数学的巧妙应用

西安交通大学 张永怀

- 1、外币兑换中的损失
- 某人从美国到加拿大去度假，他把美元兑换成加拿大元时，币面数值增加12%，回国后他发现把加拿大元兑换成美元时，币面数值减少12%。把这两个函数表示出来，并证明这两个函数不互为反函数，即经过这样一来一回的兑换后，他亏损了一些钱

解： 设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数，$f_2(x)$ 为将 x 加拿大元兑换成的美元数，则

$$f_1(x) = x + x \cdot 12\% = 1.12x,\ \ x \ge 0$$

$$f_2(x) = x - x \cdot 12\% = 0.88x,\ \ x \ge 0$$

而 $f_2\left(f_1(x)\right) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x$，故 f_1，f_2 不互为反函数.

- **思考题：设一美国人准备到加拿大去度假，他把1,000美元兑换成加拿大元，但因故未能去成，于是他又将加拿大元兑换成了美元，问他亏损了多少钱？(14.4美元)**

- **2、蛛网模型**
- 在市场经济中存在这样的循环现象：若去年的鸡肉生产量供过于求，鸡肉的价格就会降低；价格降低会使今年养鸡者减少，使今年鸡肉生产量供不应求，于是鸡肉价上扬；价格上扬又使明年鸡肉产量增加，造成新的供过于求……

- 据统计，某城市1991年的鸡肉产量为30万吨，肉价为6.00元/公斤.1992年生产鸡肉25万吨，肉价为8.00元/公斤。已知1993年的鸡肉产量为28万吨
- 若维持目前的消费水平与生产模式，并假定鸡肉产量与价格之间是线性关系，问若干年以后鸡肉的生产量与价格是否会趋于稳定?若能够稳定，请求出稳定的生产量和价格

解：设第 n 年的鸡肉生产量为x_n，鸡肉价格为y_n，由于当年产量确定当年价格，故$y_n = f(x_n)$，而当年价格又决定第二年的生产量，故$x_{n+1} = g(y_n)$. 在经济学中，$y_n = f(x_n)$称为需求函数，$x_{n+1} = g(y_n)$称为供应函数. 产销关系呈现出如下过程：

$$x_1 \to y_1 \to x_2 \to y_2 \to x_3 \to y_3 \to x_4 \to y_4 \to \cdots$$

令P_1坐标为(x_1,y_1)，P_2坐标为(x_2,y_1), P_3坐标为(x_2,y_2), P_4坐标为(x_3,y_2) ,……, P_{2k-1}坐标为(x_k,y_k), P_{2k}坐标为(x_{k+1},y_k), $(k=1,2,\cdots)$. 将点列P_1，P_2，P_3，…描在平面直角坐标系中会发现P_{2k}都满足$x=g(y)$，P_{2k-1}都满足$y=f(x)$. 如图所示，这种关系很象一个蛛网，故被称为蛛网模型.

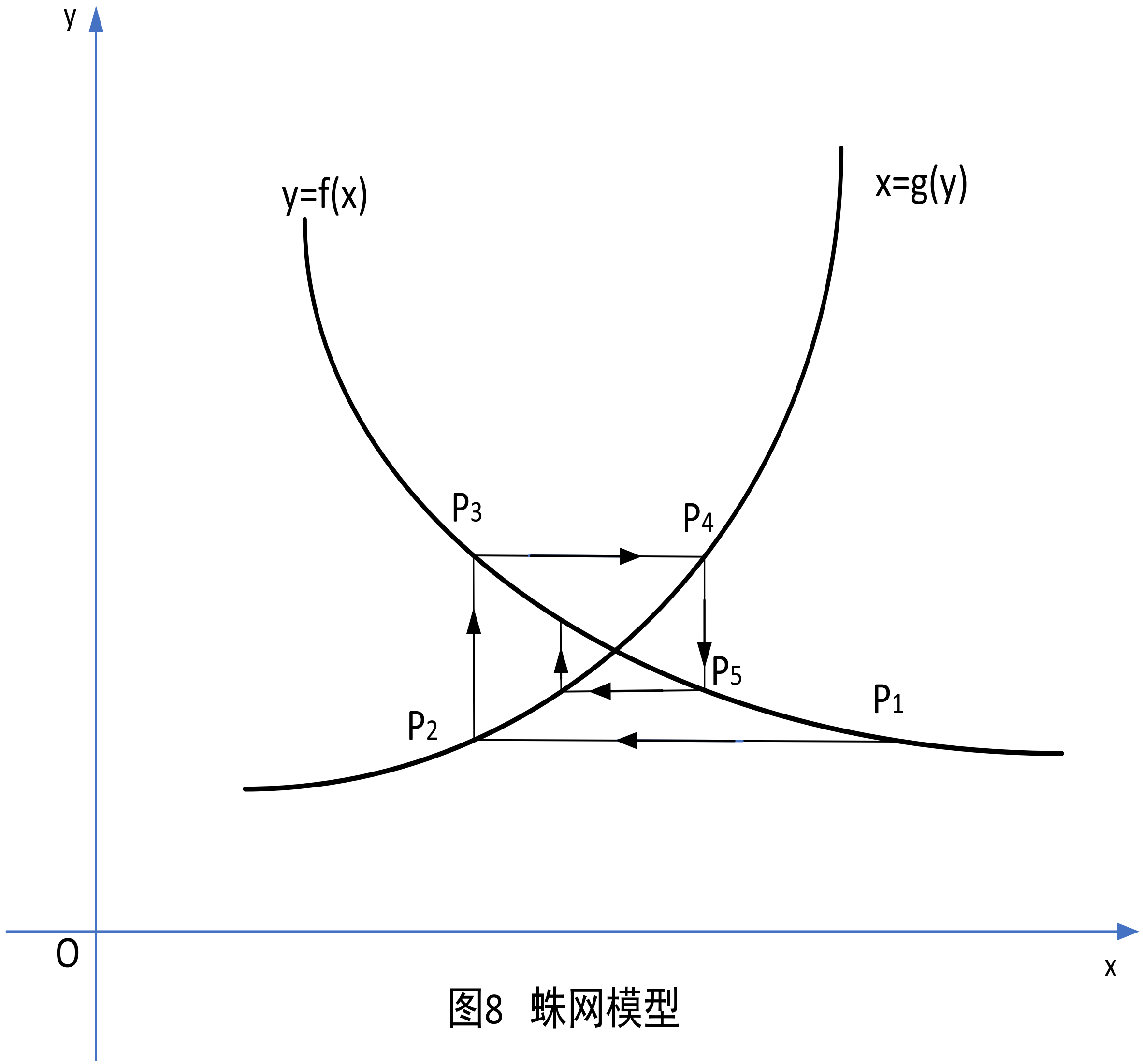


图8 蛛网模型

现在回到我们的鸡肉产销问题. 将 1991 年的鸡肉产量记为x_1，1991 年的鸡肉价格记为y_1，依此类推. 根据 x_i, y_i 可做出点列 $P_1(30,6), P_2(25,6), P_3(25,8), P_4(28,8), \cdots$

