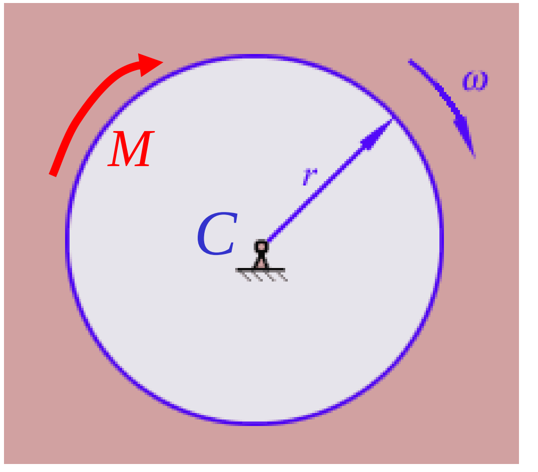
第十一章　动量矩定理

动量定理描述了外力系主矢引起质心运动的变化，反映了质点系随质心平动的动力学规律。

动量矩定理描述外力系主矩引起质点系如何运动?



§11-1　动量矩

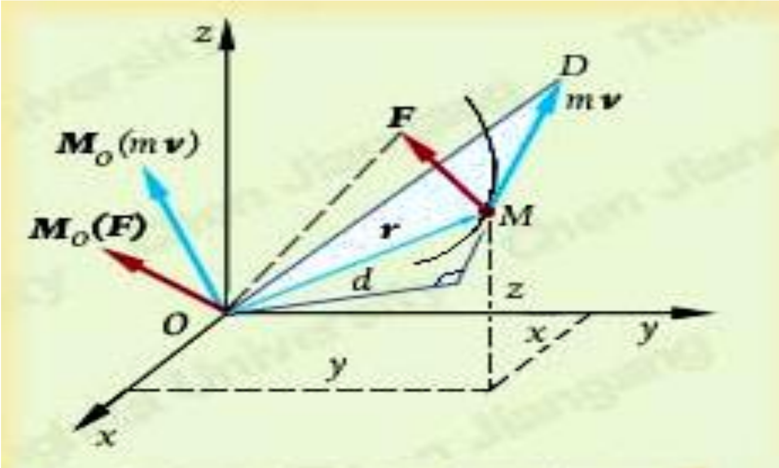
1. 质点的动量矩

(角动量)

◆质点对点的动量矩

$$M_O(mv) = r \times (mv)$$

质点对点的动量矩是矢量，大小为ΔOMD面积的两倍，单位kg·m²/s, 矢量经过点O，其方位垂直于质点矢径r和动量mv所组成的平面，指向按右手螺旋法则确定.



点的动量矩与力对点之矩

◆质点对轴的动量矩

$$M_x(mv) = [M_O(mv)]_x = y(mv_z) - z(mv_y)$$

$$M_y(mv) = [M_O(mv)]_y = z(mv_x) - x(mv_z)$$

$$M_z(mv) = [M_O(mv)]_z = x(mv_y) - y(mv_x)$$

质点对轴的动量矩是代数量，等于对点的动量矩矢量在相应轴上的投影。

2. 质点系的动量矩

◆质点系对点的动量矩

$$L_O = \Sigma\, M_O(m_i v_i) = \Sigma\, r_i \times m_i v_i$$

质点系对点O的动量矩为质点系内各质点对同一点O动量矩的矢量和。

◆质点系对轴的动量矩

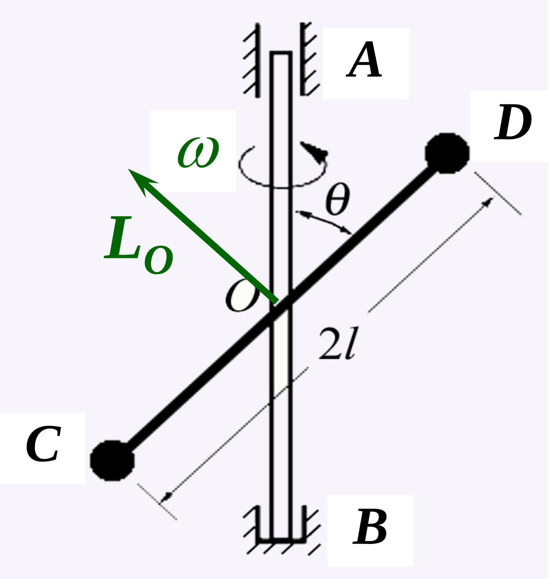
$$L_x = \sum M_x(m_i v_i) = [L_O]_x$$

$$L_y = \sum M_y(m_i v_i) = [L_O]_y$$

$$L_z = \sum M_z(m_i v_i) = [L_O]_z$$

质点系内各质点对某轴的动量矩的代数和称为质点系对该轴的动量矩。

例 已知小球C和D质量均为m，用直杆相连，杆重不计，直杆中点固定在铅垂轴AB上，如图示。如杆绕轴AB以匀角速度ω转动，求质点系对定点O以及AB轴的动量矩。



解： $v_C = r_C\omega = l\sin\theta\cdot\omega = v_D$

质点C对点O的动量矩为：

$$M_O(m\mathbf{v}) = mv_C l = ml^2\omega\sin\theta$$ 方向垂直CD

质点D对点O的动量矩为：

$$M_O(m\mathbf{v}) = mv_D l = ml^2\omega\sin\theta$$ 方向同上

$$\boxed{L_O = 2ml^2\omega\sin\theta}$$

$$\boxed{L_{AB} = 2ml^2\omega\sin^2\theta}$$

若考虑杆子的质量，则需要进行积分。

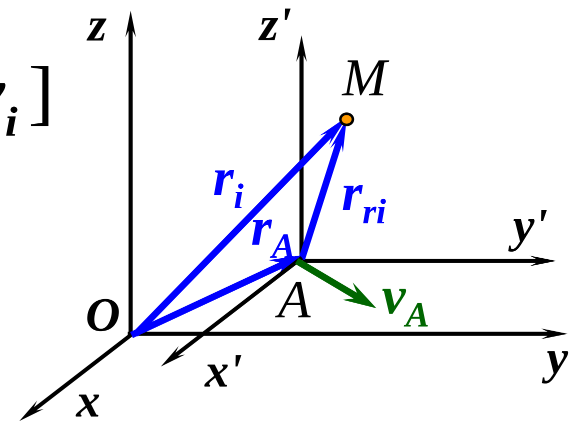
3. 质点系对不同两点O(定点)、A (动点)的动量矩关系

固定坐标系$Oxyz$，平动坐标系$Ax'y'z'$，速度$\boldsymbol{v}_A$

质点系对固定点O的动量矩为

$$L_O = \sum(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum[(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{ri}) \times m_i \boldsymbol{v}_i]$$

$$\boxed{L_O = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{p} + L_A}$$



$$L_A = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_i)$$

L_A —— 质点系对动点A的绝对动量矩

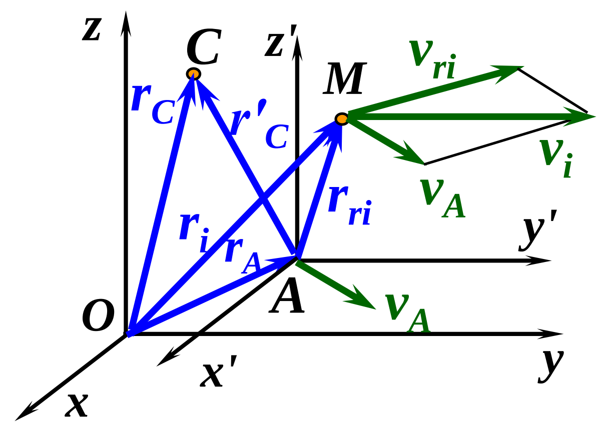
质点系对固定点O的动量矩等于质点系的动量位于A点时对O点之矩与质点系相对A点的动量矩（绝对）的矢量和。

$$\boxed{\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{L}_A}$$

$$\boldsymbol{L}_A = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_i)$$

$$= \sum[\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{ri})]$$

$$\boxed{\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{r}'_C \times m\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{L}'_A}$$



$$\boldsymbol{L}'_A = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_{ri})$$

$\boldsymbol{L}'_A$ —— 质点系对动点A的相对动量矩

那么L_C如何求解?

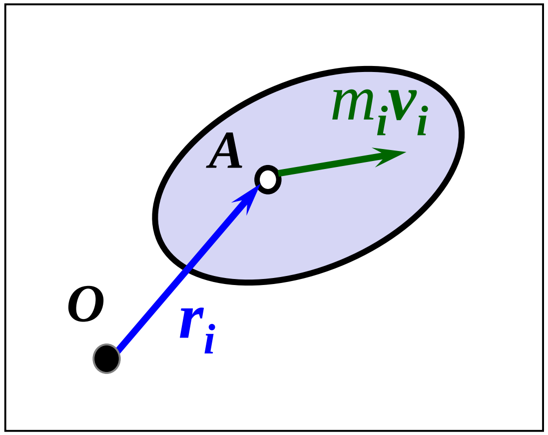
质点系对C (质心)的动量矩

固定坐标系$Oxyz$，平动坐标系$Cx'y'z'$，质心的速度$\boldsymbol{v}_C$。

$$\boldsymbol{r}'_C = 0 \quad \boxed{\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}'_C} \quad \boxed{\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C}$$

4. 平动刚体对固定点的动量矩

刚体以速度$\boldsymbol{v}$平动，刚体内任一点A的矢径$\boldsymbol{r}_i$，质量m_i，速度$\boldsymbol{v}_i$。



质点A对定点O的动量矩为

$$\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$$

$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$$

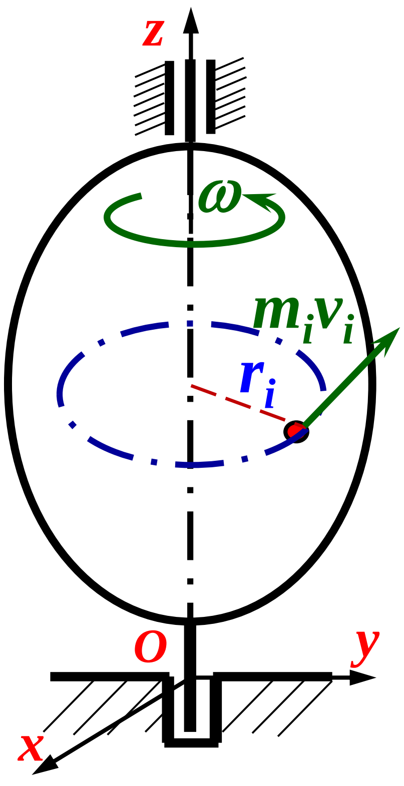
刚体平动　　$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C$

$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum(m_i\boldsymbol{r}_i)\times\boldsymbol{v}_C$$

质心性质　　$(\sum m_i)\,\boldsymbol{r}_C = \sum m_i\boldsymbol{r}_i$

$$\boldsymbol{L}_O = (\sum m_i)\,\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{r}_C \times (\sum m_i)\,\boldsymbol{v}_C$$

5. 定轴转动刚体对转轴的动量矩



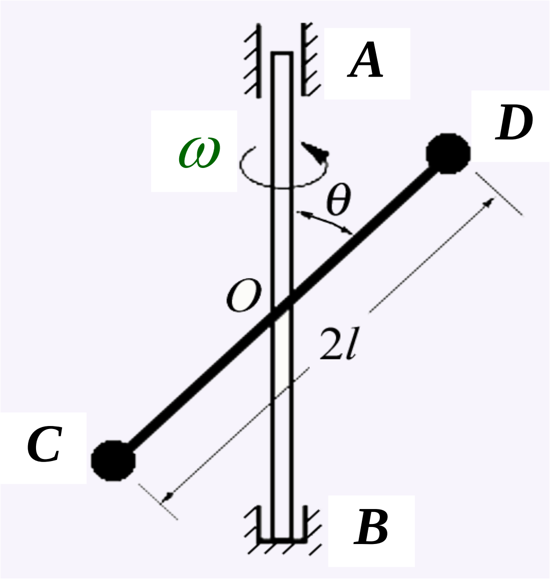
由动量矩定义 $L_z = \sum M_z(m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum m_i v_i r_i$

$$= \sum m_i \omega r_i r_i = \omega \sum m_i r_i^2 = J_z \omega$$

$$J_z = \sum m_i r_i^2$$

–刚体对转轴的转动惯量

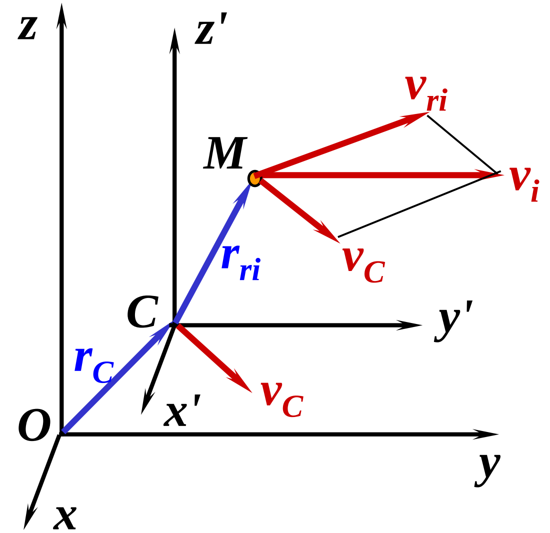
定轴转动刚体对转轴的动量矩等于刚体对于该轴的转动惯量与角速度乘积。



只适用于定轴,不是转轴及点都不成立

6. 平面运动刚体对固定点的动量矩

$$\boxed{\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C}$$



质点系对*C*（质心）的动量矩

$$\boldsymbol{L}_C = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_i)$$

$$\boldsymbol{L}_C' = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_{ri})$$

$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}_C'$$

当平面运动刚体在其质量对称平面内运动时.

