

第二章 刚体上力系的等效与简化

§ 2-1 力矩

§ 2-2 力偶

§ 2-3 空间任意力系的简化

§ 2-4 平行力系的中心与重心

§ 2-1 力矩(moment)

1. 力对点之矩

力对点之矩是力使物体绕某点转动效果的度量。

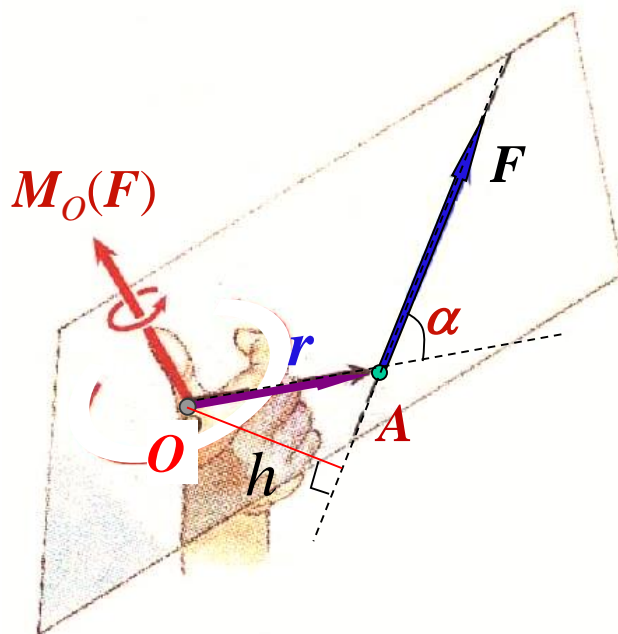
空间情况下的力对点之矩 (矢量)

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

大小: $|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})| = rF \sin \alpha = Fh$ 单位 N·m

定位矢量: 方向: 垂直于 \boldsymbol{F} 与 \boldsymbol{r} 组成的平面, 右手螺旋法则

作用点: 过矩心 O , 任意指定点



1. 力对点之矩

力对点之矩解析表达式

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

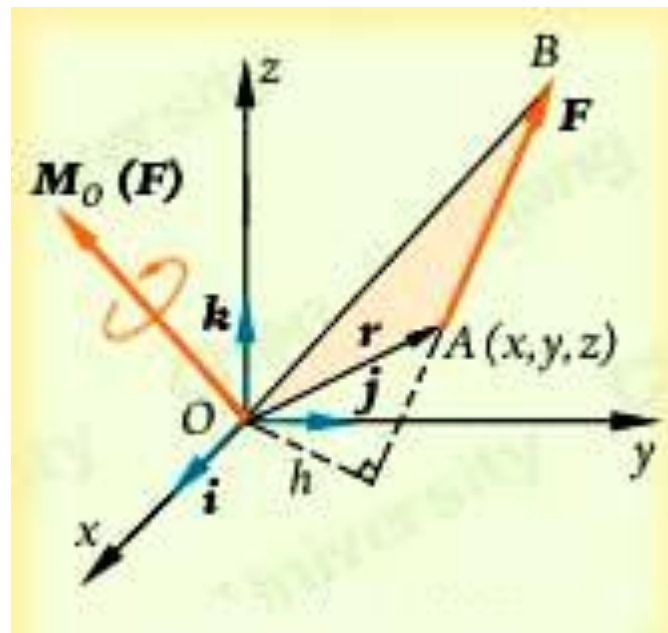
$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

$$[\mathbf{M}_O(\mathbf{F})]_x = yF_z - zF_y$$

$$[\mathbf{M}_O(\mathbf{F})]_y = zF_x - xF_z$$

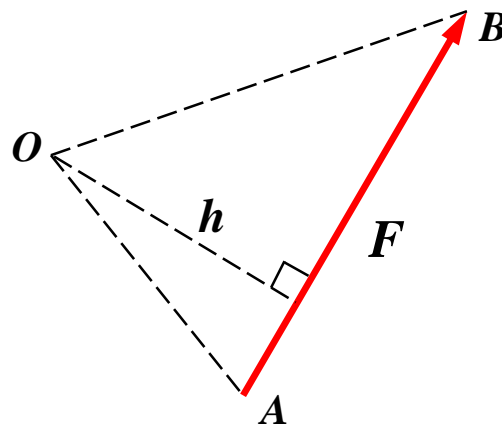
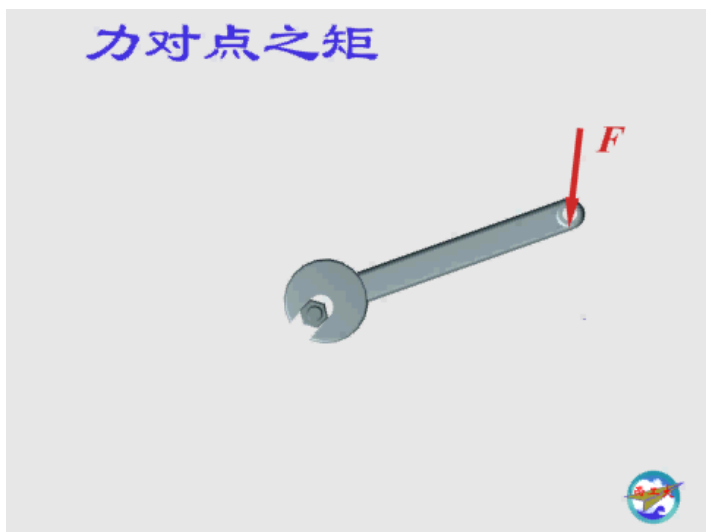
$$[\mathbf{M}_O(\mathbf{F})]_z = xF_y - yF_x$$



O 为原点, x, y, z 为 A 点坐标,
 O 非原点, x, y, z 为 OA 的投影.

1. 力对点之矩

平面情况下的力对点之矩（代数量）



$$M_O(F) = \pm Fh \quad \text{规定：逆钟向取“+”}$$

思考：空间矢量还是平面内的代数量？

1. 力对点之矩

合力矩定理

-伐里农定理

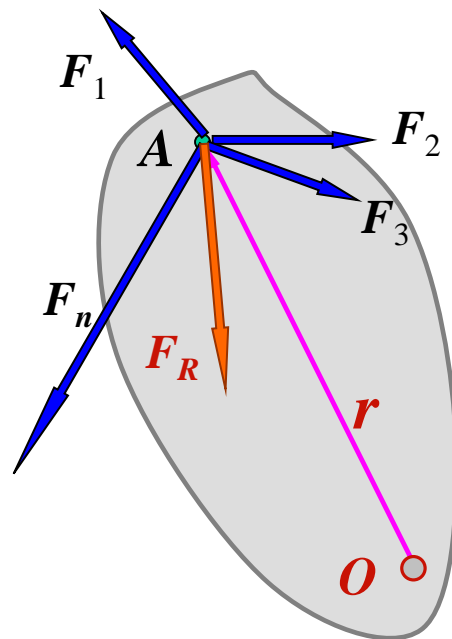
合力对任一点之矩等于各分力对该点之矩的和。

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_R = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots \mathbf{F}_n)$$

$$M_O(\mathbf{F}_R) = M_O(\mathbf{F}_1) + M_O(\mathbf{F}_2) + \cdots + M_O(\mathbf{F}_n) = \sum M_O(\mathbf{F}_i)$$

矢量和?
代数和?

对非共点
力系成立?

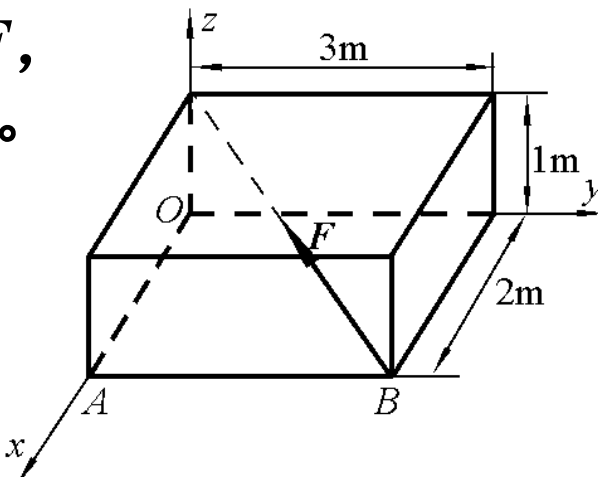


例 在图示长方体的顶点B处作用一力 F ,
 $F=700\text{N}$ 。求力 F 对点 O 之矩矢量 $M_O(F)$ 。

解： 力 F 矢量作用点坐标为：

$$B(x, y, z) = B(2, 3, 0)$$

$$(F_x, F_y, F_z) = (-100\sqrt{14}, -150\sqrt{14}, 50\sqrt{14})$$



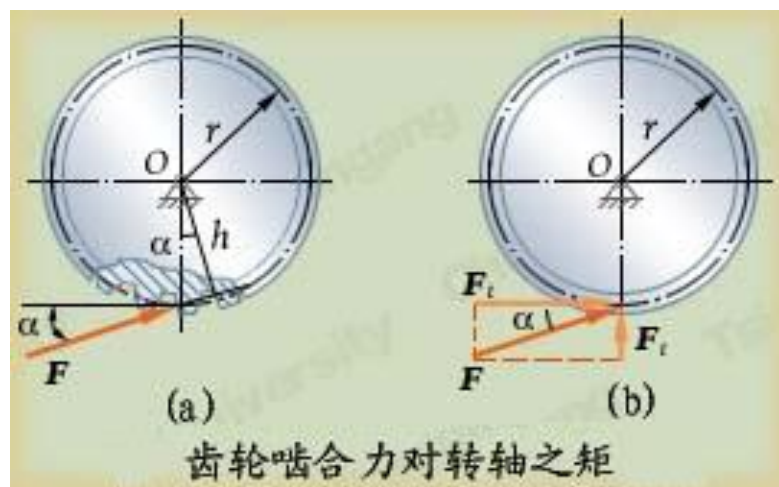
$$M_O(F) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ -100\sqrt{14} & -150\sqrt{14} & 50\sqrt{14} \end{vmatrix} = 150\sqrt{14}\mathbf{i} - 100\sqrt{14}\mathbf{j} \text{ N}\cdot\text{m}$$

例 如图所示，圆柱直齿轮受啮合力的作用。设 $F=1400\text{N}$ 。压力角 $\alpha=20^\circ$ ，齿轮的节圆（啮合圆）半径 $r=60\text{mm}$ ，试计算力对 O 点的力矩。

解1 按力矩定义求解。

$$\begin{aligned}M_O(F) &= F \cdot h = Fr \cos \alpha \\&= 1400 \times 0.06 \times \cos 20^\circ \\&= 78.93 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

