摊破浣溪沙·五里滩头风欲平

唐代　佚名

五里滩头风欲平，张帆举棹觉船轻。柔橹不施停却棹，是船行。

满眼风波多闪灼，看山却似走来迎。子细看山山不动，是船行。

第七章 点的复合运动

研究主题:同一点相对不同参考坐标系运动之间的关系.

研究意义:1. 提供一种运动分析方法,运动的分解与合成的方法。

2. 用于机构运动分析,构件的重合点的速度和加速度之间的关系,运动的传递.

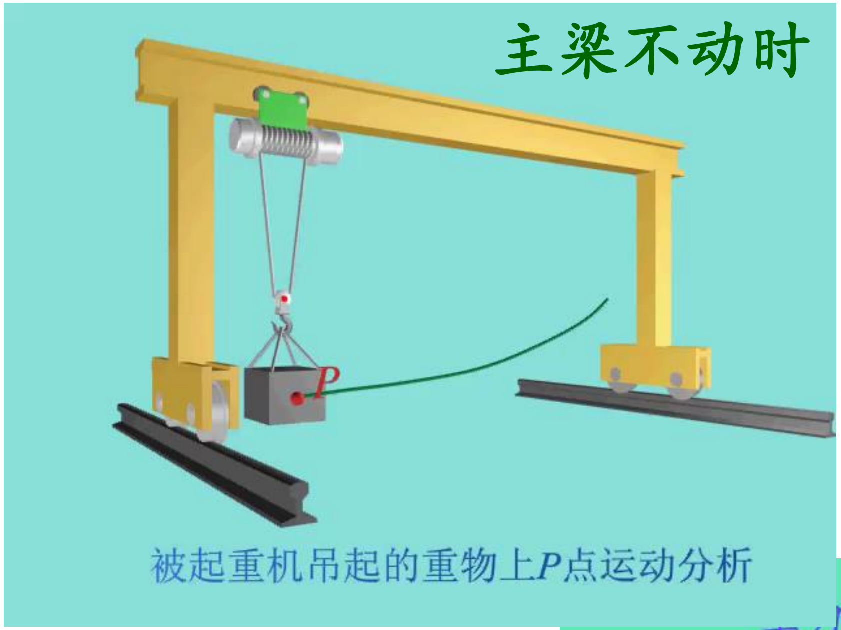
3. 研究非惯性系统动力学的基础。

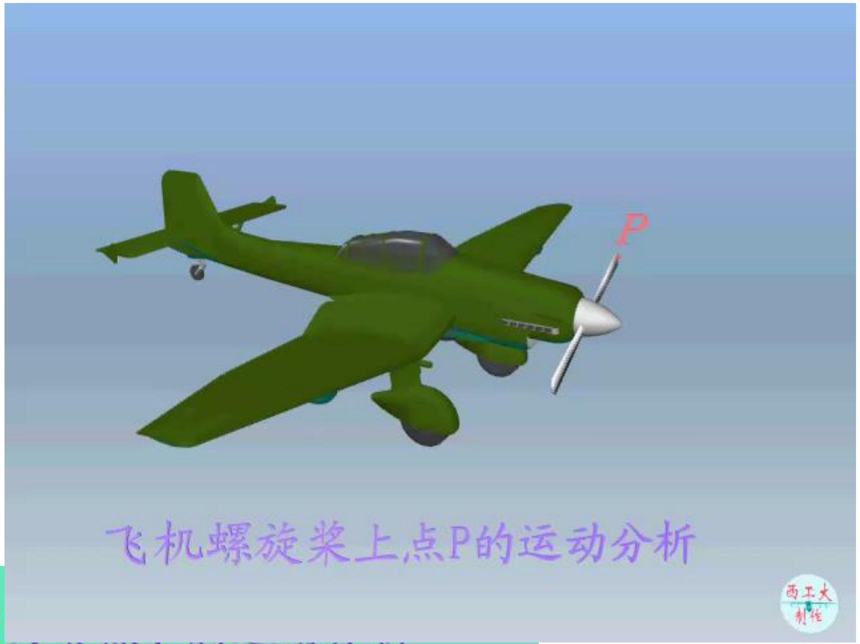
§7-1 复合运动的基本概念

§7-2 速度合成定理

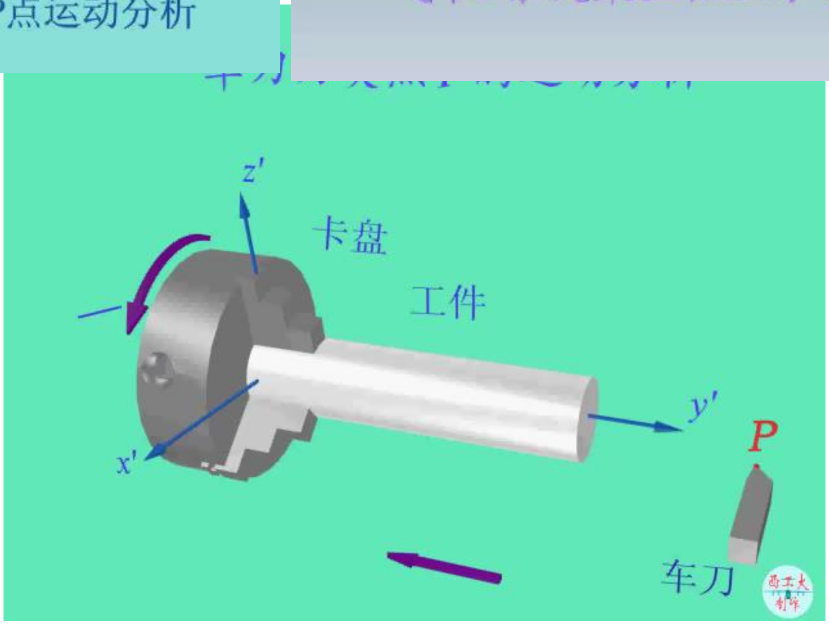
§7-3 加速度合成定理

§7-1 复合运动的基本概念





点的复合运动实例



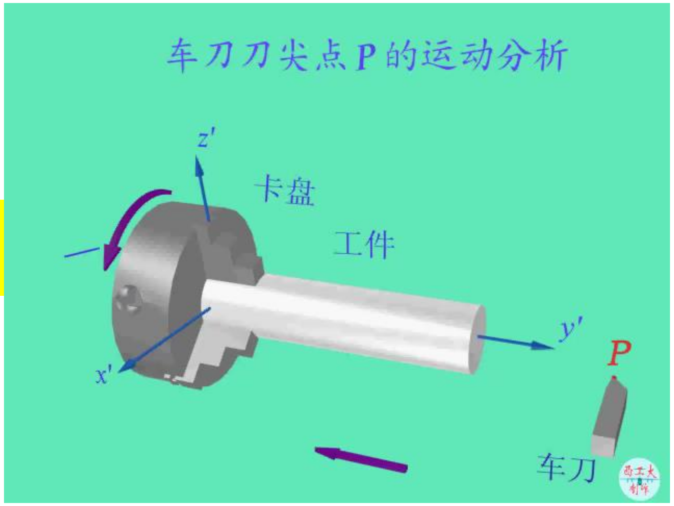
1. 三个对象

动点—研究运动的点, 可以是运动的物体或运动物体上的某点.

定参考坐标系（定系）—固结在地球上的坐标系称为定参考系。

动参考坐标系（动系）—将固连在相对于地球运动的参考体(刚体)上的坐标系称为动参考系。

注意:三个对象应分别属于三个物体.



2. 三种运动

绝对运动：动点相对定系的运动
相对运动：动点相对动系的运动

点的运动

牵连运动：动系相对定系的运动

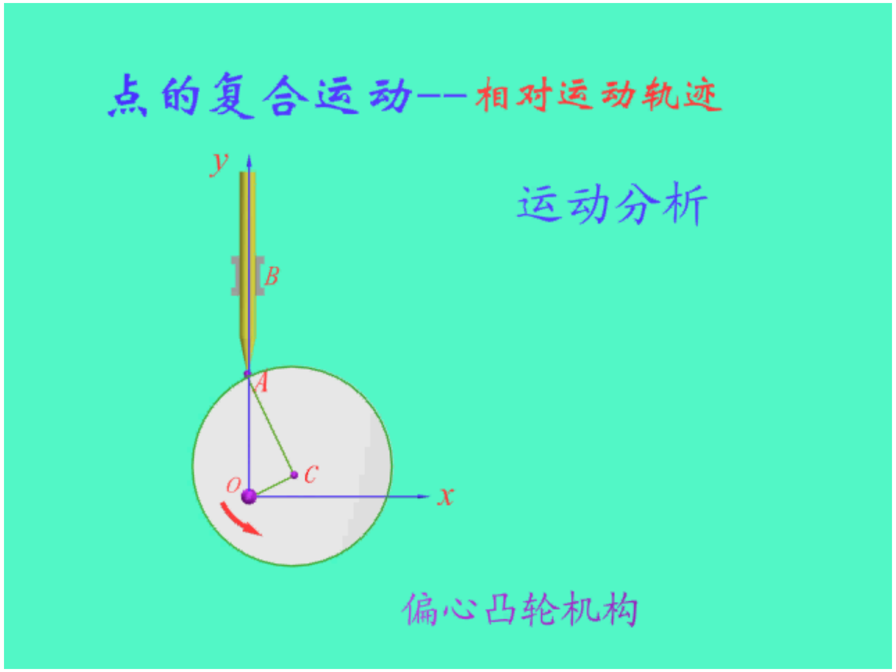
刚体的运动

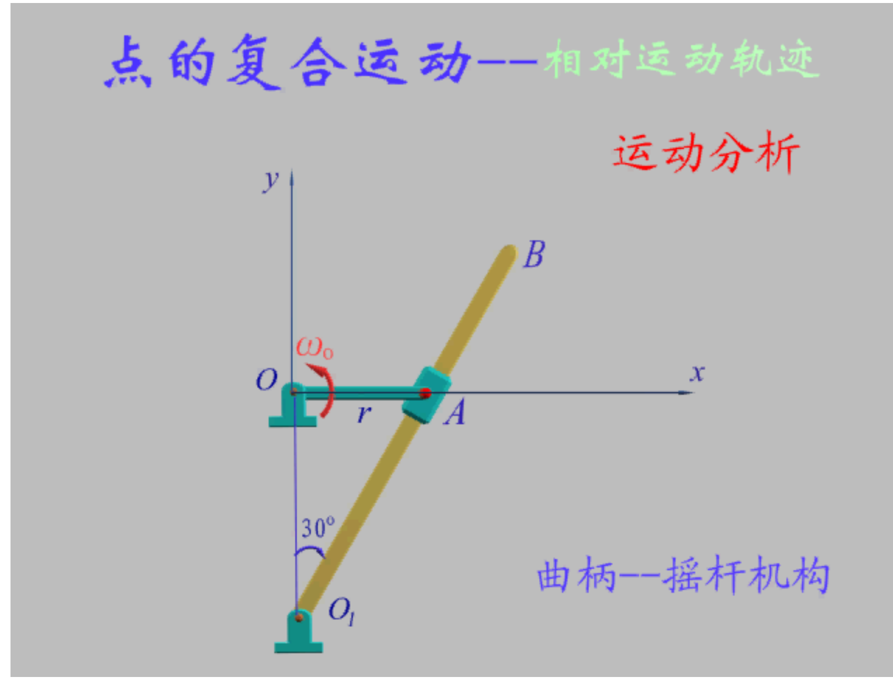
运动的分解与合成

物体的绝对运动可以看成是牵连运动和相对运动的合成结果.

运动的分解与合成

点相对刚体的运动与刚体运动的合成.

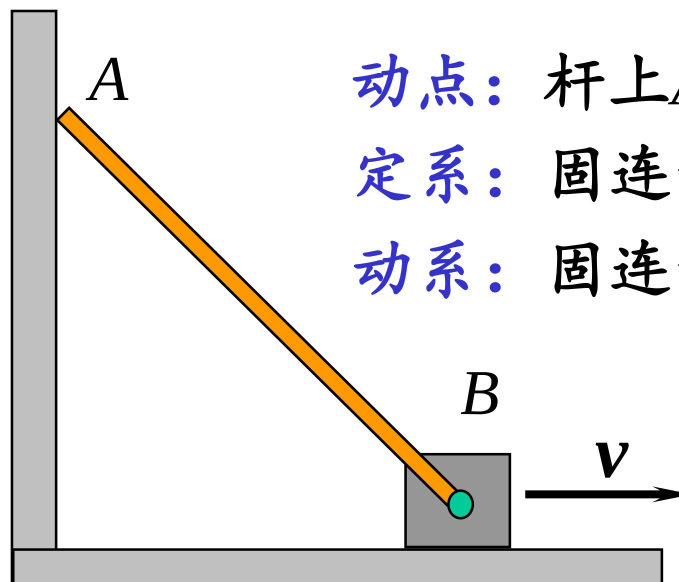




动点？ 绝对运动？

定参考系？ 相对运动？

动参考系？ 牵连运动？

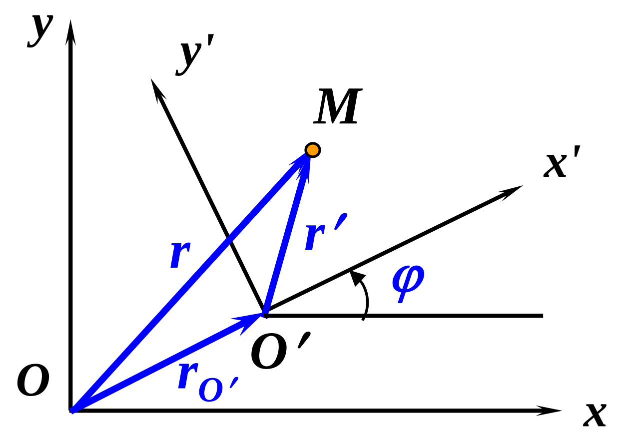


动点：杆上A点

定系：固连于墙面

动系：固连于滑块B

2. 三种运动



以平面运动为例

绝对运动方程

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

相对运动方程

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'$$

牵连运动方程

$$x_{O'} = x_{O'}(t)$$

$$y_{O'} = y_{O'}(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

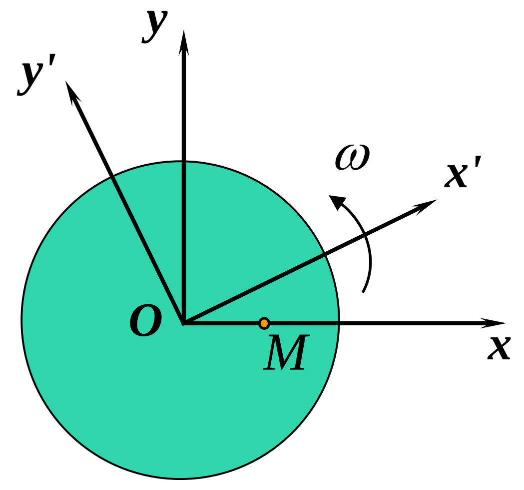
三种运动的关系

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{r}'$$

$$x = x_{O'} + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$

$$y = y_{O'} + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

例：用车刀切削工件的直径端面，车刀刀尖M沿水平轴x作往复运动，如图所示。设Oxy为定系，刀尖的运动方程为$x=b\sin\omega t$，工件以匀角速度ω逆时针转动。求车刀在工件直径端面上切出的痕迹。



