小学期数学建模能力提升课程

常微分方程模型建立及应用

王宇莹

数学与统计学院

- 微分方程模型概述
- 建立微分方程模型的方法及相应的案例
- 课堂讨论
- 扩展

参考相关资料

一、微分方程模型概述

1. 模型定义

实际问题 的研究时，常

状态变量的变化率或导数

变量之间的关系式就是**微分方程**模型。

确定性，随机性

常微分，偏微分，

时滞，脉冲，等

描述状态变量随时间(空间)的**连续**演变过程

2. 模型作用

分析状态变量的变化规律

预报状态变量的未来性态

研究控制状态变量的手段

微分方程模型反映的是状态变量之间的间接关系，为了弄清状态变量随时间变化的规律，需要进行模型求解，即微分方程的求解。

3. 模型求解

求解微分方程主要的三条途径：

1）求精确解（包括级数形式的解）；

2）求数值解；

3）定性与稳定性理论方法。

4. 用MATLAB软件求常微分方程解

a) 求常微分方程解析解的命令为
dsolve(‘equation’,‘condition’)

b) 求常微分方程数值解的常用方法有欧拉法和龙格—库塔法。

欧拉法将方程中的导数用差分代替，如

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

龙格—库塔法常用命令有ode23，ode45等。

注：

(1) 命令ode求解的是形如y′=f(t, y)的微分方程，我们称它为一阶导数可解出的微分方程。而对于一阶导数解不出的形如 f(t, y, y′)=0 的微分方程，可以用命令ode15i求解。

（2）ode只能直接求解一阶微分方程，高阶微分方程必须等价地转化成一阶微分方程组，才能用ode命令求解。

(3) 欧拉方法虽然简单，但当在实际应用中，很多数据的统计是按年、月等整数进行统计。故有时用欧拉法更容易利用数据。

二、建立微分方程模型的方法

（1）根据规律列方程

利用数学、力学、物理、化学等学科中的定理或经过实验检验的规律等来建立微分方程模型。

例：刑事侦察中死亡时间的鉴定

问题描述

在凌晨1时警察发现一具尸体，测得尸体温度是29°C，当时环境温度是21°C。一小时后尸体温度下降到27°C，若人的正常体温是37°C，估计死者的死亡时间。

方法原理

牛顿冷却定律指出：物体在空气中冷却的速度与物体温度和空气温度之差成正比，现将牛顿冷却定律应用于刑事侦察中死亡时间的鉴定。

```
syms t T Tout a
dsolve('DT=a*(Tout-T)','t')
```

模型建立与求解

设尸体的温度为T(t)(t从谋杀后计)，运用牛顿冷却定律得

冷却速度

$$\frac{dT}{dt}=\alpha(T_{out}-T)$$

得到它的通解为

$$T=T_{out}+(T_0-T_{out})e^{-\alpha t}$$

其中，T_0是当t=0时尸体的温度,也就是所求的死亡时间时尸体的温度，T_{out} 是环境温度 。

模型建立与求解

$$T = T_{out} + (T_0 - T_{out})e^{-\alpha t}$$

T_0=37°C；
T_{out}=21°C；
T(t)=29°C；
T(t+1)=27°C

将题目提供的参数代入，得

$$\begin{cases} 21 + (37 - 21)e^{-\alpha t} = 29 \\ 21 + (37 - 21)e^{-\alpha(t+1)} = 27 \end{cases}$$

解得： $e^{-\alpha t} = 8/16$ 和 $e^{-\alpha(t+1)} = 6/16$

则 $e^{\alpha} = 4/3$

求得： $\alpha \approx 0.2877, t = -\dfrac{Ln(2/1)}{\alpha} \approx 2.409(h)$

模型建立与求解

求得：$\alpha \approx 0.2877, t = -\dfrac{Ln(2/1)}{\alpha} \approx 2.409(h)$

这时求得的t是死者从死亡起到尸体被发现所经历的时间，因此反推回去可推测死者的死亡时间大约是前一天的夜晚10:35。

（2）微元分析法

利用已知的定理与规律寻找微元之间的关系式，与第一种方法不同的是对微元而不是直接对函数及其导数应用规律。

Malthus 模型

马尔萨斯(Malthus 1766--1834)是英国的人口学家。他根据百余年的人口统计资料，于1798年提出著名的**人口指数增长模型。**

•**基本假设：人口净相对增长率为常数。**净相对增长率是单位时间内的人口的增长量占当时的人口总数的比例。

设 净相对增长率为 r ，t 时刻人口总数为$N(t)$。

经 Δt时间后人口总数为 $N(t+\Delta t)$

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)\Delta t}=r$$

$$\Delta t \to 0 \qquad \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$

- **Malthus 模型**

$$\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = rN(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