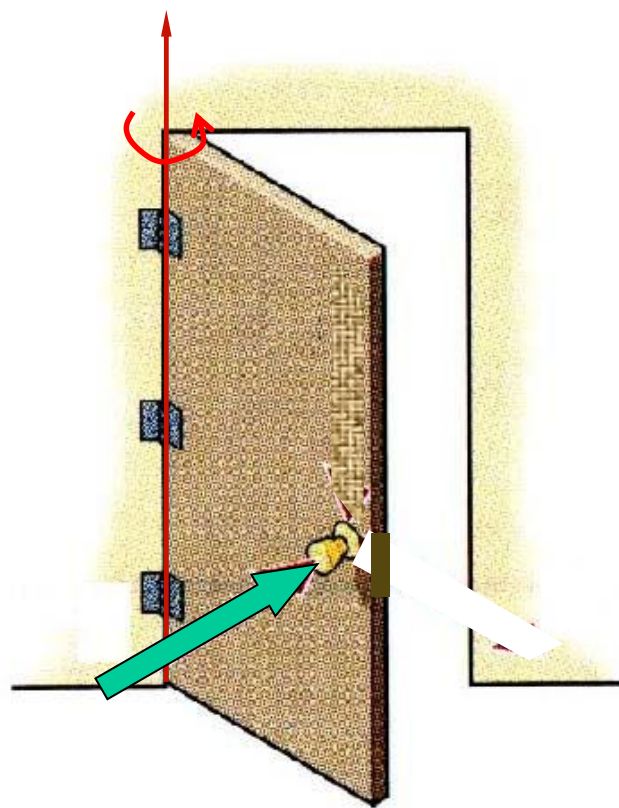
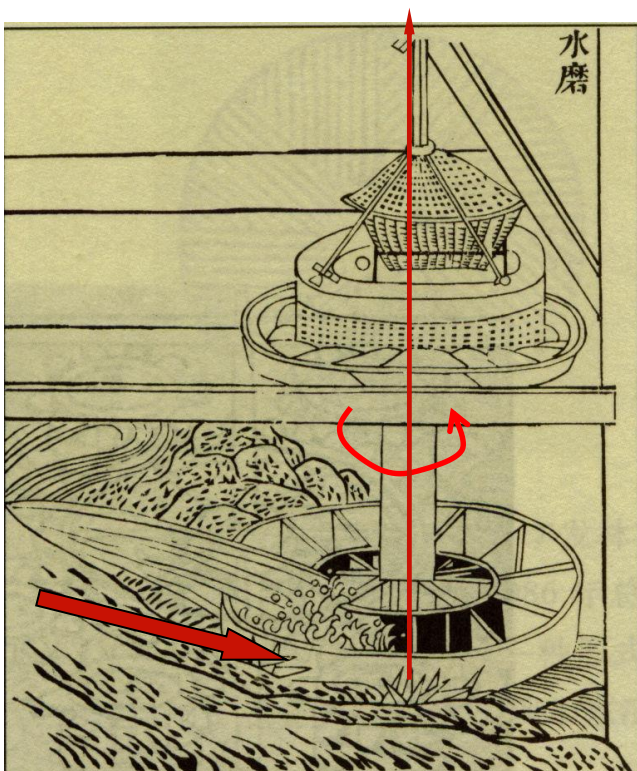


解2 用合力之矩定理求解。

$$\begin{aligned}M_O(F) &= M_O(F_t) + M_O(F_r) \\&= M_O(F_t) = Fr \cos \alpha = 78.93 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

2. 力对轴之矩

力对轴之矩是力使物体绕某轴转动效果的度量。

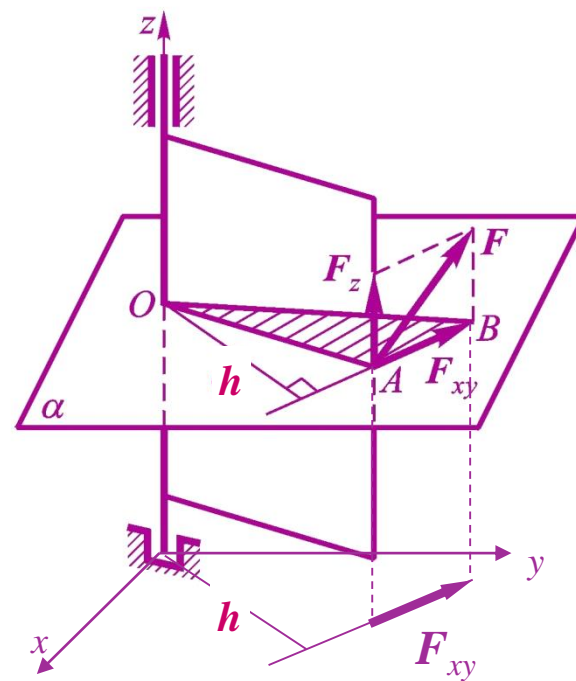


2. 力对轴之矩

力对轴之矩等于该力在与轴垂直的平面上的投影对轴与平面交点之矩。

$$\begin{aligned}M_z(F) &= M_O(F_{xy}) \\ &= \pm F_{xy} \cdot h\end{aligned}$$

正负号根据右手螺旋法则确定



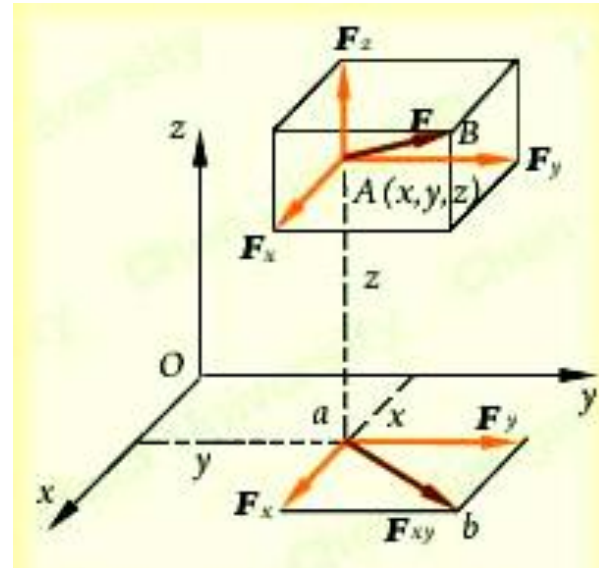
*力与轴**平行**或**相交**时，力对该轴的矩等于零。

*合力矩定理仍然成立。

2. 力对轴之矩

力对轴之矩的解析式

$$\left. \begin{aligned} M_x(F) &= yF_z - zF_y \\ M_y(F) &= zF_x - xF_z \\ M_z(F) &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\}$$



力对点之矩与力对轴之矩的关系-力矩关系定律

$$[M_O(F)]_x = M_x(F)$$

$$[M_O(F)]_y = M_y(F)$$

$$[M_O(F)]_z = M_z(F)$$

力对点之矩矢量
在过该点之轴上的
投影等于该力
对该轴之矩.

$$\mathbf{M}_O(F) = M_x(F)\mathbf{i} + M_y(F)\mathbf{j} + M_z(F)\mathbf{k}$$

例 在图示长方体的顶点 B 处作用一力 F , $F=700\text{N}$ 。分别求力 F 对各坐标轴之矩, 并写出力 F 对点 O 之矩矢量 $M_O(F)$ 。

解: 力 F 矢量作用点坐标为:

$$B(x, y, z) = B(2, 3, 0)$$

$$(F_x, F_y, F_z) = (-100\sqrt{14}, -150\sqrt{14}, 50\sqrt{14})$$

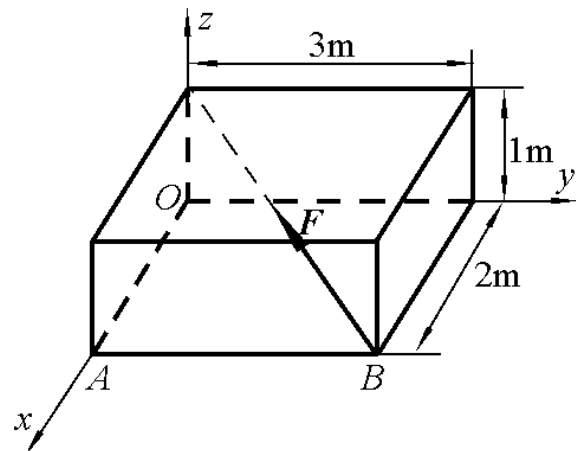
力 F 矢量对三个坐标轴的矩为:

$$M_x(F) = yF_z - zF_y = 3 \cdot 50\sqrt{14} - 0 \cdot (-100\sqrt{14}) = 150\sqrt{14}(\text{N} \cdot \text{m})$$

$$M_y(F) = zF_x - xF_z = -100\sqrt{14}(\text{N} \cdot \text{m})$$

$$M_z(F) = xF_y - yF_x = 0(\text{N} \cdot \text{m})$$

力 F 矢量对 O 之矩为: $M_O(F) = M_x(F)\mathbf{i} + M_y(F)\mathbf{j} + M_z(F)\mathbf{k}$



例 手柄 $ABCE$ 在平面 Axy 内, $AB=BC=l$, $CD=a$, F 在垂直于 y 轴的平面内, 夹角如图所示。试求力对 x 、 y 和 z 轴之矩。

解:

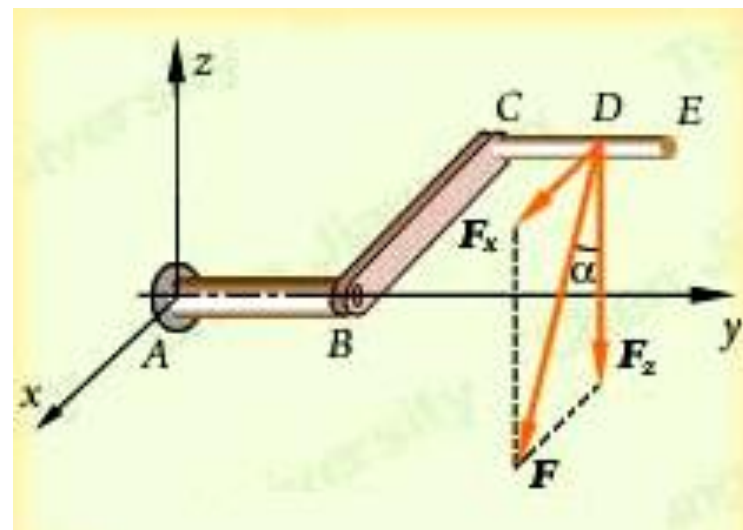
$$F_x = F \sin \alpha$$

$$F_z = -F \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} M_x(F) &= M_x(F_z) \\ &= -F(l+a) \cos \alpha \end{aligned}$$

$$M_y(F) = M_y(F_z) = -Fl \cos \alpha$$

$$M_z(F) = M_z(F_x) = -F(l+a) \sin \alpha$$



小结: 定义、计算公式、力矩关系、合力矩定理

📁 思考题

受力情况如图所示，求

(1) 力 F_1 对 x , y , z 轴之矩，

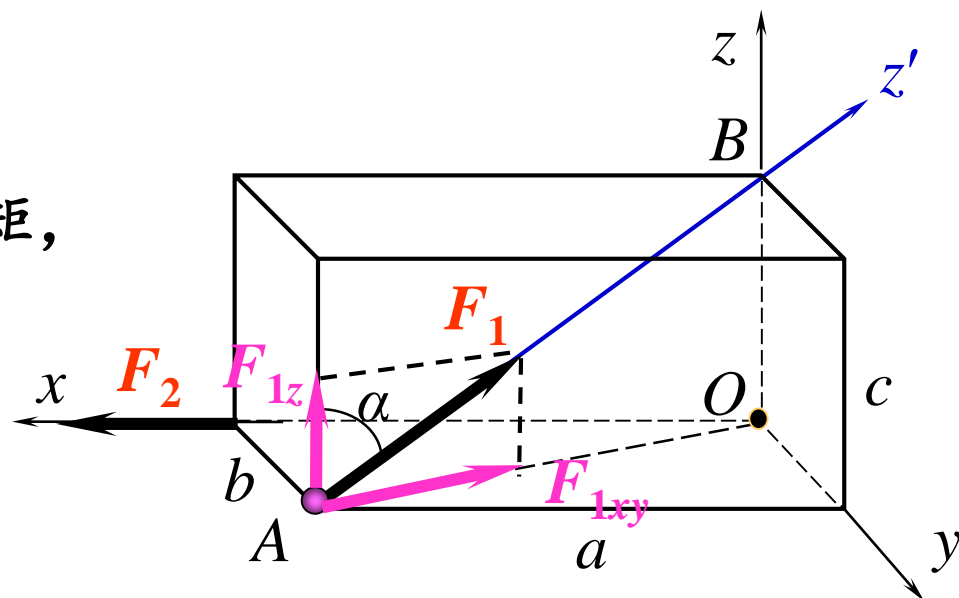
(2) 力 F_2 对 z' 轴之矩。

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\begin{aligned} M_x(F_1) &= M_x(F_{1z}) + M_x(F_{1xy}) \\ &= bF_1 \cos \alpha + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y(F_1) &= M_y(F_{1z}) + M_y(F_{1xy}) \\ &= -aF_1 \cos \alpha + 0 \end{aligned}$$