解：刀尖的相对轨迹

$$x = b\sin\omega t, y = 0$$

$$x_{O'} = 0, y_{O'} = 0, \varphi = \omega t$$

$$x = x_{O'} + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$

$$y = y_{O'} + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

$$x' = b\sin\omega t\cos\omega t$$

$$y' = -b\sin^2\omega t$$

$$(x')^2 + (y' + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4}$$

3. 三种速度、加速度

*绝对速度、加速度：动点相对定系的速度、加速度；

$$\boldsymbol{v}_a = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{a}_a = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}$$

*相对速度、加速度：动点相对动系的速度、加速度；

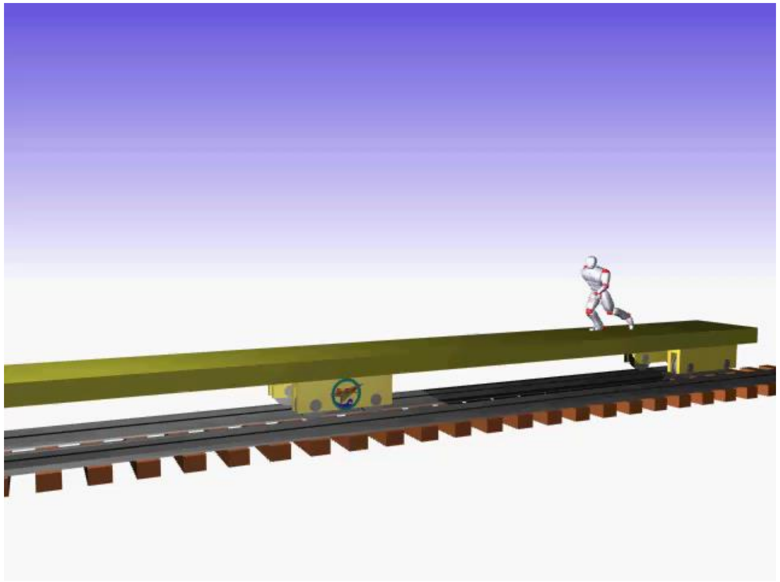
$$\boldsymbol{v}_r = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}' \qquad \boldsymbol{a}_r = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}'\boldsymbol{i}' + \ddot{y}'\boldsymbol{j}' + \ddot{z}'\boldsymbol{k}'$$

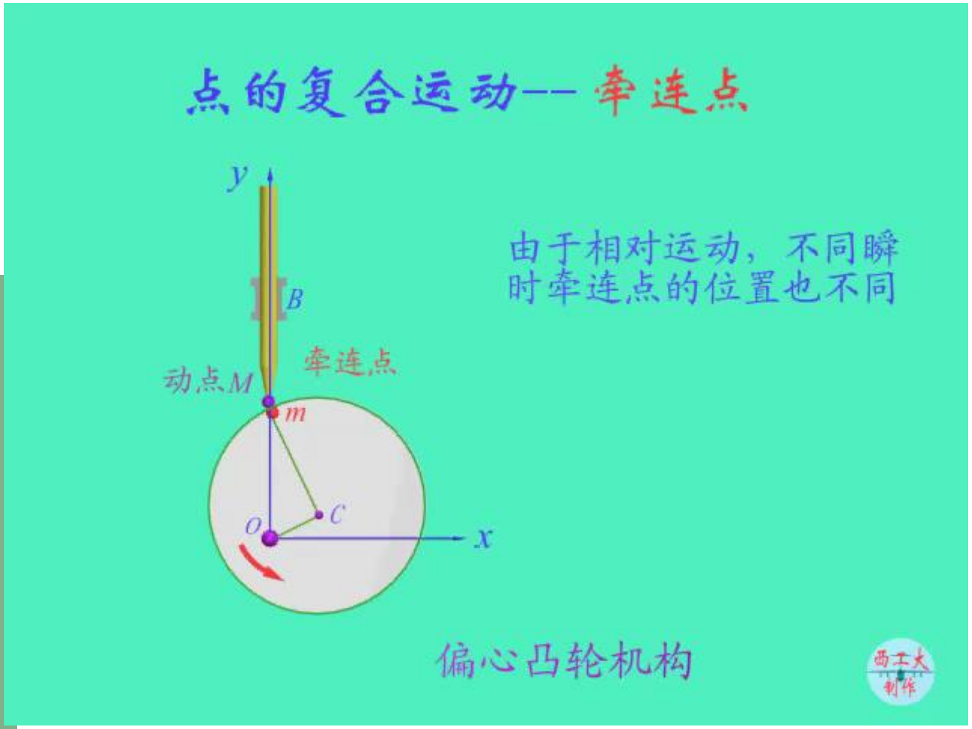
动点的牵连点：某瞬时动系上与动点重合的点。

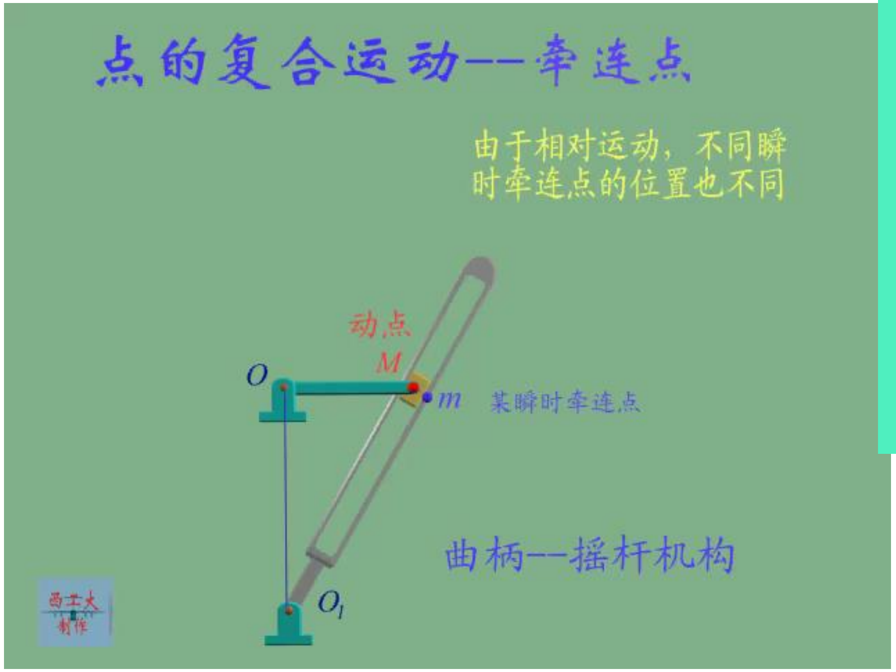
*牵连速度、加速度：牵连点 相对定系的速度、加速度。

$$\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{a}_e$$

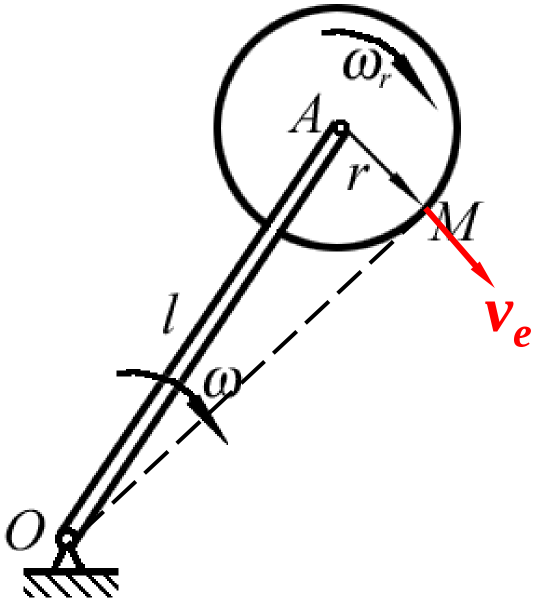
牵连点的概念




点的复合运动——牵连点
由于相对运动，不同瞬
时牵连点的位置也不同
y
B
动点M
牵连点
m
O
C
x
偏心凸轮机构
西工大
制作


点的复合运动——牵连点
由于相对运动，不同瞬
时牵连点的位置也不同
动点
M
O
m
某瞬时牵连点
曲柄——摇杆机构
O_1
西工大
制作

思考例： 长l的直杆OA，以角速度ω绕O轴转动，杆的A点端铰接一个半径为r的圆盘，圆盘相对于直杆以角速度ω_r绕A轴转动。今以圆盘边缘上的一点M为动点，OA为动系，当AM垂直OA时，M点的牵连速度大小为________________。（图示方向）



牵连点的位置：

<u>动系上(可以延伸)</u>

<u>此时动点的位置</u>

牵连点的运动：

<u>牵连点的位置</u>

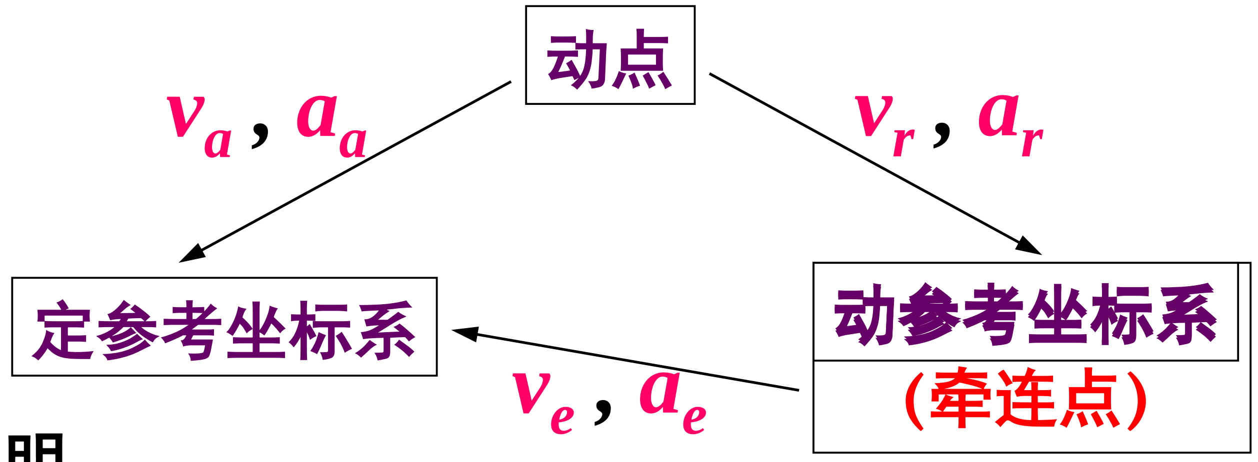
<u>动系运动(牵连运动)</u>

$$v_e = \sqrt{l^2 + r^2}\,\omega$$

Review

Motion of a body is absolute but the description of motion with the characteristics of relativity.

(运动是绝对的，运动描述是相对的)



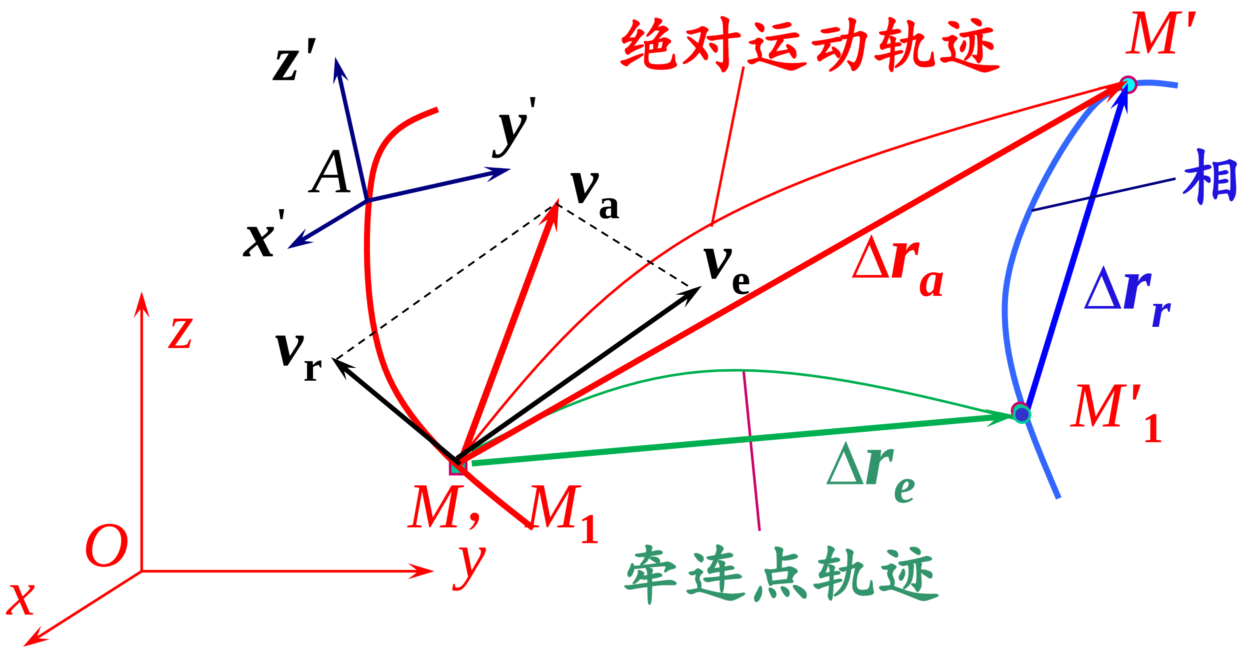
● 几点说明

- ◆ 本章只从**几何法**研究点的复合运动理论，建立绝对运动和相对运动（速度、加速度）之间的关系。
- ◆ 绝对运动、相对运动是点的运动，可能是直线运动或曲线运动；而牵连运动是刚体的运动，可能是平动、定轴转动等。
- ◆ 参考系(动系)的选择是问题的关键。运动分析是基础。