- **求解**

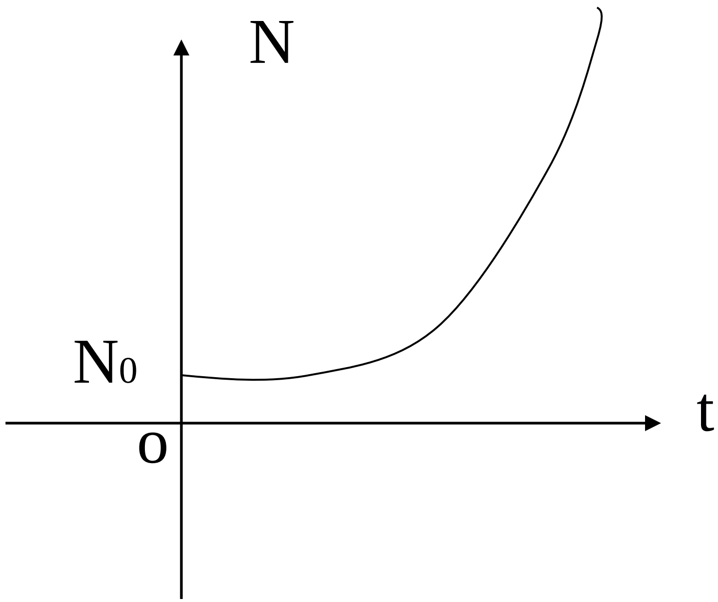
$$\frac{dN}{N} = rdt \qquad \int \frac{dN}{N} = \int rdt$$

$$\ln N(t) = rt + C' \qquad N(t) = Ce^{rt} \qquad C = e^{C'}$$

$$t = t_0,\ N(t_0) = N_0 \qquad C = N_0 e^{-rt_0}$$

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}$$

•**分析**



数据表明，在1700—1961年期间，世界人口吻合较好。在此期间，人口约35年增长一倍。

按模型计算，取 $r = 0.02,$ $\quad t = 0,\ N(0) = N_0$

$$2N_0 = N_0 e^{0.02t} \qquad \ln 2 = 0.02t$$

$$t = 50\ln 2 \qquad t \approx 50 \times 0.639 \approx 34.6$$

问题：利用此模型能预测未来吗？

1960年世界人口总数为30亿，按Malthus 模型计算，

到2692年人口总数将增至 5.63×10^{15}

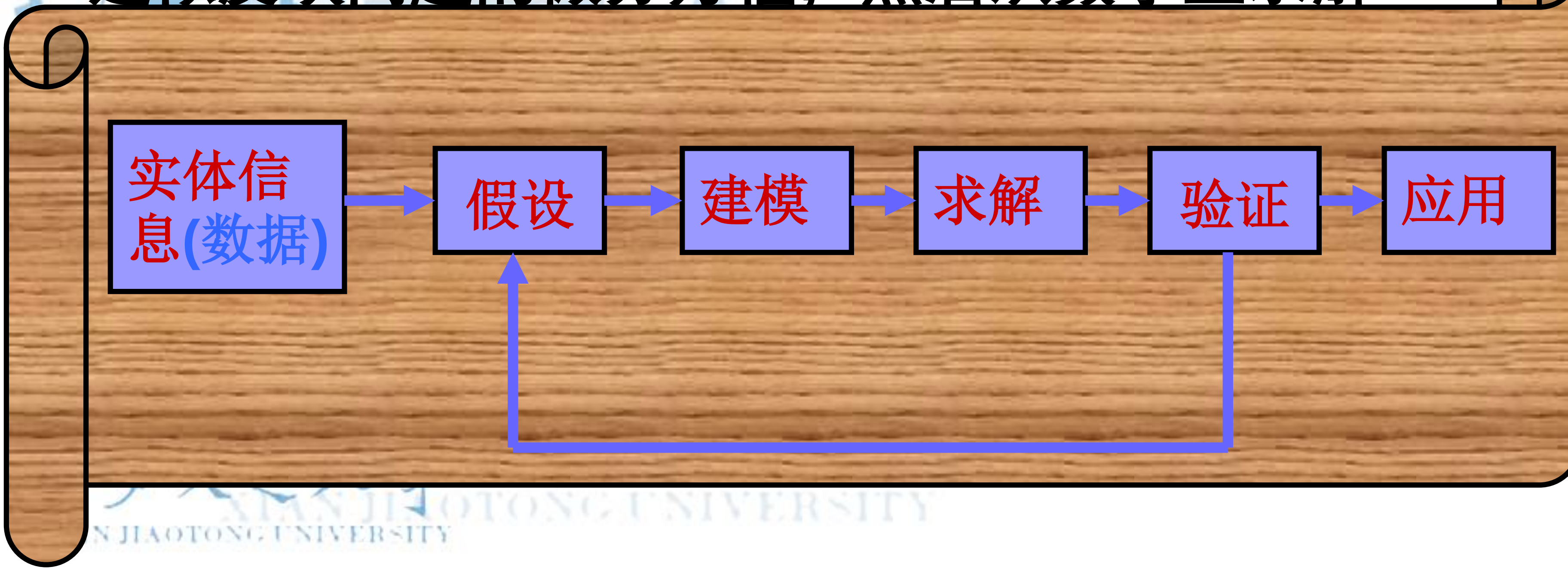
地表面积为 5.586×10^{15}平方英尺，其中只有28%的陆地

表明给每人1 平方英尺（约为9.3 平方分米）的站立面积，

那么，能容纳总人口必须把人堆放3 层以上。

（3）模拟近似法

真正的实际问题中，许多现象的规律性不很清楚，即使有所了解也是极其复杂的，建模时在**不同的合理假设**下去模拟实际的现象，建立能近似反映问题的微分方程，然后从数学上求解



从上面的例子可以看出Malthus 模型适用于人口相对少或人口增长不受环境资源等其他因素影响的情形，不适合长期预测。当人口增多时往往与实际不吻合。其原因，随着人口的增加，自然资源、环境等因素对人口的继续增长的阻滞作用愈来愈明显。

