动力学部分

1. 研究对象

质点 ⟶ 一般质点系 ⟶ 刚体 ⟶ 刚体系统

2. 研究内容

动力学是研究物体的机械运动与作用力之间的关系。

三类问题： 已知运动求力

已知力求运动

既有未知的运动量，又有未知力.

3. 研究方法

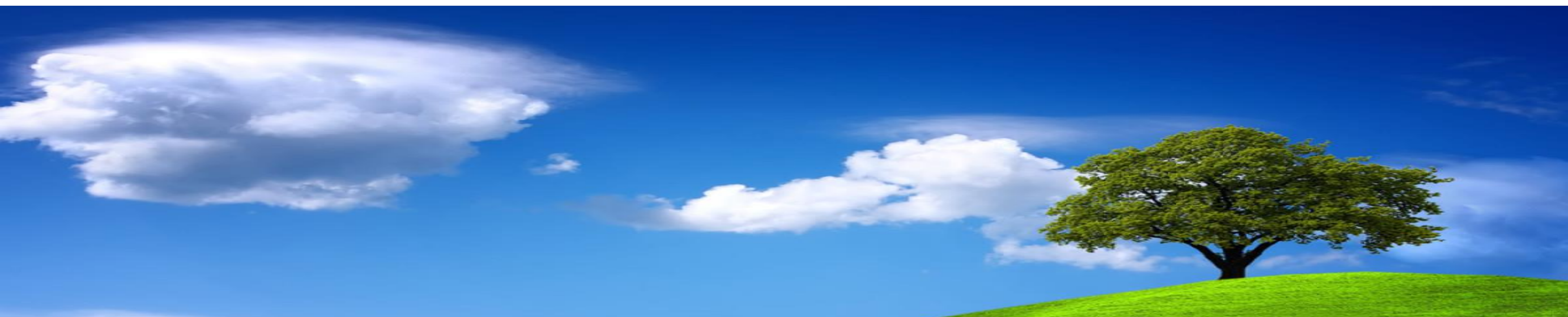
- 质点运动微分方程------质点
- 动力学普遍定理（三大动力学定理） ------质点系
- 达朗贝尔原理 ------质点系
- 分析力学方法—虚位移原理、拉格朗日方程

第九章 质点运动微分方程

§9–1 质点运动微分方程

§9–2 质点动力学的两类问题

§9–3 质点在非惯性系中的运动



§9–1 质点运动微分方程

1. 动力学基本定律—— 牛顿三定律

第一定律 不受力（平衡力系）作用的质点将永远保持静止或作匀速直线运动。又称惯性定律。力是改变质点运动状态的原因。（定性）

第二定律 质点的质量与加速度的乘积等于作用于质点的力的大小，加速度与力的方向相同。　（定量）

质点动力学基本方程

$$ma = F$$

- 力使物体产生沿其方向的加速度
- F—作用在质点上的合力(共点力系的合力)
- a—质点相对惯性系的加速度(绝对加速度)
- 瞬时运动量的关系
- 适用范围（低速、宏观、惯性系）

2. 质点运动微分方程

$$m\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \quad \Longrightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

直角坐标形式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}$$

自然坐标形式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} F_{\tau i}$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} F_{ni}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} F_{bi}$$