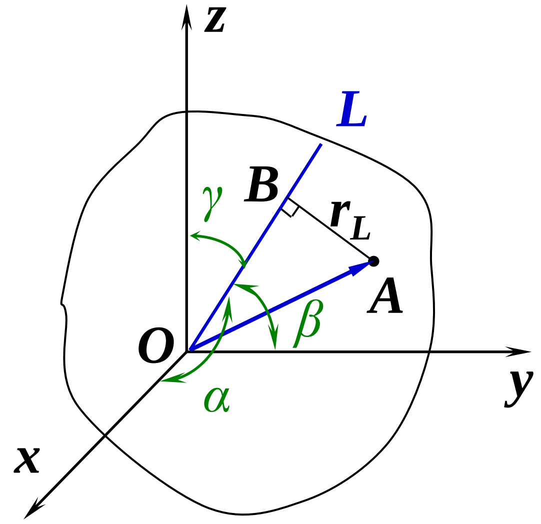
$$\boxed{L_C = J_C \omega}$$

7. 刚体的转动惯量

$J_z=\sum m_i r_i^2$ ——刚体转动惯性的度量，是刚体内所有各点的质量与其到该轴的距离的平方乘积之和。

♥ 刚体对任意轴的转动惯量

$Oxyz$固连在刚体上，轴OL与坐标轴x，y，z的夹角为α，β，γ



刚体对轴OL的转动惯量 $J=\sum mr_L^2$

$$r_L^2=(OA)^2-(OB)^2$$

由矢量投影定理得

$$\pm OB=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

$$(OA)^2=x^2+y^2+z^2$$

$$r_L^2=(x^2+y^2+z^2)-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2$$

$$r_L^2 = (x^2+y^2+z^2) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

$$\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$r_L^2 = (x^2+y^2+z^2)\underline{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}$$

$$-(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

$$= (y^2+z^2)\cos^2\alpha + (z^2+x^2)\cos^2\beta + (x^2+y^2)\cos^2\gamma$$

$$-2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta$$

$$J = \sum m(y^2+z^2)\cos^2\alpha + \sum m(z^2+x^2)\cos^2\beta + \sum m(x^2+y^2)\cos^2\gamma$$

$$-2\sum myz\cos\beta\cos\gamma - 2\sum mzx\cos\gamma\cos\alpha - 2\sum mxy\cos\alpha\cos\beta$$

$$J_x = \sum m(y^2+z^2)$$

$$J_y = \sum m(z^2+x^2)$$

$$J_z = \sum m(x^2+y^2)$$

刚体对轴 x，y 和 z 的**转动惯量**

$$J_{yz} = \sum myz$$

$$J_{zx} = \sum mzx$$

$$J_{xy} = \sum mxy$$

刚体对一对正交轴的**惯性积**。可正、可负，也可等于零

♥ 刚体对任意轴的转动惯量

$$J = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma$$
$$-2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$

- 过刚体上任一点O，适当地选择$Oxyz$的方位，总可使刚体的两个惯性积同时等于零，例如 $J_{yz}=J_{zx}$，这时与这两个惯性积同时相关的轴Oz称为刚体在O处的**惯性主轴**。

- 刚体对惯性主轴的转动惯量称为**主转动惯量**。如果惯性主轴还通过刚体质心，则称为**中心惯性主轴**。

- 对刚体的任一点O都可以有三个相互垂直的惯性主轴。

- 如果刚体有质量对称面，则垂直于该对称面的任一轴都是刚体过该轴与对称面交点的惯性主轴。

- 如果刚体有质量对称轴，则该轴是刚体过轴上任一点的惯性主轴，同时也是中心惯性主轴。

♥ 常见均质刚体转动惯量

$$J = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma$$
$$-2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$

$$J_z = \sum m r_z^2 \qquad J_z = \int r_z^2 \mathrm{d}m$$

在工程中，常将转动惯量表示为 $J_z = m\rho_z^2$

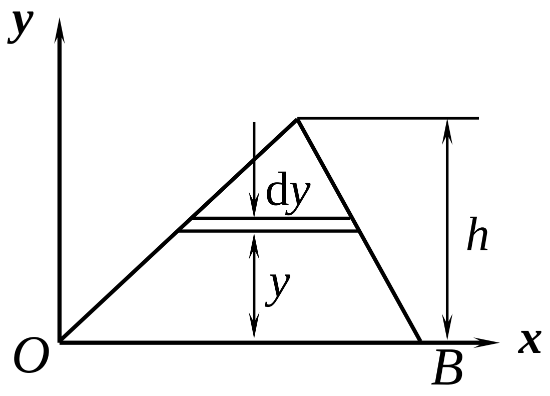
ρ_z称为回转半径或惯性半径

其物理意义：相当于将质量集中于一点，该点距轴ρ_z

影响转动惯量大小的因素

- 整个刚体质量的大小。
- 刚体各部分的质量分布。
- 转轴的位置。

例 试求质量为m的三角形薄板对OB边的转动惯量。



解：取微面积ds

$$\mathrm{d}s=\frac{h-y}{h}OB\mathrm{d}y$$

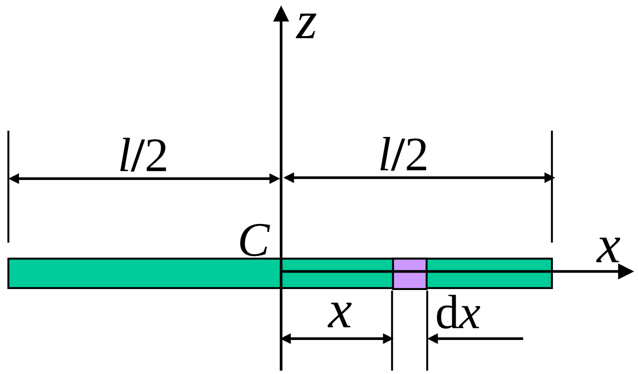
$$\mathrm{d}m=m\frac{\mathrm{d}s}{S}=m\frac{2\mathrm{d}s}{hOB}$$

$$J_x=\int y^2\mathrm{d}m=\frac{2m}{h^2}\int_0^h(h-y)y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{6}mh^2$$

$$\rho_x=\sqrt{\frac{1}{6}}h$$

♥ 常见均质刚体转动惯量

A 匀质细杆对z轴的转动惯量

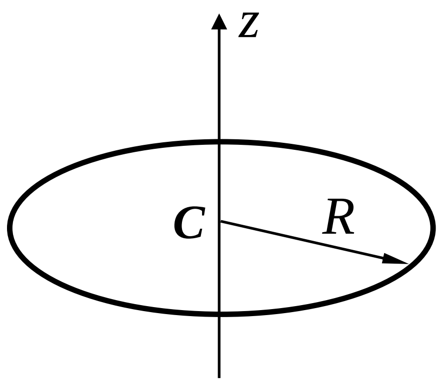


$$J_z=\int_{-l/2}^{l/2}x^2dm=\int_{-l/2}^{l/2}x^2\rho dx=\frac{1}{12}\rho l^3=\frac{1}{12}ml^2$$

$$\boxed{J_z=\frac{1}{12}ml^2}$$

$$\rho_z=\sqrt{\frac{1}{12}l^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}l$$

B 匀质薄圆环对于中心轴的转动惯量

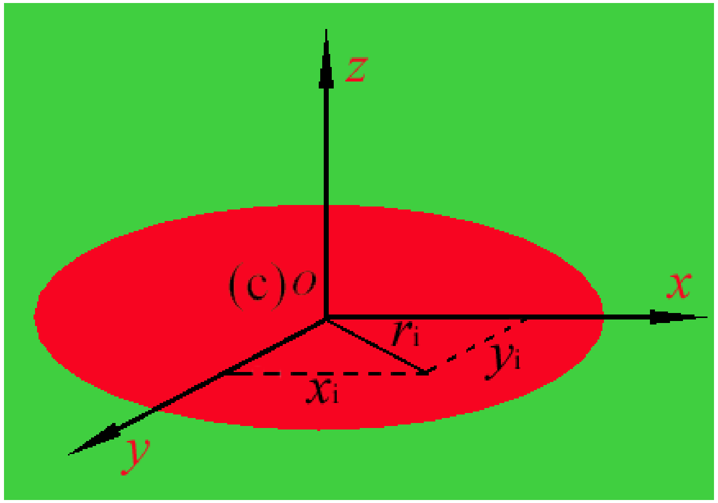


$$J_z=\int_0^m R^2dm=mR^2$$

$$\boxed{J_z=mR^2}$$

$$\rho_z=R$$

C 匀质薄圆板对于中心轴的转动惯量



$$J_z = \frac{1}{2} mR^2$$

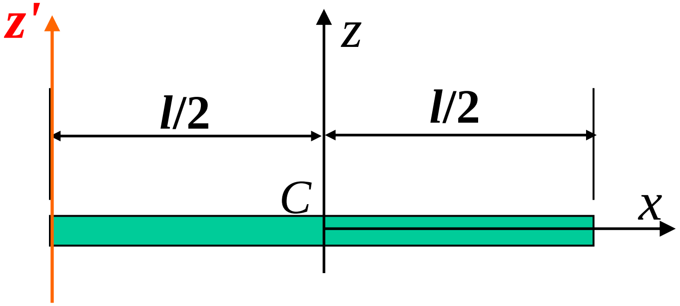
D 匀质薄圆板对于径向轴的转动惯量

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z$$

E 转动惯量的平行轴定理与叠加原理

$$J_{z'} = J_{zC} + md^2$$

$$J_{z'} = \frac{1}{3} ml^2$$



例 图示为一简化钟摆，已知均质细杆和均质圆盘的质量分别为m_1和m_2，杆长l，圆盘直径为d。求摆对经过悬挂点O的水平轴的转动惯量。

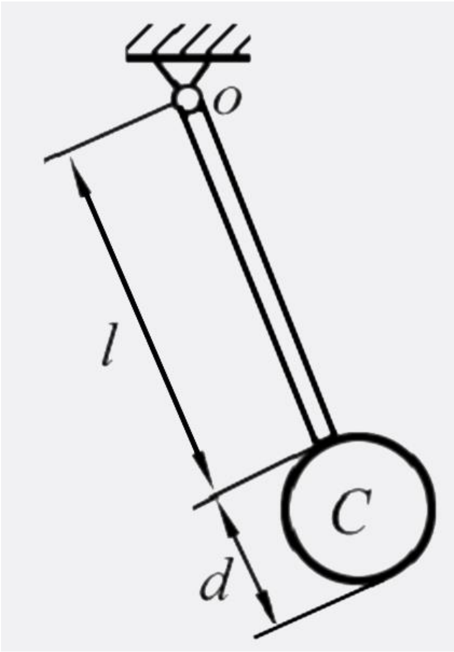
解：

$$J_o = (J_{o1} + J_{o2})$$

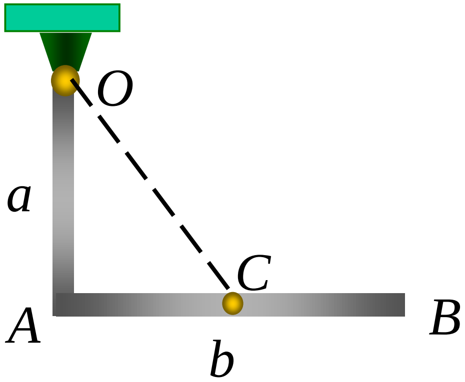
$$= [\frac{1}{12}m_1 l^2 + m_1(\frac{l}{2})^2] +$$

$$[\frac{1}{2}m_2(\frac{d}{2})^2 + m_2(\frac{d}{2}+l)^2]$$

$$= \frac{1}{3}m_1 l^2 + m_2(\frac{3}{8}d^2 + l^2 + ld)$$



例 匀质曲杆OAB如图所示。已知质量是m，求曲杆对通过杆端O并与曲杆面垂直的轴Oz的转动惯量。



解：

$$J_z = J_{OA} + J_{AB}$$

$$J_{OA} = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{m}{a+b}a\right)a^2\right]$$

$$J_{AB} = \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{m}{a+b}b\right)\cdot b^2 + \left(\frac{mb}{a+b}\right)\left(a^2 + \frac{b^2}{4}\right)$$

转动惯量的计算：（1）简单—查表(积分)

（2）规则形状组合—叠加

（3）形状复杂—实验

小结

质点的动量矩 $\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v})$

质点系的动量矩 $\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$

质点系对不同两点O(定点)、A (动点)的动量矩关系

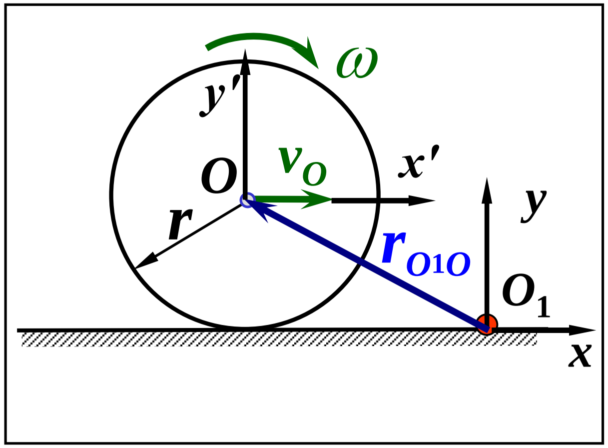
$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{L}_A$$

