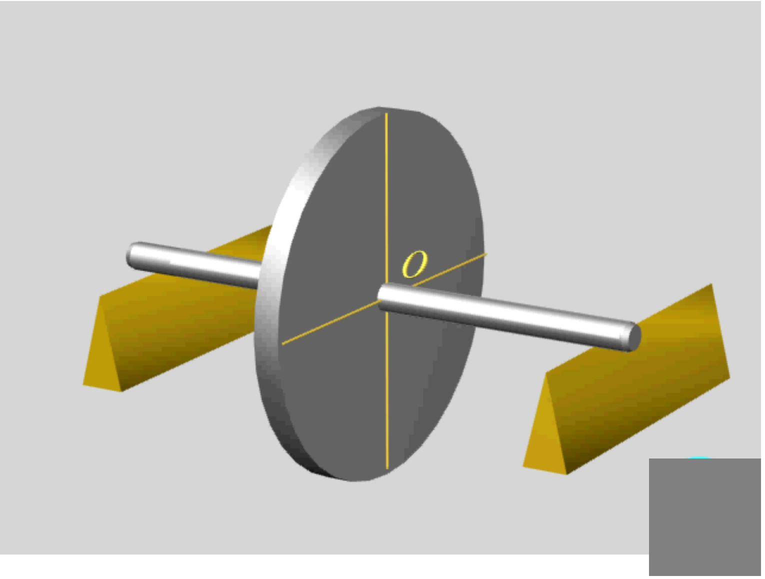


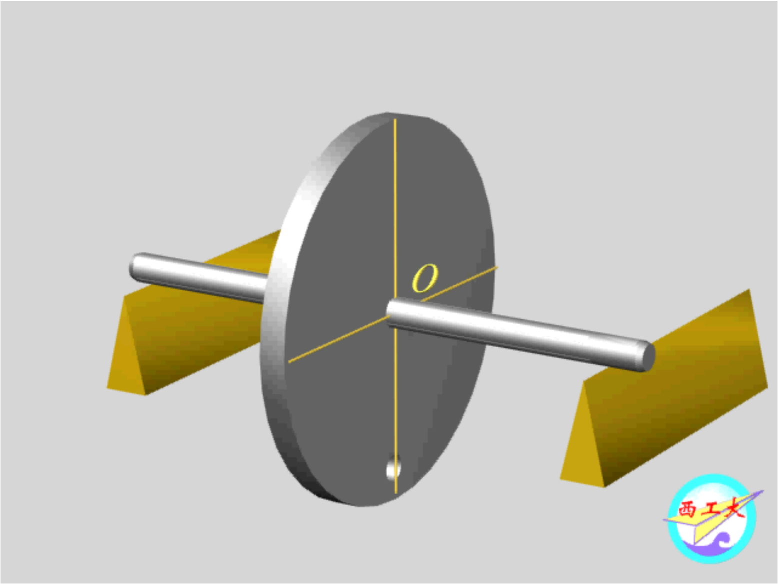


转子的静平衡和动平衡

静平衡----解决转子的偏心问题

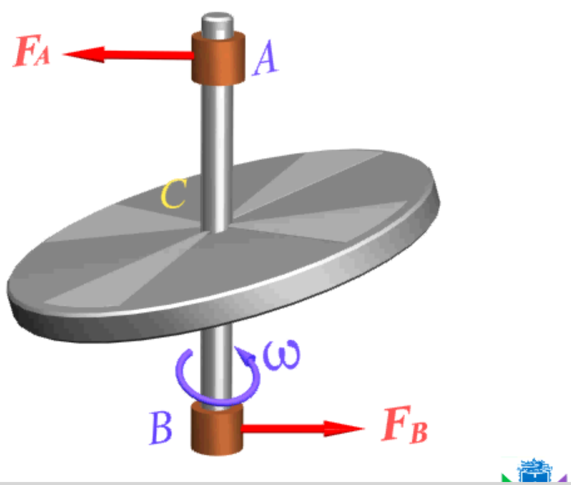


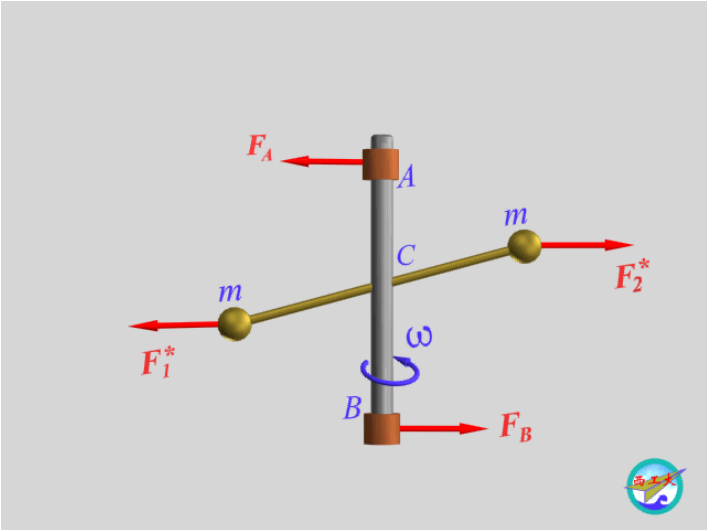


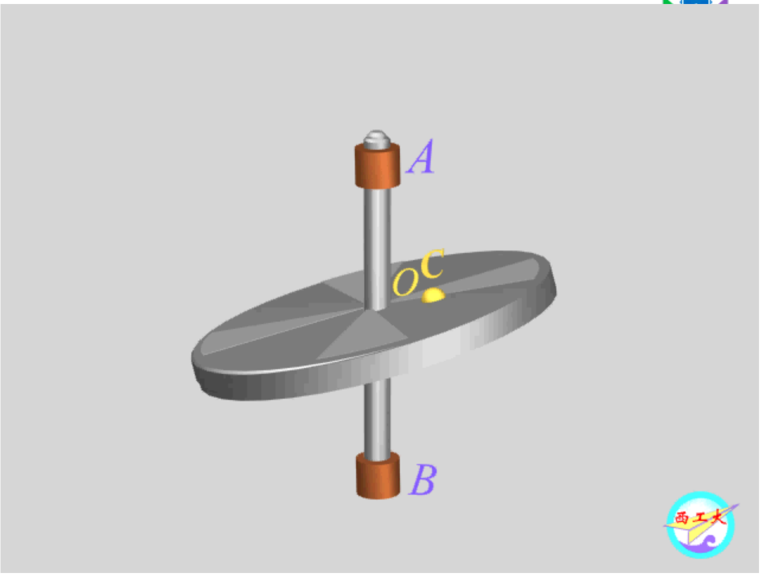


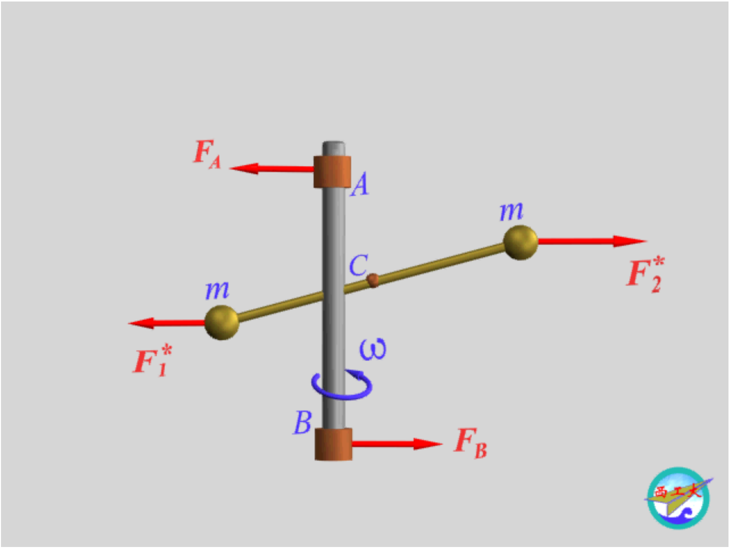
转子的静平衡和动平衡

动平衡----解决转子的偏心，转轴与质量对称平面不垂直的问题.



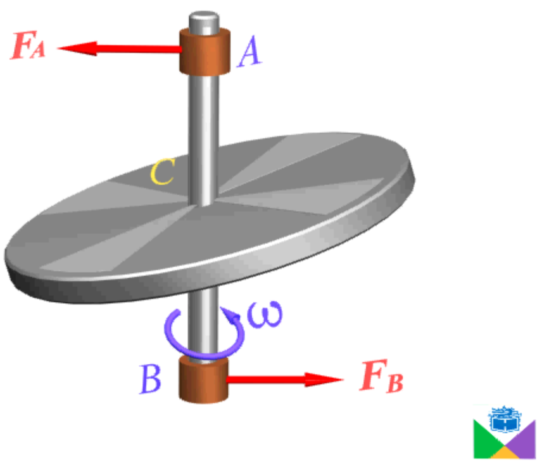


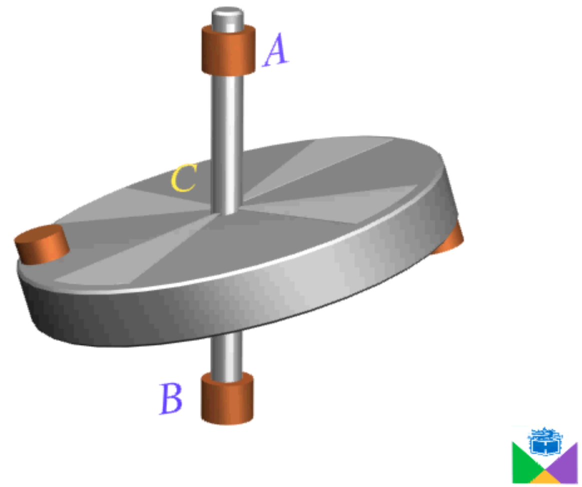




转子的静平衡和动平衡

动平衡----解决转子的偏心，转轴与质量对称平面不垂直的问题.





附加质量以改变整个转子的质量分布，使转轴成为中心惯性主轴.

本章小结

质点的惯性力 $F_I = -ma$

质点达朗贝尔原理 $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{F}_I = \boldsymbol{0}$

质点系达朗贝尔原理 $\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} + \boldsymbol{F}_{Ii} = \boldsymbol{0} \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots, n)$

刚体的惯性力系简化

刚体的达朗贝尔原理

通过加惯性力将动力学问题转化为静力学问题求解。这就是动静法。用这种方法解题的优点是可以充分利用静力学中的解题方法及技巧。

转动刚体的轴承动反力=静反力+附加动反力

消除附加动反力的条件：转轴为中心惯性主轴

消除附加动反力的技术：转子的静平衡与动平衡