质点动力学方程的复合运动形式 $m(\boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$

§9–2 质点动力学的两类问题

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$$

已知质点的运动，求作用于质点的力。

求解这类问题时，只需根据已知的运动规律，通过微分运算或复合运动求出加速度；从而按质点运动微分方程或动力学方程求出未知力。

已知作用于质点的力，求质点的运动。

求解这类问题时，首先要列出质点运动微分方程式，然后进行积分，同时利用运动的初始条件确定积分常数，求出质点的运动规律。

具体求解步骤：明确研究对象

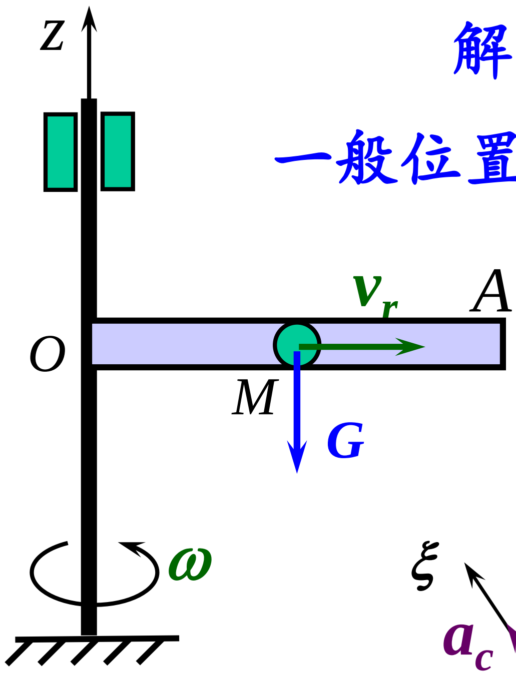
分析受力——全部外力

分析运动——一般位置（运动描述的方法）

建立方程并求解（解析法和数值法）

已知质点的运动，求作用于质点的力。

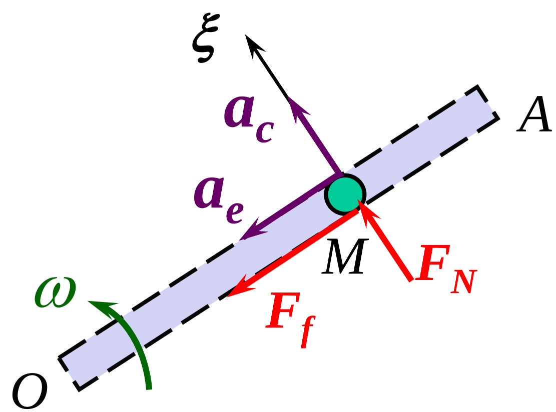
例 小球M的重量为G，设以匀速v_r沿直管OA运动，同时直管OA以匀角速度ω绕铅直轴z转动。求小球对管壁的水平压力。



解：研究小球，受力分析。

一般位置运动分析。以小球为动点，OA杆为动系。

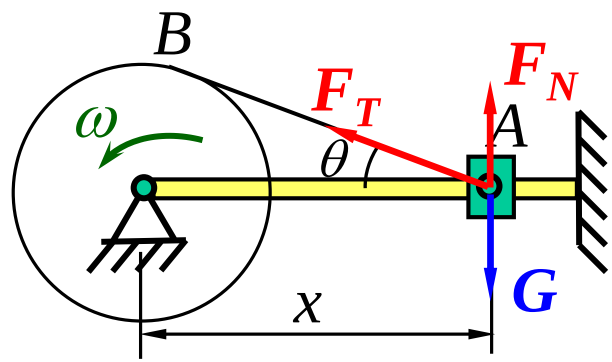
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c \qquad \begin{cases} a_e = \omega^2 \cdot OM \\ a_r = 0 \\ a_c = 2\omega \cdot v_r \end{cases}$$



$$ma_\xi = F_N$$

$$F_N = ma_c = \frac{2G}{g}\omega \cdot v_r$$

例 滑块A重为G，因绳子的牵引沿水平导轨滑动，绳子的另一端缠在半径为r的鼓轮上，鼓轮以匀角速度ω转动。若不计导轨摩擦，试求绳子的拉力和距离x的关系。

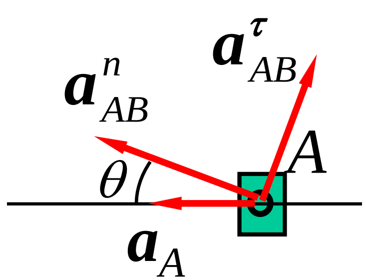


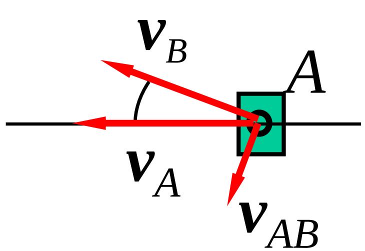
解：研究滑块，受力分析。

以B为基点，A为动点。

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_{AB}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{AB}^{n}$$