$$M_z(F_1) = 0$$



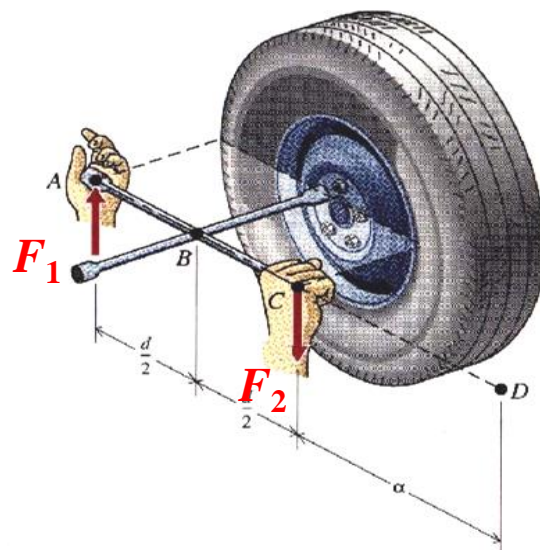
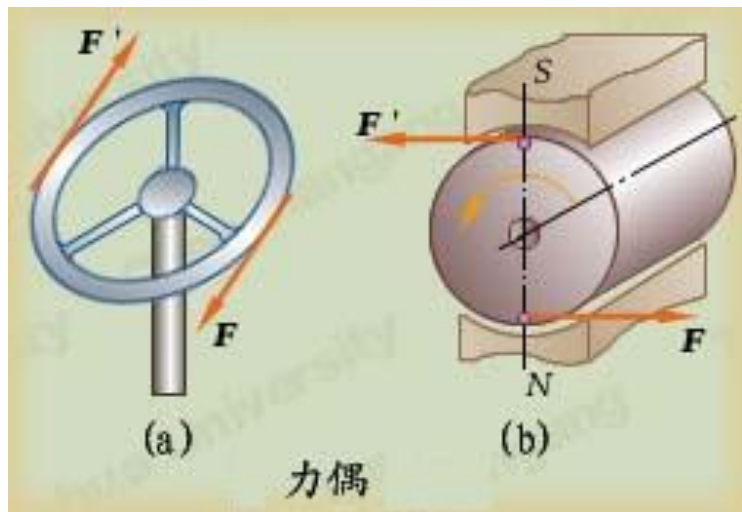
$$M_A(F_2) = F_2 b$$

$$M_{z'}(F_2) = M_A(F_2) \cos \alpha$$

§ 2-2 力偶(couple)

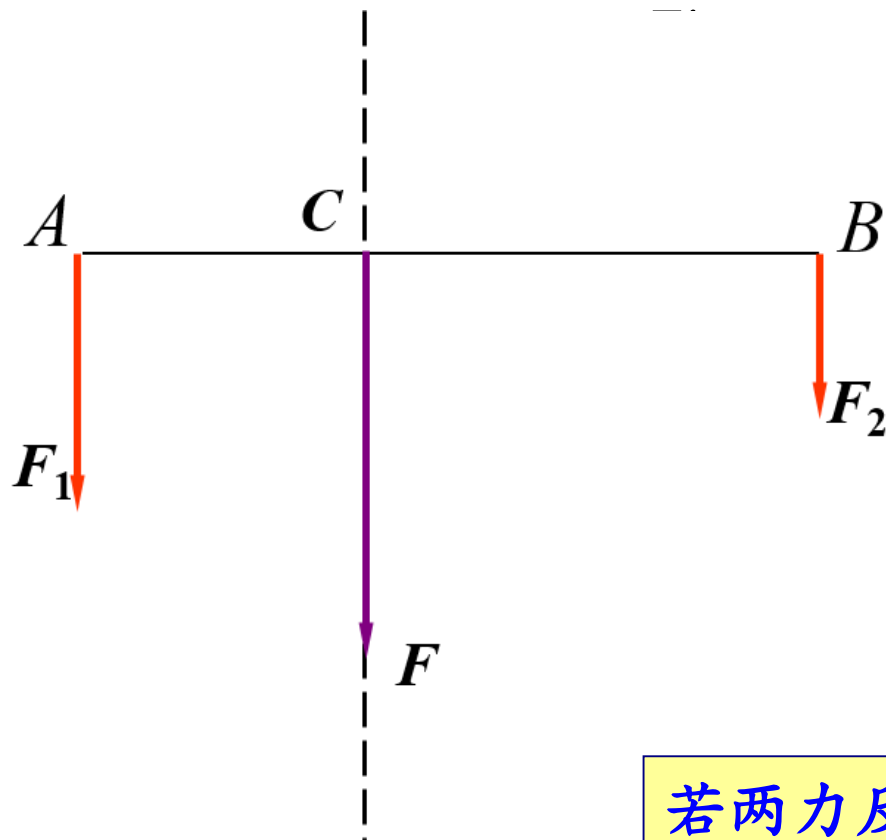
1. 力偶

大小相等, 方向相反, 作用线平行的两个力组成的力系称为**力偶**。(F, F')

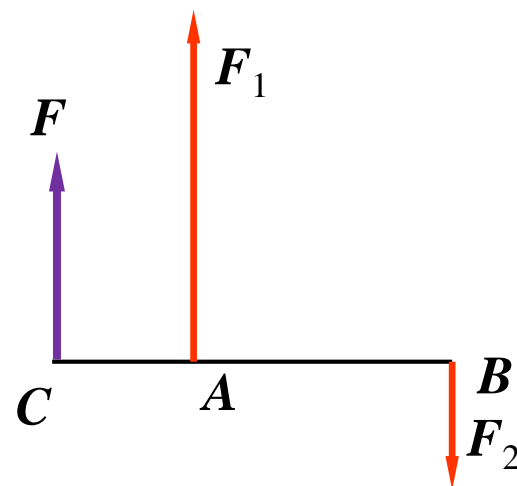


1. 力偶

两同向平行力的合成 $F_1 \parallel F_2$ $F'_1 = -F'_2$



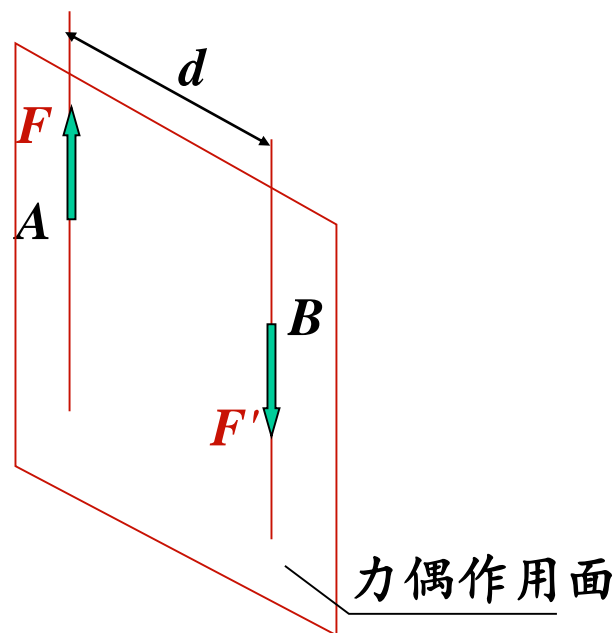
两反向平行力的合成



若两力反向且等值, 合力是什么?

1. 力偶

- * 力偶不能合成一个力也不能与一个力平衡。因此，力偶不能与一个力等效。
- * 力偶与力是两个基本力学量，是一种不能再简化的简单力系。
- * 力偶只能使物体转动。
- * 力偶的三要素：力、力偶臂、力偶作用面



2. 力偶矩(moment) —— 度量力偶的转动效应

$$F' = -F$$

$$M_O = M_O(F) + M_O(F')$$

$$= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}'$$

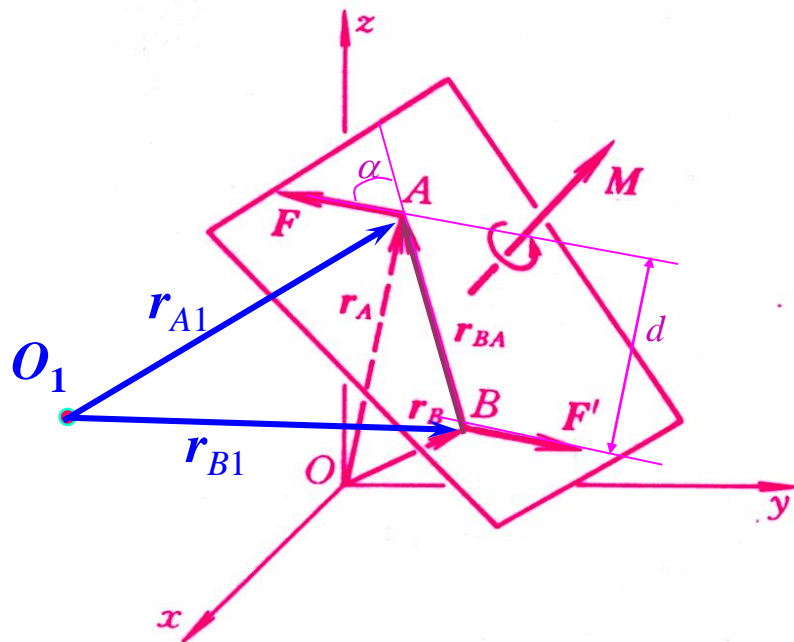
$$= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$$

$$= (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

$$= \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{A1} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{B1} \times \mathbf{F}'$$

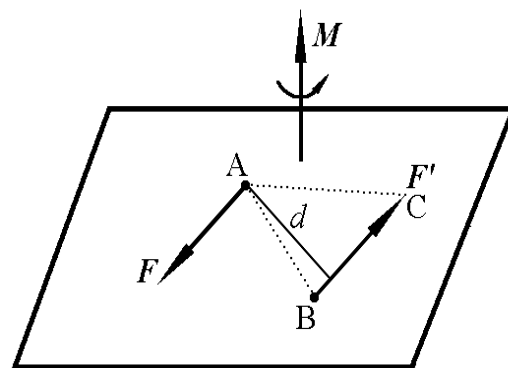
$$= M_{O1} = M$$

$$|\mathbf{M}| = r_{BA} \cdot F \sin \alpha = Fd \quad \text{方向由右手螺旋法则确定。}$$



力偶矩与矩心的位置无关。

2. 力偶矩



空间力偶矩
(自由矢量)

大小: 力偶中力的大小与力偶臂的乘积.

$$M = F \cdot d \quad \text{单位 N}\cdot\text{m}$$

方位: 力偶作用面的法线方向.

指向: 服从右手螺旋法则.

平面力偶矩
(代数量)

大小: 力偶中力的大小与力偶臂的乘积.