平动刚体对固定点的动量矩 $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C$

定轴转动刚体对转轴的动量矩 $L_z = J_z \omega$

平面运动刚体对固定点的动量矩 $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C$

例 如图所示一半径为r的匀质圆盘在水平面上纯滚动，已知圆盘的质量为m，角速度为ω。试求圆盘对水平面上O_1点的动量矩。



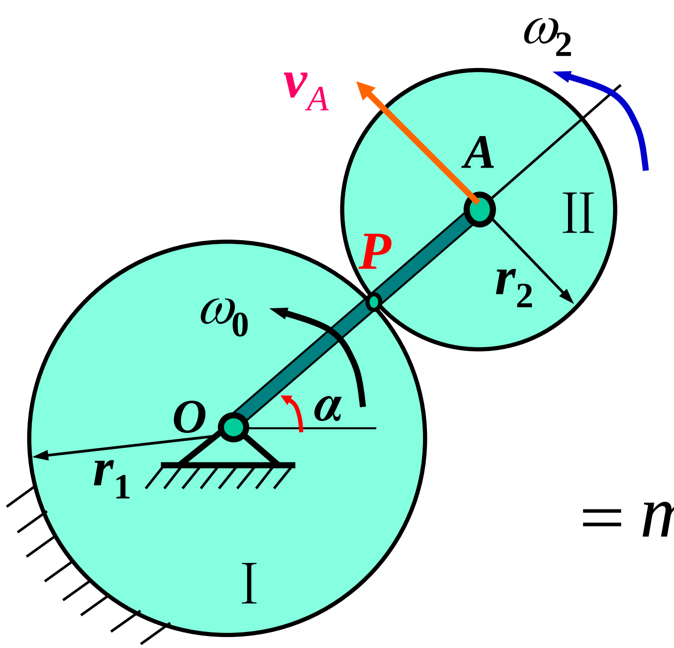
解： $\boldsymbol{L}_{O_1} = \boldsymbol{r}_{O_1O} \times m\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{L}_O$

$$\boldsymbol{L}_O = -J_O\omega\boldsymbol{k} = -\frac{1}{2}mr^2\omega\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_{O_1O} \times m\boldsymbol{v}_O = (-x\boldsymbol{i} + r\boldsymbol{j}) \times mr\omega\boldsymbol{i} = -mr^2\omega\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{L_{O_1} = -\frac{3}{2}mr^2\omega}$$

例 行星齿轮机构在水平面内运动。质量为m_1的均质曲柄OA带动齿轮II在固定齿轮I上纯滚动。齿轮II的质量为m_2，半径为r_2。定齿轮I的半径为r_1。求轮II对轴O的动量矩。



解： $v_A = (r_1 + r_2)\cdot\omega_O = r_2\omega_2$

$$\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_0$$

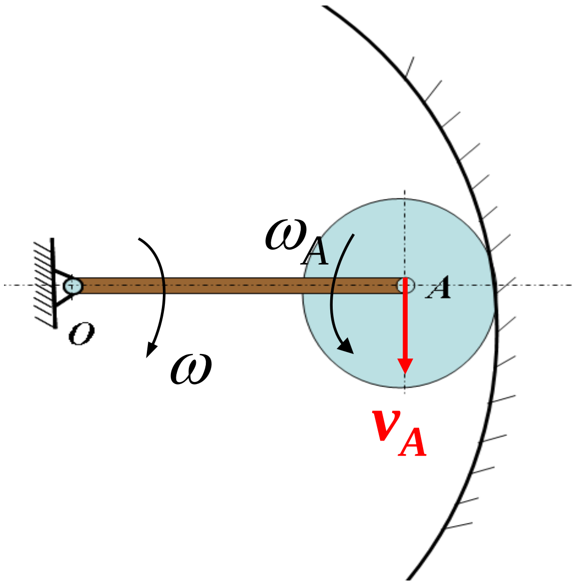
$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C$$

$$L_O = (r_1 + r_2)\cdot m_2 v_A + J_A\omega_2$$

$$= m_2(r_1 + r_2)^2\omega_0 + \frac{1}{2}m_2 r_2(r_1 + r_2)\omega_0$$

逆时针

例 如图所示平面机构，长度为L的匀质杆OA与半径为R的匀质圆轮在A处铰接。已知OA与圆轮质量均为m，杆OA以匀角速度ω绕O轴自由转动，均质圆盘沿圆弧形轨道纯滚动。试求机构在图示位置时对固定轴O的动量矩。



解： $$L_O = L_{OA} + L_A$$

$$L_{OA} = J_O\omega = \frac{1}{3}mL^2\omega$$ 顺时针

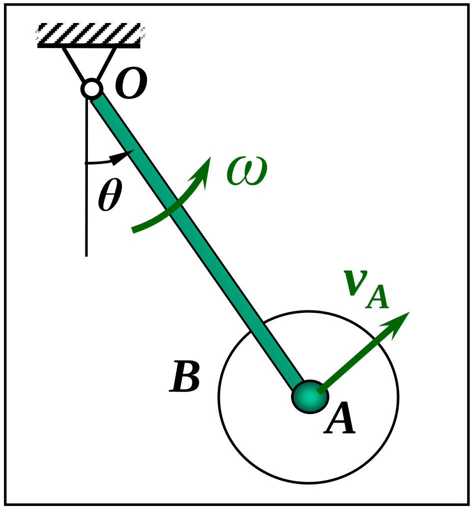
$$\omega_A = \frac{L\omega}{R}$$

$$L_A = L \cdot mv_A - J_A\omega_A = mL^2\omega - \frac{1}{2}mRL\omega$$ 顺时针

$$L_O = \frac{4}{3}mL^2\omega - \frac{1}{2}mRL\omega$$ 顺时针

思考题

长度为l，质量不计的杆OA与半径为R、质量为m的均质圆盘B在A处铰接，杆OA有角速度ω，(1) 圆盘与杆固结；(2) 圆盘B有相对杆OA的角速度ω（顺时针向）；(3) 圆盘B有相对杆OA的角速度ω（逆时针向）；分别求圆盘对轴O的动量矩。



(1) 圆盘与杆固结

$$L_O = J_O\omega = (ml^2 + \frac{1}{2}mR^2)\omega$$

(2) 圆盘相对杆顺时针转动

圆盘B平移 $\quad L_O = l \cdot mv_A = ml^2\omega$

(3) 圆盘相对杆逆时针转动

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C$$

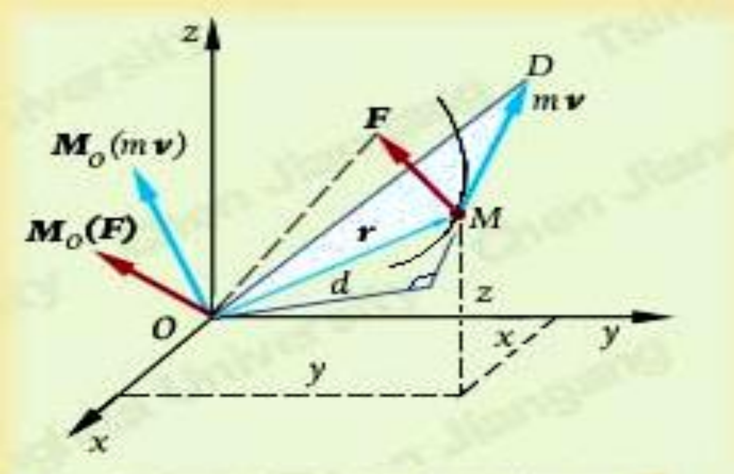
$$L_O = l \cdot mv_A + J_A\omega_A = ml^2\omega + \frac{1}{2}mR^2 \cdot 2\omega = m(l^2 + R^2)\omega$$

§11-2 动量矩定理

1. 质点动量矩定理

A 对固定点

$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$



点的动量矩与力对点之矩

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})$$

$$= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})}$$

质点对固定点的动量矩对时间的一阶导数等于作用于质点上的力对同一点的力矩。

1. 质点动量矩定理

B 对固定轴

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_x(m\boldsymbol{v})=M_x(\boldsymbol{F})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_y(m\boldsymbol{v})=M_y(\boldsymbol{F})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_z(m\boldsymbol{v})=M_z(\boldsymbol{F})$$

质点对某固定轴的动量矩对时间的导数，等于作用于该质点的所有力对于同一轴之矩的代数和。

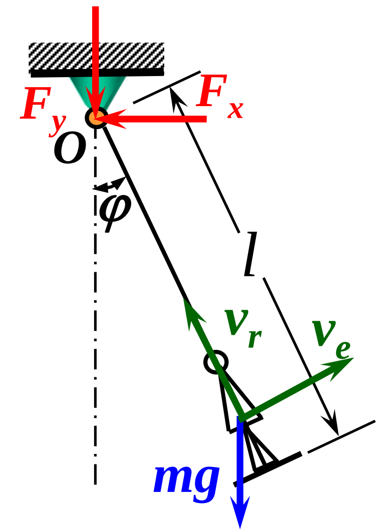
C 守恒定律

1. 若$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})\equiv \boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})$=常矢量

2. 若$M_z(\boldsymbol{F})\equiv 0$，则 $M_z(m\boldsymbol{v})$= 常量

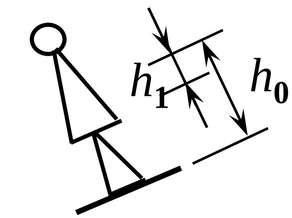
质点在有心力作用下的运动,如（行星）绕太阳，月亮绕地球运动等，都属于这种情况。

例 一人在秋千上沿绳的方向上下周期运动引起摆的振荡，且摆幅越来越大。已知秋千绳长为l，人的质量为m，人在站立时其质心离秋千下端高度为h_0（$<l$），人沿绳上下运动时其质心的周期运动为$l_1=h_1\sin\omega_0 t$（其中$2h_1<h_0$），试建立秋千受到微小扰动后的运动微分方程（秋千系统的质量可略去不计）。



解：以人和秋千为研究对象，受力分析

$$M_O(m\boldsymbol{v}) = mv_e(l - h_0 + h_1 + l_1) = mv_e s \qquad v_e = s\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_O(m\boldsymbol{v}) = M_O(\boldsymbol{F})$$

$$ms^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + 2ms\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -mgs\sin\varphi$$

$$[l - h_0 + h_1(1+\sin\omega_0 t)]\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + 2h_1\omega_0\cos\omega_0 t\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + g\sin\varphi = 0$$

变周期系数的非线性微分方程

2. 质点系动量矩定理

A 对固定点

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})+\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})\quad i=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\boldsymbol{L}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

质点系对固定点的动量矩对于时间的一阶导数等于外力系对同一点的主矩。

2. 质点系动量矩定理

B 对固定轴

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=\sum M_x(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}=\sum M_y(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

质点系对某固定轴的动量矩对时间的导数，等于作用于该质点系的所受外力对于同一轴之矩的代数和。

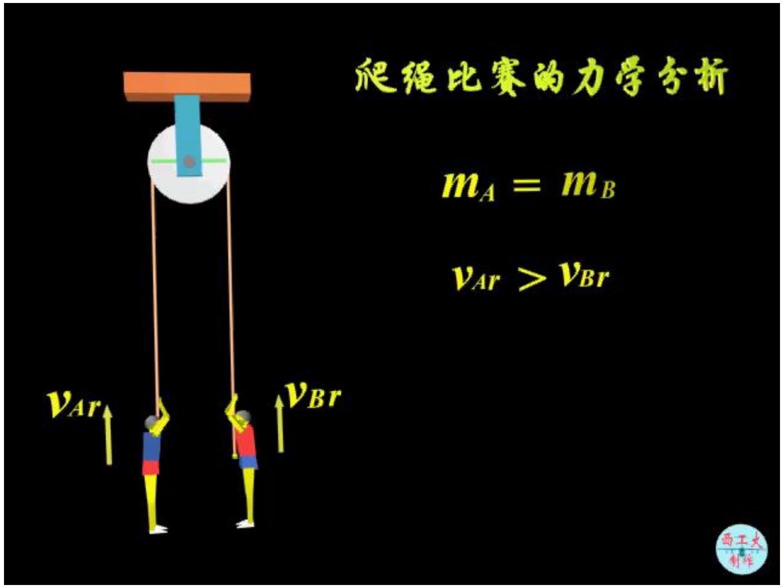
C 守恒定律

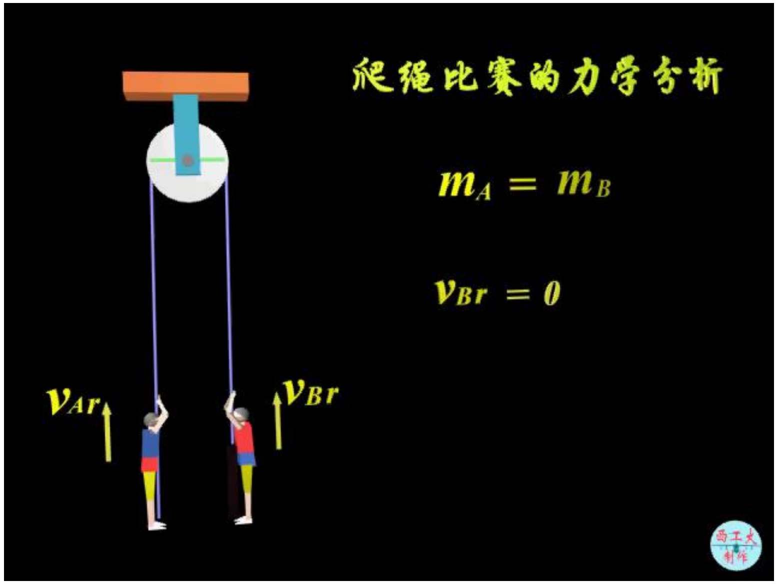
1. 若$\Sigma \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})\equiv \boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{L}_O$=常矢量

2. 若$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})\equiv 0$，则$L_z$= 常量， 又初始静止，$L_z$=0

如作用于质点系的所有外力对某固定点(或固定轴)的主矩始终等于零,则质点系对该点(或该轴)的动量矩保持不变。这就是质点系的动量矩守恒定律.