$$a_A \cos\theta = a_{AB}^{n} = AB\omega_{AB}^{2}$$





$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{AB} \qquad \omega_{AB} = \frac{r\omega\tan\theta}{AB}$$

$$a_A = \frac{r^2\omega^2\tan^2\theta}{AB\cos\theta} = \frac{r^4\omega^2 x}{(x^2 - r^2)^2}$$

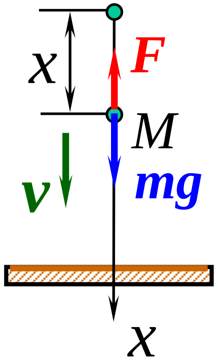
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x} \qquad \tan\theta = \frac{r}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

$$\frac{G}{g}a_A = F_T\cos\theta$$

已知作用于质点的力，求质点的运动

例 质量是m的物体M在均匀重力场中沿铅直线由静止下落，受到空气阻力的作用。假定阻力F与速度平方成比例，即$F=\alpha v^2$，阻力系数α的单位为kg/m，数值由试验测定。试求物体的运动规律。

解：研究物体，受力分析。



运动分析，取坐标轴x铅直向下，原点在物体的初始位置。

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-\alpha v^2$$

令 $\sqrt{\dfrac{mg}{\alpha}}=u$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{g}{u^2}(u^2-v^2)$

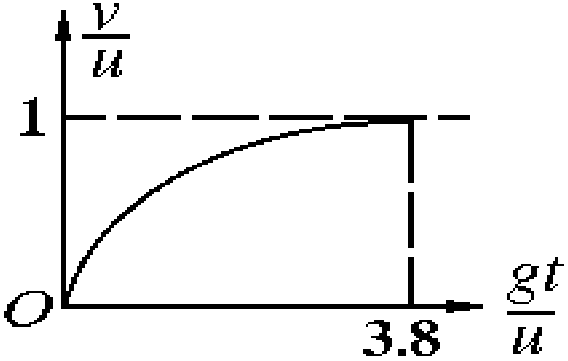
$$\int_0^v \frac{u\mathrm{d}v}{u^2-v^2}=\int_0^t \frac{g}{u}\,\mathrm{d}t$$

$$v = u\frac{e^{(2g/u)t}-1}{e^{(2g/u)t}+1} = u\frac{e^{(g/u)t}-e^{-(g/u)t}}{e^{(g/u)t}+e^{-(g/u)t}}$$

物体速度随时间变化的规律为

$$v = u\tanh(\frac{g}{u}t)$$

tanh 是双曲正切。



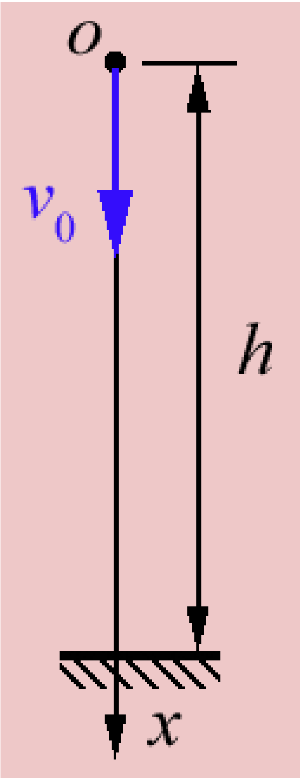
$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{u^2}{g}\frac{\mathrm{d}[e^{(g/u)t}+e^{-(g/u)t}]}{e^{(g/u)t}+e^{-(g/u)t}}$$