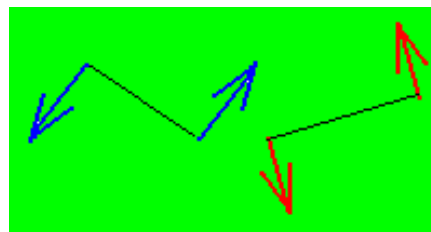
$$M = \pm F \cdot d$$

转向: 逆时针为正, 顺时针为负.

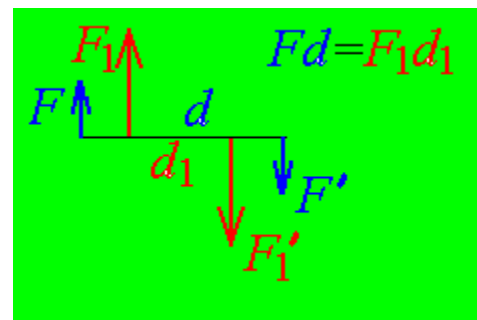
3. 力偶的性质和等效条件

若两力偶的力偶矩矢相等，则两力偶等效。

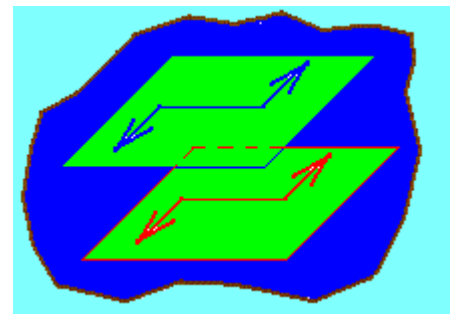
(1) 力偶可在自己的作用平面内任意移动，对刚体的作用不变。



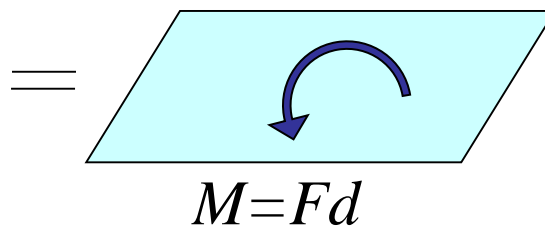
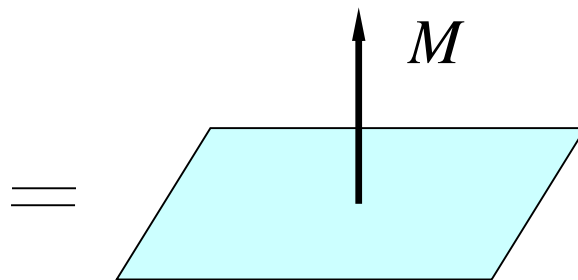
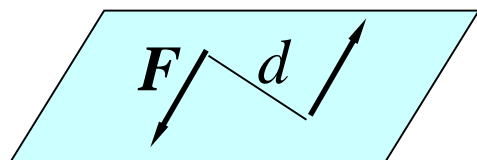
(2) 力偶可以同时改变 F 、 d 的大小，只要力偶矩不变，对刚体的作用不变。



(3) 力偶可以从其作用面移至另一平行平面，只要力偶矩不变，对刚体的作用不变。



思考：力偶矩
到底是矢量
还是代数量？

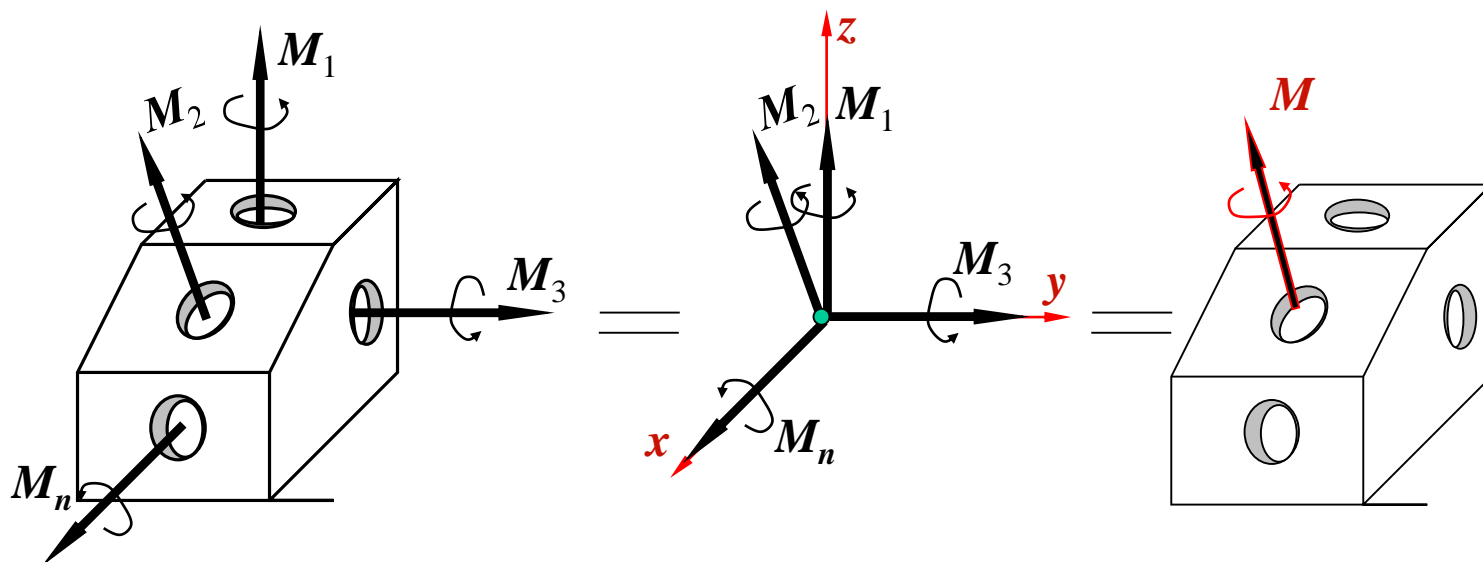


说明：

- 1、力、力偶臂不是力偶的特征量. 只有**力偶矩**是唯一度量.
- 2、自由刚体受力偶作用时总是绕着力偶臂的中点转动, 那么力偶无法等效. 动力学可以证明：**静止的自由刚体受力偶作用时, 总是绕着刚体的质量中心转动** (与质量分布有关, 与作用位置无关).

4. 力偶系的合成

—由两个或两个以上力偶组成的特殊力系

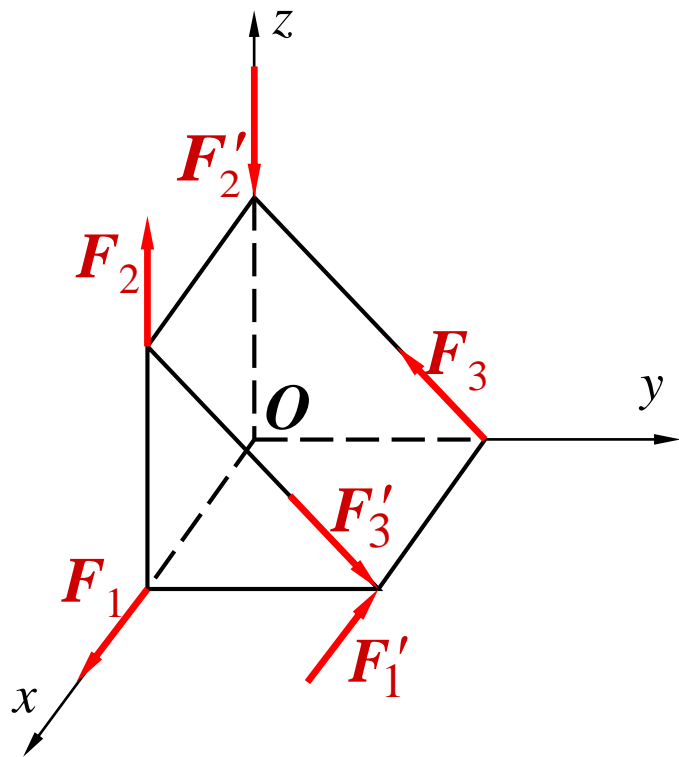


(1) 空间力偶系的合成

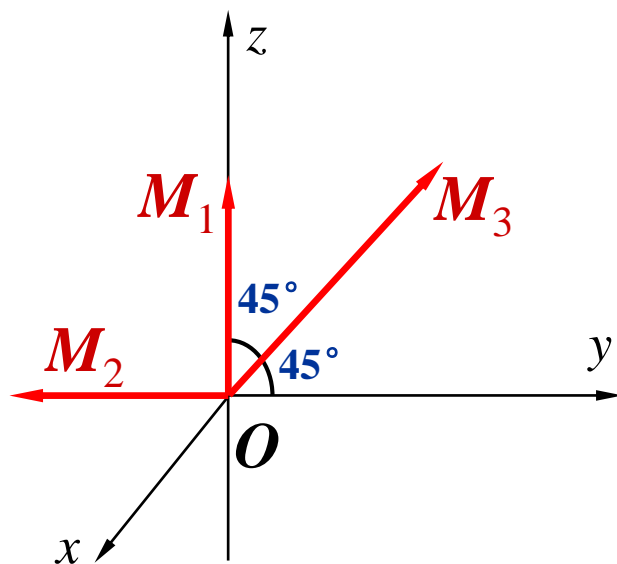
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \cdots \cdots \mathbf{M}_n = \sum \mathbf{M}_i \quad \text{方法: 几何法、解析法}$$

$$(2) \text{ 平面力偶系的合成} \quad M = \sum M_i \quad \text{代数求和}$$

例 图示的三角柱刚体是正方体的一半。在其中三个侧面各自作用着一个力偶。已知力偶 (F_1, F'_1) 的矩 $M_1=20\text{N}\cdot\text{m}$ ；力偶 (F_2, F'_2) 的矩 $M_2=20\text{N}\cdot\text{m}$ ；力偶 (F_3, F'_3) 的矩 $M_3=20\text{N}\cdot\text{m}$ 。试求合力偶矩矢 M 。



解： 1. 画出各力偶矩矢



$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} = 0$$

$$M_y = M_{1y} + M_{2y} + M_{3y} = -5.86 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} = 34.14 \text{ N} \cdot \text{m}$$

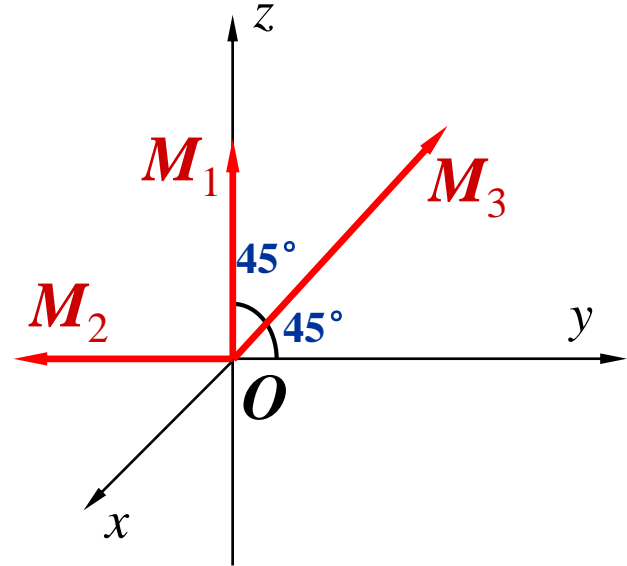
$$\mathbf{M} = -5.86\mathbf{j} + 34.14\mathbf{k} (\text{N} \cdot \text{m})$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 34.64 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\cos(\mathbf{M}, \mathbf{i}) = \frac{M_x}{M} = 0, \quad \angle(\mathbf{M}, \mathbf{i}) = 90^\circ$$

$$\cos(\mathbf{M}, \mathbf{j}) = \frac{M_y}{M} = -0.169, \quad \angle(\mathbf{M}, \mathbf{j}) = 100^\circ$$

$$\cos(\mathbf{M}, \mathbf{k}) = \frac{M_z}{M} = 0.986, \quad \angle(\mathbf{M}, \mathbf{k}) = 9.75^\circ$$