§7-2 速度合成定理

刚体在定系$Oxyz$中运动，动系$Ax'y'z'$固结在刚体上。

M_1点——t瞬时动系上与动点重合的点（牵连点）。



$$\Delta \boldsymbol{r}_a = \Delta \boldsymbol{r}_r + \Delta \boldsymbol{r}_e$$

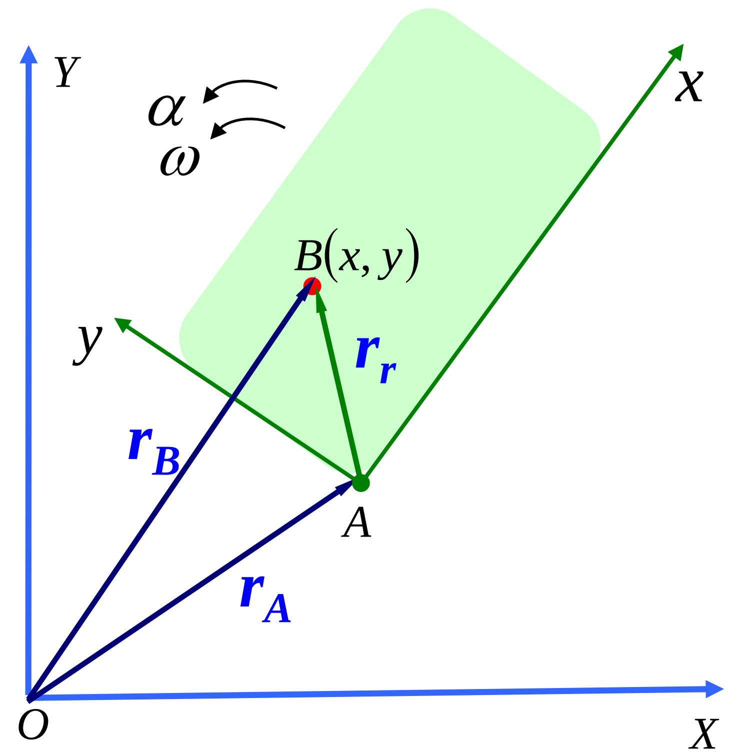
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_\mathrm{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_\mathrm{r}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_\mathrm{e}}{\Delta t}$$

?

$$\boxed{\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e}$$

OXY fixed frame of reference

Axy moving frame of reference



$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_r$$

$$\boldsymbol{r}_r = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_r}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_r}{\mathrm{d}t} = (\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}) + (x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t})$$

$$= (\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}) + \boldsymbol{\omega} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_r$$

$$\boldsymbol{v}_r = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}_r}{\mathrm{d}t} \neq \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_r}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_r$$

let $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_r$

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

点的速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

动点在某瞬时的绝对速度等于它在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和。

*矢量方程式，在平面问题中相当两个标量方程式；

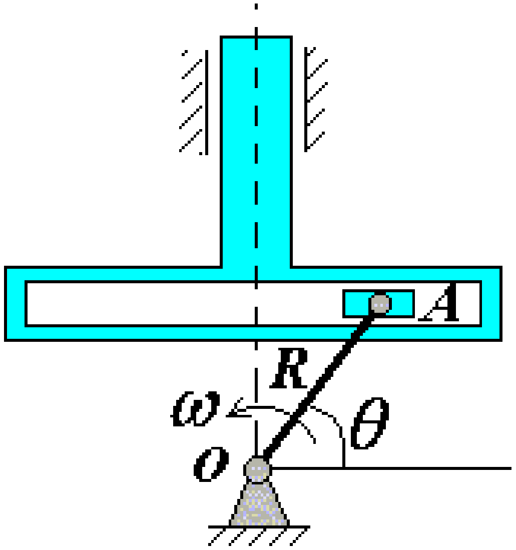
*建立了任一瞬时三个速度之间的关系，不能求导，只能求得特殊位置(某瞬时)的速度. 一定是以绝对速度为对角线组成平行四边形.

*建立了同一点相对两个不同参考系之间的速度关系（v_a, v_r），同一位置两个不同点之间的速度关系（v_a, v_e）。

*牵连运动形式不限.

*该定理应用的基础是运动分析, 不是简单的套用公式.

例 已知：简谐运动机构的 R,ω。
求：图示位置T形杆的速度。



解：　动点：滑块；

动系：T形杆；

绝对运动：圆周；

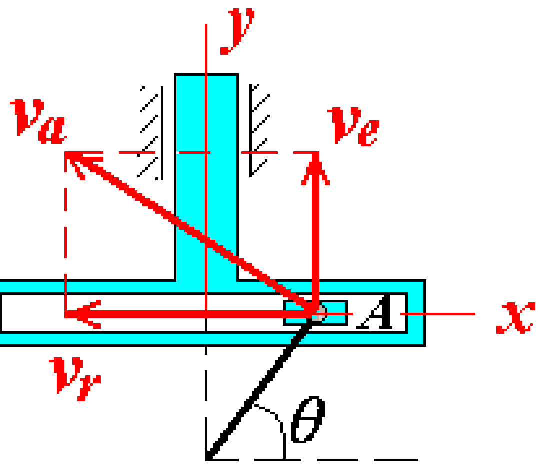
相对运动：直线；

牵连运动：平动

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_a = \omega R$$

$$v_e = v_a \cos\theta = R\omega\cos\theta$$



例 直角曲杆OCD在图示瞬时以角速度ω绕O轴转动，使杆AB铅垂运动。已知$OC = L$。试求φ=45°时，从动杆AB的速度。（L以cm计）

解： 动点：AB上的A点；

动系：杆OCD；

绝对运动：直线；

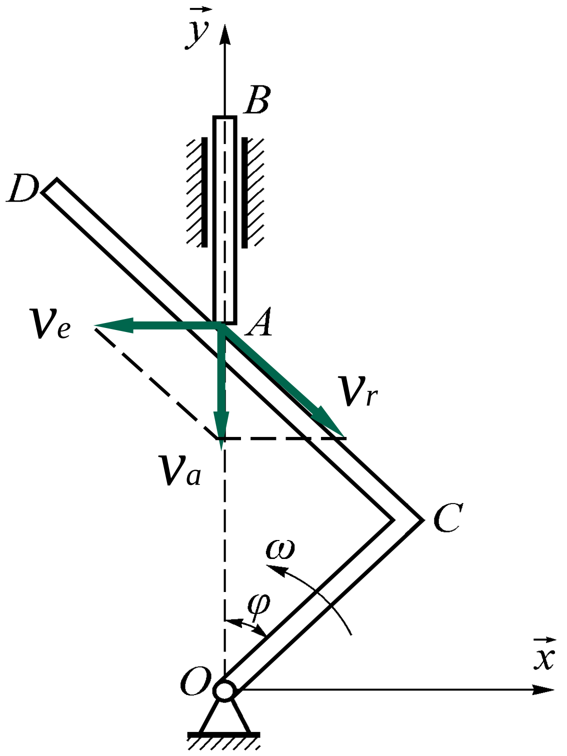
相对运动：直线；

牵连运动：转动。

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_a = v_e = OA\omega = \sqrt{2}L\omega \text{ cm/s}$$

（铅垂向下）



求解过程

1. 动点动系的选取。动点通常为构件的重合点，持续接触点，动点动系不在同一物体上。
2. 正确分析三种运动。区分点的运动和刚体运动。
3. 速度关系图不可少。以绝对速度为对角线的平行四边形。
4. 求解有几何法和投影法。

求解策略

the principles of choosing M.P.(动点),M.F.(动系)

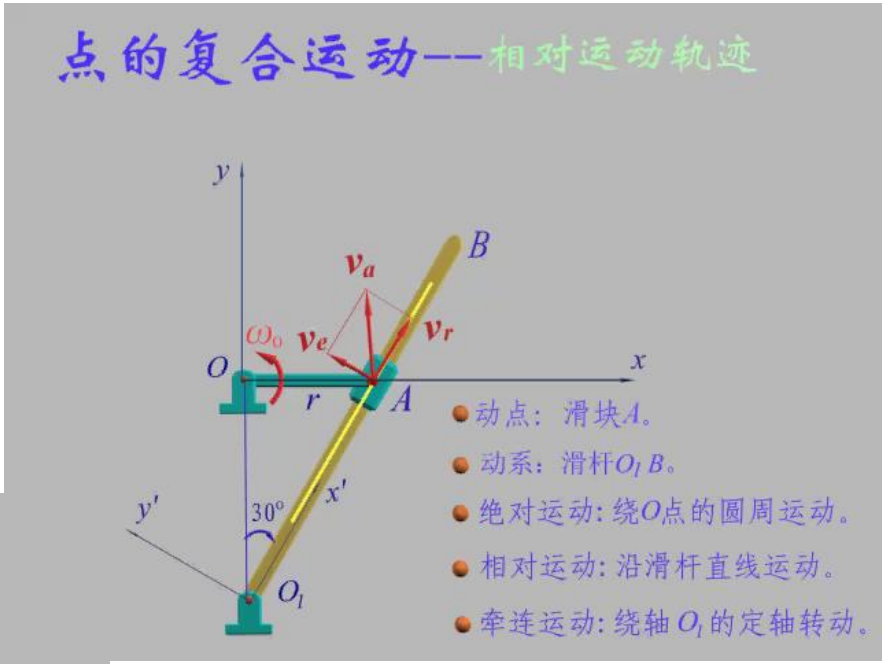
(1) M.P. and M.F. can't be in a same body.

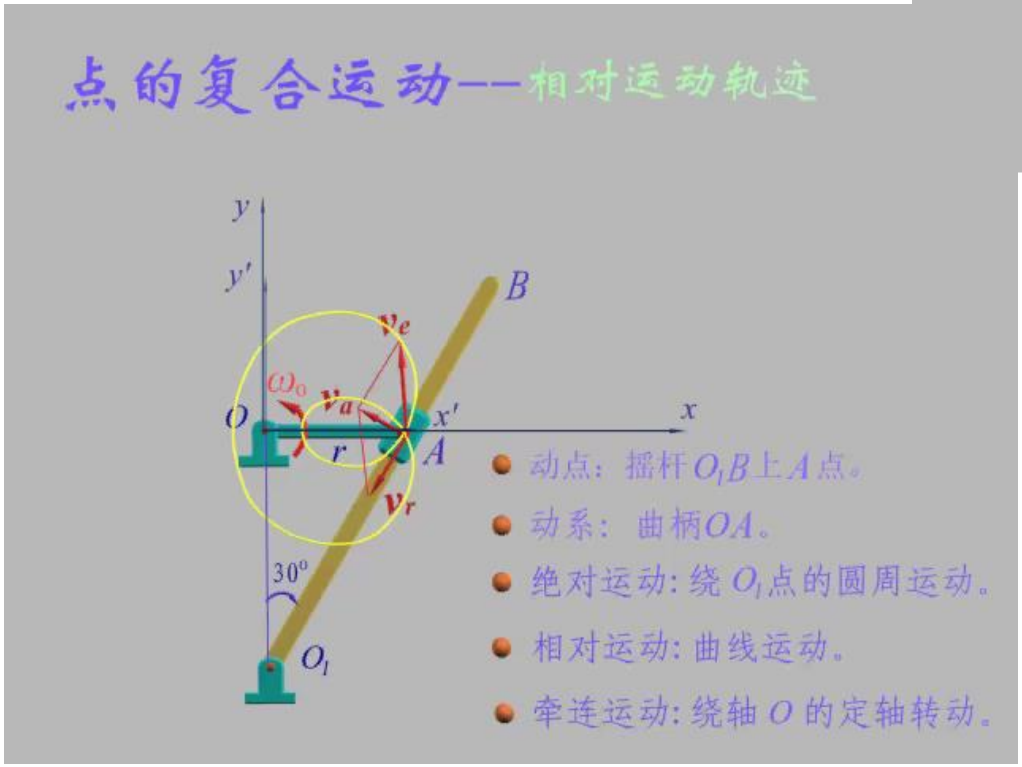
(2) M.P. must be a specific point and can't be changed during the motion.

(3) Generally, relative motion should be simple and the relative track is given.

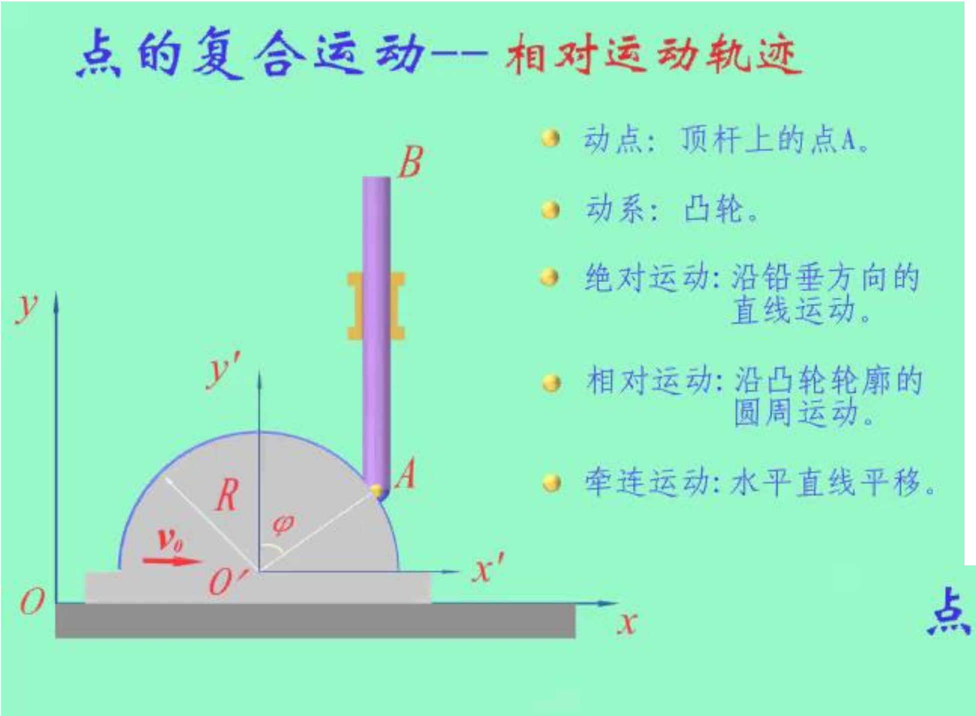
1. 选择持续接触点为动点。
2. 对没有持续接触点的问题，一般不选择接触点为动点。根据具体问题具体分析。