根据线性假设，需求函数$y = f(x)$是直线，且$P_1(30,6)$、$P_3(25,8)$位于此直线上，故需求函数为

$$y_n = 18 - \frac{2}{5}x_n, n = 1,2,\cdots \qquad (1)$$

供应函数x = g(y)也是一条直线，且$P_2(25,6)$、$P_4(28,8)$位于此直线上，故供应函数为

$$x_{n+1} = 16 + \frac{3}{2}y_n, n = 1,2,\cdots \qquad (2)$$

于是我们得到如下递推关系

$$y_n = 18 - \frac{2}{5}x_n, x_{n+1} = 16 + \frac{3}{2}y_n, n = 1,2,\cdots$$

现在来计算x_n，y_n的极限. 首先将(1)代入(2)，得

$$x_{n+1} = 16 + \frac{3}{2}\left(18 - \frac{2}{5}x_n\right)$$

$$= 16 + 27 - \frac{3}{5}x_n$$

由此可知

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{3}{5}(x_k - x_{k-1}) \qquad = (-\frac{3}{5})^2(x_{k-1} - x_{k-2})$$

$$= (-\frac{3}{5})^{k-1}(x_2 - x_1) \ (k = 1,2,\cdots,n,\cdots)$$

对 k 从 1 至 n 求和

$$x_{n+1} - x_1 = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = (x_2 - x_1)\sum_{k=1}^{n}(-\frac{3}{5})^{k-1}$$

所以

$$x_{n+1} = x_1 + (x_2 - x_1)\sum_{k=1}^{n}(-\frac{3}{5})^{k-1} = 30 - 5\sum_{k=1}^{n}(-\frac{3}{5})^{k-1}$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 30 - 5\frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{215}{8} = 26.875(\text{万吨})$$

类似可得 $y_{n+1} = 18 - \frac{32}{5} - \frac{3}{5}y_n$

$$y_{k+1} - y_k = -\frac{3}{5}(y_k - y_{k-1})$$

$$= (y_2 - y_1)(-\frac{3}{5})^{k-1} \quad (k = 1,2,\cdots)$$

$$y_{n+1} - y_1 = \sum_{k=1}^{n}(y_{k+1} - y_k)$$

$$= (y_2 - y_1)\sum_{k=1}^{n}(-\frac{3}{5})^{k-1}$$

因此

$$y_{n+1}=y_1+(y_2-y_1)\sum_{k=1}^{n}(-\frac{3}{5})^{k-1} \quad =6+2\sum_{k=1}^{n}(-\frac{3}{5})^{k-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}=6+2\frac{1}{1+\frac{3}{5}}=\frac{58}{8}=7.25\left(\frac{元}{kg}\right)$$

通过上述分析可知，鸡肉的产量和价格都会趋于稳定. 鸡肉产量稳定在年产 26.875 万吨，鸡肉价格稳定在每公斤 7.25 元.

思考题 1. 请预报 1993，1995，1997 年的鸡肉产量与价格.（答：生产量依次为 28，27.28，27.021 万吨，肉价依次为 6.80, 7.09, 7.19 元/kg）.

思考题 2. 若需求函数为$y = a + bx$，供应函数为$x = c + dy$，问 a, b, c, d 满足什么条件时x_n和y_n才有极限存在？并证明此极限值恰为两条直线的交点.（答案：要求$|bd| < 1$）.

- 3、巧分蛋糕
- 妹妹小英过生日，妈妈给做了一块边界形状为任意连续曲线的蛋糕(见图17-1).哥哥小明见了也想吃，小英指着蛋糕上一点对哥哥说，你能过这点切一刀，使切下的两块蛋糕面积相等，便把其中的一块送给你.小明苦想了半天，终于用刚刚学过的高等数学知识初步解决了这个问题.你知道他用的是什么办法吗？（严格来说是凸边形）

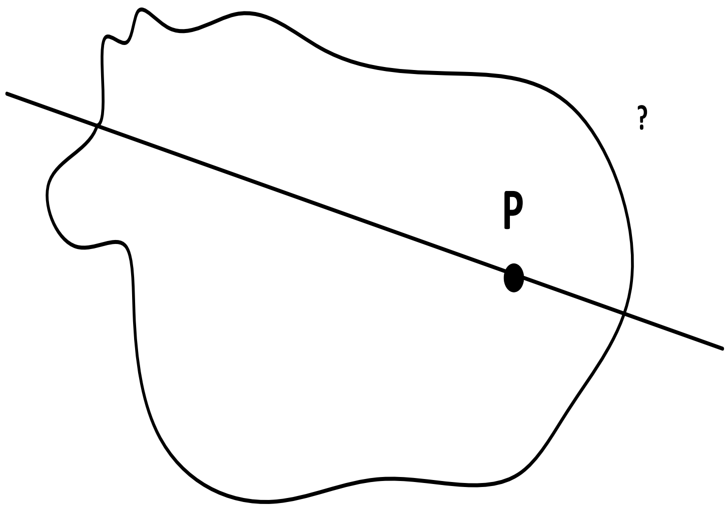


图17-1 能切成相等的两块吗

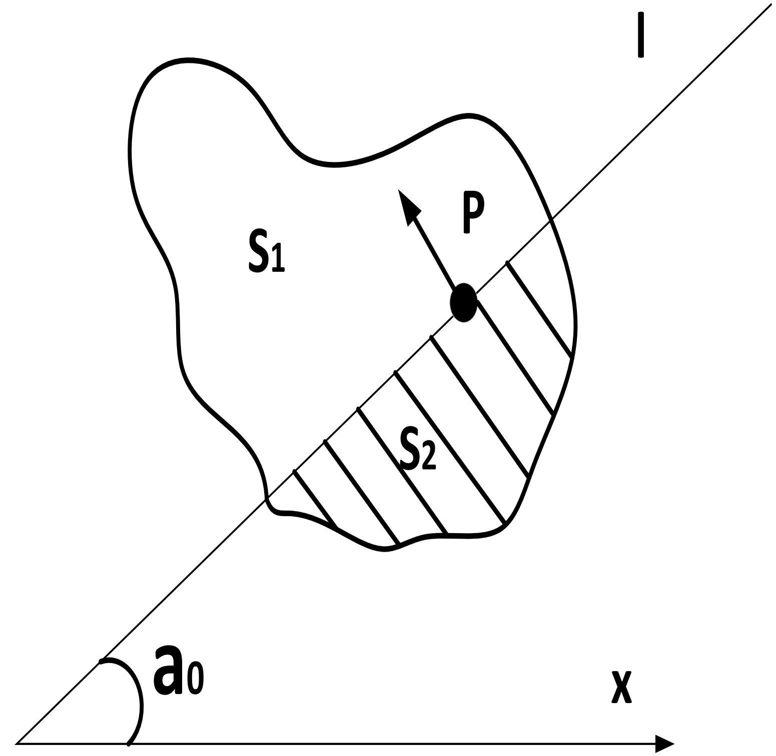


图17-2　a_0时$S_1>S_2$

分析：问题能归结为如下一道几何证明题.