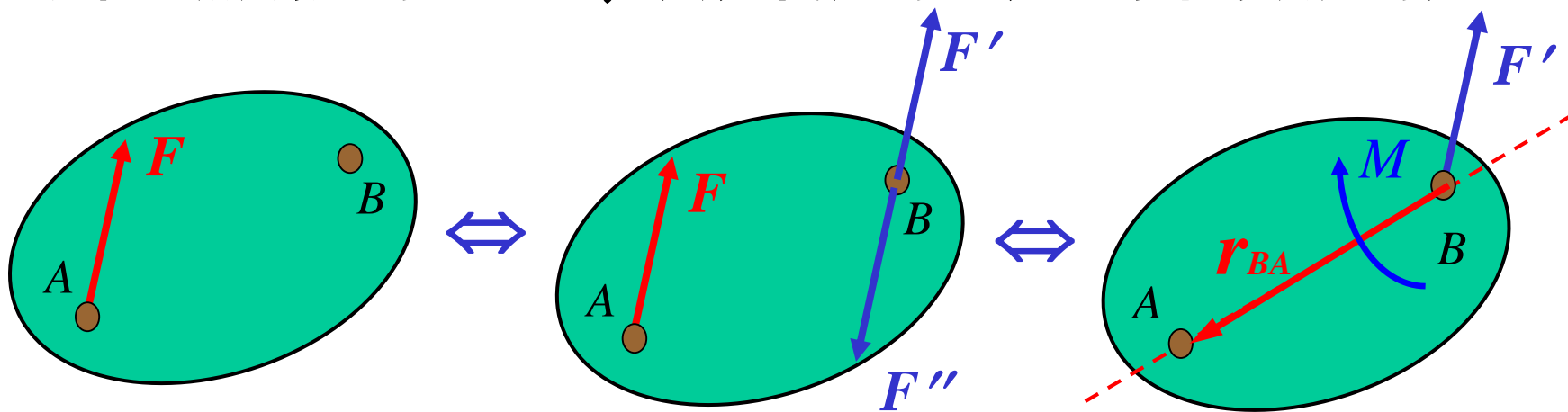
§ 2-3 空间任意力系的简化

复杂力系 $\xrightarrow{\text{等效}}$ 简单力系

1. 力的平移定理

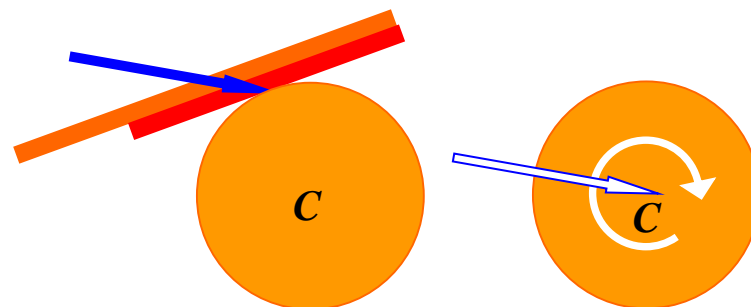
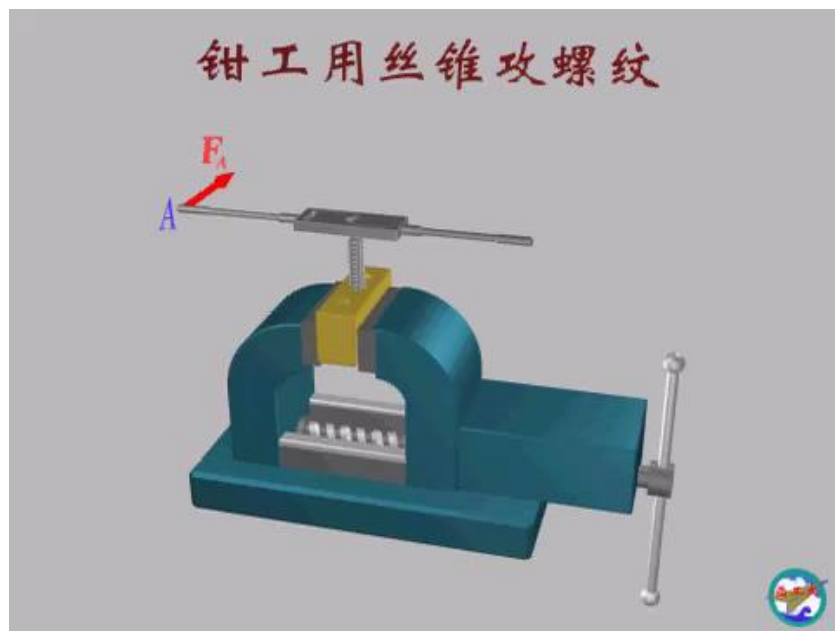
The theorem of translation of a force to a parallel position

力的平移定理: 作用在刚体上某点A的力 F 可平行移到刚体内任一指定点 $B \Leftrightarrow$ 等值, 同向的力和一个附加力偶 (力与指定点确定的面内), 其力偶矩等于力 F 对平移点 B 的矩。



$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_B(\mathbf{F})$$

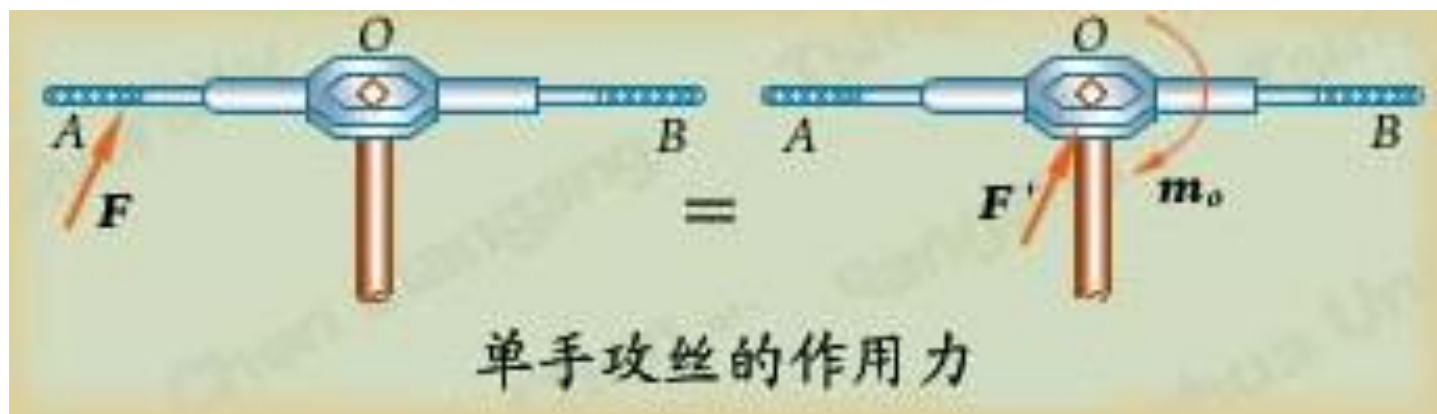
1. 力的平移定理



物理含义：

力可使物体移动和转动

力的平移定理说明一个力和一个力偶可以进一步合成为一个力。



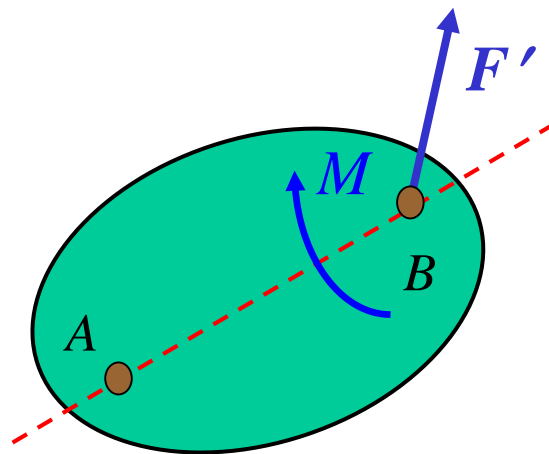
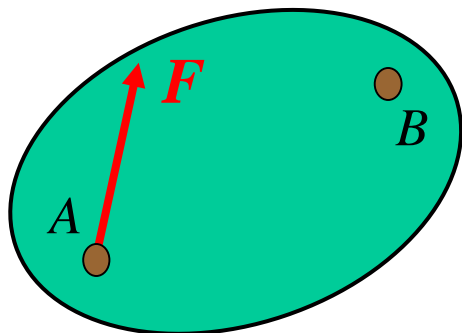
1. 力的平移定理

思考空间

Q1. 力在平移过程中产生的附加力偶矩等于力对平移点之矩，然而力矩是与矩心有关的定位矢量，力偶矩矢量是不涉及矩心的自由矢量？

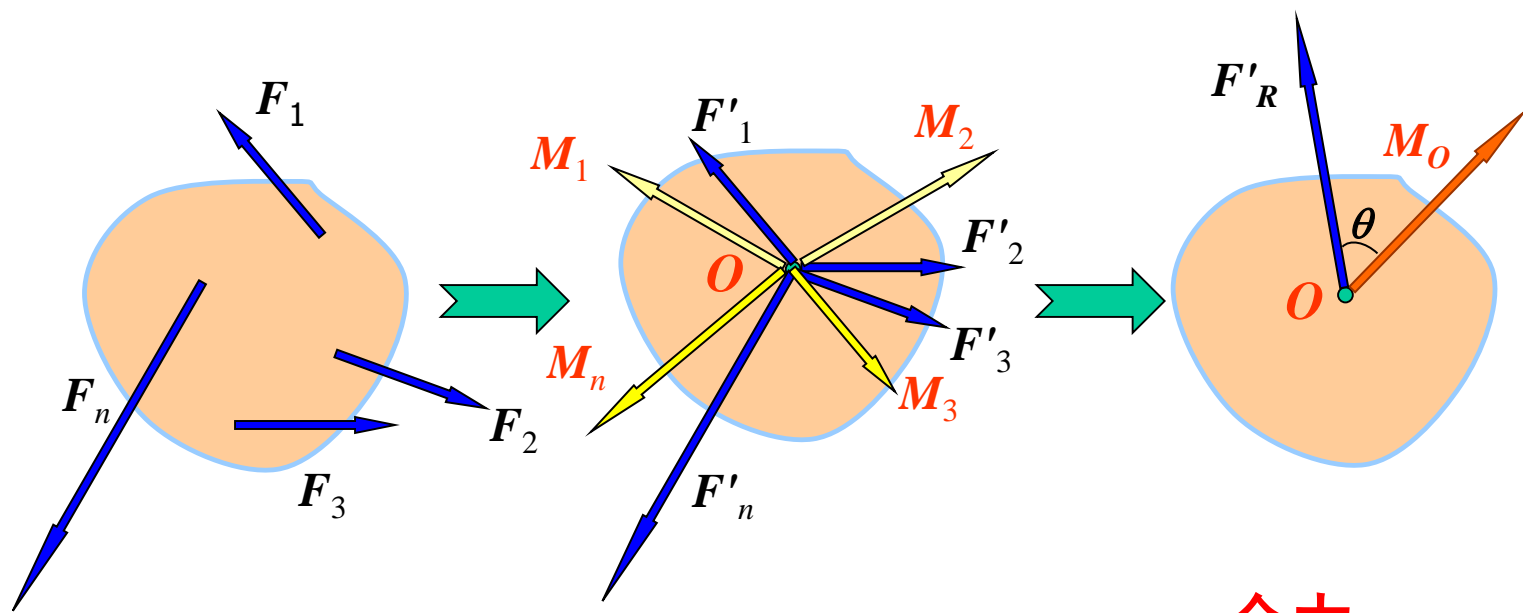
Q2. 力的平移定理应用于变形体如何？

Q3. 一个力和一个力偶可以进一步合成为一个力？



2. 空间任意力系的简化

Reduction of a force system to a given point



空间力系 (F_1, F_2, \dots, F_n) $\left\{ \begin{array}{l} \text{汇交力系 } (F'_1, F'_2, \dots, F'_n) \Rightarrow \text{合力 } F'_R = \sum F \\ \text{力偶系 } (M_1, M_2, \dots, M_n) \Rightarrow \text{合力偶 } M_O = \sum M_i = \sum M_O(F) \end{array} \right.$

3. 力系的主矢和主矩

Principal vector & Principal moment

主矢 力系中各力的矢量和称为力系的**主矢**。

$$\mathbf{F}'_R = \sum \mathbf{F}$$

主矢与简化中心选择及各力的作用点无关。只有大小和方向, 没有作用点概念。

思考: 力系的主矢与合力的区别?