此时说明**人口净相对增长率为常数**的假设就不合理了。忽略资源的阻滞作用，也忽略了迁移。

为了使人口预报特别是长期预报更好地符合实际情况，必须修改Malthus 模型中的人口相对增长率为常数的假设。

Logistic模型（阻滞增长模型）

假设人口相对增长率随人口的增加而线性减少。

$$r(N) = r - sN$$

当$N = 0$时，$r(N) = r$, r 表示人口的自然增长率。

$\forall N > 0,\ r(N) < r$ 令N_m为人口的最大容纳量，那么

当$N = N_m$时，$r(N) = 0$, 即$r(N_m) = 0$,

$$r - sN_m = 0, \qquad s = \frac{r}{N_m}$$

即 $$r(N(t)) = r - \frac{r}{N_m}N = r(1 - \frac{N}{N_m})$$

阻滞因子

•**Logisitic模型**

$$\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = r(1 - \dfrac{N}{N_m})N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

•**求解**

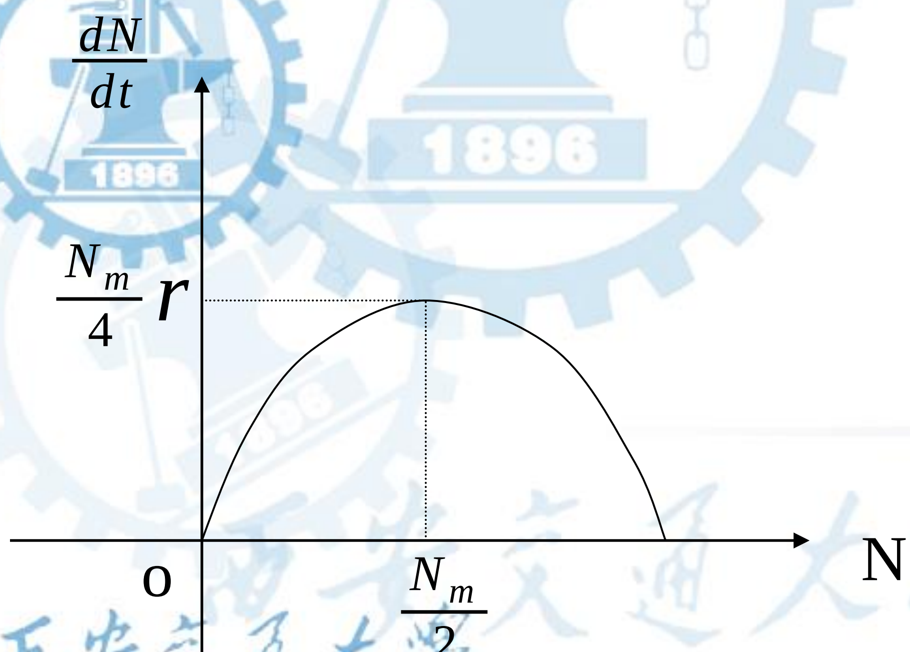
$$\frac{dN}{N(1 - \frac{N}{N_m})} = rdt \qquad (\frac{1}{N} + \frac{1}{N_m - N})dN = rdt$$

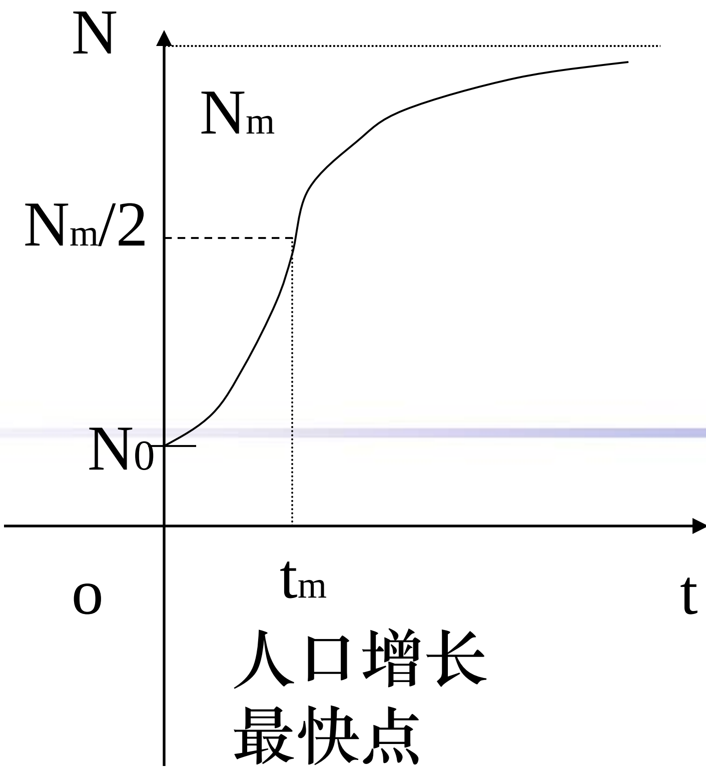
$$\ln\frac{N}{N_m - N} = rt + C' \qquad \frac{N}{N_m - N} = Ce^{rt}, \ C = e^{C'}$$