实例：爬绳比赛的力学分析





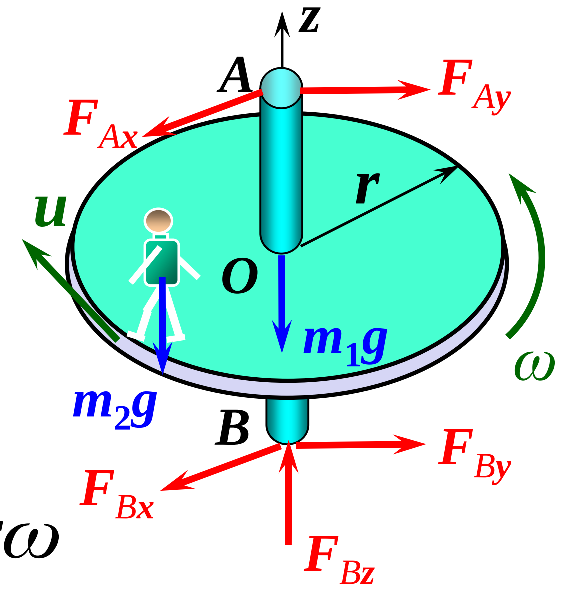
$$L_z = -m_A v_A \cdot R + m_B v_B \cdot R \qquad M_z = m_A g \cdot R - m_B g \cdot R$$

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-m_A v_A \cdot R + m_B v_B \cdot R) = m_A g \cdot R - m_B g \cdot R = 0$$

初始静止 $L_{z0}=0$ $\qquad m_A v_A \cdot R - m_B v_B \cdot R = 0 \qquad \boxed{v_A = v_B}$

例 如图所示，在静止的水平匀质圆盘上，一人沿盘边缘由静止开始相对盘以速度u行走，设人质量为m_2，盘的质量为m_1，盘半径r，摩擦不计。求盘的角速度。



解：以人和盘为研究对象，受力分析

运动分析 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$ $\quad v = u - r\omega$

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

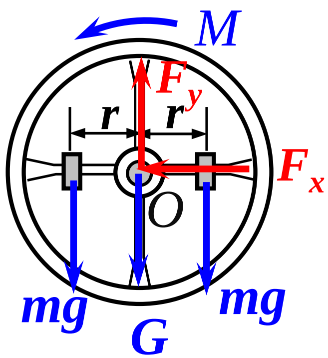
$$L_z = J_z\omega - m_2 v \cdot r = (\frac{1}{2}m_1 + m_2)r^2\omega - m_2 r u$$

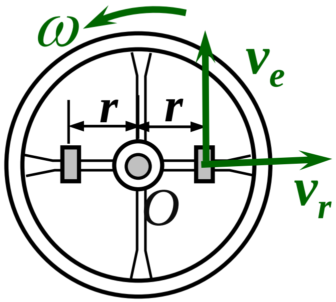
$\because \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) = 0$ 且初始静止

$\therefore L_z = L_{z0} = 0$

$$\omega = \frac{2m_2 u}{(m_1 + 2m_2)r}$$

例 图示飞轮在力偶 $M=M_0\cos\omega t$ 的作用下绕轴O转动（M_0 和ω 均为常量），飞轮的转动惯量为J。沿飞轮的轮幅有两个质量皆为m的物块分别作周期性运动，初瞬时两物块离轴O的距离$r=r_0$。为使飞轮以匀角速度ω转动，求r应满足的条件。





解：以整体为研究对象，受力分析

$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega+2mrv_e)=M_0\cos\omega t \qquad v_e=r\omega$$

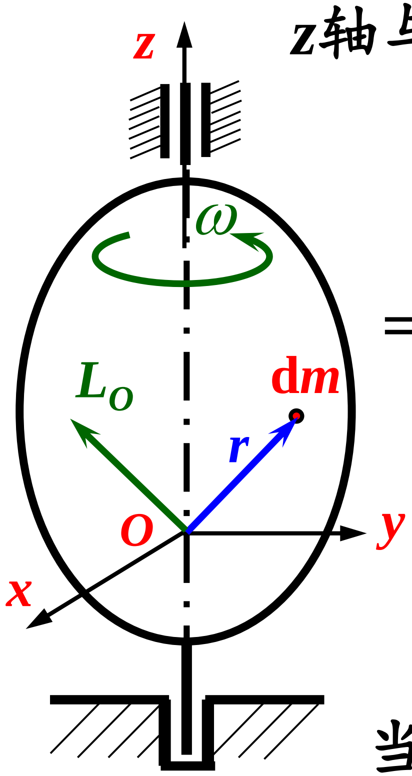
$$(J+2mr^2)\alpha+4mr\dot{r}\omega=M_0\cos\omega t$$

令$\alpha=0$

$$\int_{r_0}^{r}4mr\omega\mathrm{d}r=\int_0^t M_0\cos\omega t\mathrm{d}t \qquad r^2=r_0^2+\frac{M_0\sin\omega t}{2m\omega^2}$$

§11-3　刚体定轴转动微分方程

1. 定轴转动刚体对定点的动量矩



z轴与转轴重合 $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$　　$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$　　$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

定轴转动刚体对定点O的动量矩为：

$$\boldsymbol{L}_O = \int_m \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \mathrm{d}m = \int_m \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \mathrm{d}m$$

$$= -(\int_m xz\mathrm{d}m)\omega \boldsymbol{i} - (\int_m yz\mathrm{d}m)\omega \boldsymbol{j} + (\int_m (x^2 + y^2)\mathrm{d}m)\omega \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{L}_O = -J_{xz}\omega \boldsymbol{i} - J_{yz}\omega \boldsymbol{j} + J_z \omega \boldsymbol{k}$$

J_{xz}、J_{yz}、J_z分别为刚体对相应坐标轴的惯性积和转动惯量

当转轴为刚体对O点的惯性主轴时 $\boldsymbol{L}_O = J_z \boldsymbol{\omega}$

定轴转动刚体对定轴z的动量矩为： $L_z = J_z \omega$

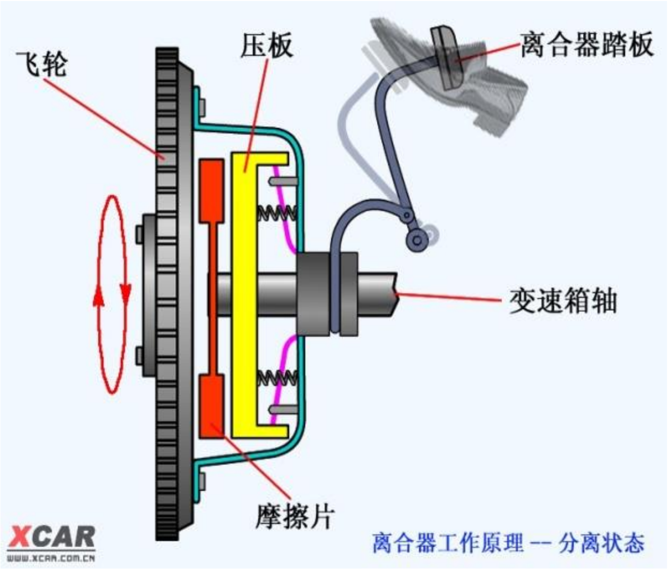
2. 刚体定轴转动微分方程

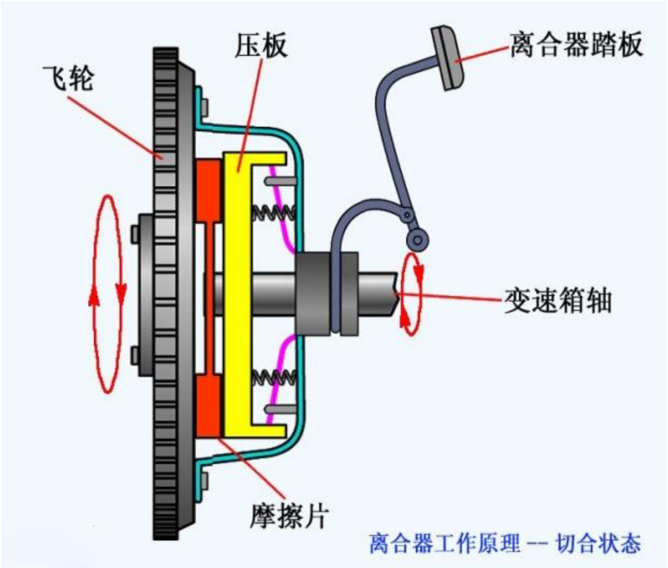
质点系动量矩定理 $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$ $L_z=J_z\omega$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_z\omega=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})=M_z$$

$J_z\alpha=M_z$ $J_z\ddot{\varphi}=M_z$ 转动微分方程式

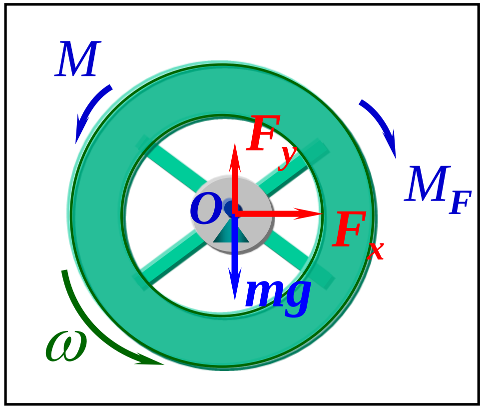
物理意义





例 一飞轮由直流电机带动，飞轮对轴O的转动惯量是J_O。已知电机产生的转矩M与其角速度ω的关系为$M=M_O(1-\omega/\omega_1)$，其中M_O为电机启动转矩，ω_1表示电机无负载时的空转角速度。作用在飞轮上的阻力矩M_F假设为常量。试求当$M>M_F$时，飞轮从静止启动后角速度随时间的变化规律。

解：研究飞轮，受力分析如图



$$J_O\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M-M_F=M_O(1-\frac{\omega}{\omega_1})-M_F=M_O-M_F-\frac{M_O}{\omega_1}\omega$$

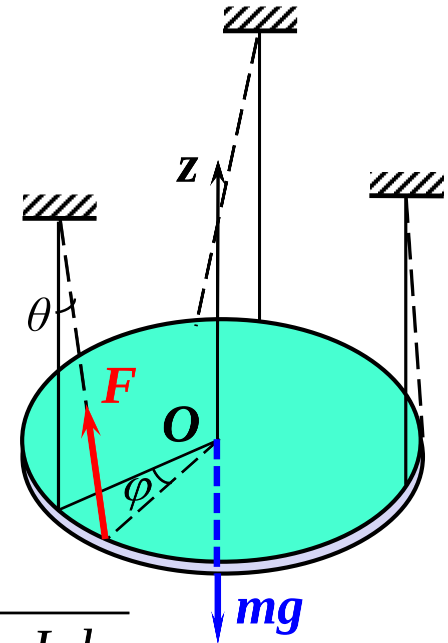
令：$\frac{M_O-M_F}{J_O}=b \qquad \frac{M_O}{J_O\omega_1}=c$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=b-c\omega \qquad \int_0^\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{b-c\omega}=\int_0^t\mathrm{d}t \qquad \boxed{\omega=\frac{b}{c}(1-e^{-ct})}$$

当$t\to\infty$时，飞轮将以极限角速度ω_∞匀角速转动

$$\omega_\infty=\frac{b}{c}=\frac{M_O-M_F}{M_O}\omega_1$$

例 三条长度均为l的铅直绳索，等距离地联接在圆盘边缘，将圆盘水平地悬挂起来，构成三线摆。已知圆盘质量为m，半径为R，绕中心铅直轴的转动惯量为J_O，求圆盘作微幅扭摆时的运动规律。



解：研究圆盘，在任意位置时受力分析。

圆盘竖直方向的位移是转角θ的二次小量，当圆盘微幅摆动时，可略去不计，圆盘按定轴转动处理。

$$J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=3M_z(\boldsymbol{F}) \xrightarrow{\sin\theta\approx\theta} J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-3F\theta R=-3\frac{FR^2\varphi}{l}$$

$$\xrightarrow{mg=3F\cos\theta\approx 3F} J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgR^2}{l}\varphi=0$$

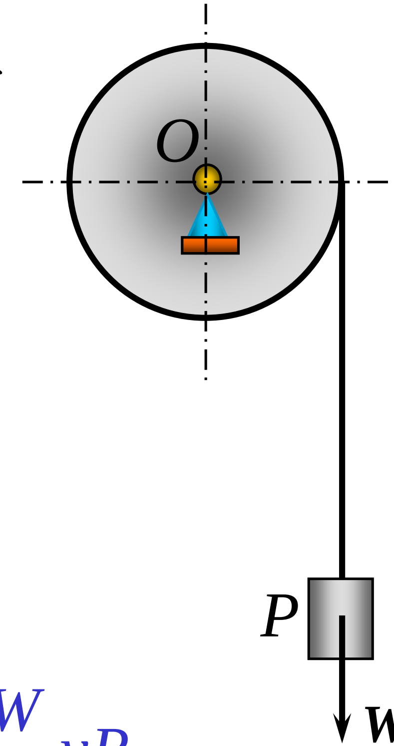
$$\boxed{\varphi=\varphi_0\sin\left(\sqrt{\frac{mgR^2}{J_O l}}t+\alpha\right)}$$