主矩 力系中各力对简化中心之矩的矢量和称为力系**对简化中心的主矩**。

$$M_O = \sum M_O(\mathbf{F})$$

力系对简化中心的主矩和简化中心的选择有关。

力系的**主矢**和**主矩**是决定力系对刚体作用效应（移动和转动）的两个基本特征量。

4. 空间任意力系的合成结果

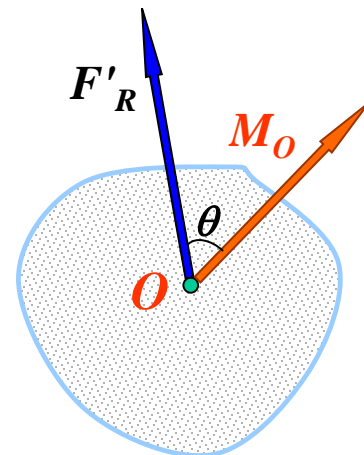
(1) 力系合成为合力偶

$$F_R' = 0, M_O \neq 0$$



合力偶

此时主矩与简化中心选择无关。例如力偶



(2) 力系合成为合力

● $F_R' \neq 0, M_O = 0$



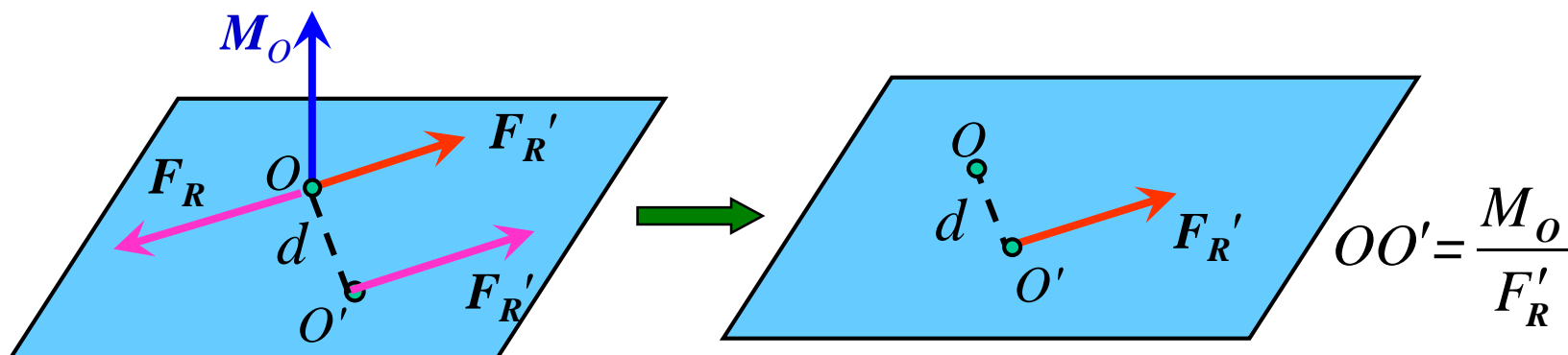
合力（过O点）

● $F_R' \neq 0, M_O \neq 0,$

且 $F_R' \perp M_O$



合力（过O'点）



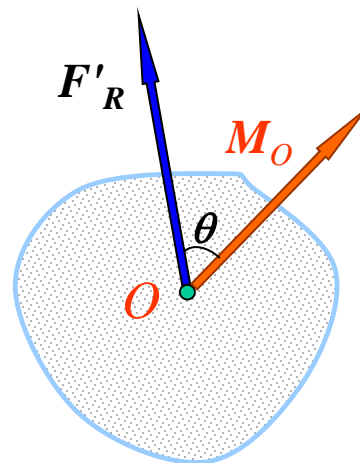
4. 空间任意力系的合成结果

(3) 力系合成为力螺旋

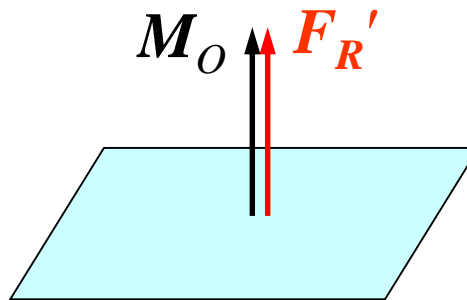
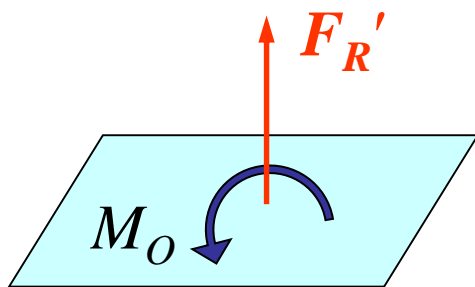
- $F_R' \neq 0$, $M_O \neq 0$, 且 F_R' 与 M_O 不垂直



力螺旋



一个力和一个力偶组成的力系，且这个力垂直于力偶的作用面。这样的力系称为**力螺旋**。

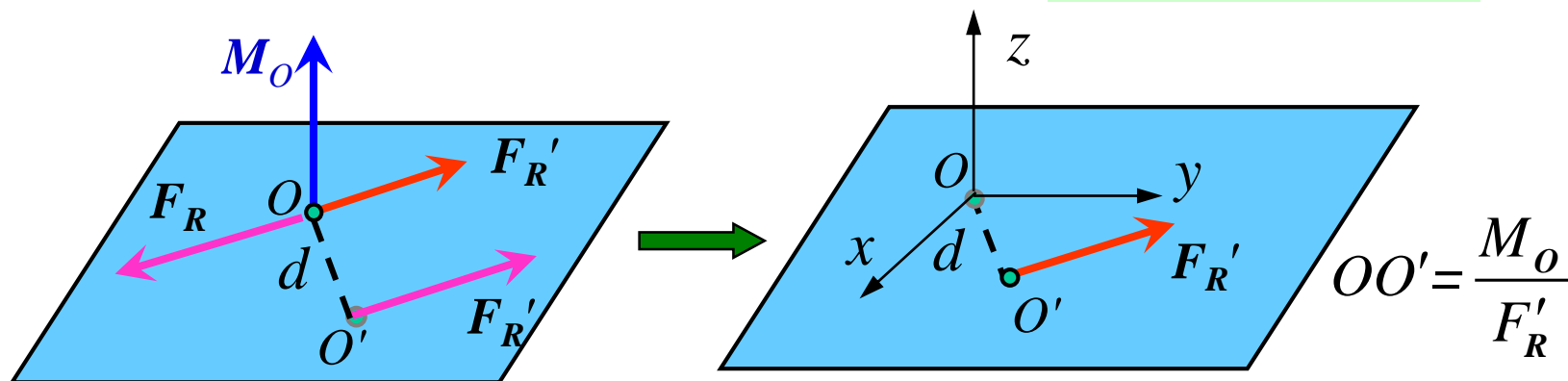


(4) 力系平衡

$$F_R' = 0, M_O = 0$$

4. 空间任意力系的合成结果

● $F_R' \neq 0, M_O \neq 0$, 且 $F_R' \perp M_O \longrightarrow$ 合力 (过 O' 点)



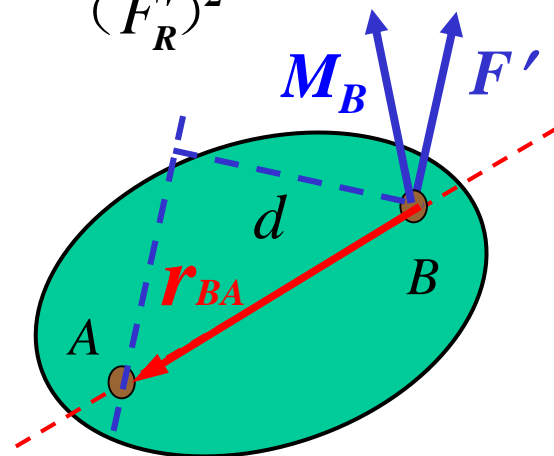
O' 点的位置

$$F_R' \cdot M_O = 0$$

$$OO' = \frac{F_R' \times M_O}{(F_R')^2}$$

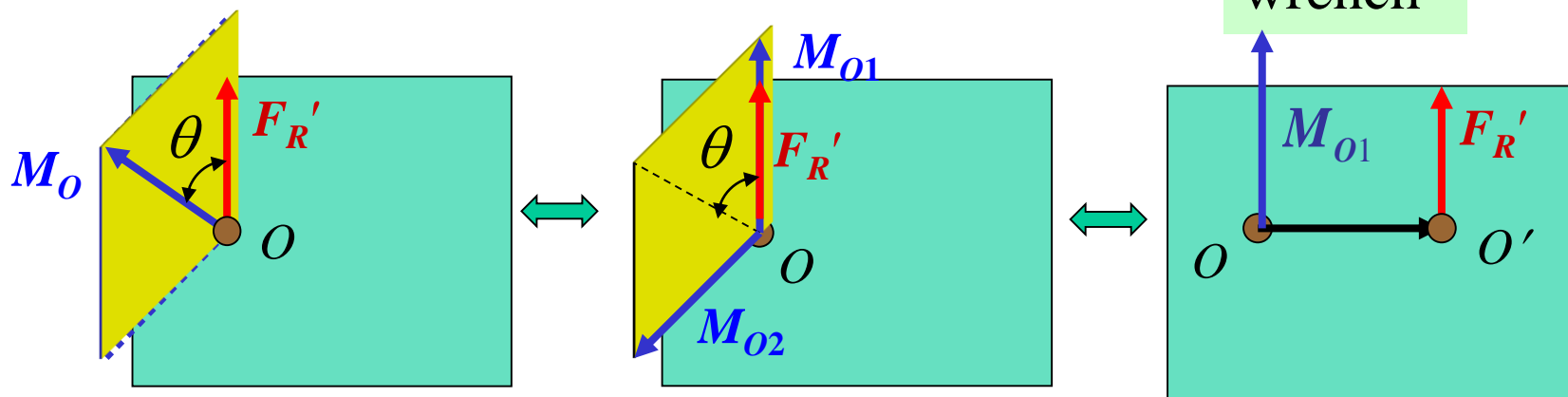
力作用线的方程 $M_O(F_R') = OO' \times F_R' = M_O$

$$\frac{M_{Ox}}{yF_{Rz}' - zF_{Ry}'} = \frac{M_{Oy}}{zF_{Rx}' - xF_{Rz}'} = \frac{M_{Oz}}{xF_{Ry}' - yF_{Rx}'}$$