已知平面上一条没有交叉点的封闭连续曲线（围成凸边形），P是曲线所围图形上任一点. 求证：一定存在一条过P的直线，将这图形的面积二等分.

证明：1. 过P点任作一直线 L，将曲线所围图形分为两部分，其面积分别记为S_1, S_2. 若$S_1 = S_2$（此种情况很难办到),则 L 即为所求;若$S_1 \neq S_2$,则不妨设$S_1 > S_2$（此时 L 与 x 轴正向的夹角记为α_0，见图 17-2），下面对此种情况证明之.

2. 以 P 点为旋转中心，将 L 按逆时针方向旋转，面积S_1、S_2就连续地依赖于角α变化，记为$S_1(\alpha)$、$S_2(\alpha)$，并设$f(\alpha) = S_1(\alpha) - S_2(\alpha)$. 如图 17-3 所示.

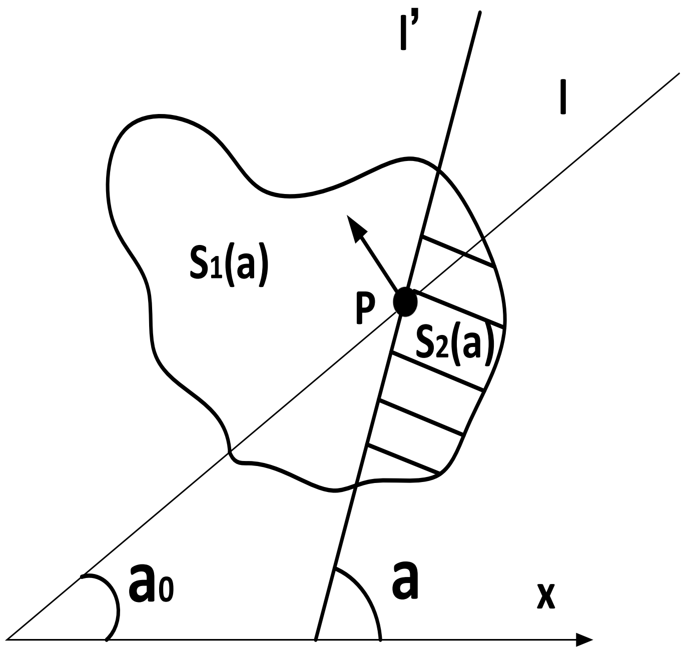


图17-3　旋转成a角

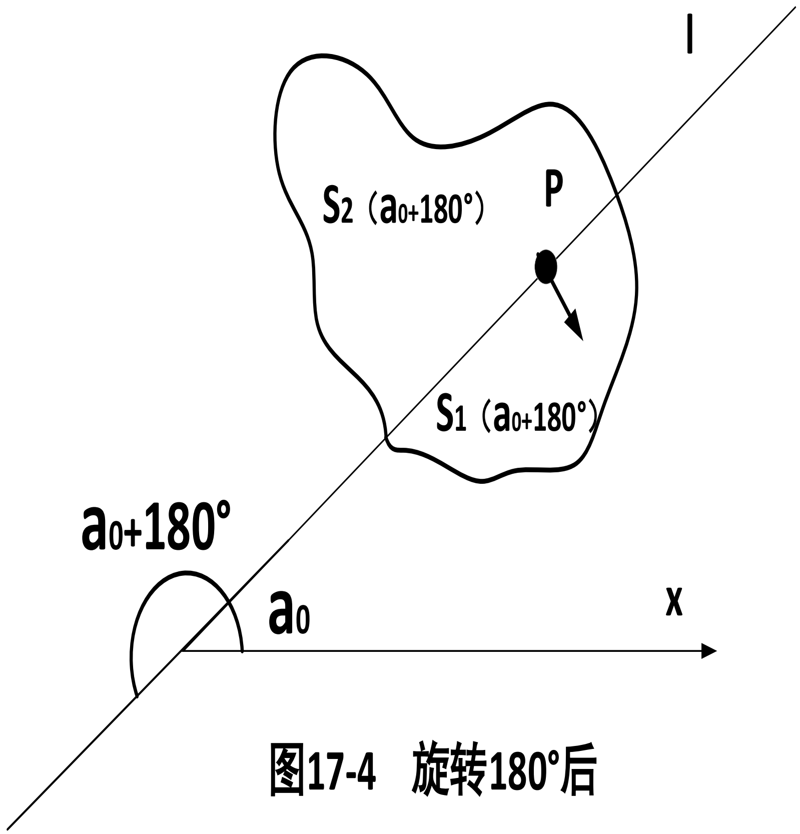


图17-4　旋转180°后

3. 函数$f(\alpha)$在$[\alpha_0, \alpha_0+\pi]$上连续，且在端点异号：

$f(\alpha_0)=S_1(\alpha_0)-S_2(\alpha_0)>0$ $\quad$ $f(\alpha_0+\pi)=S_1(\alpha_0+\pi)-S_2(\alpha_0+\pi)$

$=S_2(\alpha_0)-S_1(\alpha_0)<0$

(旋转 180 后的情况见图 17-4)根据闭区间上连续函数零点定理，必存在一点$\xi\in(\alpha_0, \alpha_0+\pi)$，使$f(\xi)=0$，即，使$S_1(\xi)-S_2(\xi)=0$，或$S_1(\xi)=S_2(\xi)$. 过$P$作直线，使之与 x 轴正向的夹角成$\xi$，该直线即为所求.

- 注：实际上小明只证明了这样的直线一定存在，究竟如何找到这条线大家去思考吧！
- 思考题 (作业！) 对于由连续曲线所围成的平面区域（凸边形）能否做到以下几点:
- 1 用平行于某定直线的直线二等分该区域;
- 2 用垂直于某定直线的直线二等分该区域;
- 3 用相互垂直的两条直线四等分该区域.

4、大衣柜能搬进新居吗

问题：老张临搬家前，站在自己大衣柜旁发愁. 担心这大衣柜搬不进新居，站在一旁的小李马上拿了一把尺子出去了. 不一会儿，小李对老张说：“从量得电梯前楼道和单元前楼道宽度，绝对没问题”请问小李的根据是什么?