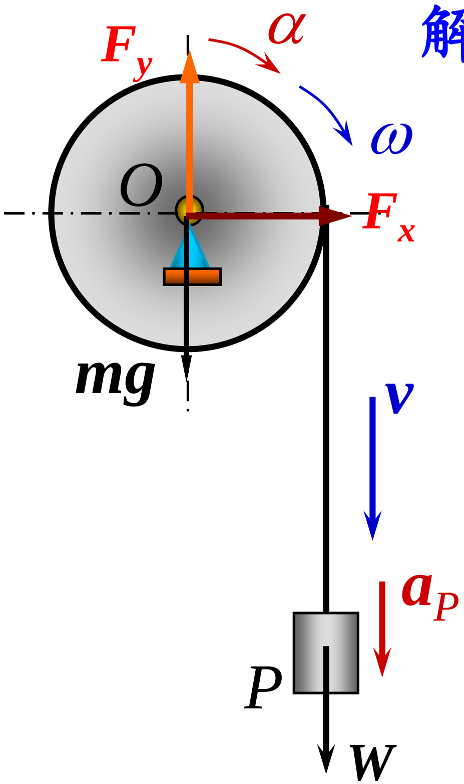
摆幅φ_0，α初相位，均由初始条件确定

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_O l}{mgR^2}}$$

$$J_O=\frac{mgR^2T^2}{4\pi^2 l}$$

例 匀质圆轮半径为R、质量为m。圆轮在重物P带动下绕固定轴O转动，已知重物重量为W。求重物下落的加速度。





解：以整个系统为研究对象。

$$L_{O1}=J_O\omega=\frac{1}{2}mR^2\omega$$

$$L_{O_2}=\frac{W}{g}Rv$$

$$L_O=L_{O1}+L_{O2}=\frac{1}{2}mR^2\omega+\frac{W}{g}vR$$

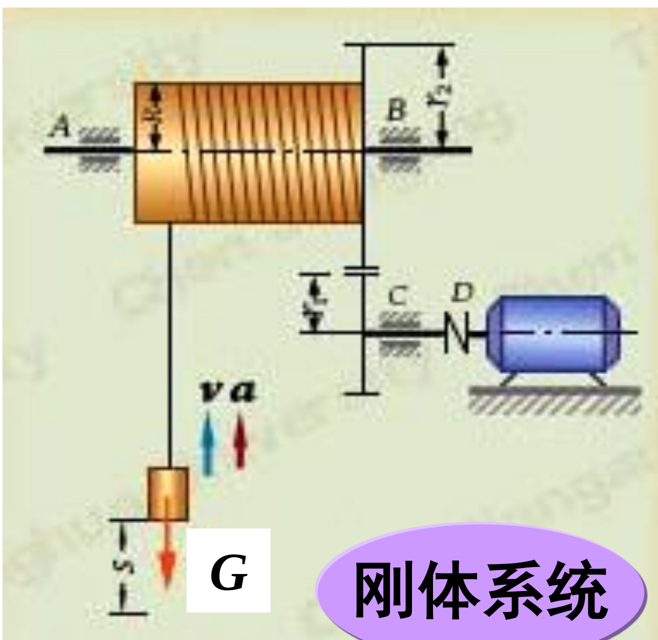
$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t}=M_O$$

$$\frac{1}{2}mR^2\alpha+\frac{W}{g}a_PR=WR$$

$$a_P=R\alpha$$

$$a_P=\frac{W}{\dfrac{m}{2}+\dfrac{W}{g}}$$

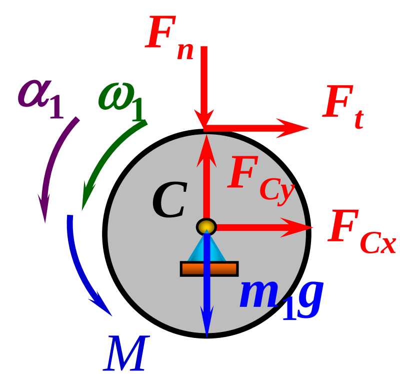
例 卷扬机的减速轮系如图所示，设启动时电动机的转矩M为常量，大齿轮及卷筒对轴AB的转动惯量为J_2，小齿轮、联轴器及电动机转子对轴CD的转动惯量为J_1，被提升的重物重为G，卷筒、大齿轮及小齿轮的半径分别为R、r_2及r_1。略去摩擦及钢丝绳质量，求重物上升的加速度。



刚体系统

整体？
分开？

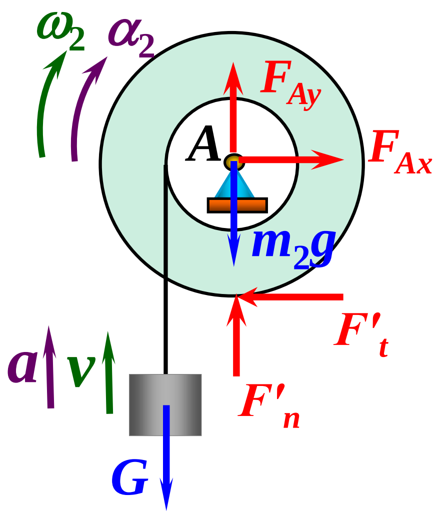
解：研究小齿轮，受力分析

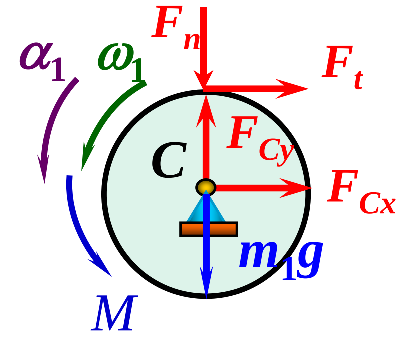


$$J_1\alpha_1 = M - F_t r_1$$

研究大齿轮，受力分析

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J_2\omega_2 + \frac{G}{g}vR\right) = F_t' r_2 - GR$$





$$J_2\alpha_2 + \frac{G}{g}aR = F_t' r_2 - GR$$

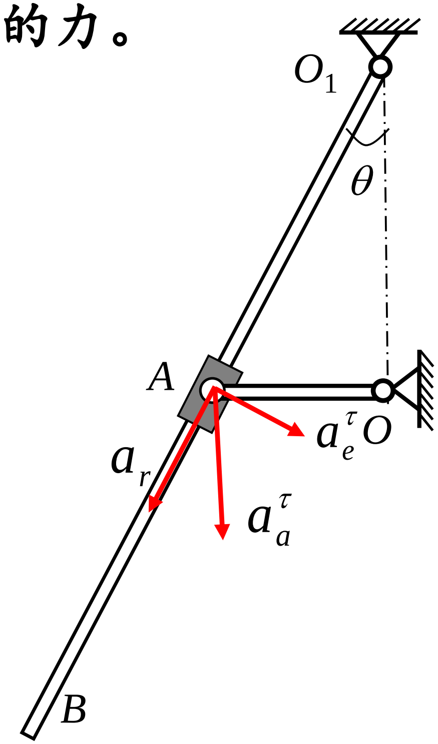
$$J_1\alpha_1 = M - F_t r_1$$

补充运动关系 $\quad r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2 \qquad a = R\alpha_2$

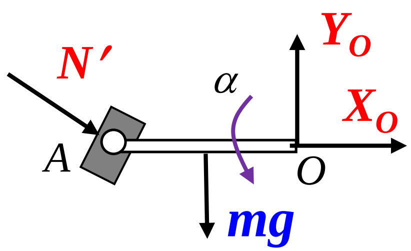
令 $i = \dfrac{r_2}{r_1}$

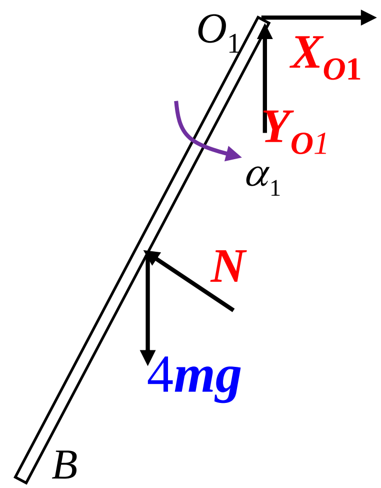
$$a = \frac{(Mi - GR)R}{J_2 + J_1 i^2 + \dfrac{GR^2}{g}}$$

例 图示平面机构中，匀质曲柄OA长r，质量m，可绕O轴转动。不计套筒A的质量，在图示位置时，OA处于水平，套筒恰好与长为$4r$、质量为$4m$的匀质摇杆O_1B的质心重合，$\theta = 30°$。若从图示位置将此机构无初速释放，不计摩擦，试求释放该机构瞬时，摇杆作用于套筒的力。



解：分别取O_1B，OA为研究对象，





$$J_O\alpha = \frac{1}{2}mgr + N'\sin 30^\circ r$$

$$J_O = \frac{1}{3}mr^2$$

$$J_{O1}\alpha_1 = 4mgr\text{-}N2r$$

$$J_{O1} = \frac{1}{3}4m(4r)^2 = \frac{64}{3}mr^2$$

套筒A为动点，动系为摇杆

$$a_A^\tau \sin 30^\circ = a_e^\tau$$

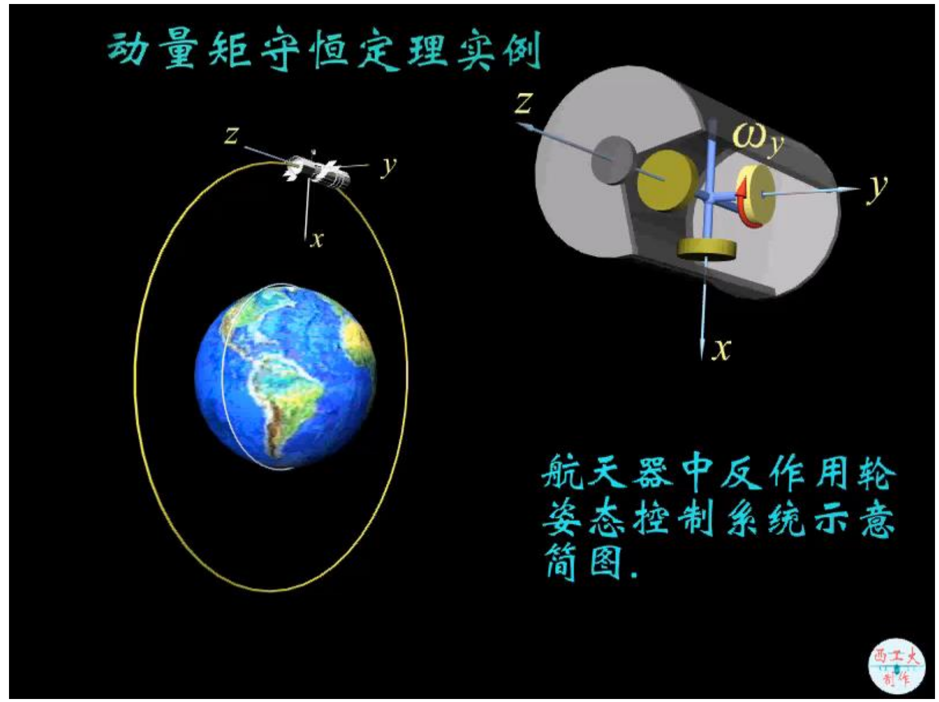
$$\alpha = 4\alpha_1$$

$$\alpha_1 = \frac{9g}{40r} \qquad N = -\frac{2}{5}mg$$

§ 11-4　刚体对质心的动量矩定理

1. 问题的提出

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_\mathrm{i}^{(\mathrm{e})})}$$



动量矩定理是相对于惯性坐标系中**固定点**或**固定轴**而言的，并不适用于非惯性系的情况。

$$?\ \boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_\mathrm{i}^{(\mathrm{e})})}$$

2. 质点系对C (质心)的动量矩

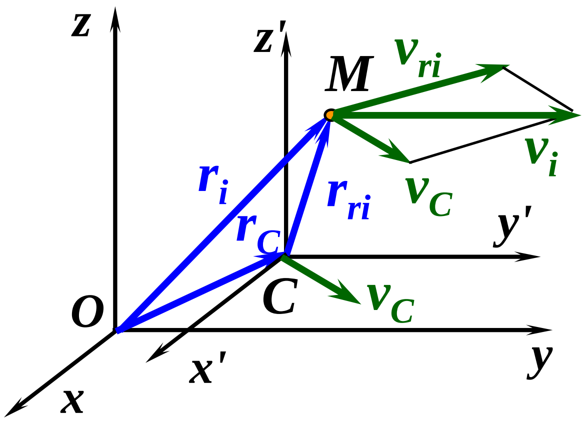
L_C— 质点系对质心C的**绝对动量矩**

$$\boldsymbol{L}_C = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_i)$$

L'_C— 质点系对质心C的**相对动量矩**

$$\boldsymbol{L}'_C = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_{ri})$$

$$\boxed{\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}'_C}$$



$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_{ri}$$

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{ri}$$

3. 质点系对固定点O与对C (质心)的动量矩关系

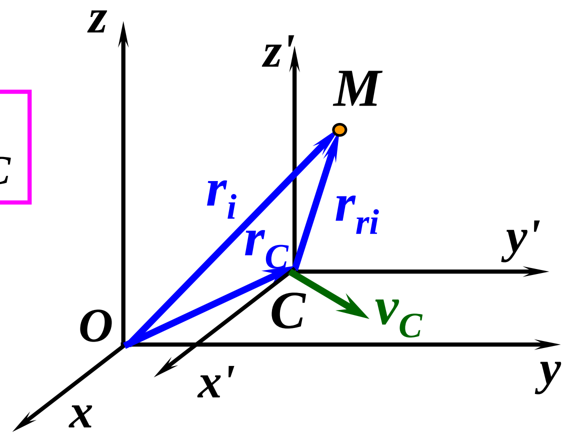
$$\boxed{\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C}$$

质点系对固定点O的动量矩等于质心的动量对O点之矩与质点系对质心的动量矩二者的矢量和。

4. 质点系对质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\boxed{\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C}$$



$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_{ri}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$= \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boxed{\boldsymbol{r}_C \times \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \sum(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_{ri}) \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \boldsymbol{r}_C \times \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum \boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

$$= \boxed{\boldsymbol{r}_C \times \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}} + \sum \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

质点系对质心的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心的主矩。

4. 质点系对质心的动量矩定理

质点系对质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

质点系对质心轴的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_{Cz}}{\mathrm{d}t} = \sum M_{Cz}(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

讨论

1. 在以质心为原点的平动坐标系中，质点系对质心（质心轴）的动量矩定理的形式与对定点（定轴）的动量矩定理的形式相同；

2. 质点系对质心（质心轴）的动量矩的改变，只与质点系的外力有关，即内力不能改变质点系对质心（质心轴）的动量矩。

刚体对质心的动量矩定理

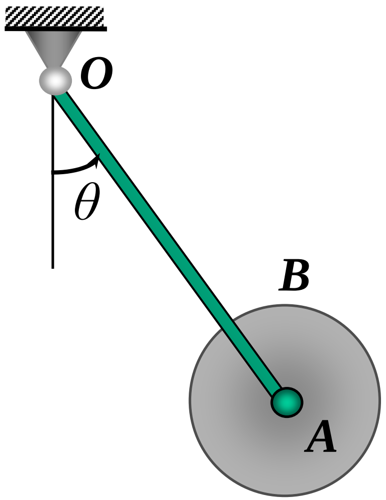
$$J_C\alpha = M_C^{(e)}$$

平面刚体对质心的动量矩

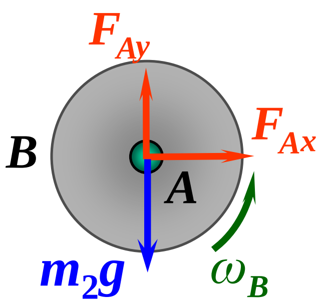
$$L_C = J_C\omega$$

$$J_C\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M_C^{(e)}$$

例 长度为l，质量为m_1的均质杆OA与半径为R，质量为m_2的均质圆盘B在A处铰接，铰链O，A均光滑。初始时，杆OA有偏角θ_0，圆盘B有角速度ω_0（逆时针向）。求系统在重力作用下的运动规律。



解：1. 考虑圆盘B，受力分析.