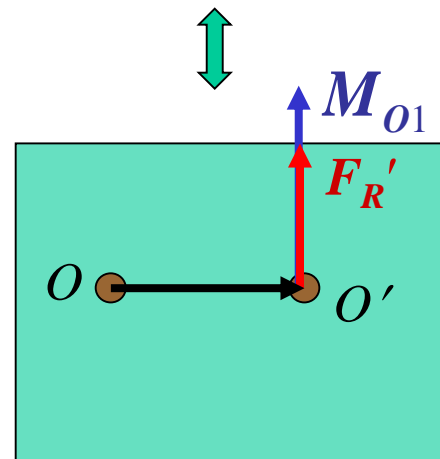
4. 空间任意力系的合成结果

● $F_R' \neq 0$, $M_O \neq 0$, 且 F_R' 与 M_O 不垂直 \longrightarrow



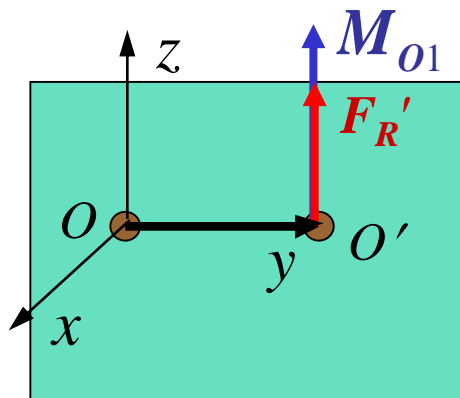
$$OO' = \frac{M_{O2}}{F_R'} = \frac{M_O \sin \theta}{F_R'}$$

力螺旋的作用线（中心轴）
与简化中心无关，//主矢



力螺旋
wrench

4. 空间任意力系的合成结果



力螺旋

$$M_{O1} = \frac{(F'_R \cdot M_O)}{(F'_R)^2} F'_R$$

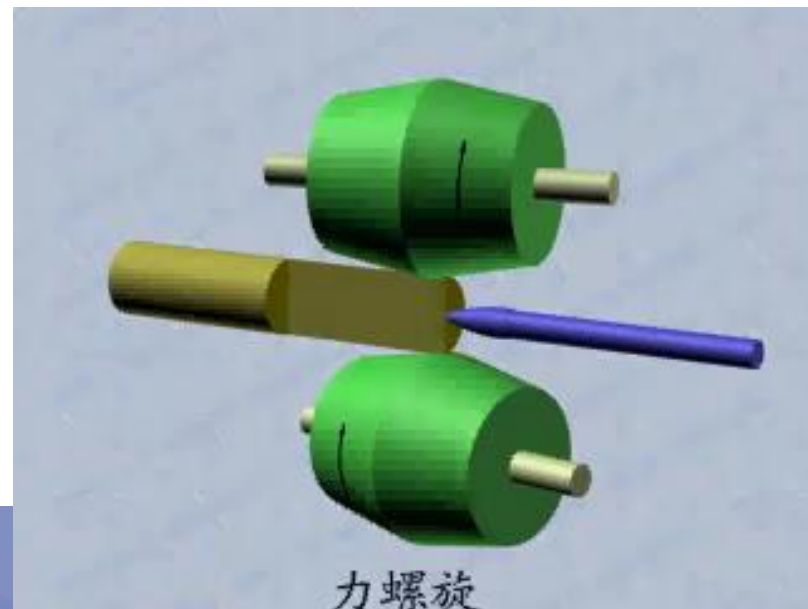
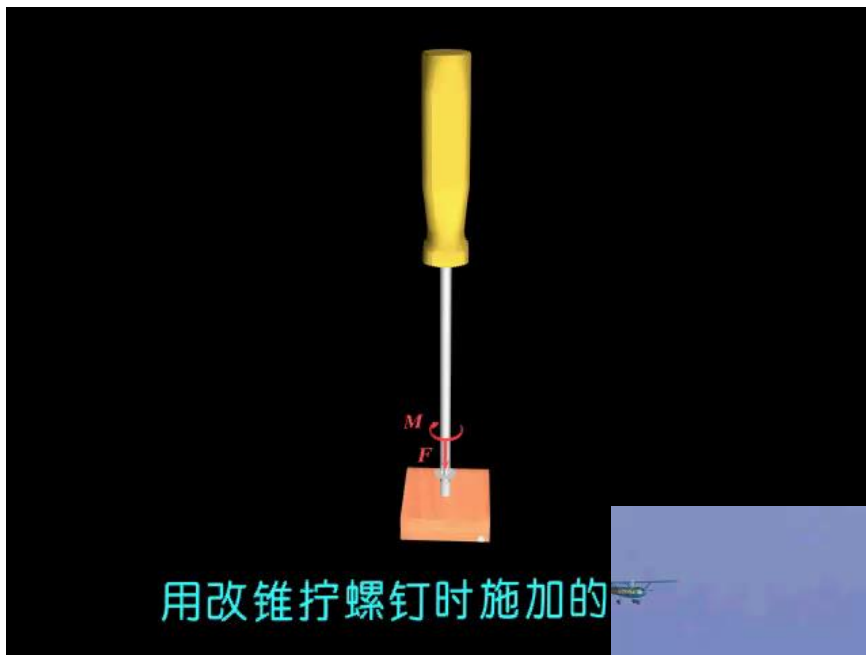
O' 点的位置 $OO' = \frac{F'_R \times M_O}{(F'_R)^2}$

力螺旋作用线的方程

$$M_O = M_{O1} + M_{O2} = M_{O1} + OO' \times F'_R$$

$$\frac{F'_{Rx}}{M_{Ox} - (yF'_{Rz} - zF'_{Ry})} = \frac{F'_{Ry}}{M_{Oy} - (zF'_{Rx} - xF'_{Rz})} = \frac{F'_{Rz}}{M_{Oz} - (xF'_{Ry} - yF'_{Rx})}$$

4. 空间任意力系的合成结果



工程中的力螺旋

飞机飞行时受到的空气
阻力构成力螺旋

例 边长 $a=1\text{m}$ 的正方体，受力如图所示。已知 $F_1=F_2=F_3=3\text{kN}$ ， $F_4=F_5=3\sqrt{2}\text{kN}$ ，求(1)该力系向A点简化的结果；(2)图示力系简化的最终结果。

解： (1) 计算主矢和主矩

$$F_{Rx} = -F_1 + F_4 \cos 45^\circ + F_5 \cos 45^\circ = 3 \text{ kN}$$

$$F_{Ry} = -F_4 \cos 45^\circ + F_5 \cos 45^\circ = 0 \text{ kN}$$

$$F_{Rz} = F_2 - F_3 = 0 \text{ kN}$$

主矢 $F_R = 3i \text{ kN}$

$$M_{Ax} = F_4 \cos 45^\circ \cdot a - F_3 a = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{Ay} = -F_1 a - F_2 a + F_3 a + F_4 \cos 45^\circ \cdot a = 0 \text{ kNm}$$

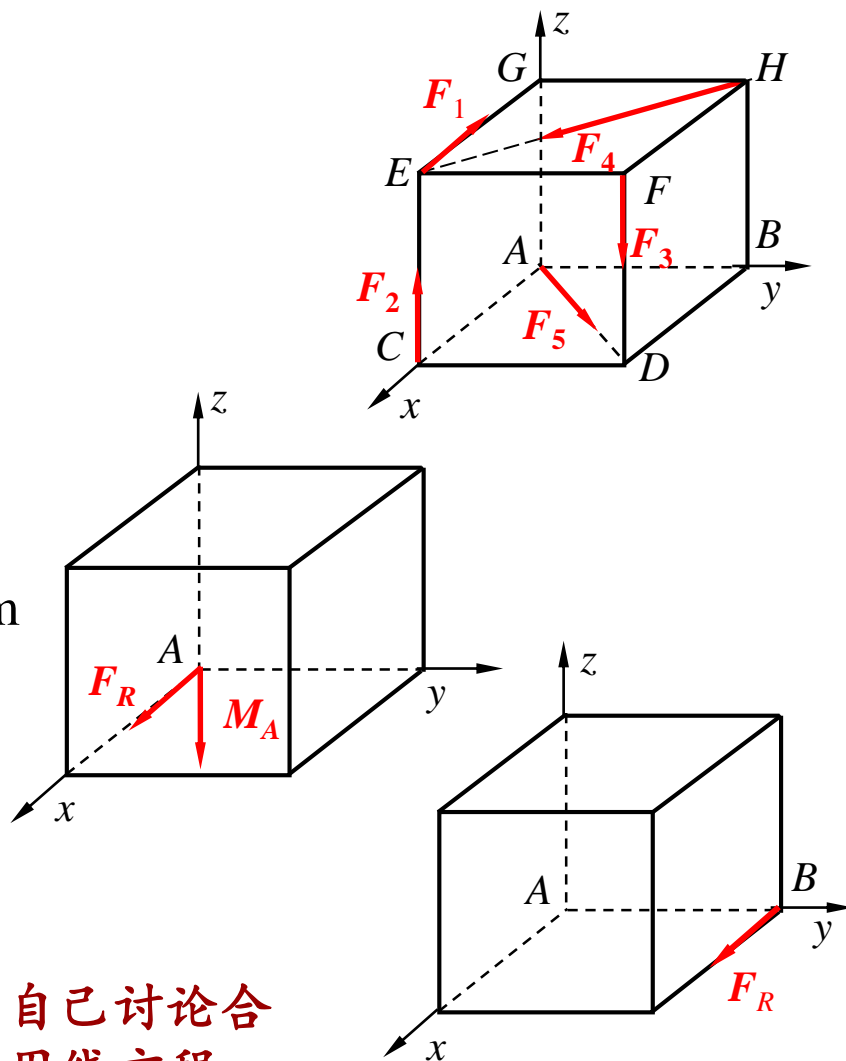
$$M_{Az} = -F_4 \cos 45^\circ \cdot a = -3 \text{ kNm}$$

主矩 $M_A = -3k \text{ kNm}$

$$(2) \quad F_R \cdot M_O = 0 \quad d = \frac{|M_A|}{|F_R|} = 1 \text{ m}$$

$$AB = \frac{F_R \times M_A}{(F_R)^2} = 1j$$

请同学们自己讨论合力的作用线方程



例 在棱长为 a 的正四面体上沿棱边 AB 作用力 F_1 ，沿棱边 CD 作用力 F_2 ，设 $F_1=F_2=F$ ，试求力系向底面 ABC 中心 O 点的简化结果。

解： $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

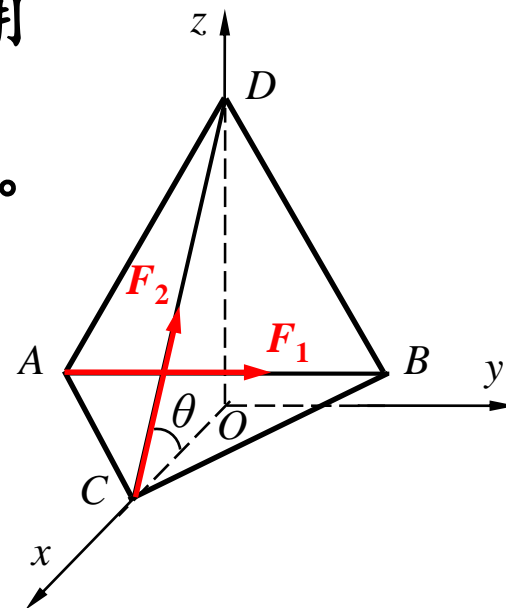
$$F_1 = Fj \quad F_2 = -F\cos\theta i + F\sin\theta k = -\frac{\sqrt{3}}{3}Fi + \frac{\sqrt{6}}{3}Fk$$

主矢
$$F_R = -\frac{\sqrt{3}}{3}Fi + Fj + \frac{\sqrt{6}}{3}Fk$$

$$M_{Ox} = M_x(F_1) + M_x(F_2) = 0$$

$$M_{Oy} = M_y(F_1) + M_y(F_2) = M_y(F_{2z}) = -\frac{\sqrt{2}}{3}Fa$$

$$M_{Oz} = M_z(F_1) + M_z(F_2) = M_z(F_1) = -\frac{\sqrt{3}}{6}Fa$$



主矩

$$M_O = -\frac{\sqrt{2}}{3}Faj - \frac{\sqrt{3}}{6}Fak$$

$$F_R \cdot M_O = -\frac{\sqrt{2}}{2}F^2a \neq 0$$

该力系的简化结果为一力螺旋

请同学们自己讨论力螺旋的具体位置及大小

4. 空间任意力系的合成结果


特例: 平面力系的合成结果

主矢 $F'_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum F_i$

主矩 $M_O = \sum M_O(F_i)$ 代数和

力系特征量 (简化中心 O)		向 O 点简化	合成结果
$F'_R = 0$	$M_O = 0$	平衡	平衡
	$M_O \neq 0$	合力偶	主矩, 此时主矩 M_O 与简化中心无关
$F'_R \neq 0$	$M_O = 0$	合力	主矢经过 O 点
	$M_O \neq 0$	合力、合力偶	主矢经过 O' 点, $OO' = \frac{M_O}{F'_R}$

4. 空间任意力系的合成结果



思考与
讨论

同一力系向不同点简化结果不同,
但最终的合成结果相同.