解：设电梯前楼道宽 a m，单元前楼道宽 b m，二条楼道成直角相交，大衣柜长为L，搬运拐弯时与某一楼道夹角为 φ. 设：

$\mathrm{CD} = L$，$\mathrm{CO} = L_1 \mathrm{OD} = L_2$，$L = CO + OD = L_1 + L_2$

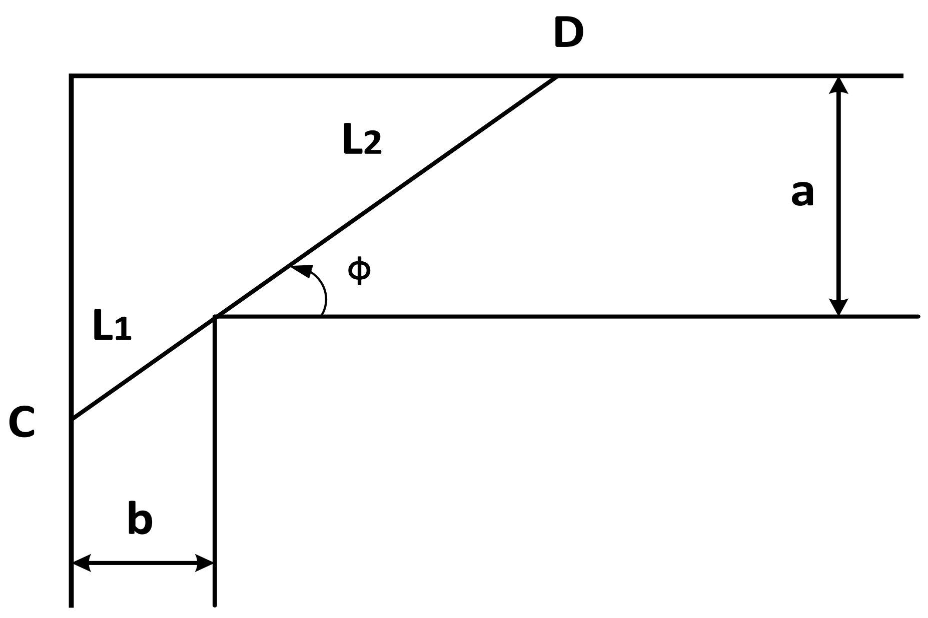


图59 搬运示意图

$$L_1=\frac{b}{\cos\varphi},L_2=\frac{a}{\sin\varphi}$$ $$L=L_1+L_2=\frac{b}{\cos\varphi}+\frac{a}{\sin\varphi}$$，即L是φ的函数

求L的一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}L(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{b\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=\frac{\mathrm{b}\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

求驻点$\frac{\mathrm{d}L(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}=0,\mathrm{b}\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi=0$

$$\mathrm{b}\sin^3\varphi=a\cos^3\varphi,tg^3\varphi=\frac{a}{b},tg\varphi=(\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}$$

得 $\varphi=\arctan(\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}$

代入$L(\varphi)=\frac{b}{\cos\varphi}+\frac{a}{\sin\varphi}$中

求得$L|_{\varphi=\arctan(\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, 它一定是$L$的最小值.

今大衣柜的长度不大于$(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, 所以小李告诉老张绝对没问题.

从这数学式子中，a与b的关系是对称的，a大于b或a小于b是无关紧要的.

5、你会计算绕斜轴旋转而成的立体的体积吗

在高等数学中，平面图形绕x轴或y轴旋转所成立体的体积如何计算早已解决, 但对平面图形绕任一直线$y = kx + b(k \neq 0)$旋转所成立体的体积如何计算却没有讨论, 这是一个较复杂的问题. 对于该问题，按通常的想法应当是：先平移、旋转坐标轴，求出曲线在新坐标系下的方程，再绕新轴旋转去求体积。但这样做一般是十分困难的. 能否就用课本上介绍的元素法去推导出一个普遍适用的公式呢?答案是肯定的，下面的定理较好地解决了这一难题.

定理： 设函数$y=f(x)$在$[x_1,x_2]$上有连续导数，那么由曲线$y=f(x)$及直线$y=kx+b(k\neq 0)$、$y=-\frac{1}{k}x+b_1$、$y=-\frac{1}{k}x+b_2(b_1<b_2)$所围曲边梯形$D$（见图 68-1）绕直线$y=kx+b$旋转所成立体的体积为

$$V=\frac{\pi}{(1+k^2)^{3/2}}\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-kx-b]^2\cdot|1+kf'(x)|dx \quad (1)$$

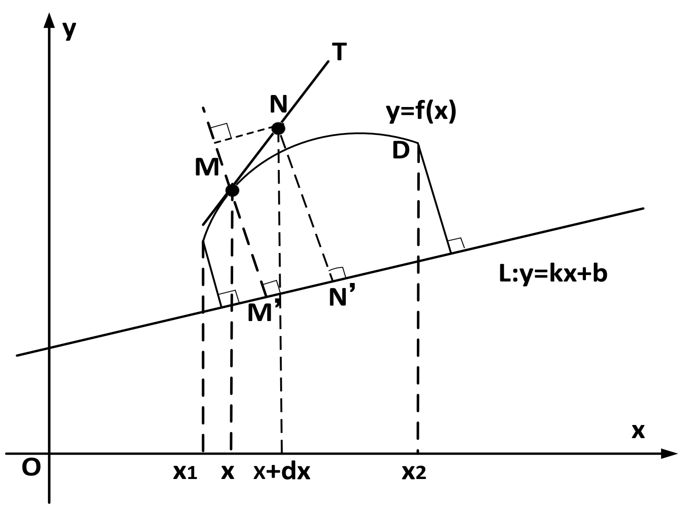


图68-1 曲边梯形D绕直线L旋转示意图

证：如图 68−1 所示，设$M(x,y)$为曲线$y=f(x)$上任一点，曲线在M点处的切线为

$$MT: Y = f(x) + f'(x)(X - x)$$

过M点作直线$L: y = kx + b$的垂线为

$$MM': \bar{Y} = -\frac{1}{k}(\bar{X} - x) + f(x)$$

即

$$\bar{X} + k\bar{Y} - [x + kf(x)] = 0$$

应用定积分的元素法，考虑子区间$[x, x+dx]$. 设相应于$[x, x+dx]$的曲线弧段在直线L上的投影长为dl，则当子区间的长充分小时，取切线MT上对应于右端点$x+dx$的点$N(x+dx, f(x)+f'(x)dx)$到垂线MM'的距离为dl，则

$$dl = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} |(x+dx) + k[f(x) + f'(x)dx] - [x + kf(x)]|$$

$$= \frac{|1+kf'(x)|}{\sqrt{1+k^2}} dx \left(\text{在此不妨假设} dx > 0\right)$$

而M点到直线L的距离为

$$d = \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1+k^2}}$$

从而得

$$dV = \pi d^2 \cdot dl = \pi \frac{[f(x) - kx - b]^2}{1 + k^2} \cdot \frac{|1 + kf'(x)|}{\sqrt{1 + k^2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{(1 + k^2)^{3/2}} [f(x) - kx - b]^2 |1 + kf'(x)| dx$$

所以曲边梯形D绕直线L：$y = kx + b(k \neq 0)$旋转所成立体的体积为

$$V = \frac{\pi}{(1 + k^2)^{3/2}} \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - kx - b]^2 \cdot |1 + kf'(x)| dx$$

证毕.