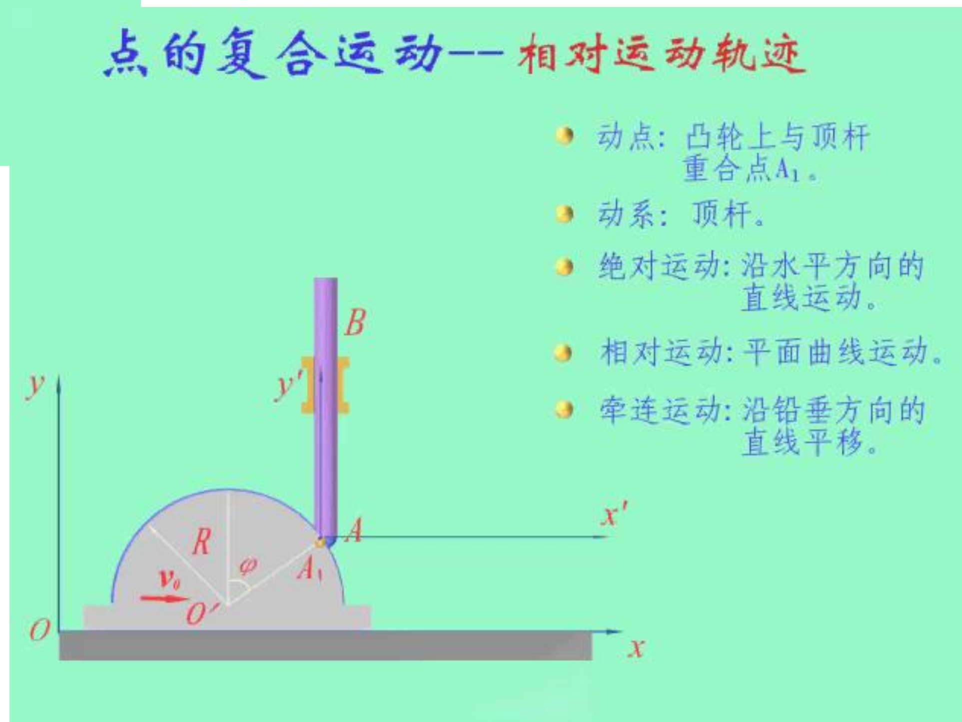
动点动系的选取

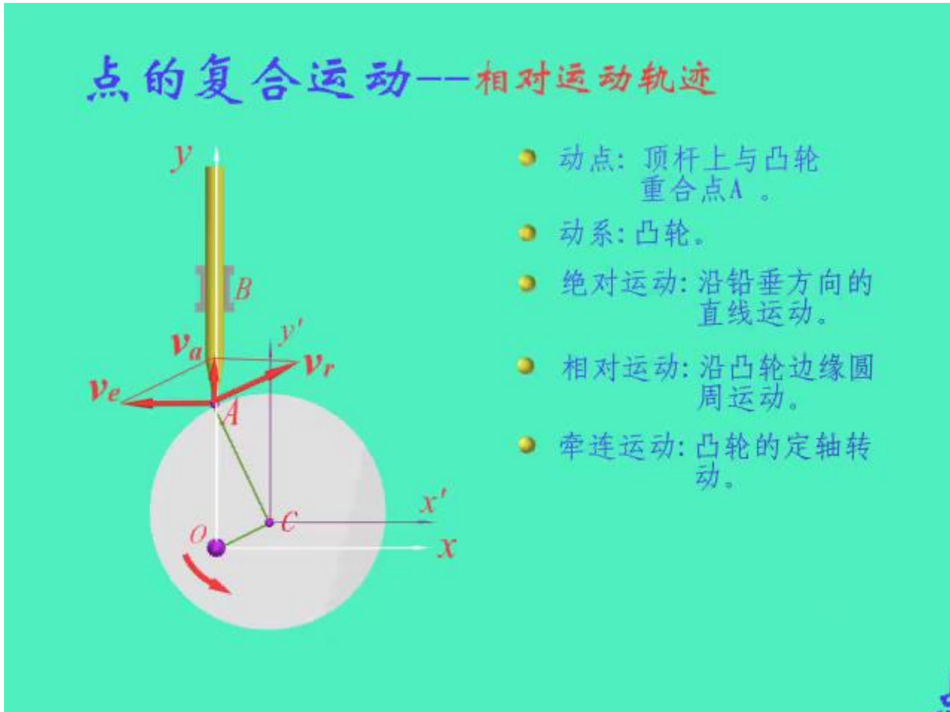

点的复合运动——相对运动轨迹
y
B
v_a
ω_0
v_e
v_r
O
x
r
A
30°
y'
x'
O_1
动点：滑块A。
动系：滑杆O_1B。
绝对运动：绕O点的圆周运动。
相对运动：沿滑杆直线运动。
牵连运动：绕轴O_1的定轴转动。


点的复合运动——相对运动轨迹
y
y'
B
v_e
ω_0
v_a
O
x'
x
r
A
v_r
30°
O_1
动点：摇杆O_1B上A点。
动系：曲柄OA。
绝对运动：绕O_1点的圆周运动。
相对运动：曲线运动。
牵连运动：绕轴O的定轴转动。

动点动系的选取


点的复合运动-- 相对运动轨迹
动点：顶杆上的点A。
动系：凸轮。
绝对运动：沿铅垂方向的直线运动。
相对运动：沿凸轮轮廓的圆周运动。
牵连运动：水平直线平移。
B
A
R
φ
y
y'
x'
x
O
O'
v₀


点的复合运动-- 相对运动轨迹
动点：凸轮上与顶杆重合点A₁。
动系：顶杆。
绝对运动：沿水平方向的直线运动。
相对运动：平面曲线运动。
牵连运动：沿铅垂方向的直线平移。
B
A
A₁
R
φ
y
y'
x'
x
O
O'
v₀



动点：凸轮轮心

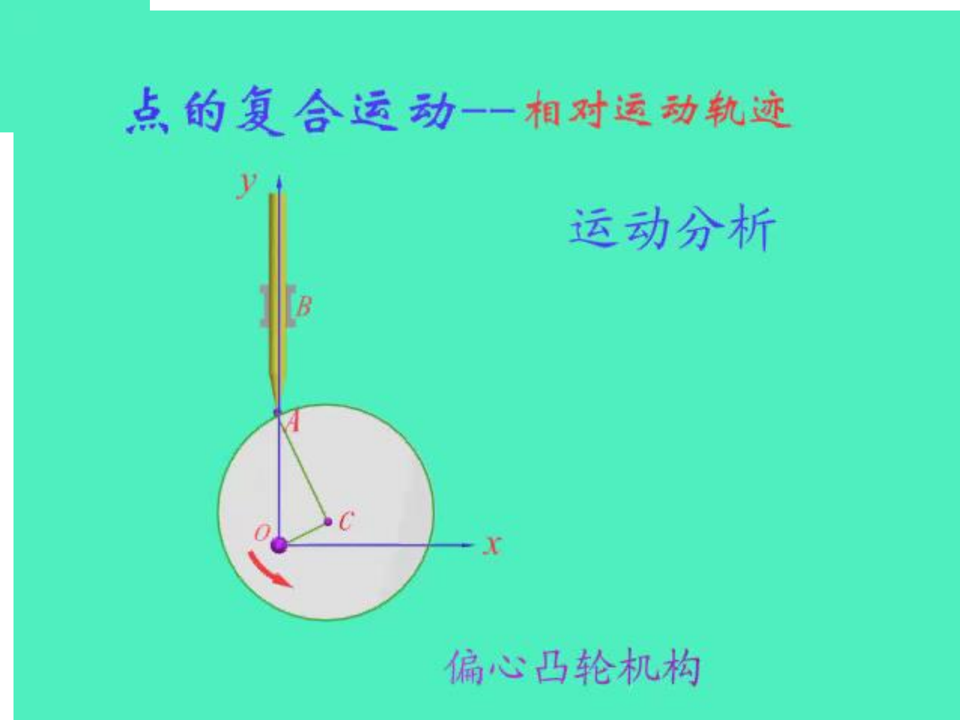
动系：顶杆

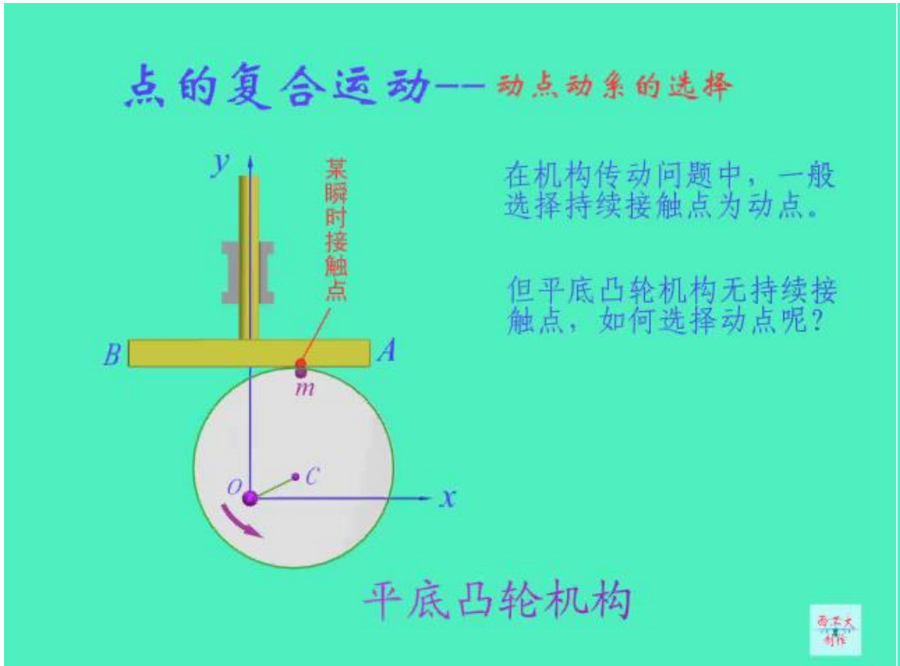
绝对运动：圆周

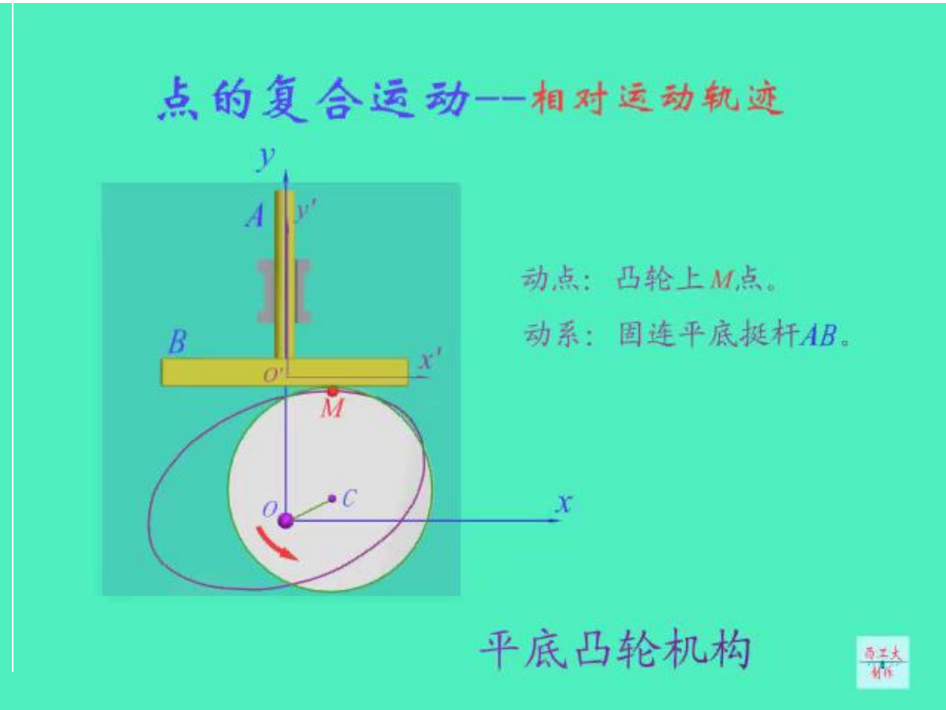
相对运动：圆周

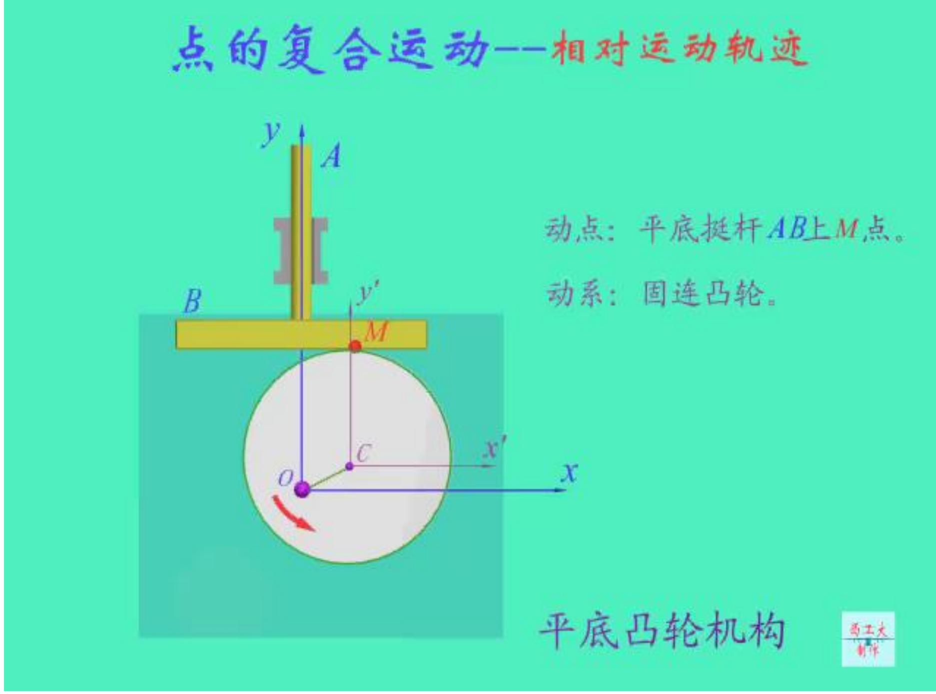
牵连运动：平动

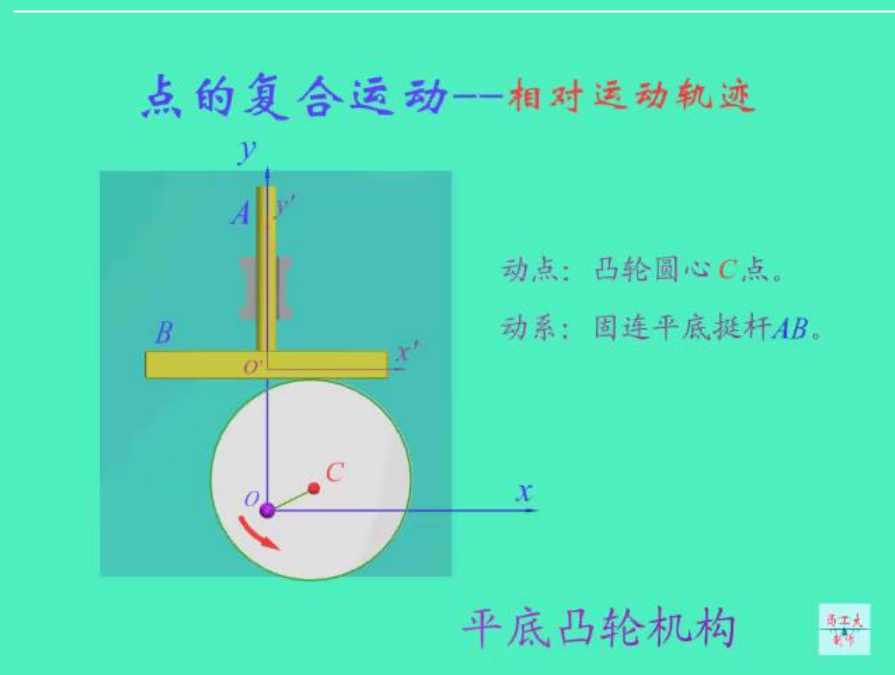
动点动系的选取




点的复合运动——动点动系的选择
y
某瞬时接触点
B
A
m
O
C
x
在机构传动问题中，一般选择持续接触点为动点。
但平底凸轮机构无持续接触点，如何选择动点呢？
平底凸轮机构