$$N(t)=\frac{CN_m e^{rt}}{1+Ce^{rt}} \qquad C=\frac{N_0}{N_m-N_0}e^{-rt_0}$$

$$N(t)=\frac{N_m}{1+(\frac{N_m}{N}-1)e^{-r(t-t_0)}}$$

取 $t_0=0$,



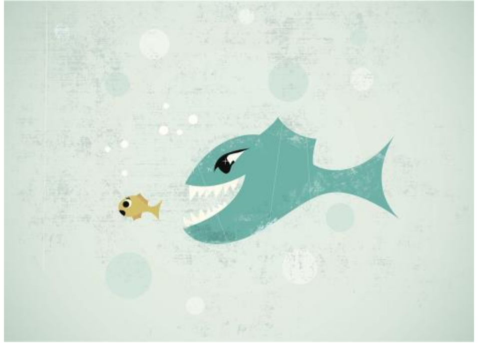


$$\frac{dN(t)}{dt}=r(1-\frac{N}{N_m})N$$

结论　在人口总数达到极限值Nm的一半以前是加速生长期，过了这一点以后，生长率逐渐减小，并且趋于零。

Malthus 模型和 Logistic模型都是确定性模型，只考虑人口总数的连续模型。忽略了实际背景中的一些随机因素，也忽略了个体的异质性。事实上研究过程中还发展出随机性模型，考虑人口年龄分布的模型、考虑生育时滞的时滞微分方程模型等。

课堂讨论1



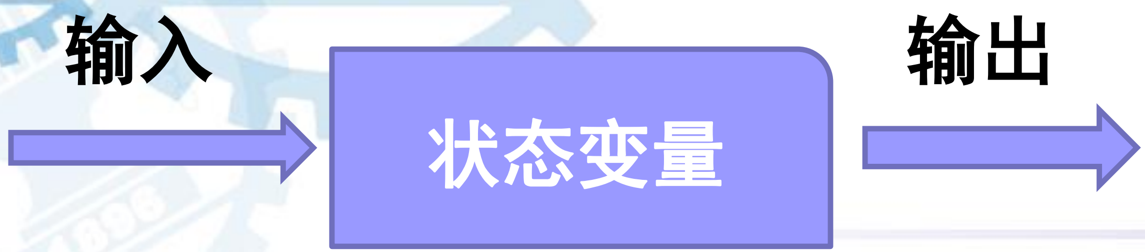
蓝鲸最喜欢的一种食物是所谓的磷虾。这些极小的虾状动物被大量地吞噬，为巨大的鲸鱼提供主要的食物来源。

磷虾的最大饱和种群为500吨/英亩。当缺少捕食者，环境不拥挤时，磷虾种群以每年25%的速率增长。
磷虾500吨/英亩可以提高蓝鲸2%的年增长率，
同时150000条蓝鲸将减少磷虾10%的年增长率。

假设初始状态为蓝鲸5000条，磷虾750吨/英亩。
如何刻画两个种群随时间的变化情况?这种变化是否敏感依赖磷虾25%的年增长率的假设?

总结：

分析问题后，根据研究对象确定方程中的状态变量，找出导致状态变量增加的输入量，以及导致状态变量减少的输出量，从而建立微分方程模型



模型的参数确定非常重要

建立微分方程模型的关键确定方程的状态变量，上面的三个例子中的研究对象就直接可以作为所建立的常微分方程模型中的状态变量。

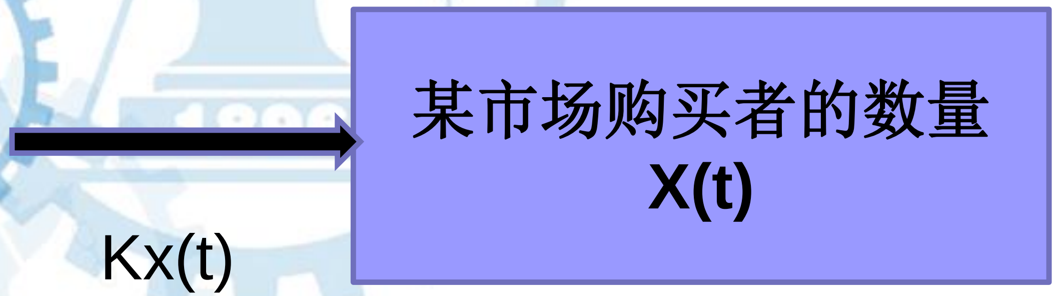
但有时候我们的研究对象不便直接作为状态变量体现出来，需要使用别的研究对象间接表现出来。

巴斯(Bass)模型

怎样建立一个数学模型来描述一种耐用新产品的销售情况，并由此分析出一些有用的结果以指导生产呢？

既然是新的耐用产品进入市场，也就意味着购买后购买者短时期内一定不会轻易废弃或更换。故我们可以忽略报废，更换等输出的因素，仅考虑输入的因素即可。

耐用产品的销售数量可以间接地用消费者的数量反映。记t时刻售出的产品总数为x（即购买者数量），简单地假设每一个商品在单位时间内平均吸引k个顾客，即产品的增长率为常数，那么在t 时刻产品销售的增量为