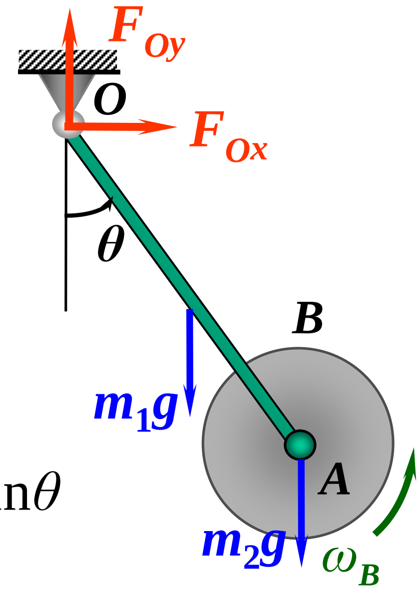
根据对质心的动量矩定理

$$\boxed{J_C\alpha = M_C^{(e)}}$$

$$J_B\dot{\omega}_B = 0$$

$$\omega_B = \omega_0 = \text{const}$$

2. 考虑杆轮系统，受力如图所示。



对固定点O的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}M_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_{OA}\dot{\theta}+(J_B\omega_B+m_2l\dot{\theta}\cdot l)\right]=-m_1g\frac{l}{2}\sin\theta-m_2gl\sin\theta$$

$$(\frac{1}{3}m_1+m_2)l\ddot{\theta}+(\frac{1}{2}m_1+m_2)g\sin\theta=0$$

微幅振动时的运动规律为

$$\theta=\theta_0\cos\omega t$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3m_1+6m_2}{2m_1+6m_2}\cdot\frac{g}{l}}$$

3. 运动特性：圆盘的转动不影响杆的摆动，而杆的摆动也不影响圆盘的转动。

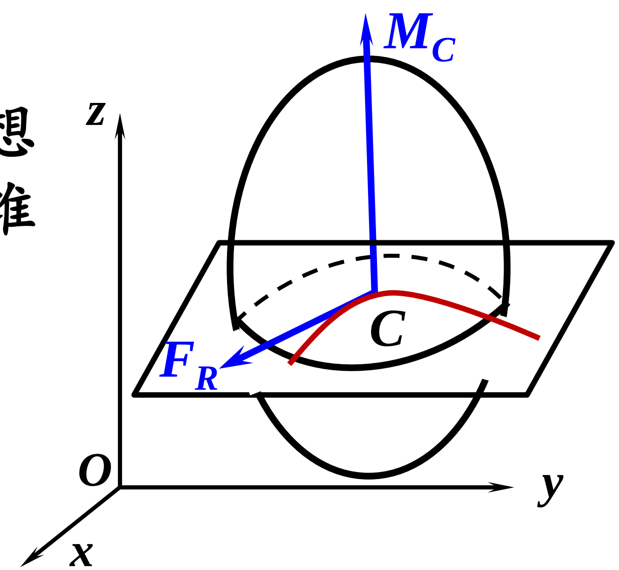
非耦合运动!

§11-5 刚体的平面运动微分方程

1. 刚体平面运动的动力学条件

一个受约束的刚体，在主动力和理想约束反力的作用下，一般作空间三维运动。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_{Rx} \\ m\ddot{y}_C = F_{Ry} \\ m\ddot{z}_C = F_{Rz} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{L}_{Cx} = M_{Cx} \\ \dot{L}_{Cy} = M_{Cy} \\ \dot{L}_{Cz} = M_{Cz} \end{cases}$$



若刚体在平行于Oxy平面内作平面一般运动，

$$F_{Rz} \equiv 0, \quad M_{Cx} \equiv 0, \quad M_{Cy} \equiv 0$$

刚体平面运动的必要条件

刚体上主动力系对质心简化结果必为一在Oxy平面上的平面力系。

刚体质心的初始位置与速度在Oxy平面内，初始的姿态角及角速度矢量沿Oz方向 。

1. 刚体平面运动的动力学条件

受力条件、初始条件、惯量条件

刚体在质量对称面内运动，所受外力也关于该平面对称，还满足运动的初始条件。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_{Rx} \\ m\ddot{y}_C = F_{Ry} \\ \dot{L}_{Cz} = M_{Cz} \end{cases}$$

平面刚体对质心的动量矩

$$L_C = J_C \omega$$

平面运动 $\begin{cases} \text{随质心平动} \\ \text{绕质心转动} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_{Rx} \\ m\ddot{y}_C = F_{Ry} \\ J_C \ddot{\varphi} = M_{Cz} \end{cases}$

2. 刚体平面运动的动力学方程

刚体平面运动动力学方程

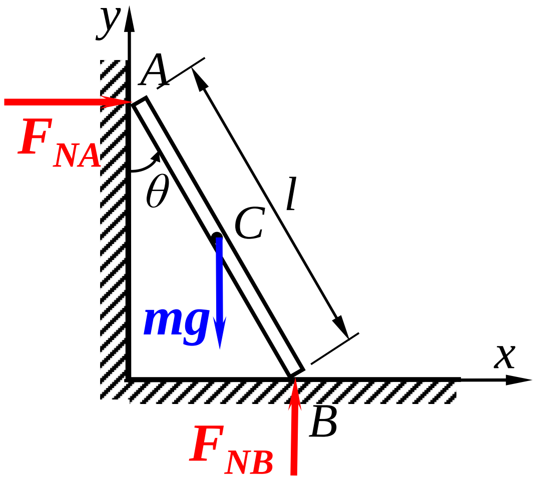
$$
\left.\begin{aligned} m\boldsymbol{a}_C &= \boldsymbol{F}_R \\ J_C\alpha &= M_C \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} ma_{Cx} &= F_{Rx} \\ ma_{Cy} &= F_{Ry} \\ J_C\alpha &= M_C \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} ma_C^{\tau} &= F_{\tau} \\ ma_C^{n} &= F_{n} \\ J_C\alpha &= M_C \end{aligned}\right.
$$

刚体平面运动微分方程

$$
\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t^2} &= \boldsymbol{F}_R \\ J_C\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} &= M_C \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= F_{Rx} \\ m\ddot{y}_C &= F_{Ry} \\ J_C\ddot{\varphi} &= M_C \end{aligned}\right.
$$

- 建立了质点系的运动量(动量和动量矩)与力系的特征量(主矢和主矩)之间的关系.
- 质心运动定理与刚体对质心的动量矩定理的结合完成了对刚体平面运动的完整描述.
- 当a_C=0及α=0时,变成了平面一般力系平衡方程.

例 均质细杆AB，长l，质量为m，两端分别沿铅垂墙和水平面滑动，不计摩擦。若杆在铅垂位置受干扰后，由静止状态沿铅垂面滑下，求杆在任意位置受到墙的约束反力(θ的函数)。



解 以杆为研究对象，在任意位置的受力如图所示。

杆作平面运动，其质心的坐标为：

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$y_C = \frac{l}{2}\cos\theta$$

质心的加速度为：

$$\ddot{x}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta$$

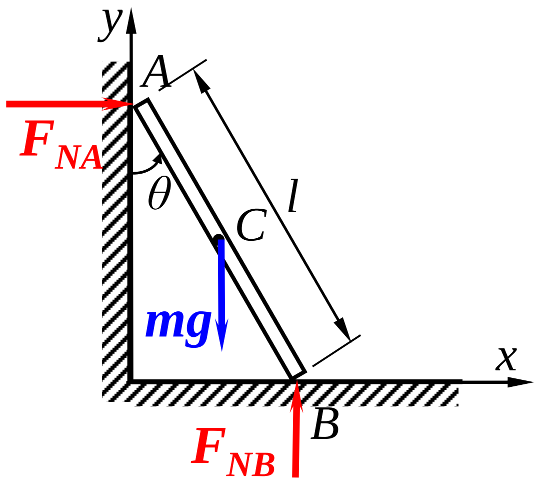
$$\ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta - \frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta$$

杆的平面运动微分方程

$$m\ddot{x}_C = \sum F_x \qquad m(-\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta) = F_{NA}$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_y \qquad m(-\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta - \frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta) = F_{NB} - mg$$

$$J_C\ddot{\theta} = \sum M_C(F) \qquad \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta} = F_{NB}\frac{l}{2}\sin\theta - F_{NA}\frac{l}{2}\cos\theta$$



$$\ddot{x}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta$$

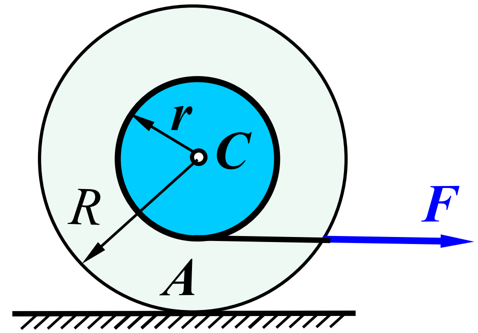
$$\ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta - \frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

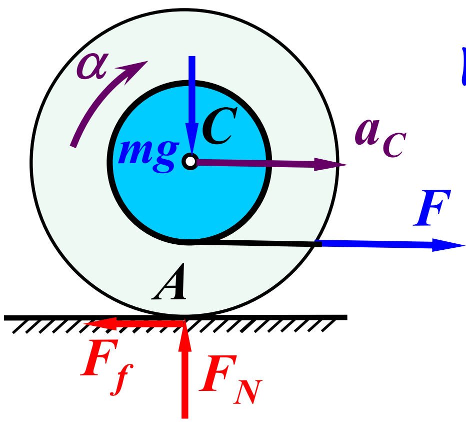
$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} \qquad \int_0^{\dot{\theta}}\dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta} = \int_0^{\theta}\frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l}(1-\cos\theta) \qquad F_{NA} = \frac{3mg}{4}\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

例 均质滚子质量为m，半径为R，在滚子的鼓轮上绕一绳索，在绳上作用一水平常力F，使滚子沿水平直线轨道纯滚动。已知鼓轮的半径为r，滚子的回转半径为ρ。试求（1）轮心的加速度；（2）设滚子与地面的摩擦系数为f，滚子保持只滚不滑的条件。



解： 滚子作平面运动，受力和运动分析.



刚体平面运动动力学方程

$$ma_C = F - F_f$$

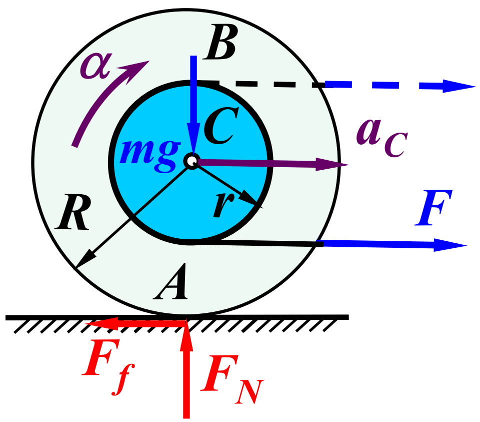
$$0 = F_N - mg$$

$$m\rho^2\alpha = F_f R - Fr$$

$$a_C = R\alpha \qquad F_f \le fF_N$$

$$a_C = \frac{FR(R-r)}{m(\rho^2 + R^2)} \qquad F_f = \frac{F(\rho^2 + Rr)}{\rho^2 + R^2} \qquad f \ge \frac{F(\rho^2 + Rr)}{mg(\rho^2 + R^2)}$$

讨论



$$a_C = \frac{FR(R-r)}{m(\rho^2+R^2)}$$

$$F_f = \frac{F(\rho^2+Rr)}{\rho^2+R^2}$$

1. 滚子的转向
2. 滑动摩擦力的大小与方向
3. 滚子纯滚动的条件

$$a_C = R\alpha \qquad F_f \le fF_N \qquad F \le F_1 = \frac{fmg(\rho^2+R^2)}{\rho^2+Rr}$$

4. 滚子又滚又滑

$$a_C \ne R\alpha \qquad F_f = fF_N \qquad F > F_1 = \frac{fmg(\rho^2+R^2)}{\rho^2+Rr}$$