点的复合运动——相对运动轨迹
y
A
y'
B
O'
x'
M
O
C
x
动点：凸轮上M点。
动系：固连平底挺杆AB。
平底凸轮机构


点的复合运动——相对运动轨迹
y
A
B
y'
M
O
C
x'
x
动点：平底挺杆AB上M点。
动系：固连凸轮。
平底凸轮机构


点的复合运动——相对运动轨迹
y
A
y'
B
O'
x'
C
O
x
动点：凸轮圆心C点。
动系：固连平底挺杆AB。
平底凸轮机构

例 沿竖直轨道运动的T形杆AB，其上的销钉C插在半径为R的圆槽内，带动物块D沿水平方向运动。在图示位置，杆AB的速度为$\boldsymbol{v}$，$\varphi = 30°$。试求此瞬时物块D的速度。

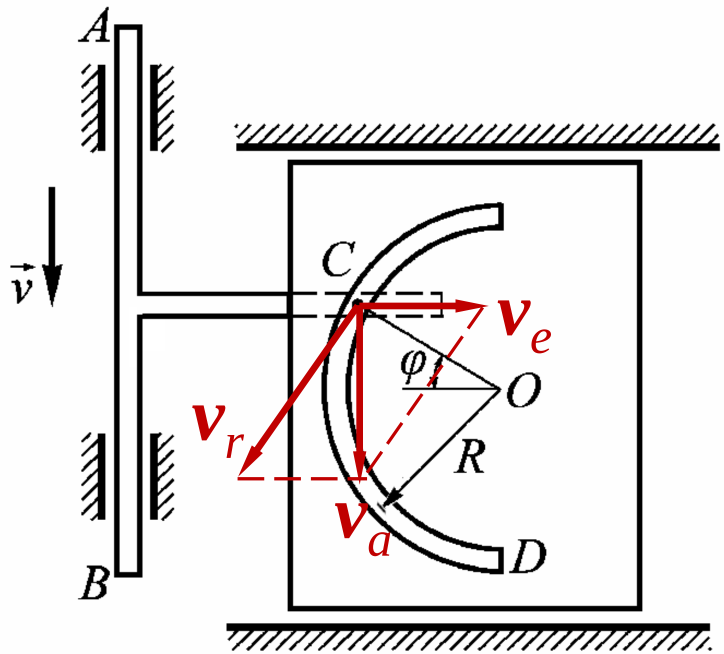
解： 动点：C

动系：物块D

绝对：直线

相对：圆周

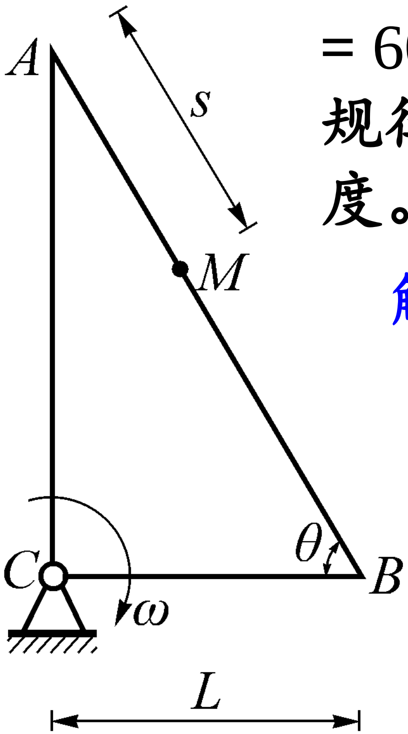
牵连：平动



$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_e = v_a \tan\varphi = 0.58v$$

（水平向右）



例 图示直角三角形板ABC，CB边长$L = 6\text{cm}$，$\theta = 60°$，以匀角速度ω绕C轴转动，点M以$s = 6t$的规律自A向B运动。试求当$t = 1\text{s}$时，点M的绝对速度。（s以cm计，t以s计）

解：M为动点，动系固连于三角形板，

相对：直线，牵连：转动

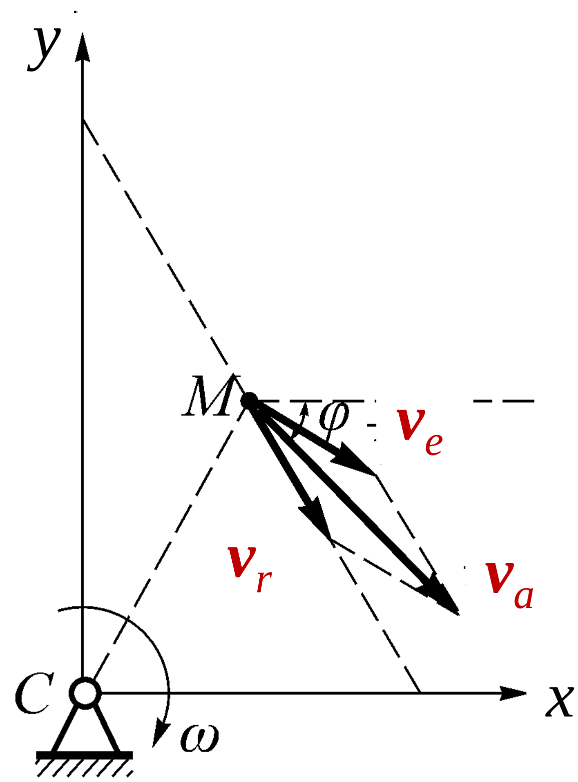
$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_r = 6 \qquad v_e = 6\omega$$

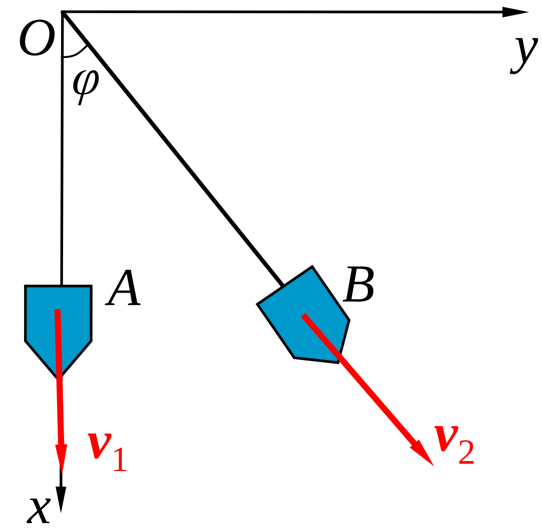
$$v_x = v_e \cos 30° + v_r \sin 30°$$

$$v_y = -v_e \sin 30° - v_r \cos 30°$$

$$v = 6\sqrt{\omega^2 + \sqrt{3}\omega + 1}$$



例 船A和船B分别沿夹角是φ的两条直线行驶。已知船A的速度是$\boldsymbol{v}_1$，船B始终在船A的左舷正对方向。试求船B的速度$\boldsymbol{v}_2$和它对船A的相对速度。



解　动点—船B

动系—固连于船A上

定系—固连于海岸

绝对运动—沿OB的直线运动。

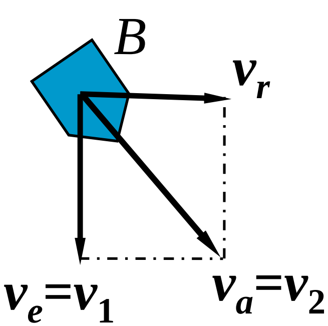
相对运动—沿AB的直线运动。

牵连运动—直线平动。

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_a = v_2 \qquad v_e = v_1$$

$$v_2 = v_1/\cos\varphi \qquad v_r = v_1\tan\varphi$$

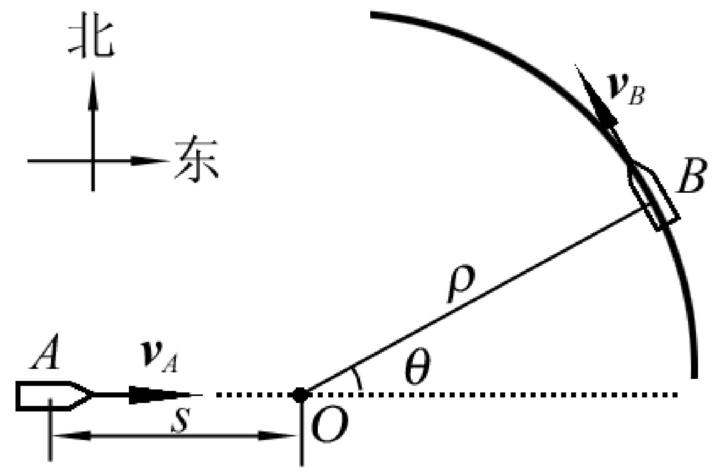


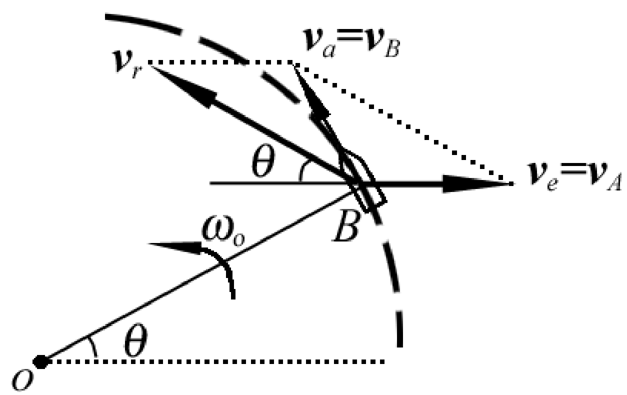
思考：甲相对于乙的速度为$\boldsymbol{v}_r$，则能不能直接给出乙相对于甲的速度？

例 静止的海面上有两艘舰艇A和B，分别以匀速$v_A=v_B=10$ m/s行驶，如图所示。A艇沿直线向东，B艇则沿以O为圆心，$\rho=100$m为半径的圆弧行驶。设在图示瞬时，$\theta=30^{\circ}$,$s=50$m

求：(1) B艇相对于A艇的速度；

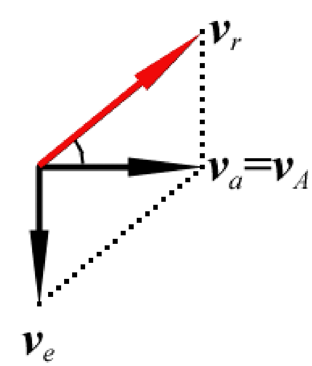
(2) A艇相对于B艇的速度。





$$v_r = 2v_a\cos\theta = 17.3\text{m/s}$$

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2} = 11.18\text{m/s}$$

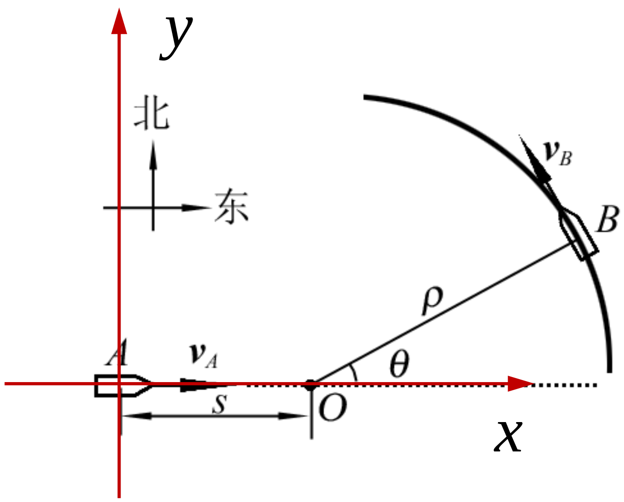


解析法另解

Axy坐标系下的B艇的运动方程

$$x = x_B - x_A = 100\cos(\frac{t}{10} + \frac{\pi}{6}) - 10t + 50$$

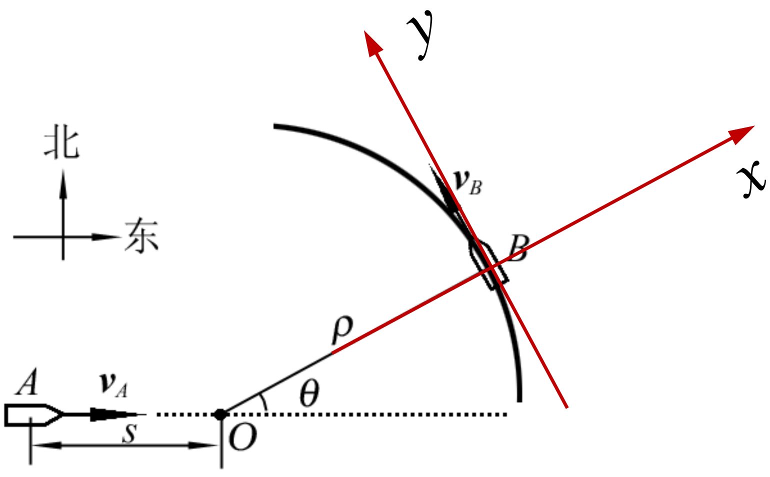
$$y = y_B - y_A = 100\sin(\frac{t}{10} + \frac{\pi}{6})$$



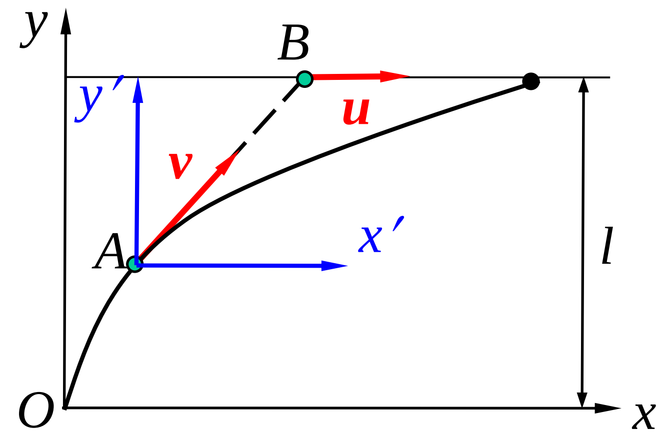
Bxy坐标系下的A艇的运动方程

$$x = -100 - (50 - 10t)\cos(\frac{t}{10} + \frac{\pi}{6})$$

$$y = (50 - 10t)\sin(\frac{t}{10} + \frac{\pi}{6})$$



例 设两点A和B在平面上运动。被追踪点B以匀速$\boldsymbol{u}$在距离x轴为常距离l的直线上运动。追踪点A以速度大小为常数v（$v > u$），方向沿两点连线而运动。开始时，两点连线垂直于x轴。试求两点相遇的时间。