$$x(t+\Delta t)-x(t)=kx(t)\Delta t$$

由此建立的模型，显然可以看出就是前面的Malthus模型。由此得到的产品销售规律明显不太合理。

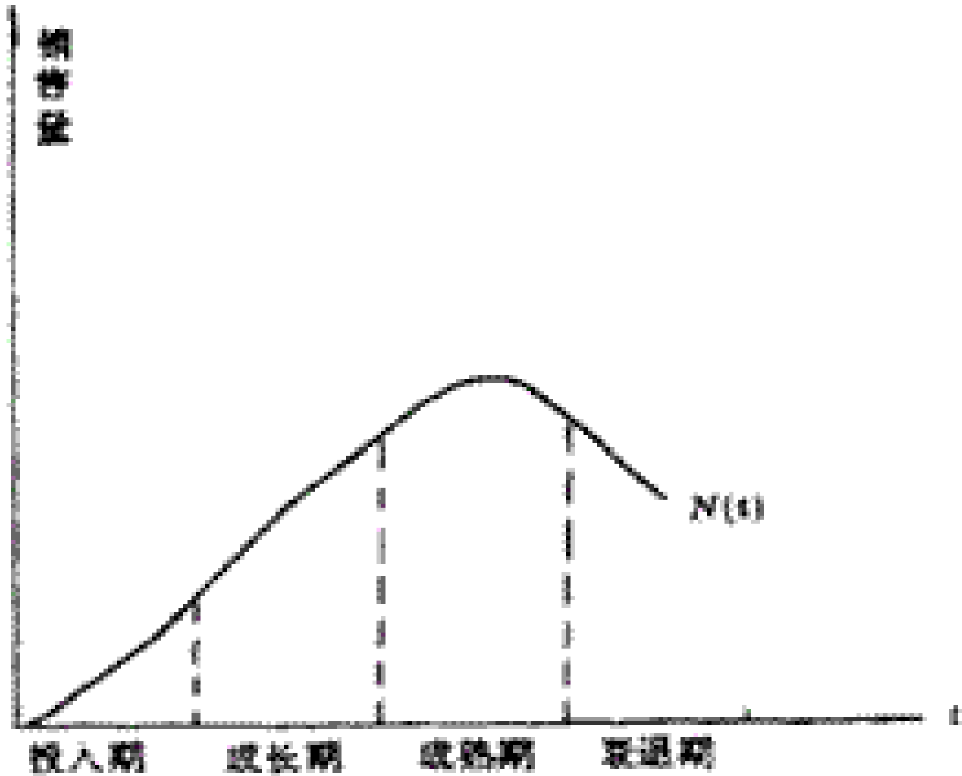
如果假设市场需求量有一个上界，记作 K，它的意义是产品的市场容量。与Logistic人口模型相似，构造一个不是常数的新的与产品销量增长率。假设产品的相对增长率是与未购买该产品的人数成正比

实际上统计学家发现，若 t 时刻商品的销售数量为 $x(t)$，则尚未使用的人数大致为$K-x(t)$，可以近似认为

$$x(t+\Delta t)-x(t)=kx(t)[K-x(t)]\Delta t$$

由此建立的模型，显然就类似于Logistic模型

但一般说来，一种产品进入市场后，通常会经过一个销售量不断增加然后又逐渐下降的过程，人们称之为产品的生命周期PLC(Product Life Cycle)，在理论上其曲线呈传统的“钟型”曲线，这就是Bass曲线.



美国的Frank M. Bass(1969)从产品如何吸引消费者购买导致销售量增加的角度来分析输入因素，他从区分产品信息传播的途径上，把消费者总体分成了“革新者”和“模仿者”，之后导出了如下的单产品销售量模型(即Bass模型)。

当一个新产品进入市场时，其相关信息的传播一般有两个途径：①经营者或厂家提供的广告，人们去商店亲眼看到商品等来自消费者以外的信息②当一部分人购买之后经过使用而对产品有所评价并传播开来，使其周围的人们得到了有关产品的信息，这是来自消费者内部的信息。这两方面的信息引起或吸引消费者去购买该产品。

设 K 为潜在的消费者总数，$n(t)$ 为 t 时刻购买了该产品的人数，设时间段 $[t, t+\Delta t]$ 中购买者增量 由两部分组成。一部分是由来自消费者外部的产品信息导致的购买者增量 Δn_1；另一部分是由消费者内部传播的产品信息导致的消费者增量 Δn_2

假设外部信息导致的购买者增量应与未购买者人数成正比

$$\Delta n_1 = a\left(K - n(t)\right)\Delta t,$$

假设内部信息导致的购买者增量应与已购买者人数，未购买者人数之积成正比

$$\Delta n_2 = bn(t)\left(K - n(t)\right)\Delta t,$$

购买者总的增量为

$$\Delta n(t)=a\big(K-n(t)\big)\Delta t+bn(t)\big(K-n(t)\big)\Delta t$$

$$\frac{dn}{dt}=\big(K-n(t)\big)\big(a+bn(t)\big)$$

Bass模型

$$n(t)=K\frac{1-e^{-(a+bK)t}}{1+\frac{bk}{a}e^{-(a+bK)t}}=K\frac{1-e^{-(p+q)t}}{1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}},\qquad n(0)=0$$

其中$p=a>0$称为创新系数，$q==bK>0$ 称为模仿系数。K为首次购买的最大市场潜力。其曲线呈传统的“钟型”曲线，即Bass曲线

巴斯模型的意义在于它提出市场动态变化的规律，为企业在不同时期对市场容量及其变化趋势做出科学有效的估计。虽然巴斯模型在理论上比较完善，但是其只适用于已经在市场中存在一定时期的新产品的市场预测，而往往新产品上市的时候，其质量和性能对顾客来讲相当陌生，企业无法对巴斯模型中的创新系数和模仿系数做出可靠的估计，此时需要对巴斯扩散模型做出一定的补充。