注：公式(1)适用于曲边梯形D的边界与直线L的任一垂线只有一个交点的情况. 若D的边界与L的垂线有多于一个的交点时，可通过对区域D的边界分段计算之.

下面看两个实例.

例 1 求直线$y=2x$与$y=x$、$x+y=3$和$x+y=6$所围直角梯形绕直线$y=x$旋转所成立体的体积.

解： 如图 68-2 所示，这里$f(x)=2x,k=1,b=0,y=2x$与$x+y=3,x+y=6$交点的横坐标分别为1和2，即$x_1=1,x_2=2$. 由公式(1)立得

$$V=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_1^2(2x-x^2)^2(1+2)dx=\frac{7\pi}{2\sqrt{2}}$$

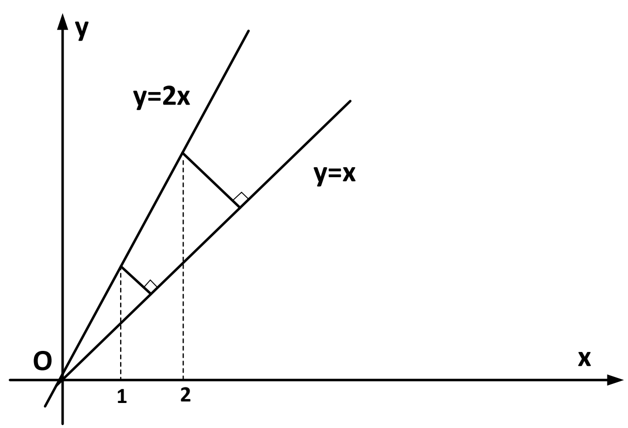


图68-2 直角梯形绕y=x旋转示意图

比用圆台的体积公式$V=\frac{1}{3}\pi h(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)$去计算容易了许多.

例 2 求由曲线$y=-x^2-3x+6$和直线$x+y-3=0$所围图形绕直线$x+y-3=0$旋转所成立体的体积.

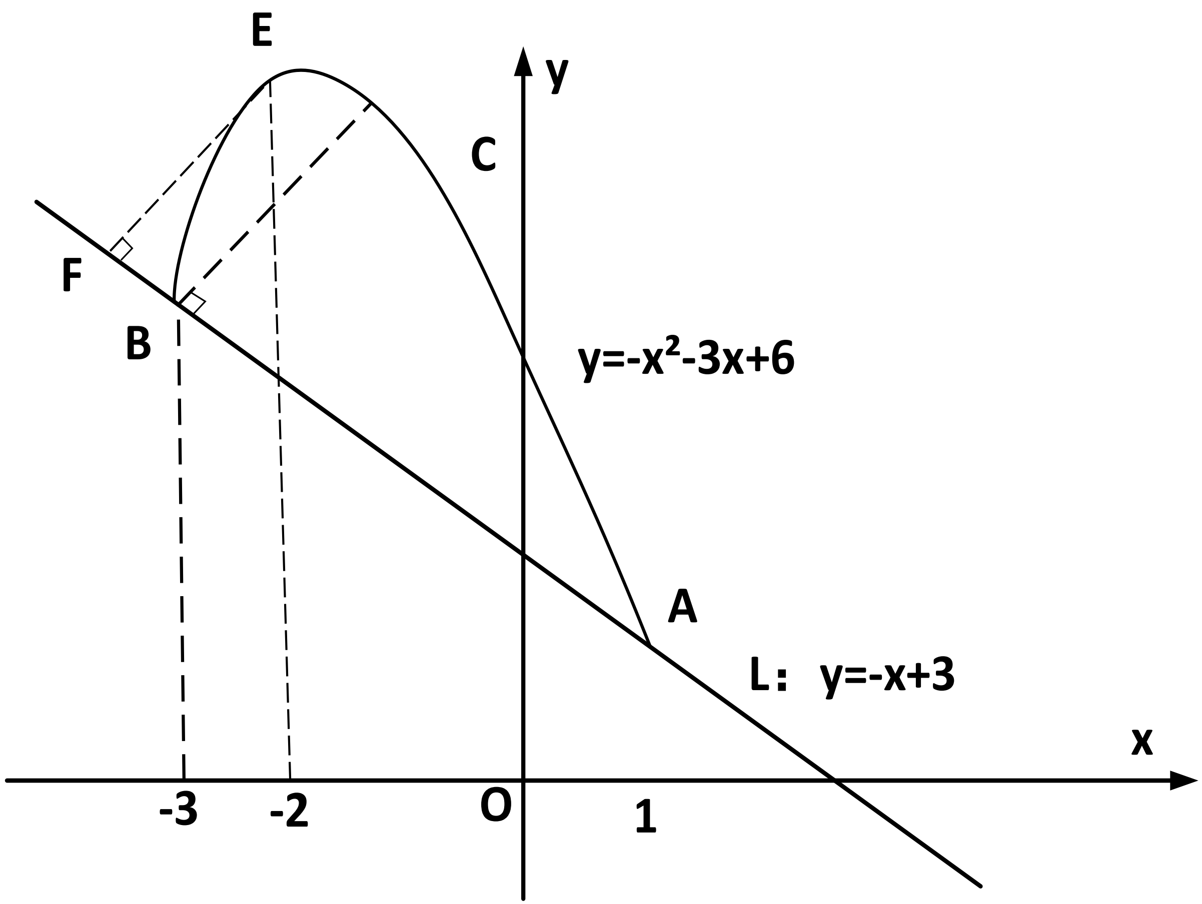


图68-3 y=-x²-3x+6与y=-x+3所围区域

解： 如图 68-3 所示，曲线上切线垂直于直线L的点为$E(-2,8)$，由于曲线CEB与L的垂线有多于一个的交点，故需分段计算dV，换言之，所求旋转体的体积V等于$ACEFA$所围图形绕L旋转所成立体的体积减去$EFBE$所围图形绕L旋转所成立体的体积. 即

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{1}|x+2|(x^2+2x-3)^2dx$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{-3}^{-2}|x+2|(x^2+2x-3)^2dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}[\int_{-2}^{1}(x+2)(x^2+2x-3)^2dx$$

$$+\int_{-3}^{-2}(x+2)(x^2+2x-3)^2dx]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{-3}^{1}(x+2)(x^2+2x-3)^2dx$$

$$= \frac{256\sqrt{2}}{15}\pi$$

思考题：曲线$y=x^m(m>0,m\neq 1)$与直线$y=x$所围图形绕$y=x$旋转所成立体的体积是多少？当$m\to\infty$时体积的极限在几何上表示什么？

（答案：$V=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(\frac{2}{3}+\frac{m-2}{m+2}-\frac{2m-1}{2m+1})$；当$m\to\infty$时体积极限为$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$，在几何上它表示直线$y=x$，$x=1$与$x$轴所围成直角三角形绕斜边旋转所成立体的体积）.