解： 动点B，定系Oxy，动系$Ax'y'$

$$\boldsymbol{v}_a = u\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{v}_r = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}'$$

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v} = \frac{vx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\boldsymbol{i} + \frac{vy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$\dot{x}' = u - \frac{vx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \dot{y}' = -\frac{vy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$t = 0, x' = 0, y' = l$$

$$t = T, y' = 0$$

$$\boxed{T = \frac{lv}{v^2 - u^2}}$$

Review

❖列写运动方程及对时间求导的方法解题（解析法）；

进行运动分解，并用速度合成定理解题（几何法）。

❖进行运动分解时，动点、动系的选择决定了问题的难易、可行性。

❖运动分析为基础，绝非简单的投影关系。

§ 7-3　加速度合成定理

OXY　fixed frame of reference

Axy　moving frame of reference

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_r$$

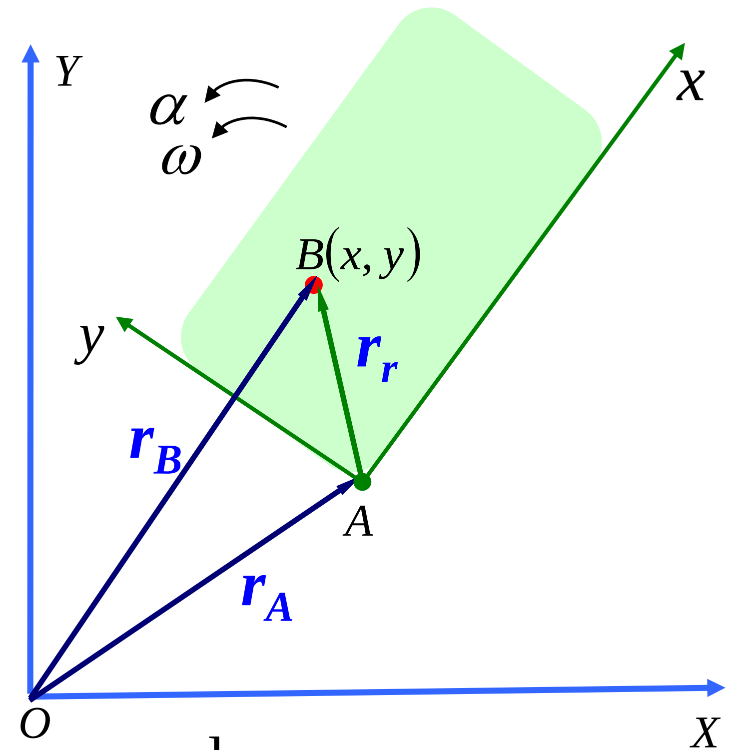
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_r) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_r + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_r}{\mathrm{d}t}$$

$$= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_r)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_{rx}\boldsymbol{i} + v_{ry}\boldsymbol{j})$$

$$= (\dot{v}_{rx}\boldsymbol{i} + \dot{v}_{ry}\boldsymbol{j}) + (v_{rx}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + v_{ry}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t})$$

$$= \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$



$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_r}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_r$$

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_r)$$

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_r + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_r)$$

let $$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_r + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_r)$$

$$\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

$\boldsymbol{a}_c$ ---Coriolis acceleration characterizes *the time rate of change* of the relative velocity in the transport motion and of the transport velocity in the relative motion.

$$\boxed{\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c}$$

The vector equation above is called the theorem of composition of accelerations of resultant motion of a particle in the case of *non-translatory* motion of transport.

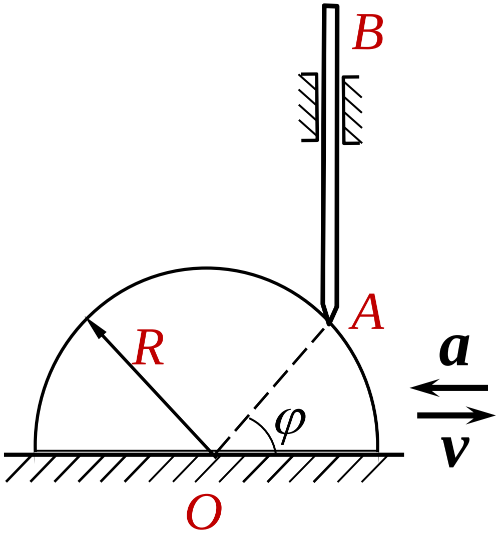
1. 牵连运动为平动时的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c \qquad \boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

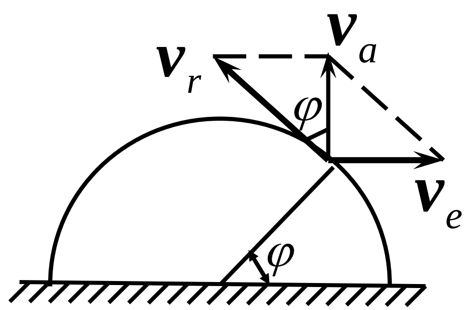
$$\boxed{\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e}$$

加速度合成定理 ——牵连运动为**平移**时，点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度的矢量和。

- 此定理只适用于牵连运动为平动。
- 一般表达式为 $\boldsymbol{a}_a^n + \boldsymbol{a}_a^\tau = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_r^\tau + \boldsymbol{a}_r^n$
- 通常采用解析法（投影式）求解。



例 凸轮在水平面上向右作减速运动，求AB在图示位置时的加速度。此瞬时凸轮速度和加速度分别为：$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$，且OA与水平面夹角为φ。



$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_a = v_e \cot\varphi = v\cot\varphi$$

$$v_r = \frac{v_e}{\sin\varphi} = \frac{v}{\sin\varphi}$$

解： 动点：AB杆上A；

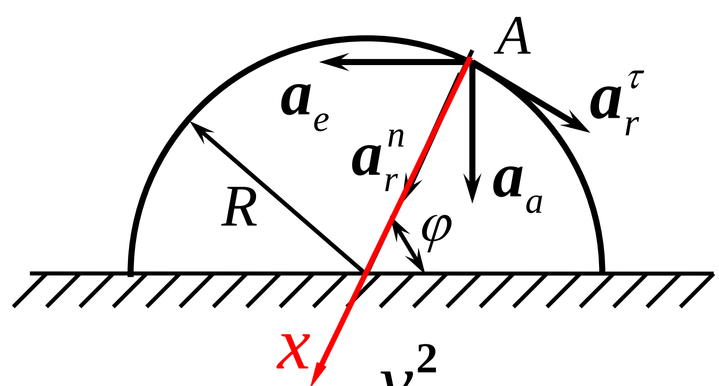
动系：凸轮；

绝对运动：直线；

相对运动：圆周；

牵连运动：平动

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{1}{R}\frac{v^2}{\sin^2\varphi}$$

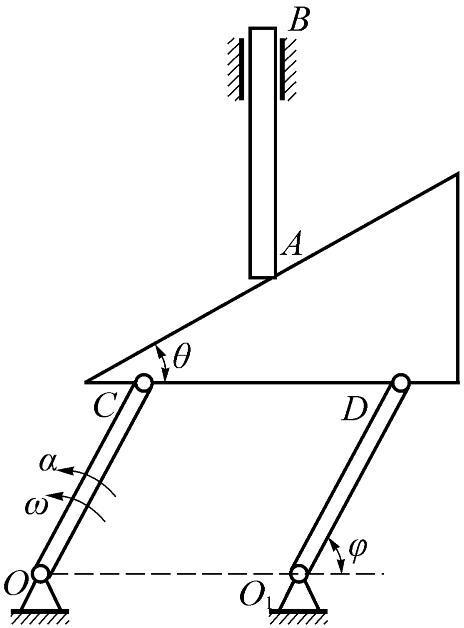


$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^\tau + \boldsymbol{a}_r^n$$

$$a_a \sin\varphi = a_e \cos\varphi + a_r^n$$

$$a_a = a\cot\varphi + \frac{v^2}{R\sin^3\varphi}$$

例 在图示平面机构中，已知OO_1=CD，OC=O_1D= r , θ= 30° 在图示位置φ= 60° 时，杆OC的角速度为ω，角加速度为α。试求此瞬时杆AB的速度和加速度（$AB\perp OO_1$）。

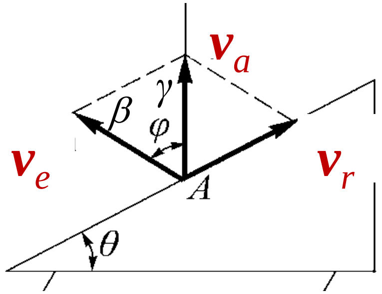


解： 动点：AB杆上A；
动系：三角板；
绝对运动：直线；
相对运动：直线；
牵连运动：平动

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$\frac{v_a}{\sin\beta} = \frac{v_e}{\sin\gamma}$$

$$v_e = \omega r$$



$$v_a = v_e = v_r = r\omega$$

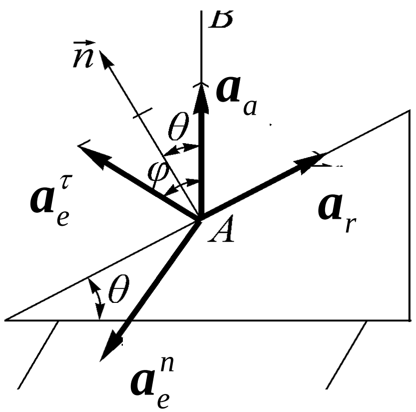
$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_r$$

向n方向投影

$$a_a\cos\theta = a_e^\tau\cos(\varphi-\theta) - a_e^n\sin(\varphi-\theta)$$

$$a_e^\tau = \alpha r \qquad a_e^n = \omega^2 r$$

$$a_a = \alpha r - 0.577\omega^2 r \quad \text{（方向如图）}$$



2. 牵连运动为转动(非平动)时的加速度合成定理

$$\boxed{\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c}$$

$$\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理（科里奥利定理），动点在每一瞬时的绝对加速度，等于它的牵连加速度、相对加速度和科氏加速度三者的矢量和。

- 可以证明，当牵连运动为任意运动时，上式都成立。
- 选取动点和动参考系后，应根据动参考系的运动，确定是否有科氏加速度。
- 点的加速度合成定理一般可写成如下形式：

$$\boldsymbol{a}_a^\tau + \boldsymbol{a}_a^n = \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r^\tau + \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_c$$

科氏加速度的物理含义

$$\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \qquad \boldsymbol{v}_a' = \boldsymbol{v}_e' + \boldsymbol{v}_r'$$

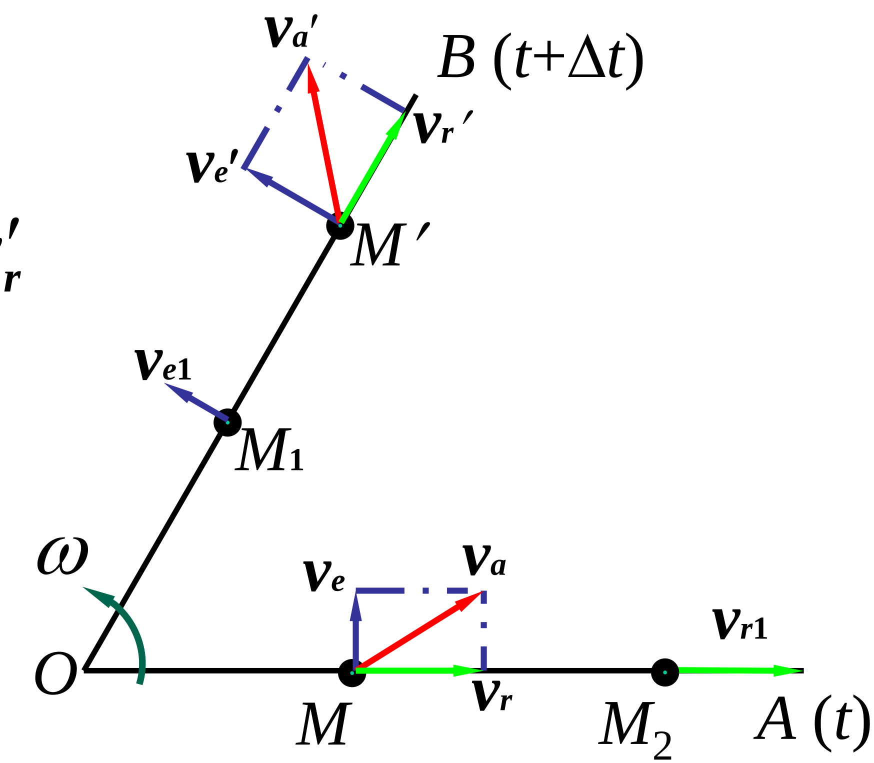
$$\boldsymbol{a}_a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_a' - \boldsymbol{v}_a}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_r' - \boldsymbol{v}_r}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_e' - \boldsymbol{v}_e}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_r' - \boldsymbol{v}_{r1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_{r1} - \boldsymbol{v}_r}{\Delta t} +$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_e' - \boldsymbol{v}_{e1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_{e1} - \boldsymbol{v}_e}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_r' - \boldsymbol{v}_{r1}}{\Delta t} + \boldsymbol{a}_r + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_e' - \boldsymbol{v}_{e1}}{\Delta t} + \boldsymbol{a}_e$$



$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{v}_r' - \boldsymbol{v}_{r1}}{\Delta t}\right| = v_r\omega$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{v}_e' - \boldsymbol{v}_{e1}}{\Delta t}\right| = v_r\omega$$

科氏加速度是**牵连转动**和**相对运动**相互影响的结果。

科氏加速度 $\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$

(1) 科氏加速度是牵连转动（ω）和相对运动（v_r）相互影响的结果。

(2) a_c的大小： $a_c = 2\omega v_r \sin\theta$

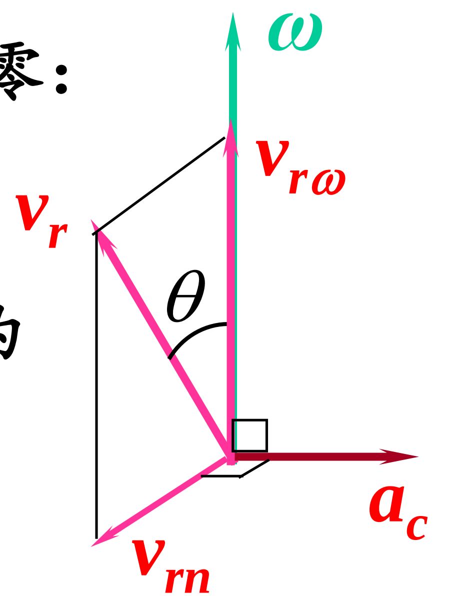
a_c的方向： 垂直于ω与v_r所确定的平面，由右手螺旋法则确定。

(3) 在一些特殊情况下科氏加速度a_c为零：

- $\omega = 0$
- $v_r = 0$
- $\omega // v_r$

(4) 当ω垂直于v_r时科氏加速度的方向为v_r顺ω的转向转过90度.