5. 若将矩方程写成 $J_A\alpha = M_A$ 是否可行？

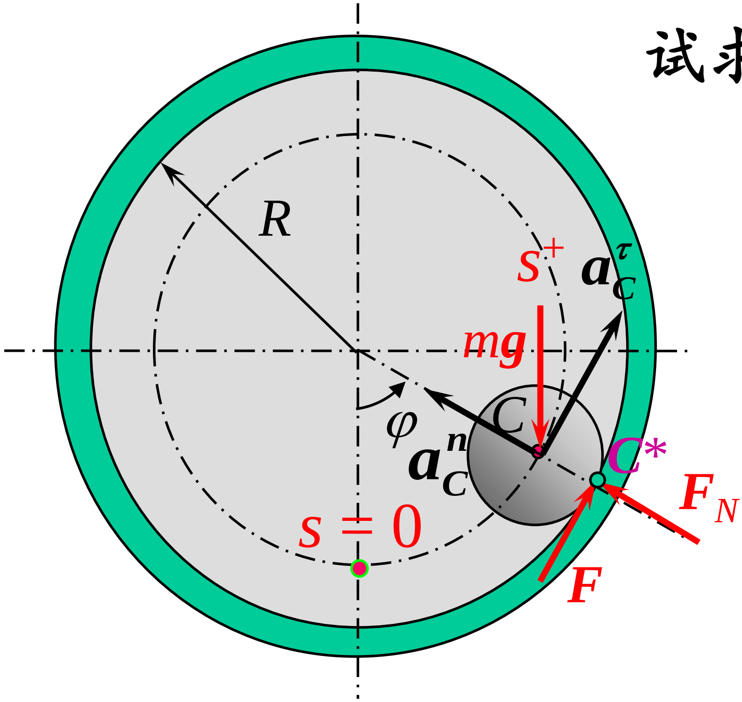
$$m(\rho^2+R^2)\alpha = F(R-r)$$

$J_P\alpha = M_P$ 为什么可行？是否有条件？

例 半径为r、质量为m的均质圆柱体，在半径为R的刚性圆槽内作纯滚动。在初始位置$\varphi = \varphi_0$，由静止向下滚动。

试求：1. 圆柱体的运动微分方程；

2. 圆槽对圆柱体的约束力；



解：圆柱体受力分析

圆柱体作平面运动，取弧坐标s与圆柱体质心轨迹重合。

$$v_C = (R-r)\dot{\varphi} = r\omega, \quad \dot{\omega} = \alpha = \frac{(R-r)}{r}\ddot{\varphi}$$

$$a_C^\tau = r\alpha = (R-r)\ddot{\varphi}$$

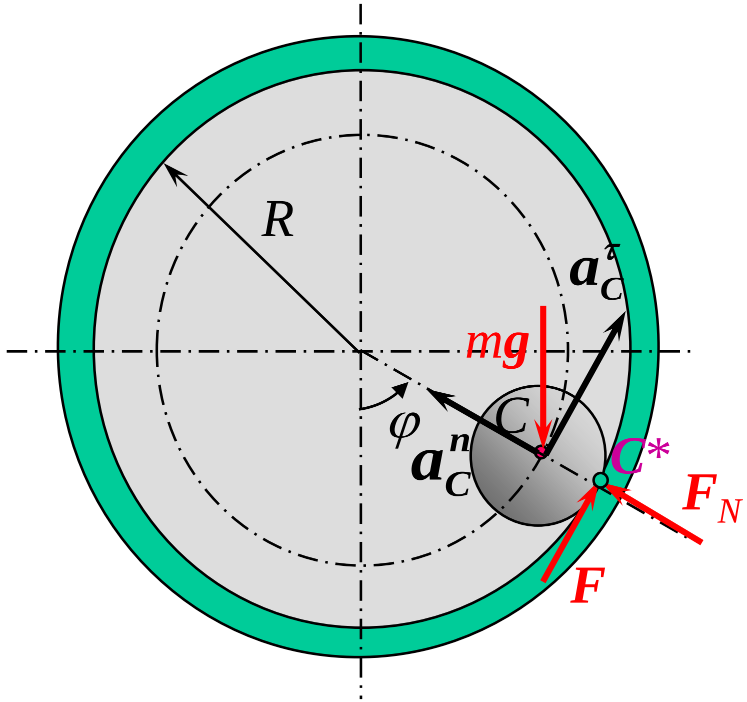
$$a_C^n = \frac{v_C^2}{(R-r)} = (R-r)\dot{\varphi}^2$$

1、圆柱体的运动微分方程

$$ma_C^\tau = F - mg\sin\varphi$$

$$J_C\alpha = -Fr$$

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$



$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0$$

$\sin\varphi\approx\varphi$ 非线性微分方程线性化

$$\ddot{\varphi}+\frac{2g}{3(R-r)}\varphi=0$$

$$\varphi = A\sin(\omega_0 t+\alpha) \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

初始条件 $t=0,\quad \varphi=\varphi_0,\quad \dot{\varphi}_0=0$

$$\varphi=\varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}t\right)$$

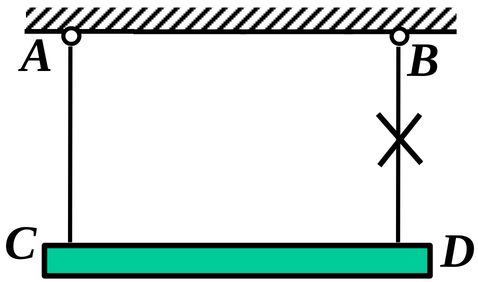
2. 圆槽对圆柱体的约束力

$$ma_C^n=m(R-r)\dot{\varphi}^2=F_N-mg\cos\varphi$$

$$F_N=mg\cos\varphi+m(R-r)\dot{\varphi}^2$$

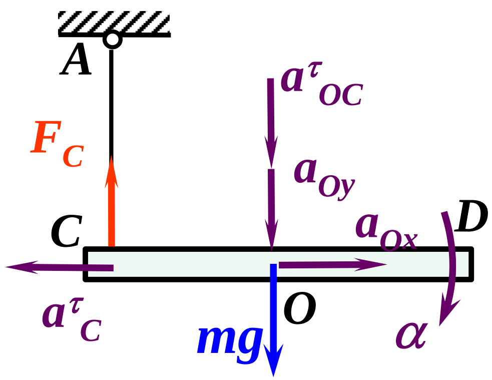
$$F=-\frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\varphi}$$

例 均质杆CD质量为m，长度为l，在两端用细绳水平吊起。当突然剪断BD绳时，求AC绳的张力及杆CD的角加速度。



解：剪断BD后，杆CD作平面运动，受力分析和运动分析.

$$\boldsymbol{a}_{Ox}+\boldsymbol{a}_{Oy}=\boldsymbol{a}_C^{\tau}+\boldsymbol{a}_{OC}^{\tau}\qquad \begin{cases} a_{Ox}=-a_C^{\tau} \\ -a_{Oy}=-a_{OC}^{\tau}=-\dfrac{l}{2}\alpha \end{cases}$$



刚体平面运动动力学方程

$$ma_{Ox}=0$$

$$-ma_{Oy}=F_C-mg$$

$$\frac{ml^2}{12}\alpha=F_C\frac{l}{2}$$

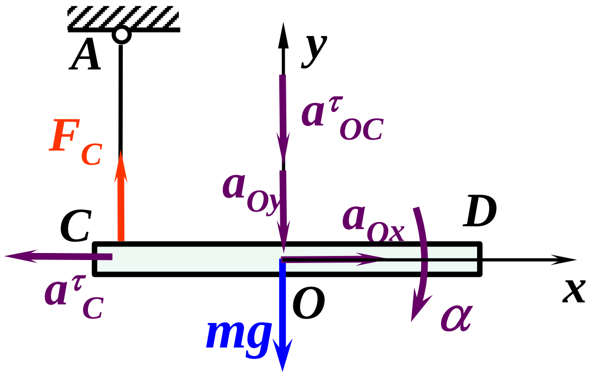
$$\alpha=\frac{3g}{2l}$$

$$F_C=\frac{mg}{4}$$

讨论

1. 剪断BD绳后，AC绳张力的变化

$$\Delta F_C = \frac{mg}{2} - \frac{mg}{4} = \frac{mg}{4}$$



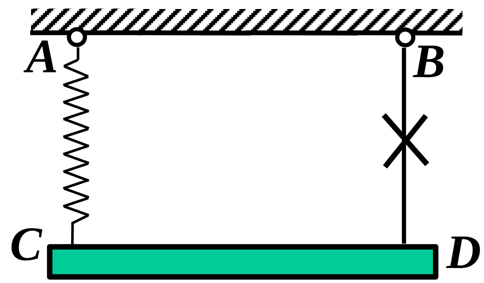
$$\alpha = \frac{3g}{2l}$$

$$F_C = \frac{mg}{4}$$

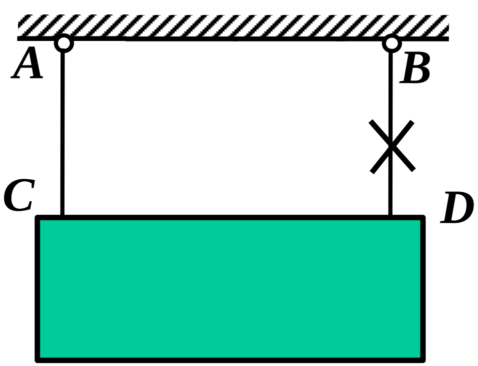
2. 若将绳AC变成刚度系数为k的弹簧，结果如何？

$$F_C = \frac{mg}{2}$$

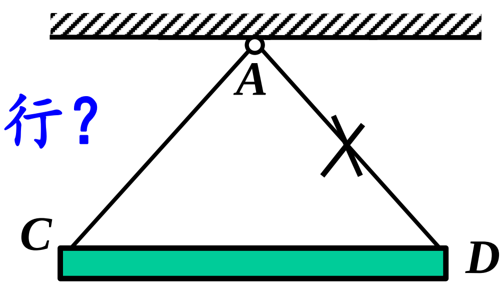
$$\alpha = \frac{3g}{l}$$



3.若对动点C列矩方程，即$J_C\alpha = M_C$是否可行？

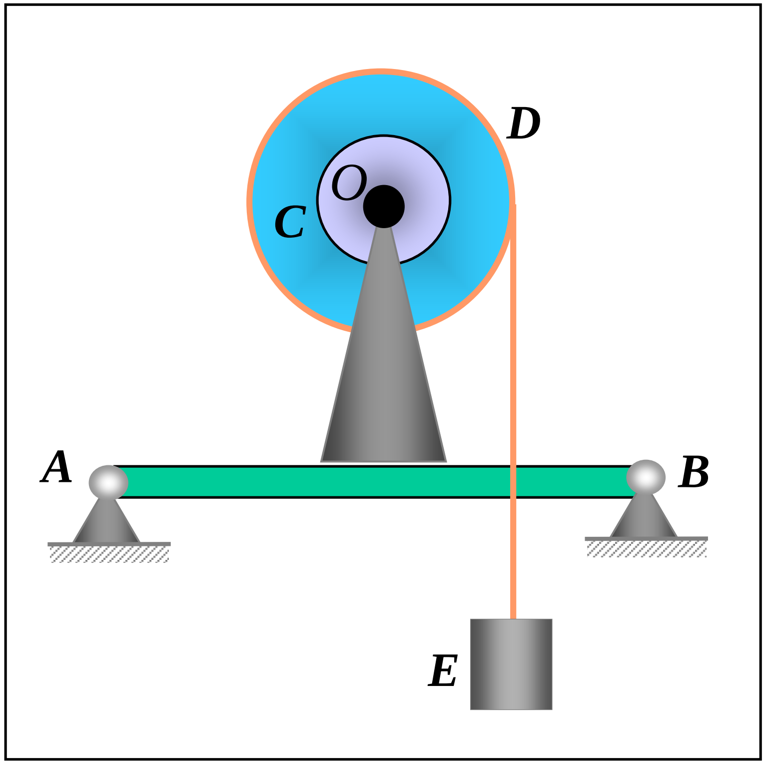


$J_C\alpha = M_C$为何不行？



3. 刚体系统平面运动动力学问题

例 起重装置由匀质鼓轮D（半径为R，重为W_1）及均质梁AB（长l=4R，重W_2=W_1）组成，鼓轮通过电机C（质量不计）安装在梁的中点，被提升的重物E重W=0.25W_1。电机通电后的驱动力矩为M，求重物E上升的加速度a及支座A，B的约束力F_{NA}及F_{NB}。