前面提到的模型仅涉及到单一状态变量，事实上，我们为了研究简单方便，忽略了个体的异质性以及其它事物的影响等因素。比如，Malthus，Logistic人口预测问题中，相当于假设了每个社会成员的出生率和死亡率都是相同的，但其实不同年龄段的人，出生率和死亡率是不相同的。比如前面的新耐用品的销售问题，并没有考虑其他同类产品对该产品的竞争作用等因素。

当然在达到研究目的的前提下，我们希望模型是越简单越好。正如爱因斯坦所说“Everything should be made as simple as possible, but no simpler”。但有很多实际问题，是需要研究多个状态变量的。

问 题？ 有甲乙两种新耐用品在市场上销售，如何用常微分方程模型刻画它们的销售情形？

模型假设

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 (1 - x_1)$$
$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 (1 - x_2)$$

两种商品共同在市场销售时，乙对甲销售的阻滞作用与乙的数量成正比；甲对乙有同样的作用。

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - x_1 - \sigma_1 x_2\right)$$
$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 x_1 - x_2\right)$$

种群竞争模型

蓝鲸和长须鲸是两个生活在同一海域的形似的种群，蓝鲸的内禀增长率每年估计为5%，长须鲸为8%。环境承载力（海域能够支持的鲸鱼的最大数量，也可称环境容纳量）估计为150000条，长须鲸为400000条。目前蓝鲸大约5000条，长须鲸大约70000条。如果不考虑捕捞，两种鲸鱼种群将回到自然水平，试估计需要多长时间？

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 0.05x(1-\dfrac{x}{150000}) - \beta xy \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 0.08y(1-\dfrac{y}{400000}) - \beta xy \end{cases}$$

$$0.05x(1-\frac{x}{150000}) - \beta xy = 0$$

$$0.08y(1-\frac{y}{400000}) - \beta xy = 0$$

这里可能有四个平衡态：其中三个分别在(0, 0)，(150000, 0)，(0, 400000)，但这三个并不是我们希望看到的自然水平。另外一个点的坐标依赖于相互竞争作用系数β。