$a_c = 2\omega v_r$

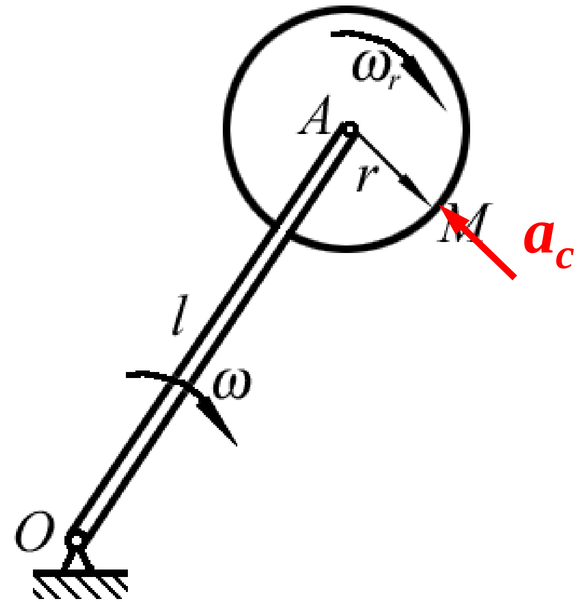


思考例： 长l的直杆OA，以角速度ω绕O轴转动，杆的A点端铰接一个半径为r的圆盘，圆盘相对于直杆以角速度ω_r绕A轴转动。今以圆盘边缘上的一点M为动点，OA为动系，当AM垂直OA时，M点的科氏加速度为____________。（图示方向）

$$a_c = 2\omega \times v_r$$

$$|a_c| = 2\omega v_r \sin\theta$$

$$a_c = 2\omega v_r = 2r\omega\omega_r$$



例 已知曲柄转动的匀角速度为ω，$OA=r$，$OO_1=l$，求当OA处于水平时摇杆O_1B的角加速度。

解： 动点：滑块A；

动系：摇杆O_1B；

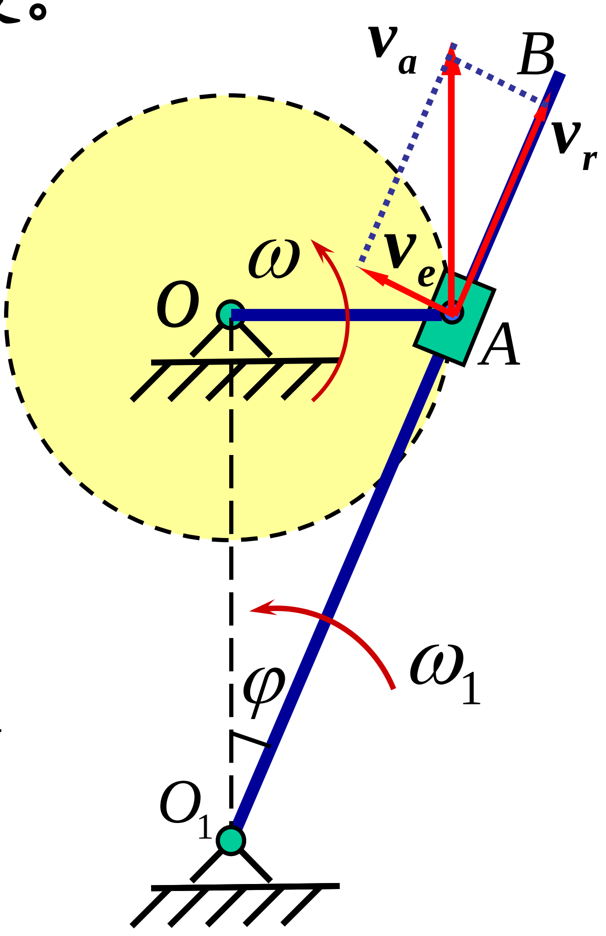
绝对运动：圆周；

相对运动：直线；

牵连运动：转动

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

$$v_a=r\omega$$



$$v_e=v_a\sin\varphi=\frac{r^2\omega}{\sqrt{l^2+r^2}}$$

$$v_r=v_a\cos\varphi=\frac{\omega r l}{\sqrt{l^2+r^2}}$$

$$\omega_1=v_e/O_1A=\frac{r^2\omega}{l^2+r^2}$$

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e{}^n + \boldsymbol{a}_e{}^\tau + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$$

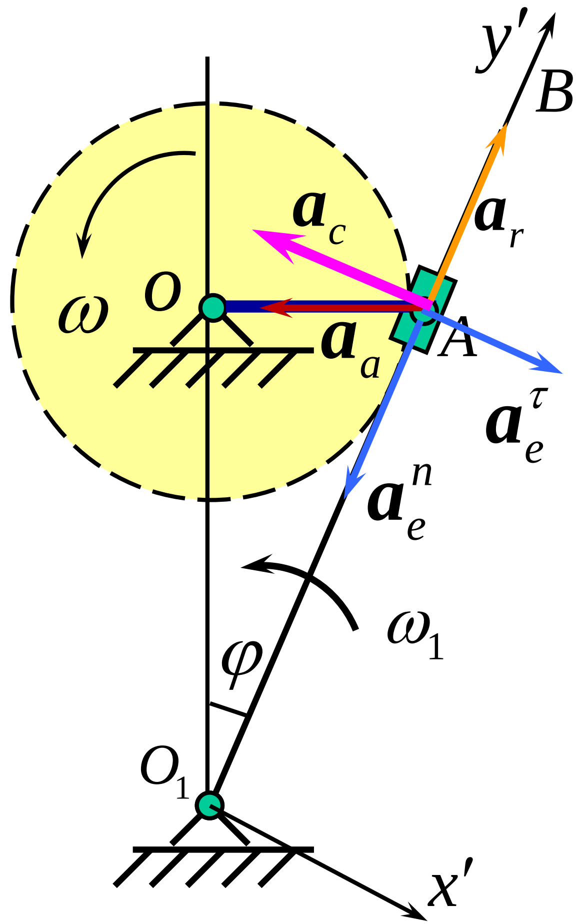
$$a_a = \omega^2 r$$

$$a_e^n = \omega_1^2 \cdot O_1A = \frac{r^4\omega^2}{\left(l^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$a_e^\tau = \alpha \cdot O_1A$$

$$a_c = 2\omega_1 v_r = \frac{2\omega^2 r^3 l}{\left(l^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$-a_a \cos\varphi = a_e^\tau - a_c$$



$$a_e^\tau = -\frac{rl\left(l^2-r^2\right)}{\left(l^2+r^2\right)^{3/2}} \cdot \omega^2 \qquad \alpha = \frac{a_e^\tau}{O_1A} = -\frac{rl\left(l^2-r^2\right)}{\left(l^2+r^2\right)^2} \cdot \omega^2$$

转向逆时针

解题步骤

(1)选定动点、动系和定系。

(2)分析三种运动和三种速度.

(3) 速度分析。

(4)加速度合成定理的应用。

- 根据牵连运动形式选择定理

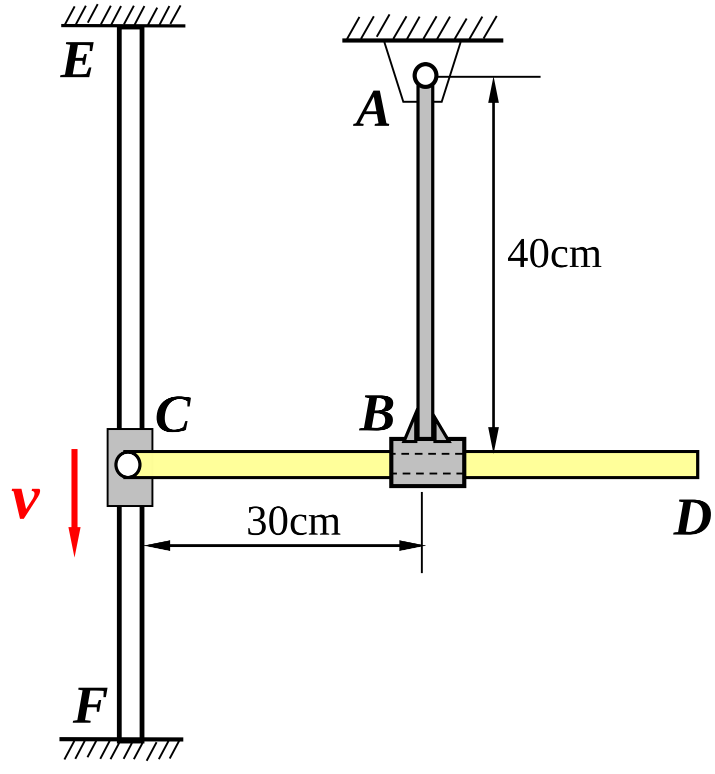
- 定理的具体表达式

$$\boldsymbol{a}_a^{\tau}+\boldsymbol{a}_a^{n}=\boldsymbol{a}_e^{r}+\boldsymbol{a}_e^{n}+\boldsymbol{a}_r^{\tau}+\boldsymbol{a}_r^{n}+\boldsymbol{a}_c$$

- 注意法向加速度和科式加速度的方向必为真实方向

- 投影式与平衡式的区别

例 平面机构如图所示，套筒C以匀速$v = 30\text{cm/s}$沿铅垂杆EF向下运动，杆CD铰接于套筒C可在套筒B中自由滑动。在图示瞬时，试求：（1）杆CD相对于套筒B的速度；（2）杆CD相对于套筒B的加速度。



解：运动分析

动点　套筒C

动系　套筒B

绝对运动：直线

相对运动：直线

牵连运动　定轴转动

速度分析

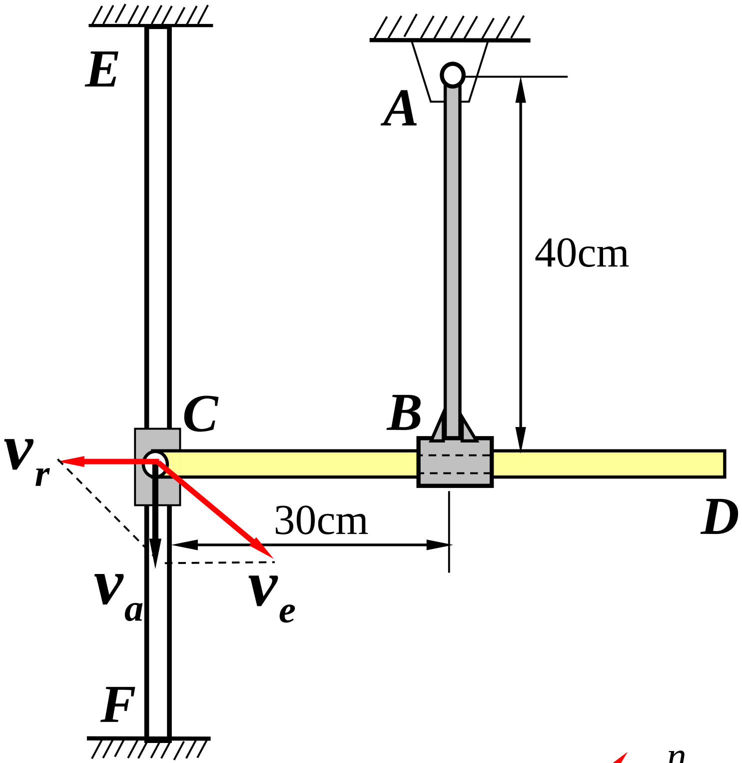
$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_a = 30\text{cm}/\text{s}$$

$$v_r = 40\text{cm}/\text{s}, v_e = 50\text{cm}/\text{s}$$

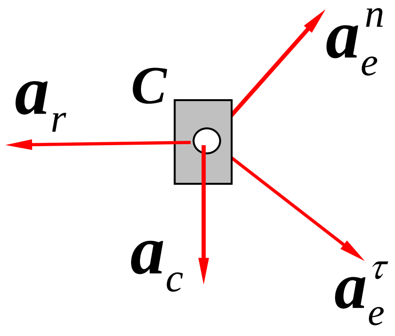
$$\omega_{AB} = 1\text{rad}/\text{s}$$

转向逆时针



加速度分析

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^{\tau} + \boldsymbol{a}_e^{n} + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$$



$$a_a = 0$$

$$0 = -a_e^n + \frac{3}{5}a_r + \frac{4}{5}a_c$$

$$a_e^n = 50\text{cm}/\text{s}^2$$

$$a_c = 80\text{cm}/\text{s}^2$$

$$a_r = -\frac{70}{3}\text{cm}/\text{s}^2$$

综合应用

1　点的复合运动与点的一般运动的综合

点的一般运动方程得到的是函数关系(解析法)

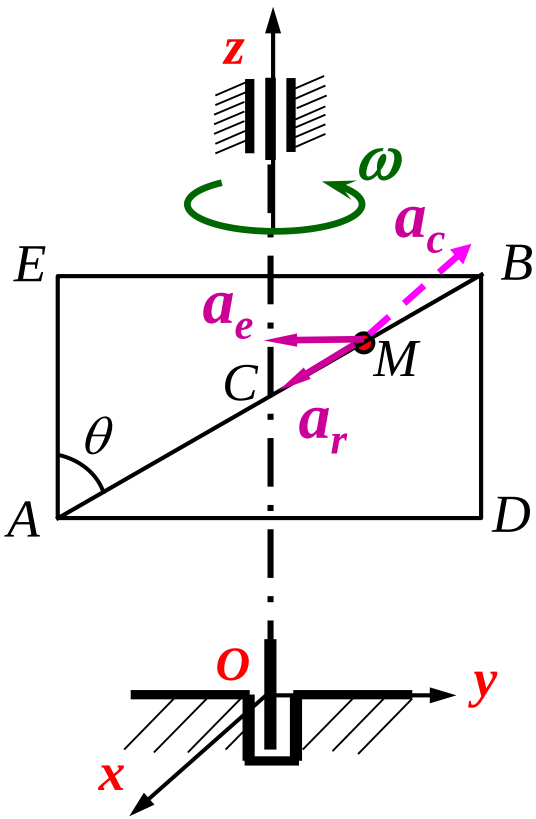
点的复合运动建立的是瞬时关系（几何法）

2　同一动点应用两次合成定理

3　选两次动点和动系.