物体的运动方程为

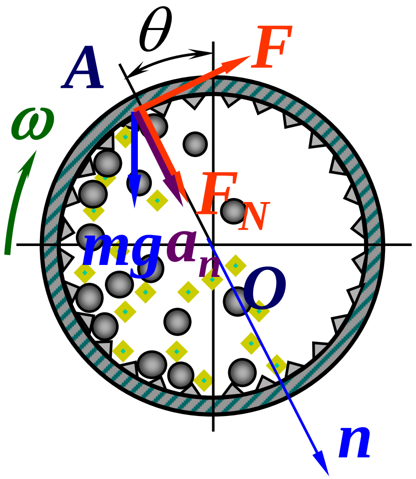
$$x = \frac{u^2}{g}\ln\frac{e^{(gt/u)}+e^{-(gt/u)}}{2} = \frac{u^2}{g}\ln(\cosh\frac{gt}{u})$$

cosh 是双曲余弦。

神州6号载人飞船回收过程中的动力学问题。假设回收舱重为P，回收舱在距离地面h处打开阻力伞，此时速度为v_0，回收舱受到的空气阻力与速度成正比：$F=cv$，c为常数。回收舱到达地面时的速度和加速度。



例 球磨机是一种粉碎机械，滚筒绕通过中心的水平轴O以匀角速转动，内装钢球和物料，钢球被筒壁带到一定高度A(即$\theta=\theta_0$) 时脱离筒壁，然后沿抛物线轨迹落下，从而击碎物料。已知滚筒内壁半径为R，求滚筒的转速n。



解：钢球为质点，在一般位置受力分析。

运动分析 $a_n = R\omega^2$

质点动力学方程 $mR\omega^2 = F_N + mg\cos\theta$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \qquad n = \frac{30}{\pi R}\left[\frac{R}{m}(F_N + mg\cos\theta)\right]^{\frac{1}{2}}$$