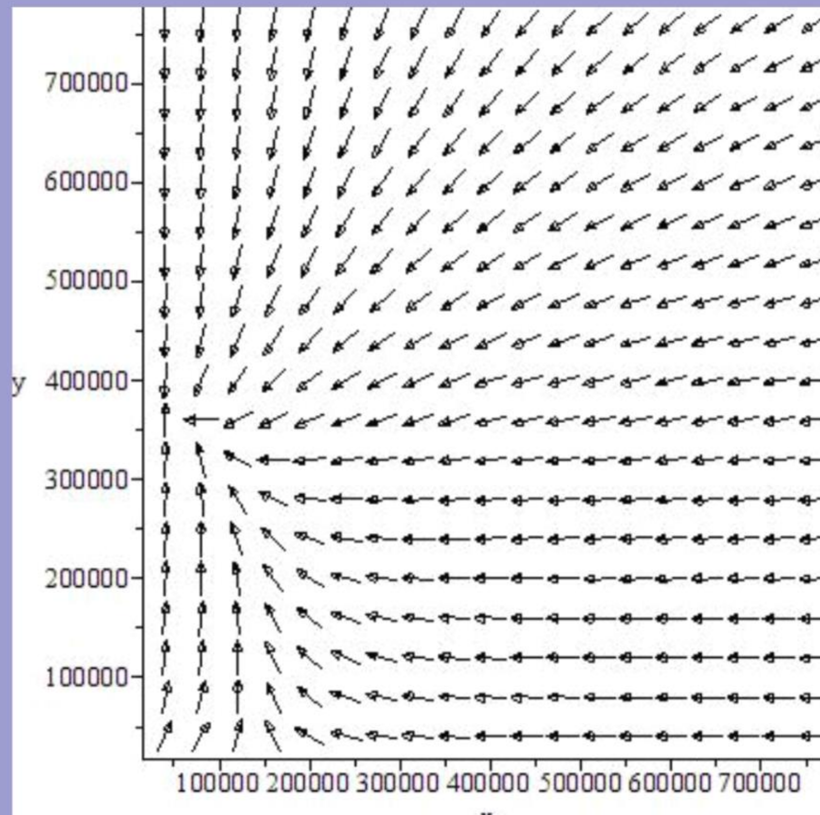
也就是右端函数构成的两条直线在何种条件下能在第一象限相交。这里我们假设

$$400000 < \frac{0.05}{\beta}$$

则可以看出它们在第一象限内部存在唯一的交点 ，其中

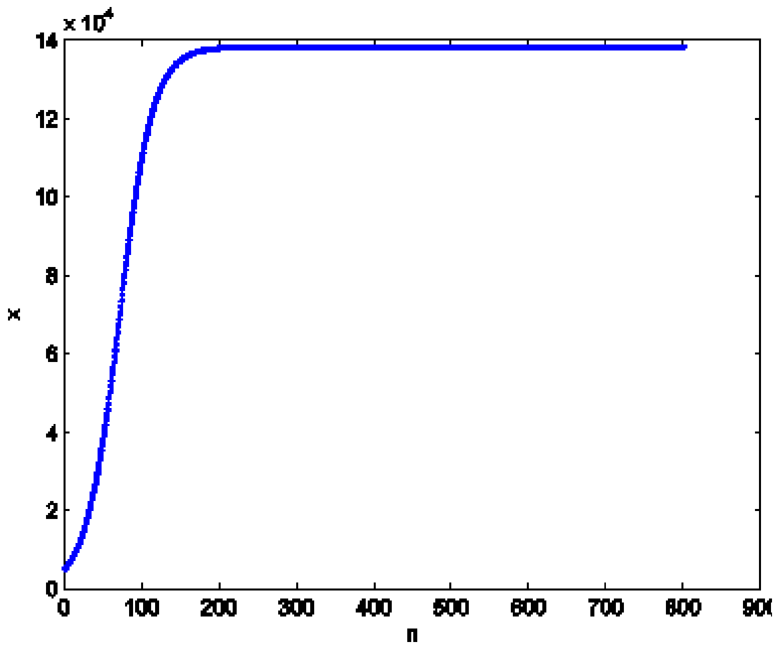
$$x^* = \frac{1.5\times10^5(8\times10^6\beta-1)}{1.5\times10^{13}\beta^2-1}, y^* = \frac{4\times10^5(1.875\times10^6\beta-1)}{1.5\times10^{13}\beta^2-1}$$

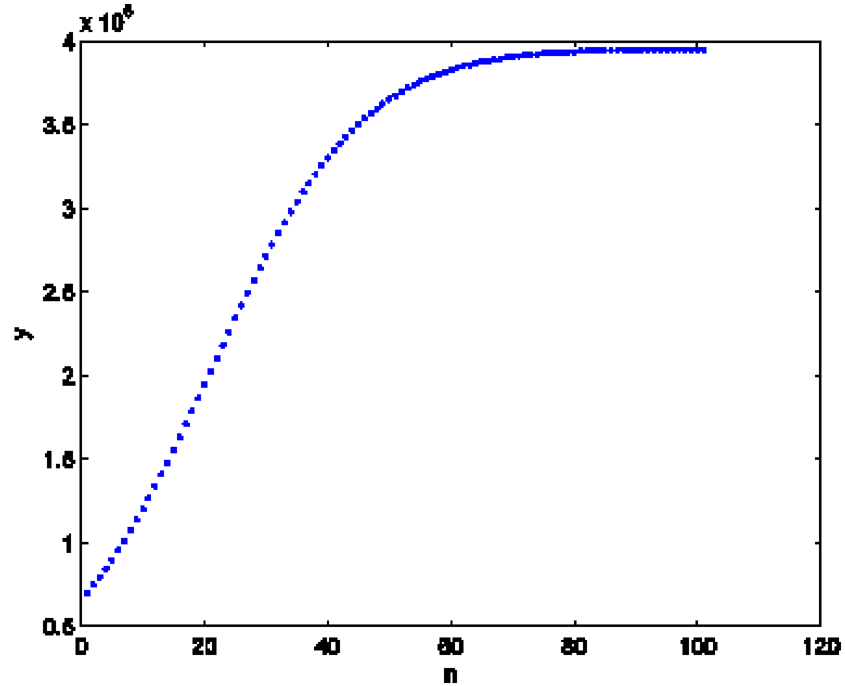
$$\beta = 10^{-7} \quad x^* \approx 35294,\ y^* \approx 382353$$



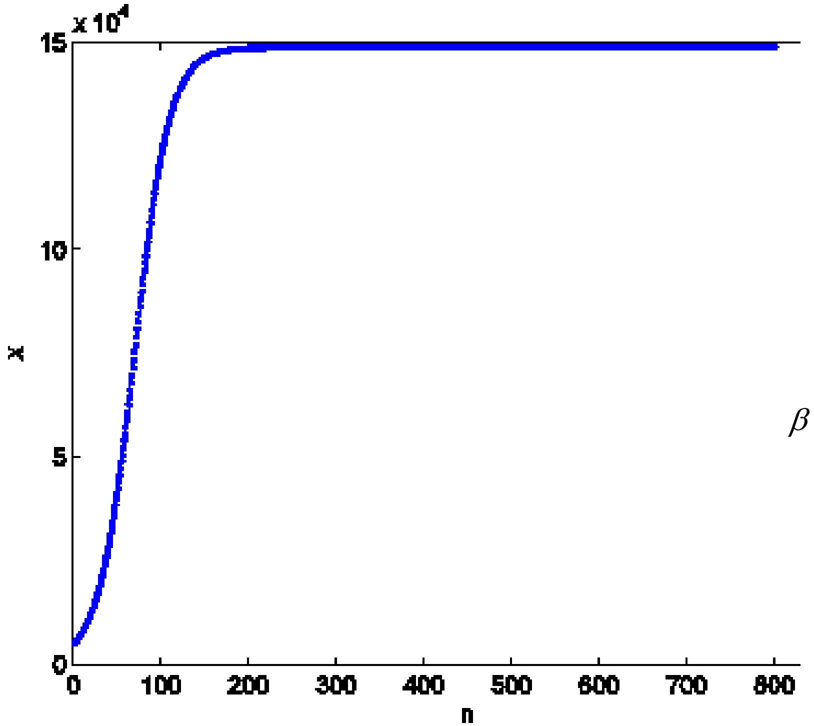
$\beta = 10^{-8}$ $x^* \approx 138207,\ y^* \approx 393090$