6、如何用比较简便的方法计算椭圆周长

我们熟知半径为r的圆的周长为$2\pi r$，现在设有椭圆$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 < b \le a$

(1)如何计算椭圆的周长s?

(2)若以$e = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$表示椭圆的离心率，试证明对椭圆周长有如下近似公式

$$s \approx 2\pi a\left(1 - \frac{e^2}{4}\right)$$

解：(1)我们利用对弧长的曲线积分计算椭圆的周长. 椭圆在第一象限的参数方程为

$$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

于是，$x'_\theta = -a\sin\theta$，$y'_\theta = b\cos\theta$，椭圆的弧长元素为

$$ds = \sqrt{x'^2_\theta + y'^2_\theta}d\theta = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta}\,d\theta = a\sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

椭圆在第一象限部分的长度为

$$s_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}\, d\theta$$

由对称性，椭圆周长　为第一象限部分的长度的 4 倍，即

$$s = 4s_1 = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}\, d\theta$$

这就是计算椭圆周长的公式.

（2）由于上式中被积函数$\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}$的原函数不是初等函数，上式不能直接积分得结果. 我们称$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta$为完全椭圆积分.

下面我们用函数的幂级数展开式推导椭圆周长的近似公式，因为有熟知的幂级数展开式

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots,-1<x<1$$

又因为$0\le \mathrm{e}<1$，从而$0\le \mathrm{e}\cos\theta<1(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$，由上式得

$$\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\approx 1-\frac{1}{2}e^2\cos^2\theta$$

所以有椭圆周长近似公式

$$s \approx 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= 4a\cdot\left(1-\frac{e^2}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\pi a\left(1-\frac{e^2}{4}\right)$$

这就是所要证明的近似计算公式.

特别地，对于椭圆的特殊情形圆， $a = b, e = 0$,

由上面公式得$2\pi a\left(1-\frac{e^2}{4}\right) = 2\pi a$, 准确等于圆周长.

思考题：在这个问题中，试用上述方法得出椭圆周长的幂级数展开式，并由此得出更精确的近似计算公式

(答案：$s=2\pi a\left\{1-\frac{e^2}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right]^2\frac{e^{2n}}{2n-1}\right\}$

$\approx 2\pi a\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4\right)$)

7、如何控制体重

问题：《北京晚报》1990.10.9 第 6 版：“刘寿斌面向未来”一文中说到，“由于赛前减体重过多，体力不济使他在他自己拿手的抓举比赛中两次失败…屈居第二。”那么正确的减重应该怎样呢?

此外，许多饲养场也要在限定的时间内使牲畜增肥到一定重量出售，取得最大利润。他们应该怎么办?

解：用热量平衡方程来解此问题：

设每天的饮食可产生热量A，用于新陈代谢消耗热量B，活动消耗热量C ×体重，并且理想假定增重、减重的热量主要由脂肪提供，每公斤脂肪转化的热量为D，记$W(t)$为体重，于是有下述平衡方程.

$$[W(t+\Delta t)-W(t)]D=[(A-B)-CW(t)]\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\Delta t}=\frac{A-B}{D}-\frac{C}{D}W(t)$$

得微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dW(t)}{dt} = a - bW(t) \\ W(0) = W_0 \end{cases}$

其中常数$a = \frac{A-B}{D}$与食量、新陈代谢有关，$b = \frac{C}{D}$与活动量有关. W_0为初始体重. 解得

$$W(t) = \frac{a}{b} + (W_0 - \frac{a}{b})e^{-bt}$$

分析:1. 理论上增重,减肥都是可能的,因为当$t \to \infty$时，$W(t) \to \frac{a}{b}$. 调节a与b可得到你所愿望的那个值. 近代科技发展，新陈代谢也是可调节的. 但如何调节a，b要靠医生、营养师、生物学家等一齐来做.

2. 只吃维持生命所需的那部分新陈代谢的热量是不行的，因为$A=B$使得$a=0$，$\lim_{t\to\infty} W(t)=0$. 要导致死亡.

3. 只吃不活动也不行，因为这时$b=0$. $W(t)=W_0+at$, 因为$\lim_{t\to\infty} W(t)=\infty$，说明要得肥胖症，很危险，也要导致死亡(当然体重不会无限变大).

4. 刘寿斌减重的数学问题是明确的：已知W_0，要达到的值为W_1，其期限为t，求a，b的最佳组合，使$W_1=\frac{a}{b}+(W_0-\frac{a}{b})e^{-bt}$成立. 但解决这个问题还要靠教练，医生与运动员.

8、如何购物最满意

日常生活中，人们常常碰到如何分配定量的钱来购买两种物品的问题. 由于钱数固定，则如果购买其中一种物品较多，那么势必要少买(甚至不再能买另一种物品，这样就不可能很令人满意. 如何花费给定量的钱，才能达到最满意的效果呢?经济学家试图借助“效用函数”来解决这一问题. 所谓效用函数，就是描述人们同时购买两种产品各x单位、y单位时满意程度的量。常见的形式有

$$U(x,y)=x+y \quad , \quad U(x,y)=lnx+lny$$

而当效用函数达到最大值时，人们购物分配的方案最佳.

例：小孙有 200 元钱，他决定用来购买二种急需物品：计算机磁盘和录音磁带. 且设他购买x张磁盘，y盒录音磁带的效用函数为 $U(x,y)=lnx+lny$

设每张磁盘 8 元，每盒磁带 10 元，问他如何分配他的 200 元钱，才能达到最满意的效果?

解: 这是一个条件极值问题, 即求$U(x,y)=lnx+lny$在约束$8x+10y=200$之下的极值点，应用拉格朗日乘数法，定义拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=lnx+lny+\lambda(8x+10y-200)$$

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = \dfrac{1}{x} + 8\lambda = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) = \dfrac{1}{y} + 10\lambda = 0 \\ L_z(x,y,\lambda) = 8x + 10y - 200 = 0 \end{cases}$$

解得 $x_0 = 12.5 \ \ y_0 = 10$

(x_0, y_0)为最大值点.

根据$(x.y)$的实际含义，取$x_0' = 12, y_0' = 10$，即如果买12 张磁盘和 10 盒磁带的话，小孙最满意.

思考题：在上例中，若小孙购买这两种物品的效用函数为

$$U(x,y) = 3lnx + lny$$

问他的 200 元钱又该如何分配？（18 张磁盘，5 盒磁带）

9、如何计划家庭教育基金

从 1994 年开始，中国逐步实行了大学收费制度. 为了保障子女将来的教育经费，小张夫妇从他们的儿子出生时开始，每年向银行存入x元作为家庭教育基金. 若银行的年复利率为r，试写出第n年后教育基金总额的表达式. 预计当子女 18 岁进入大学时所需费用为30000元，按年利率10%计算，小张每年应向银行存入多少元?