当$\theta=\theta_0$时钢球将落下，这时$F_N=0$

$$n = 9.549\sqrt{\frac{g}{R}\cos\theta_0}$$

讨论

θ_0越小，n越大。当θ_0=0时，铁球会紧贴筒壁转过最高点而不脱离筒壁落下，不能粉碎矿石。

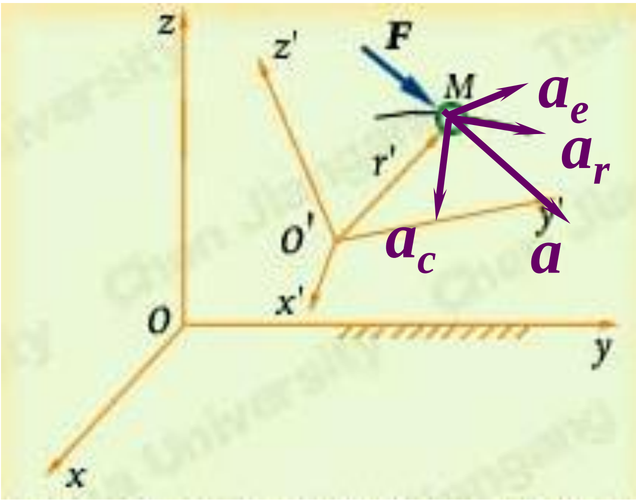
§9–3 质点在非惯性系中的运动

非惯性系中质点运动微分方程

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c$$

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_e - m\boldsymbol{a}_c$$

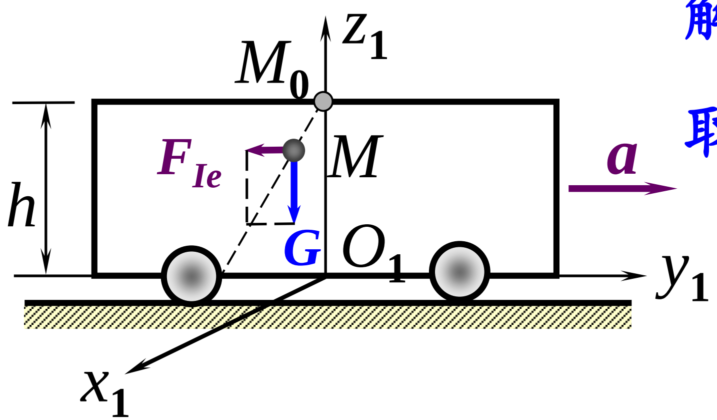


牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ie} = -m\boldsymbol{a}_e$

科氏惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ic} = -m\boldsymbol{a}_c$

质点相对运动微分方程 $m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} + \boldsymbol{F}_{Ic}$

例 设车厢以匀加速度a沿水平直线轨道向右行驶。求由车厢棚顶M_0处自由落下的质点M的相对运动。



解：分析质点M，

取动坐标系$O_1x_1y_1z_1$，固连于车厢。

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} + \boldsymbol{F}_{Ic}$$

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_{Ie} \qquad F_{Ie} = ma$$

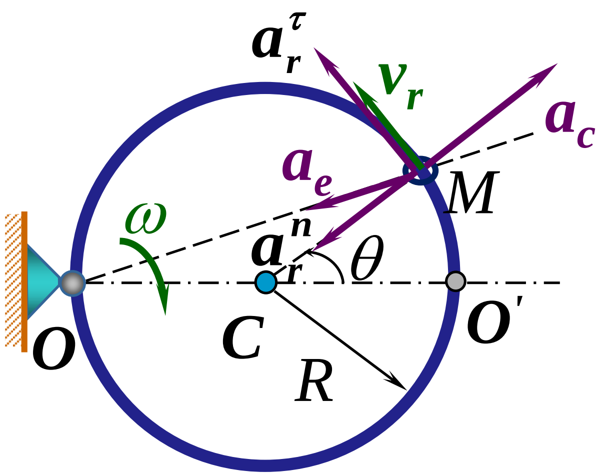
$$m\ddot{x}_1 = 0, \quad m\ddot{y}_1 = -ma, \quad m\ddot{z}_1 = -mg$$

当 $t = 0$ 时， $x_1 = y_1 = 0, z_1 = h, v_{x1} = v_{y1} = v_{z1} = 0$

$$x_1 = 0, y_1 = -\frac{1}{2}at^2, z_1 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\boxed{z_1 = h + \frac{g}{a}y_1}$$

例 一质量是m的小环M套在半径是R的光滑圆环上，并可沿大圆环滑动，而大圆环在水平面内以匀角速度ω绕通过点O的铅垂轴转动。在初瞬时，$\theta = 0$，$\dot{\theta} = 2\omega$，试写出小环M相对于大圆环的运动微分方程，并求出大圆环对小环M的约束力。



解：分析小环M

- 运动分析

取动坐标系与大圆环固连，小环M相对于大圆环的位置用弧坐标 $O'M = R\theta$ 表示，原点为O'。

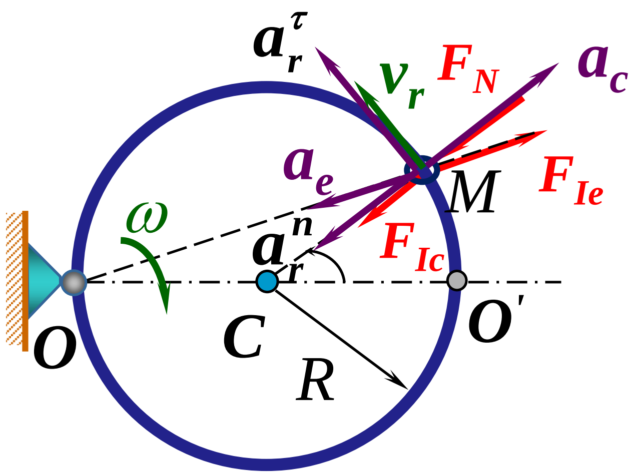
$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r^\tau + \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c$$