可以看出蓝鲸种群的数量对于相互竞争作用系数 β 更敏感

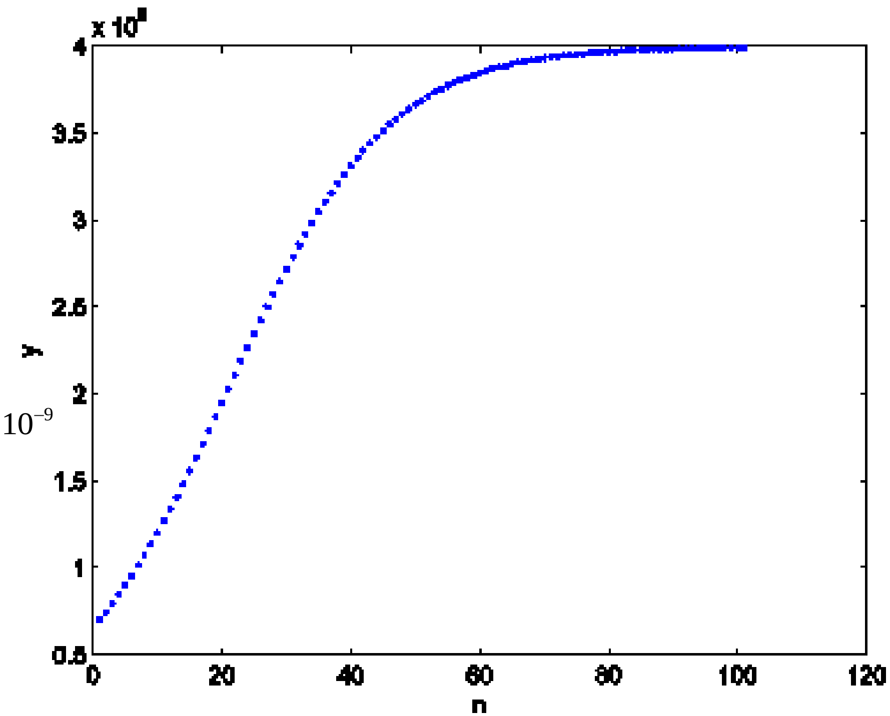




$\beta = 10^{-8}$ 蓝鲸与长须鲸数量变化图



$\beta=10^{-9}$



$\beta=10^{-9}$ 蓝鲸与长须鲸数量变化图

```
function fun=lanjing(t,y)
beta=1.0e-7;
fun=[0.05*y(1)*(1-y(1)/150000)-
beta*y(1)*y(2);...
    0.08*y(2)*(1-y(2)/400000)-
beta*y(1)*y(2)]
```

```
clc;clear
 [t,y]=ode45(@lanjing,[0
3000],[5000 70000]);
 figure(1)
 plot(t,y(:,1),'r-','Linewidth',2)
 figure(2)
 plot(t,y(:,2),'b-','Linewidth',2)
```

虽然相互竞争作用系数 β 取了不同的值，两种群的平衡态会不同。但是收敛到平衡态所需的时间变化不是很大。 所以我们可以得出一般的结论：对于不同的竞争程度，鲸鱼种群需要几个世纪才能恢复到自然水平。

利用常微分方程定性与稳定性理论是能够给予证明的。但是利用这个理论我们无法给出大约经历多久的时间两种群能够达到这样的自然平衡。

真正的实际问题往往不会单一的仅涉及单一的模型或方法，比如从全国大学生数学建模竞赛的题目来看

题目来源：实际研究课题的简化、改编；有实际背景问题的编撰；合适的社会热点（或兴趣）问题

解题所用的数学方法：尽量多元化、综合化

兼顾数据的处理与数据的收集

可以查阅到一些参考材料，但是无法照搬现成文献

近几年全国大学生数学建模竞赛可涉及到微分方程模型的题目：

动植物生长规律（1996年）

关于中国人口预测问题（2007）

表层土壤中重金属污染分析（2011）

嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略（2014）

系泊系统的设计(2016)

高温作业专用服装设计(2018)

作业1　断代问题

在巴基斯坦一个洞穴里，发现了具有古代尼安德特人特征的人骨碎片，科学家把它带到实验室，作碳14年代测定，分析表明，C^{12}与C^{14}的比例仅仅是活组织内的6.24%，能否判断此人生活在多少年前？（依据碳14断代原理，建立微分方程数学模型解决该问题。）


15


JONES
WARRIORS
23

投篮罚球问题（作业2）

在激烈的篮球比赛中，提高投篮命中率对于获胜无疑起着决定作用，而出手角度和出手速度是决定投篮能否命中的两个关键因素。这里讨论比赛中最简单、但对于胜负也常常是很重要的一种投篮方式--------罚球。请建立数学模型研究以下问题：

1)先不考虑篮球和篮框的大小，讨论球心命中框心的条件。对不同的出手高度 h 和出手速度 v， 定出手角度α 和篮框的入射角度 β；

2) 考虑篮球和篮框的大小，讨论球心命中框心且球入框的条件。检查上面得到的出手角度 α 和篮框的入射角度 β 是否符合这个条件；

3) 为了使球入框，球心不一定要命中框心，可以偏前或偏后(这里暂不考虑偏左或偏右)。讨论保证球入框的条件下，出手角度允许的最大偏差，和出手速度允许的最大偏差；

两个作业任选其一

谢谢聆听！