解：设n年后教育基金总额为a_n ，每年向银行存入x元，依据复利计算公式有如下递推关系：

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1}(1+r) + x, k = 1,2,\cdots & (1) \\ a_0 = x & (2) \end{cases}$$

由　递推可得

$$a_k - a_{k-1} = (a_{k-1} - a_{k-2})(1+r)$$

$$= (a_{k-2} - a_{k-3})(1+r)^2$$

$$= \cdots = (a_1 - a_0)(1+r)^{k-1}$$

由初始条件(2)可得$a_1 = x(1+r) + x, a_1 - a_0 = x(1+r)$

所以

$$a_k - a_{k-1} = x(1+r)^k, k = 1,2,\cdots \qquad (3)$$

将(3)对$k=1,2,\ldots,n$求和

$$a_n - a_0 = x\sum_{k=1}^{n}(1+r)^k$$

所以，n年后的教育基金总额为

$$a_n = a_0 + x\sum_{k=1}^{n}(1+r)^k$$

$$= x\sum_{k=0}^{n}(1+r)^k = x\frac{(1+r)^{n+1}-1}{r} \qquad (4)$$

欲使a_{18}=30000，将n=18，r=0.1 代入(4)

$$x=\frac{a_n r}{(1+r)^{n+1}-1}=\frac{30000\times 0.1}{1.1^{19}-1}=586.40(\text{元})$$

因此，小张每年应向银行存入 586.40 元.

思考题：按照本题的解法还可以解决分期付款的问题. 设小张向银行贷款A_0元用于买房，贷款年利率为r，从第二年起，小张每年向银行还x元. n年后小张尚欠银行贷款额记为A_n，试推导A_n的表达式.

（解：$A_0=A_0, A_1=A_0(1+r)-x, \cdots, A_n=A_{n-1}(1+r)-x.$

解此递推式得：$A_n=A_0(1+r)^n-x\frac{(1+r)^n-1}{r}$）

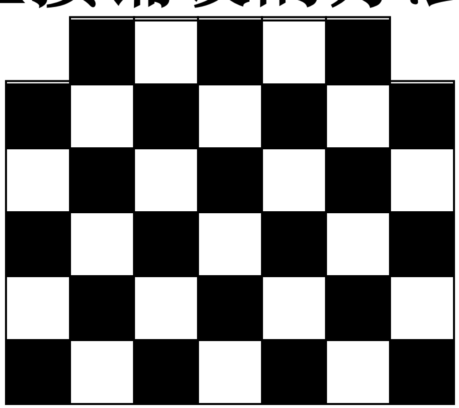
➢ 10 铺瓷砖问题

拟用40块方形瓷砖铺设如下图(a)所示的地面，但商店只有长方形瓷砖，其大小为方形的两块。问购买20块长方形瓷砖后，是否可能不裁开而直接铺好地面？

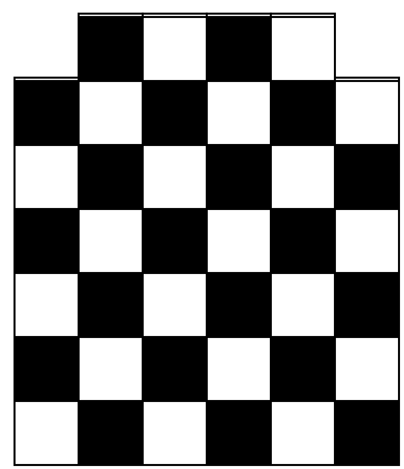
解 将图中的正方形黑白相间染色。

显然，如长方形瓷砖不裁开，只能用来覆盖相邻的两格，故覆盖的两格必为一白一黑。

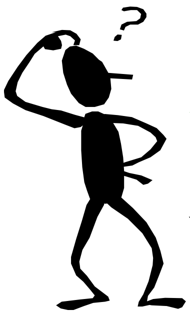
下图(a)中共有21个黑格和19个白格，故不可能直接铺好，下图(b)中黑白格各为20个，大家很容易找到直接铺设的方法。

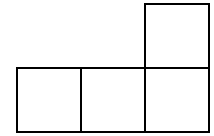


图(a)



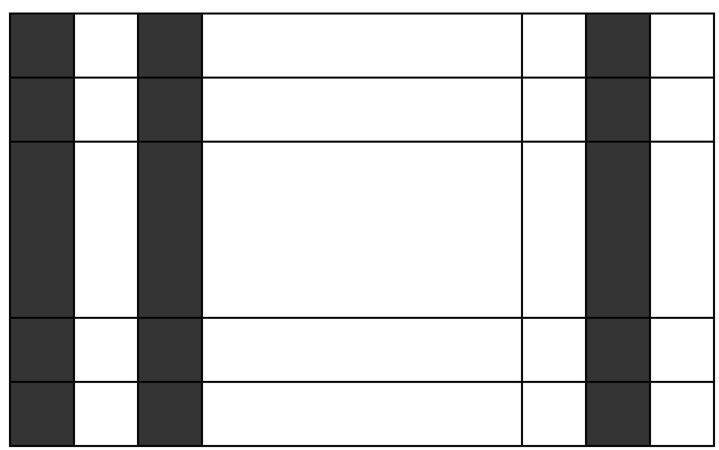
图(b)



例　设一块m×n的棋盘被若干个形如的板块恰好盖满，试证明m×n必能被8整除。

证明（即证盖住棋盘的板块必有偶数个）

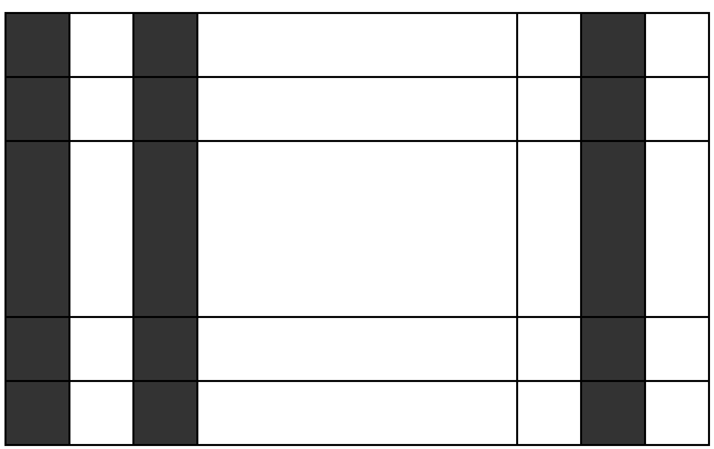
显然有4|m×n，故m、n中至少有一个为偶数，不妨设n为偶数，将棋盘按列黑白相间染色，如下图 (a) 所示，由于n为偶数，黑、白列的数目相同，故黑白格数相同，设各为2k个（因为总格数能被4整除）。