$$v_r = R\dot{\theta}, \quad a_r^\tau = R\ddot{\theta}, \quad a_r^n = R\dot{\theta}^2$$

$$a_e = OM \cdot \omega^2, \quad a_c = 2R\omega\dot{\theta}$$

- **受力分析**

作用于小环M的力有大圆环的约束力F_N。虚加牵连惯性力F_{Ie}和科氏惯性力F_{Ic}。



$$F_{Ie} = ma_e = 2mR\cos\frac{\theta}{2}\omega^2$$

$$F_{Ic} = ma_c = 2m\omega v_r = 2m\omega R\dot{\theta}$$

$$m\boldsymbol{a}_r^n + m\boldsymbol{a}_r^\tau = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{F}_{Ie} + \boldsymbol{F}_{Ic}$$

$$v_r = R\dot{\theta}, \qquad a_r^\tau = R\ddot{\theta}, \qquad a_r^n = R\dot{\theta}^2$$

$$mR\ddot{\theta} = -F_{Ie}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (1)$$

$$a_e = OM\cdot\omega^2, \qquad a_c = 2R\omega\dot{\theta}$$

$$mR\dot{\theta}^2 = F_N + F_{Ic} - F_{Ie}\cos\frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

$$mR\ddot{\theta} = -F_{Ie}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (1)$$

$$F_{Ie} = ma_e = 2mR\cos\frac{\theta}{2}\omega^2$$

$$mR\dot{\theta}^2 = F_N + F_{Ic} - F_{Ie}\cos\frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

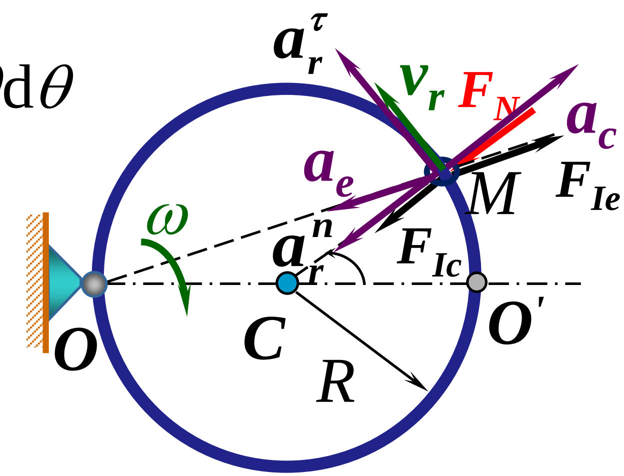
$$F_{Ic} = ma_c = 2m\omega v_r = 2m\omega R\dot{\theta}$$

由式(1)得 $mR\ddot{\theta} = -2m\omega^2 R\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$\boxed{\ddot{\theta} = -\omega^2\sin\theta}$ 小环M相对于大圆环的运动微分方程

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} \qquad \int_{2\omega}^{\dot{\theta}}\dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta} = \int_0^{\theta} -\omega^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(1+\cos\theta)}$$