Q1.某平面力系向A、B两点简化的主矩均为零,此力系简化的最终结果可能是什么?

Q2.平面汇交力系向汇交点以外任一点简化,其结果可能是什么?不可能是什么?

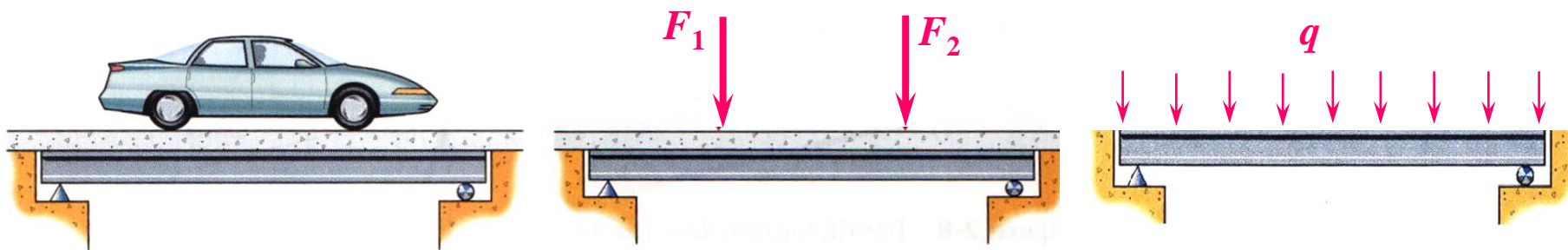
Q3.某平面力系向同平面内任一点简化的结果都相同,那此力系简化的最终结果可能是什么?

§ 2-4 平行力系的中心和重心

1. 集中载荷与分布载荷

物体受力一般是通过物体间接触进行的，接触处所受的力一般都是作用在接触面积上的**分布载荷**。

当分布力作用面积很小时，为了简化计算，可以将分布力简化为作用于一点的合力，称为**集中载荷**。



令 ΔF 表示长度 Δx 上的合力，则**载荷集度** q 定义为极限

$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

2. 平行力系的中心

平行力系—空间力系的一种特殊形式。

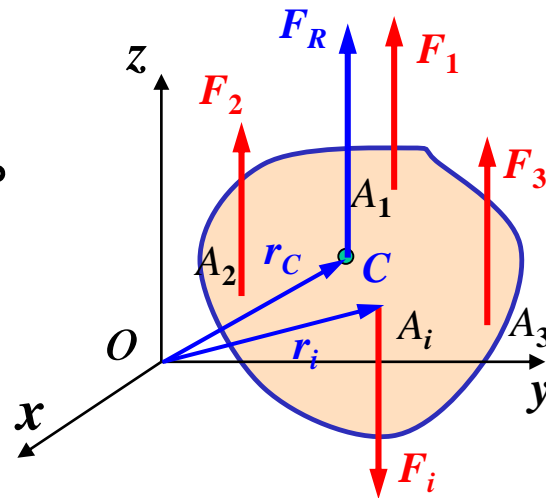
主矢 $F_R = (\sum F_i) k$

主矩 $M_O = \sum (r_i \times F_i) =$
 $\sum r_i \times (F_i k) = \sum (F_i r_i) \times k$

$$F_R \cdot M_O = 0$$

合力矩定理 $\sum (r_i \times F_i) = r_C \times F_R$

$$\sum (F_i r_i) \times k = F_R r_C \times k$$



$$r_C = \frac{\sum (F_i r_i)}{F_R}$$

平行力系各力的大小，作用点已知，不论力系的方向如何改变，合力的作用点始终不变，合力的作用点称为**平行力系的中心**。

2. 平行力系的中心 分布力（分布载荷）的合成

例 三角形分布载荷作用在水平梁上，如图所示。最大载荷强度为 q_m ，梁长 l 。试求该力系的合力。

解： 先求合力

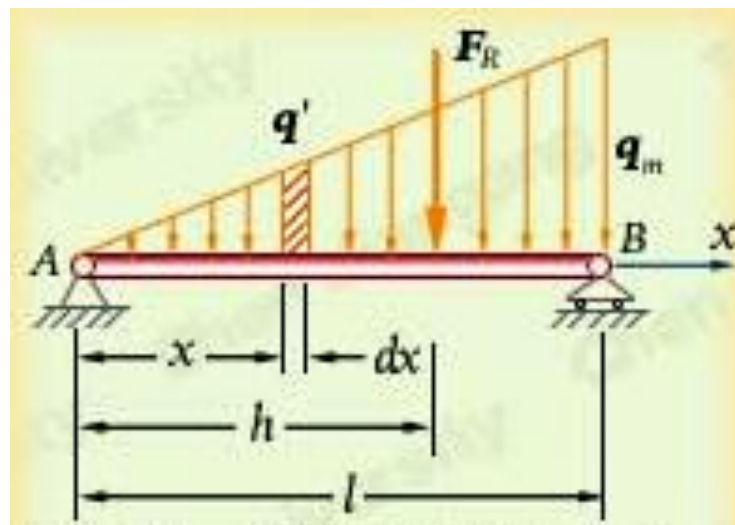
$$q' = \frac{x}{l} q_m$$

$$F_R = \int_0^l q' dx = \frac{1}{2} q_m l$$

合力作用线位置

$$M_A = \int_0^l q' x dx = \frac{q_m l^2}{3}$$

$$h = \frac{M_A}{F_R} = \frac{2}{3} l$$



3. 物体的重心

物体各部分所受重力的合力就是物体的重力，各部分所受重力组成的空间平行力系的中心，称为此**物体的重心**。

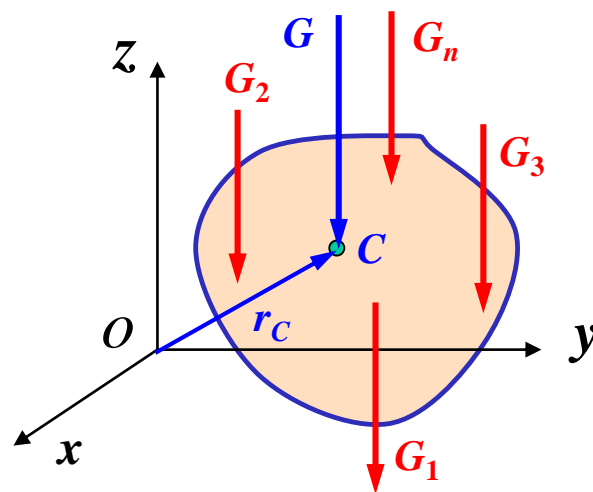
不论物体如何放置，重心在物体内的相对位置不会改变。

$$\mathbf{r}_C = \frac{\Sigma(G_i \mathbf{r}_i)}{G}$$

$$x_C = \frac{\Sigma(G_i x_i)}{G}$$

$$y_C = \frac{\Sigma(G_i y_i)}{G}$$

$$z_C = \frac{\Sigma(G_i z_i)}{G}$$



质心位置坐标公式 $x_C = \frac{\Sigma(m_i x_i)}{m}, y_C = \frac{\Sigma(m_i y_i)}{m}, z_C = \frac{\Sigma(m_i z_i)}{m}$

3. 物体的重心

判断重心的方法

1、按照对称特点判别法

若物体具有对称面、对称轴或对称中心，该物体的重心相应地就在对称面、对称轴或对称中心上。

2、分割组合法

负面积法、负体积法。

3、实验法

需要求一个已有的不规则形状或不均匀物体的重心时，可采用实验法。例如：悬挂法、称重法等。

例 在一个半径为 R 的四分之一圆中挖去一个半径为 $R/2$ 的半圆，如图所示，试求其重心。

解： 四分之一圆的面积 $A_1 = \frac{\pi R^2}{4}$

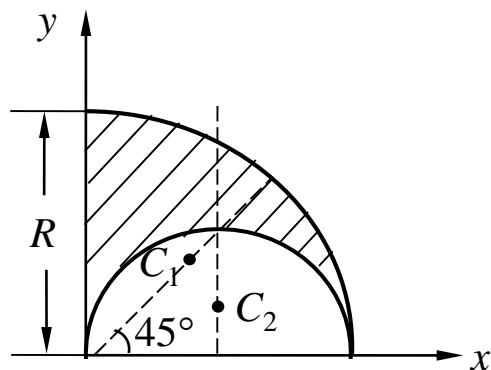
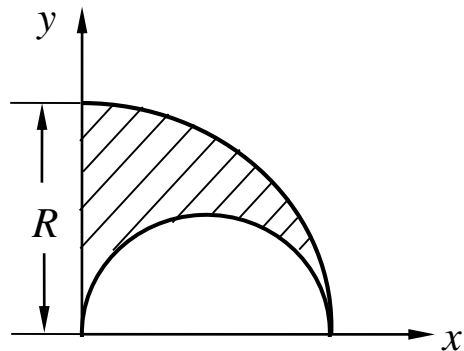
重心坐标为 $C_1(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$

半圆的面积 $A_2 = \frac{\pi R^2}{8}$

重心坐标为 $C_2(\frac{R}{2}, \frac{2R}{3\pi})$

$$x_C = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2} = \left(\frac{8}{3\pi} - \frac{1}{2}\right)R$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2} = \frac{2}{\pi}R$$



本章小结

1. 力对点之矩是力使物体绕该点转动效果的度量，是定位矢量。
2. 力对轴之矩是力使物体绕轴转动效果的度量，是代数量。
3. 力对点之矩在通过该点某轴上的投影等于力对该轴之矩。

● 力矩计算可利用二者之间的关系灵活计算

● 合力矩定理在求解中的应用

4. **力偶**与**力矩**是两个不同的概念，在研究力系的等效简化时，二者形成一定的关系。

5. 力系的简化结果为过简化中心的**主矢**和**主矩**，这两个物理量是力系的特征量。

● **力的平移定理为力系简化提供了一个桥梁，在以后的平衡方程的建立中不再使用。**

6. 物体的重心、质心和形心一般不同。