解： **1. 求加速度*a*。**

研究鼓轮D，重物E及与鼓轮固结的电机转子所组成的系统，M为电机定子作用在转子的驱动力矩，

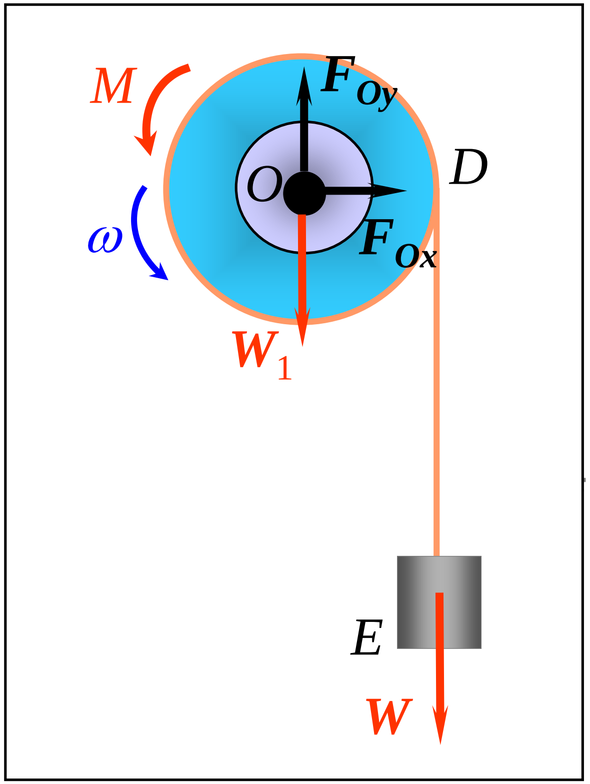
对O点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(J_D+\frac{W}{g}R^2)\omega\right]=M-WR$$

$$J_D=\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}R^2$$

$$\alpha=\frac{4M/R-W_1}{3W_1}\cdot\frac{g}{R}$$

$$a=\frac{4M/R-W_1}{3W_1}g$$



2.研究整个系统，注意驱动力矩M为系统内力。

对点O应用动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J_D\omega+\frac{W}{g}R^2\omega\right)=$$

$$-WR+(F_{\mathrm{NB}}-F_{\mathrm{NA}})\frac{l}{2}$$

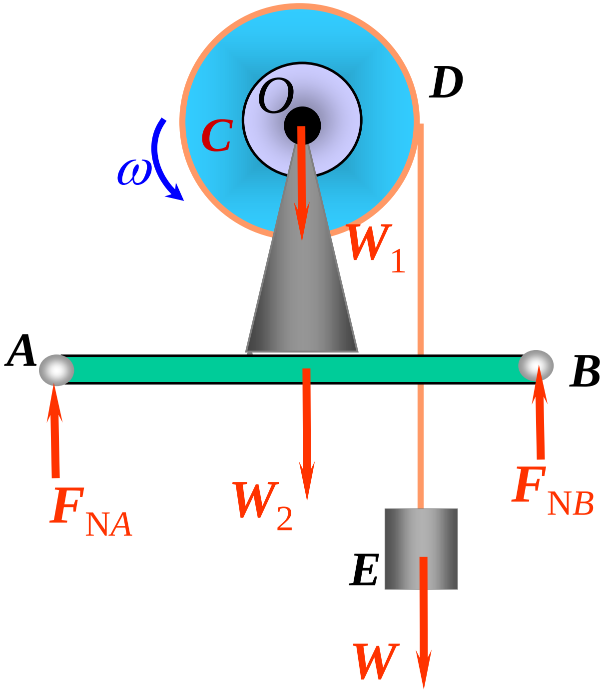
应用质心运动定理

$$\frac{W}{g}R\alpha=F_{\mathrm{NA}}+F_{\mathrm{NB}}-W_1-W_2-W$$

$$F_{\mathrm{NA}}=\frac{13}{12}W_1-\frac{M}{12R}$$

$$F_{\mathrm{NB}}=\frac{13}{12}W_1+\frac{5M}{12R}$$

$$a=\frac{4M/R-W_1}{3W_1}g$$



魔术师的表演 第六届初赛样题

魔术师表演一个节目。一个边长为a的不透明立方体箱子，质量为M；一个长为L的均质刚性板AB，质量为$2M$，可绕光滑的A铰转动；一个半径为R的刚性球，质量为$3M$，放在刚性的水平面上。魔术师首先把刚性板AB水平放置在圆球上，板和圆球都可以保持平衡，且圆心O和接触点B的连线与垂线夹角为φ。然后魔术师又把箱子固定在AB板的中间位置，系统仍可保持平衡。魔术师用魔棒轻轻向右推了一下圆球，竟然轻易地就把圆球推开了。更令人惊讶的是，当圆球离开AB板后，AB板及其箱子仍能在水平位置保持平衡。

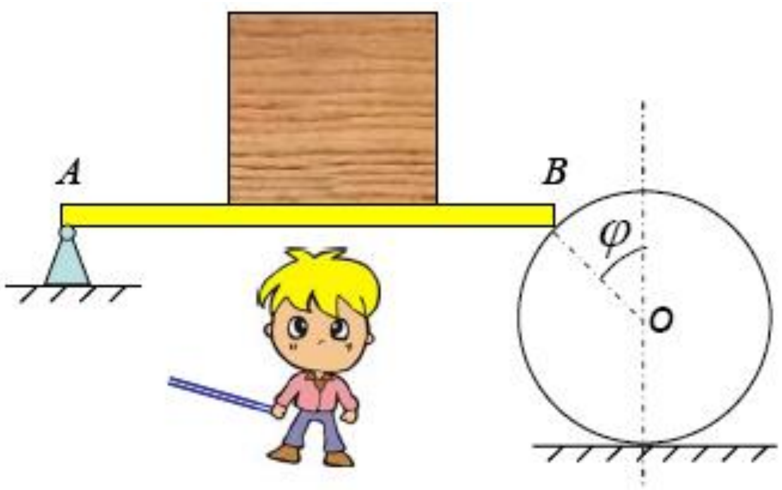
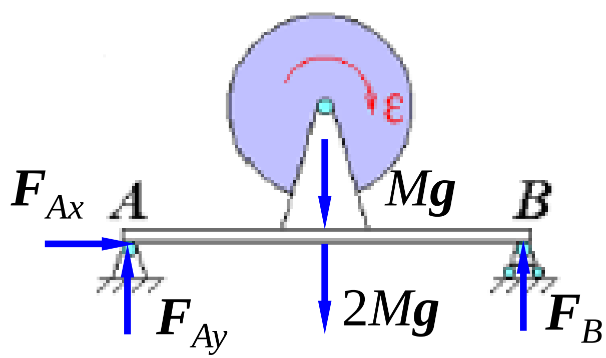
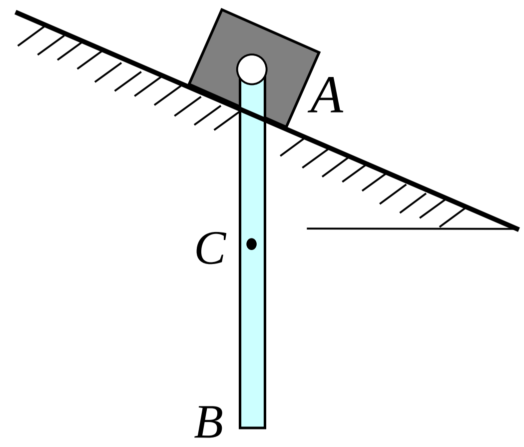


图 3 魔术师的箱子

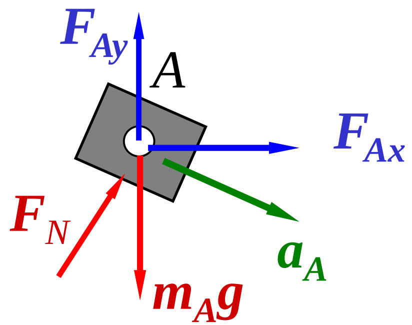


$$F_B = 0$$

例 长为l的均质杆AB通过铰链与滑块A连接，滑块A沿倾角为θ的斜面滑动。杆的质量为m_c，滑块质量为m_A，所有摩擦略去不计，系统自图示静止位置释放，求此时杆的质心C点的加速度。



解：研究滑块A



$$m_A a_A = F_{Ax}\cos\theta - F_{Ay}\sin\theta + m_A g\sin\theta$$

$$0 = F_{Ay}\cos\theta + F_{Ax}\sin\theta - m_A g\cos\theta + F_N$$

初瞬时： $\dot{\varphi}=0$, $\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{cA}^{\tau}$

研究杆AB

$$a_{cx} = a_A\cos\theta - a_{cA}^{\tau}$$

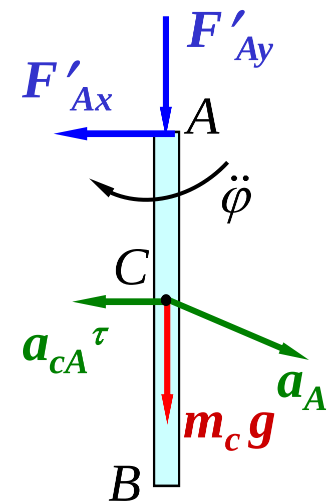
$$a_{cy} = -a_A\sin\theta$$

$$a_{cA}^{\tau} = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}$$

$$m_c a_{cx} = -F_{Ax}$$

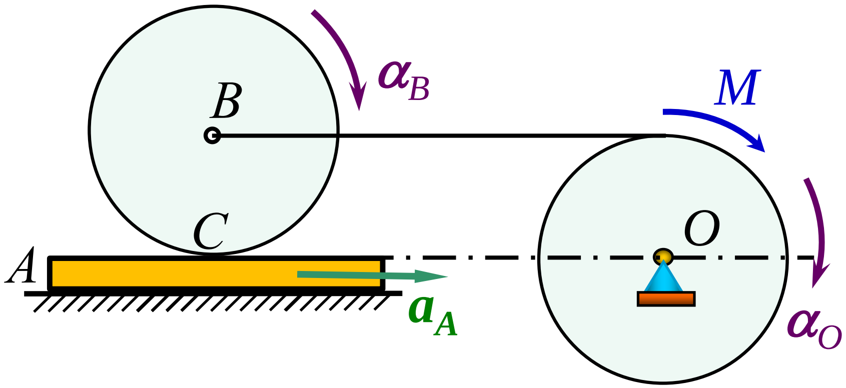
$$m_c a_{cy} = -F_{Ay} - m_c g$$

$$\frac{1}{12}m_c l^2\ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}F'_{Ax}l$$



详见书本例10-14

例 图示系统中，两个相同的均质轮O与B，半径均为R，质量均为m。水平细绳的一端系于轮B的中心，另一端缠绕在轮O上。轮B置于质量为m的板A上，板A置于光滑的水平面上。且绳与轮之间、轮B与板A之间均无相对滑动。若在轮O上作用一常力偶M，试求板A的加速度、轮O、轮B的角加速度。



解：运动分析

B为动点，板A为动系

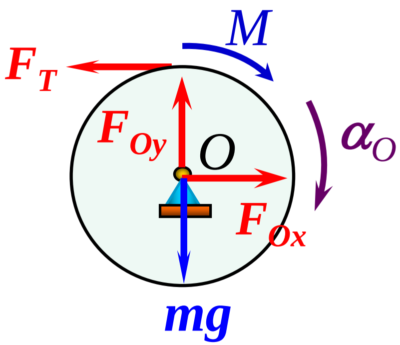
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$$

$$a_B = a_A + R\alpha_B$$

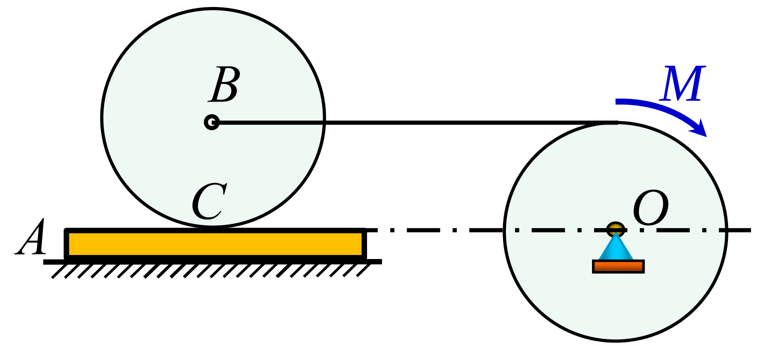
$$a_B = R\alpha_O$$

$$a_A + R\alpha_B = R\alpha_O$$

研究轮O，定轴转动

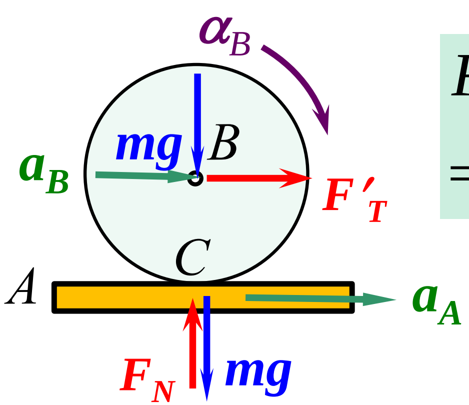


$$\frac{mR^2}{2}\alpha_O = M - F_T R$$



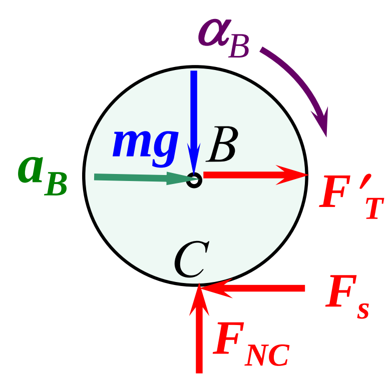
$$a_A + R\alpha_B = R\alpha_O$$

研究轮B和板A



$$F'_T = ma_A + ma_B$$
$$= ma_A + mR\alpha_O$$

研究轮B,平面运动



$$F'_T - F_s = ma_B = mR\alpha_O$$
$$\frac{mR^2}{2}\alpha_B = F_s R$$

$$a_A = \frac{2}{11}\frac{M}{mR} \qquad \alpha_B = \frac{4}{11}\frac{M}{mR^2} \qquad \alpha_O = \frac{6}{11}\frac{M}{mR^2}$$

小结

1. 动量矩的计算

2. 动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=\sum M_x(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}=\sum M_y(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

动量矩守恒定律 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})=0$ $\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=\sum M_x(\boldsymbol{F}_i^{(e)})=0$

3. 刚体定轴转动微分方程

$$J_z\alpha=M_z \qquad J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M_z \qquad J_z\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=M_z$$

4. 平面运动刚体对质心的动量矩定理

$$J_C\alpha = M_C^{(e)} \qquad J_C\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M_C^{(e)}$$

5. 刚体平面运动微分方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_{Rx} \\ m\ddot{y}_C = F_{Ry} \\ J_C\ddot{\varphi} = M_C \end{cases} \qquad \begin{cases} ma_{Cx} = F_{Rx} \\ ma_{Cy} = F_{Ry} \\ J_C\alpha = M_C \end{cases}$$

◆ 1个自由平面运动刚体，3个自由度，3个刚体平面运动微分方程可以完整描述刚体的运动。

◆ 刚体受到约束，产生未知的约束力，需补充反映约束条件的运动学方程，运动学关系往往成为问题的难点。