代入式(2)及F_{Ic}中得

$\boxed{F_N = mR\omega^2[3(1+\cos\theta) - 4\cos\frac{\theta}{2}]}$ 大圆环对小环的约束力

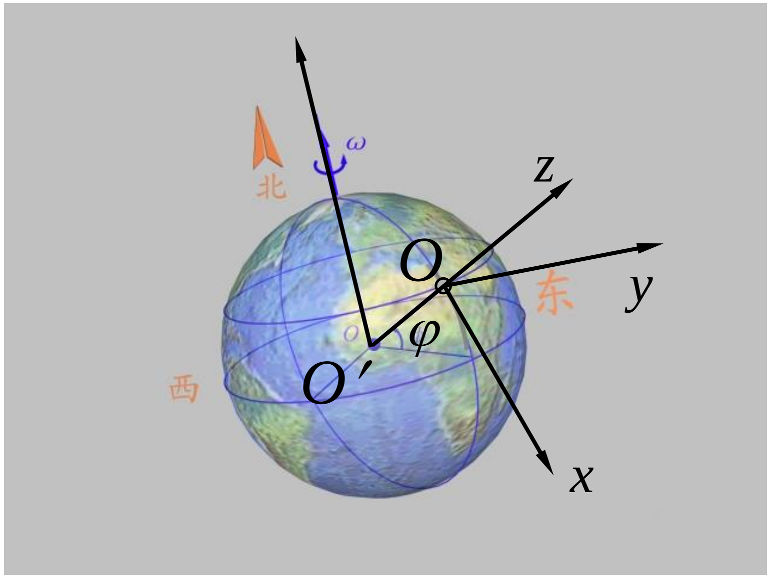
自由落体偏东

建坐标系$Oxyz$，质点初始位置为原点。

Ox轴沿经线切线向南，

Oy轴沿纬线切线向东，

Oz轴沿地球半径方向。



$$\omega = \frac{2\pi}{24\times60\times60} = 7.27\times10^{-5}\ \mathrm{rad}/\mathrm{s}$$

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} + \boldsymbol{F}_{Ic}$$

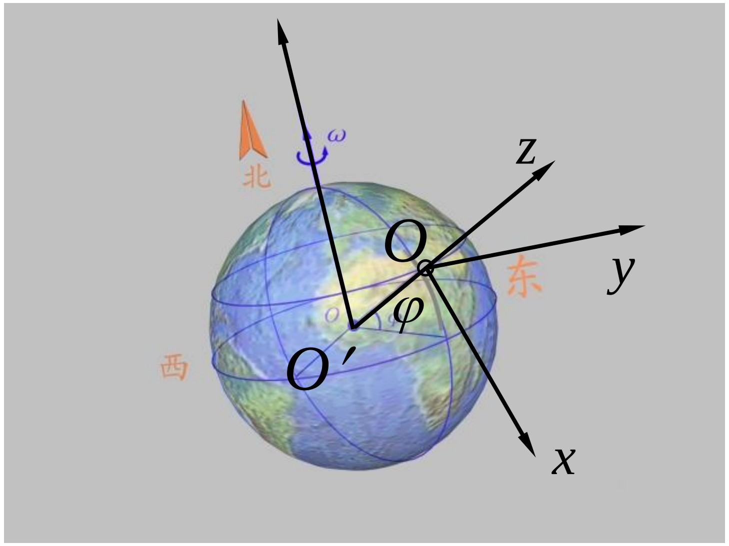
$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_{Ic}$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega\cos\varphi\boldsymbol{i} + \omega\sin\varphi\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_r = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}_{Ic} = -m\cdot 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

自由落体偏东



$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_{Ic}$$

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin\varphi$$

$$\ddot{y} = -2\omega(\dot{x}\sin\varphi + \dot{z}\cos\varphi)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y}\cos\varphi$$

当 $t=0$ 时，

$$x = y = z = 0, \qquad \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

略去小量，积分并考虑初始条件，得

$$x = \frac{1}{12} g\omega^2 t^4 \sin 2\varphi$$

$$y = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\varphi$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2$$

北半球的物体在无初速度、不计阻力的条件下自由落体，下落过程不仅有少量偏东，更少量偏南。

小结

质点动力学基本方程 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$

质点运动微分方程 $m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$

质点相对运动微分方程 $m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} + \boldsymbol{F}_{Ic}$

牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ie} = -m\boldsymbol{a}_e$

科氏惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ic} = -m\boldsymbol{a}_c$