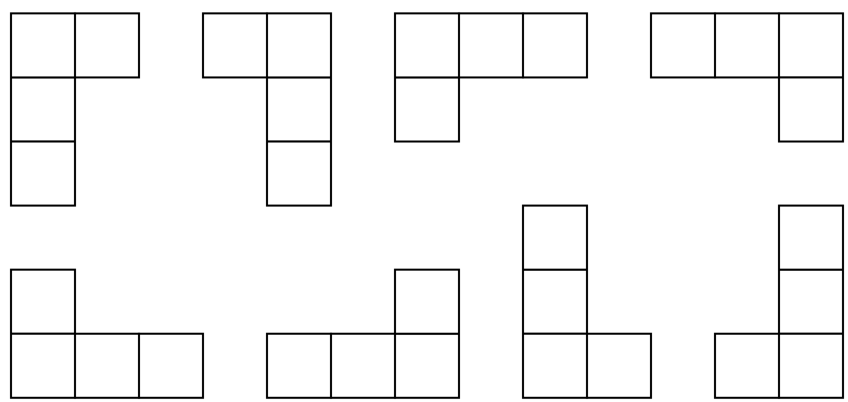
图(a)

板块可以有许多种拼凑法，但容易看出，每一板块放置的方向（称之为定向）只有八种可能的选择，如下图(b)所示。

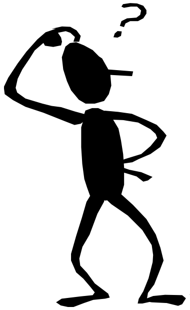
容易看出，不论按什么方向放置板块，每一板块均盖住奇数个黑格（1格或3格），故盖住棋盘的板块必有偶数个，从而，m×n的棋盘必能被8整除。



图(a)

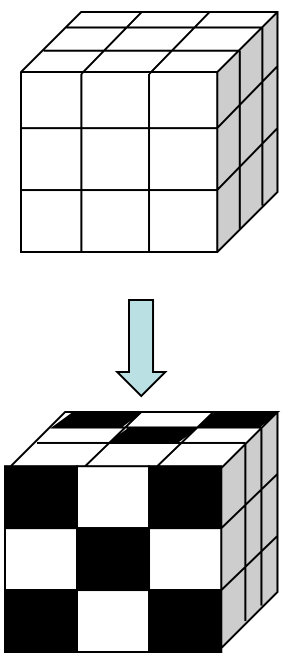


图(b)



例　拟将一批尺寸为1×2×4的的商品装入尺寸为6×6×6的正方体包装箱中，问是否存在一种装法，使装入的该商品正好充满包装箱。

解　将正方体剖分成27个2×2×2的小正方体，并按下图所示黑白相间地染色。



再将每一2×2×2的小正方体剖分成1×1×1的小正方体。

易见，27个2×2×2的正方体中，有14个是黑的，13个是白的（或13黑14白），故经两次剖分，共计有112个1×1×1的黑色小正方体和104个1×1×1的白色小正方体。

虽然包装箱的体积恰好是商品体积的27倍，但容易看到，不论将商品放置在何处，它都将占据4个黑色和4个白色的1×1×1小正方体的位置，故商品不可能充满包装箱。

11 人、狼、羊、菜过河问题

一摆渡人F希望用一条小船把一只狼 W,一头羊G和一蓝白菜C从一条河的左岸渡到右岸去,而小船只能容纳F,W,G,C中的两个, 而当人不在场时，狼要咬羊、羊要吃菜，问应怎样渡河。

多步决策问题

在本问题中，状态可以用如下向量方法表示：一物在左岸时相应分量为1，而在右岸时则取 为0，例如（1,0,1,0）表示人和羊在左岸，而狼和菜则在右岸。

（i）可取状态s_k：根据题意，并非所有状态都是允许的，例如（0,1,1,0）就是一个不可取的状态。本题中可取状态（即系统允许的状态）可以用穷举法列出来，它们是：

人在左岸	人在右岸
(1，1，1，1)	(0，0，0，0)
(1，1，1，0)	(0，0，0，1)
(1，1，0，1)	(0，0，1，0)
(1，0，1，1)	(0，1，0，0)
(1，0，1，0)	(0，1，0，1)

（ii）可取决策d_k：摆一次渡,让谁过河就是一个决策。决策也可用一个四维向量（决策向量）来表示，它反映摆渡情况。例如（1，1，0，0）表示人带狼摆渡过河。根据题意，允许使用的决策向量只能有（1，0，0，0，）、（1，1，0，0）、（1，0，1，0）、（1，0，0，1）四个。

状态转移规律: $s_{k+1}= s_k+d_k$
采用二进制运算，即规定

0+0=0，1+0=0+1=1，1+1=0。

在具体转移时，只考虑由可取状态到可取状态的转移。
问题化为:
由初始状态（1，1，1，1）出发，经奇数次上述运算转化为（0，0，0，0）的转移过程。

我们可以如下进行分析 ：（第一次渡河）

$$(1,1,1,1)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}=\begin{cases}(0,0,1,1) & \times & \text{（不可取）}\\(0,1,0,1) & & \text{（可取）}\\(0,1,1,0) & \times & \text{（不可取）}\\(0,1,1,1) & \times & \text{（不可取）}\end{cases}$$

（第二次渡河）

$$(0,1,0,1)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1,0,0,1) & \times & \text{(不可取)}\\(1,1,1,1) & \times & \text{(循环,回到原先出现过的状态)}\\(1,1,0,0) & \times & \text{(不可取)}\\(1,1,0,1) & & \text{(可取)}\end{cases}$$

以下可继续进行下去，直至转移目的实现。上述分析实际上采用的是穷举法，对于规模较大的问题是不宜采用的。

（第三次渡河）

$$(1,1,0,1)+\left\{\begin{array}{l}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{ll}(0,0,0,1) & \quad\checkmark\\(0,1,1,1) & \quad\times\\(0,1,0,0) & \quad\checkmark\\(0,1,0,1) & \quad\checkmark\end{array}\right.$$

（第四次渡河）

两个方案

$$(0,0,0,1)+\left\{\begin{array}{l}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{ll}(1,1,0,1) & \quad\checkmark\\(1,0,1,1) & \quad\checkmark\\(1,0,0,0) & \quad\times\\(1,0,0,1) & \quad\times\end{array}\right.$$

$$(0,1,0,0)+\left\{\begin{array}{l}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{ll}(1,0,0,0) & \quad\times\\(1,1,1,0) & \quad\checkmark\\(1,1,0,1) & \quad\checkmark\\(1,1,0,0) & \quad\times\end{array}\right.$$

如此继续下去

（第七次渡河）

$$(1,0,1,0)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}=\begin{cases}(0,1,1,0) & \times\\(0,0,0,0) & \vee\\(0,0,1,1) & \times\\(0,0,1,0) & \vee\end{cases}$$

转移目的实现

上述分析实际上采用的是穷举法，对于规模较大的问题是不宜采用的。