例　点M按方程 $CM = s = 0.36\sin\frac{t}{3}\,\mathrm{m}$ 沿矩形板的对角线AB运动，矩形板以$\omega = \frac{1}{3}\,\mathrm{rad/s}$的匀角速度绕$Oz$轴转动。已知$AC=CB=BD$,且当$t = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}$时，矩形板恰好位于$Oyz$平面内，求该瞬时点$M$的绝对加速度。

解：M为动点，矩形板为动系



$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$$

$$v_r = \frac{\tilde{\mathrm{d}}s}{\mathrm{d}t} = 0.12\cos\frac{t}{3}\,\mathrm{m/s} \qquad a_r = \frac{\tilde{\mathrm{d}}v_r}{\mathrm{d}t} = -0.04\sin\frac{t}{3}\,\mathrm{m/s^2}$$

$$t = \frac{\pi}{2}$$

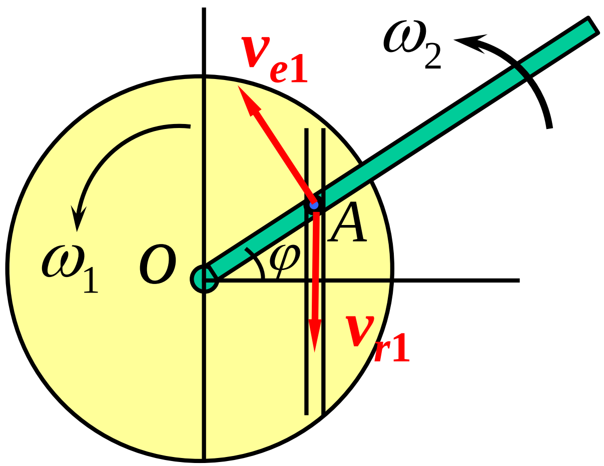
$$\boldsymbol{a}_r = -0.02\sin 60^\circ \boldsymbol{j} - 0.02\cos 60^\circ \boldsymbol{k}$$

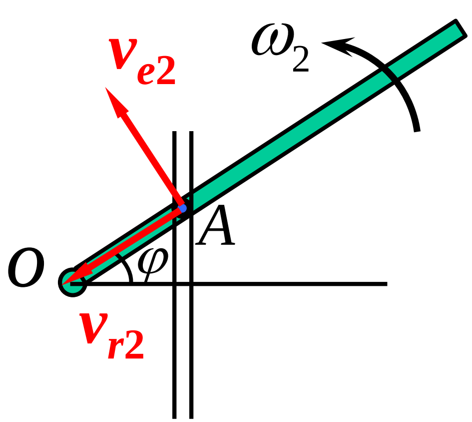
$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_e^n = -0.18\sin 60^\circ \omega^2 \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}_c = -2v_r\omega\sin 60^\circ \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a}_a = -0.06\boldsymbol{i} - 0.0346\boldsymbol{j} - 0.01\boldsymbol{k}\,\mathrm{m/s^2}$$

例 一半径为r的圆盘，以角速度ω_1绕圆心轴O转动，在圆盘上离圆心距离为0.2m处开有一个直槽；另有一杆绕圆心轴以ω_2转动，现有一滑动销钉沿槽和杆滑动。已知ω_1=10rad/s，ω_2=4rad/s，求φ=30°时销钉的速度。





解：动点：销钉A；

绝对运动：未知曲线

（1）动点：销钉A；动系：圆盘

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_{e1} + \boldsymbol{v}_{r1} \qquad v_{e1} = OA \cdot \omega_1$$

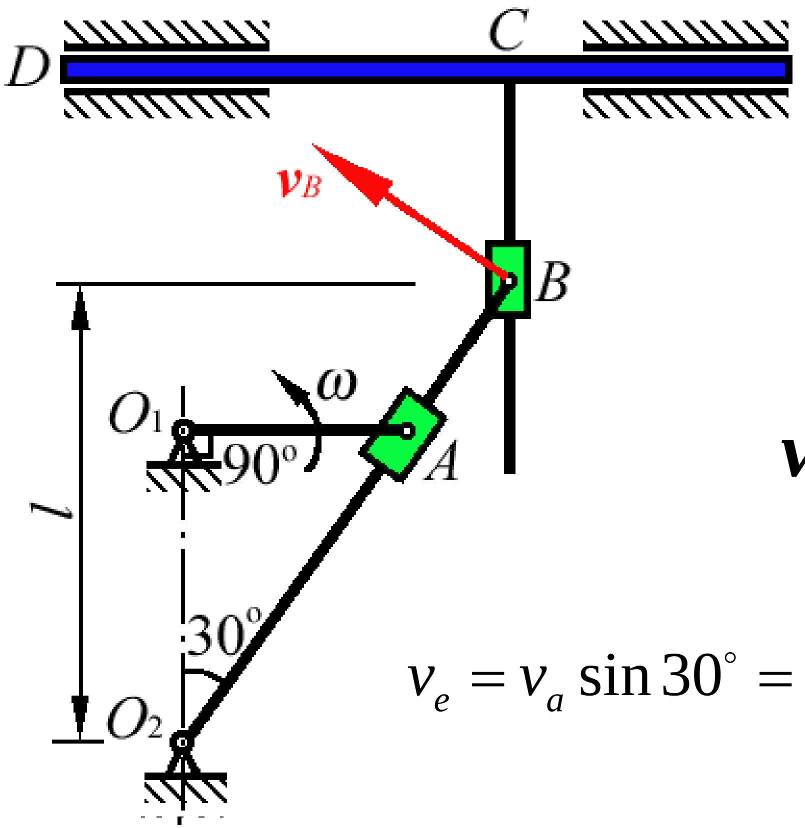
（2）动点：销钉A；动系：杆

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_{e2} + \boldsymbol{v}_{r2} \qquad v_{e2} = OA \cdot \omega_2$$

$$\boldsymbol{v}_{e1} + \boldsymbol{v}_{r1} = \boldsymbol{v}_{e2} + \boldsymbol{v}_{r2}$$

$$v_a = 1.222\,\mathrm{m/s}$$

例 牛头刨床机构如图所示。已知 $O_1A=r$, 以匀角速度ω匀角速转动。求图示位置滑枕CD的速度和加速度。



解：动点：滑块A;

动系：摇杆O_2B;

绝对运动：圆周；

相对运动：直线；

牵连运动：转动

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \qquad v_a = r\omega$$

$$v_e = v_a \sin 30^\circ = \frac{r\omega}{2}, \qquad \omega_{O_2B} = \frac{v_e}{2r} = \frac{\omega}{4},$$

$$v_r = v_a \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}r\omega}{2} \qquad v_B = O_2B \cdot \omega_{O_2B} = \frac{\sqrt{3}l\omega}{6}$$

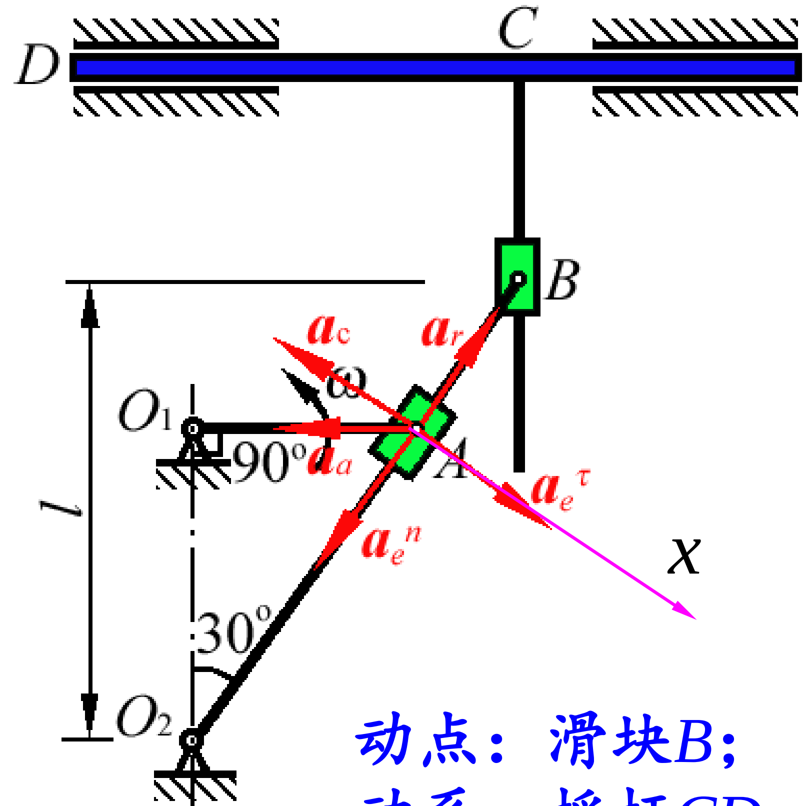
$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^{\,n} + \boldsymbol{a}_e^{\,\tau} + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$$

$$a_a = \omega^2 r$$

$$a_e^n = \omega_{O_2B}^2 \cdot O_2A = \frac{r\omega^2}{8}$$

$$a_e^\tau = \alpha \cdot O_2A = 2r\alpha$$

$$a_c = 2\omega_{O_2B} v_r = \frac{\sqrt{3} r\omega^2}{4}$$



动点：滑块B；

动系：摇杆CD

向x轴投影

$$-a_a \cos 30^\circ = a_e^\tau - a_c$$

$$a_e^\tau = -\frac{\sqrt{3} r\omega^2}{4}$$

$$\alpha_{O_2B} = \frac{a_e^\tau}{2r} = \frac{\sqrt{3}\omega^2}{8}$$

$$a_B^n = O_2B \cdot \omega_{O_2B}^2 = \frac{\sqrt{3} l\omega^2}{24}$$

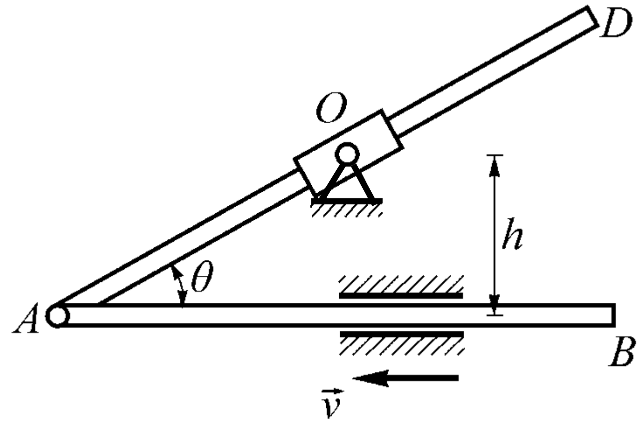
$$a_B^\tau = O_2B \cdot \alpha_{O_2B} = \frac{l\omega^2}{4}$$

下面工作请同学自己完成

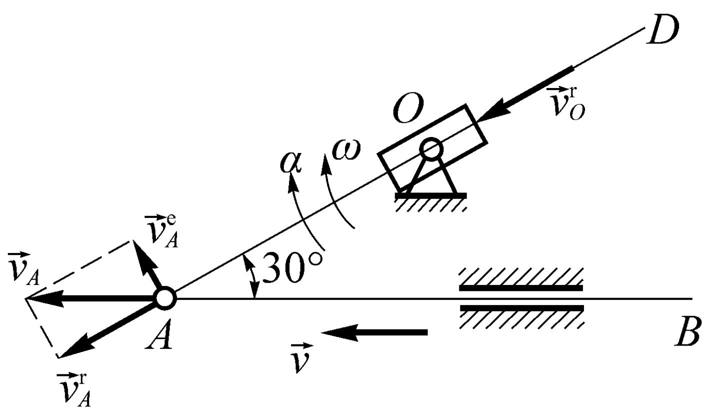
例 在图示平面机构中，杆AB在水平滑道中匀速滑动，速度v = 10m/s，长12 m的杆AD穿过套筒，套筒可绕O轴转动，h =3m。试求图示θ=30° 瞬时：

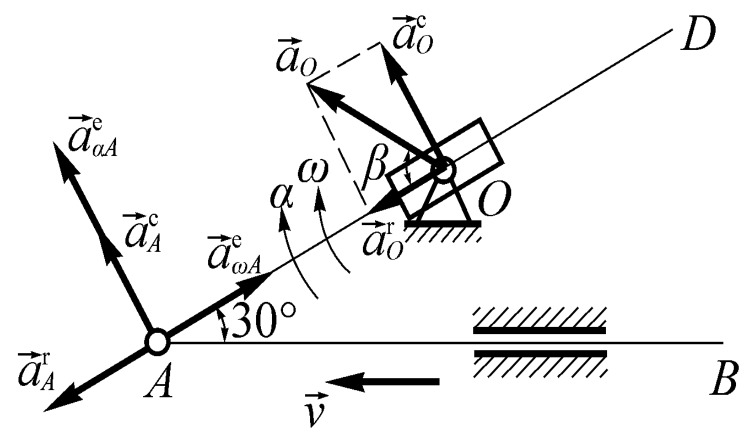
（1）套筒的角速度，角加速度；

（2）杆AD上与O点重合点的速度和加速度.



以AD杆上A点为动点，动系固连于套筒上.

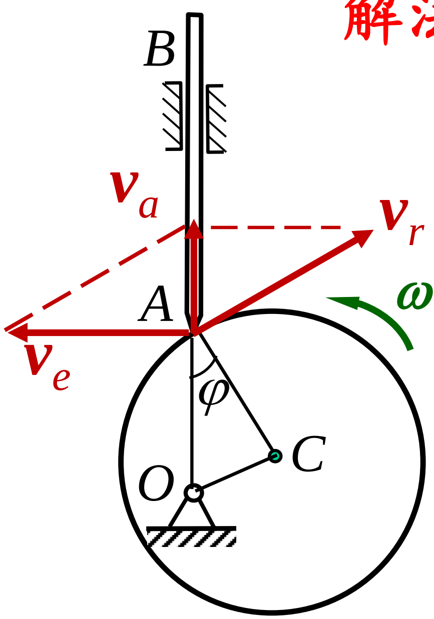




详见书上例6-5

讨论与分析

例 已知凸轮的偏心距$OC=e$，凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动，图示瞬时，$AC\perp OC$，$\varphi=30^{o}$。求顶杆的速度与加速度。



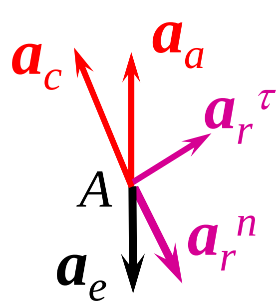
解法1 动点—AB的端点A，动系—固连于凸轮

速度分析 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$

$v_e=2e\omega$

$$v_a=\frac{2\sqrt{3}}{3}e\omega,\ v_r=\frac{4\sqrt{3}}{3}e\omega$$

加速度分析 $\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_r^n+\boldsymbol{a}_r^\tau+\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c$

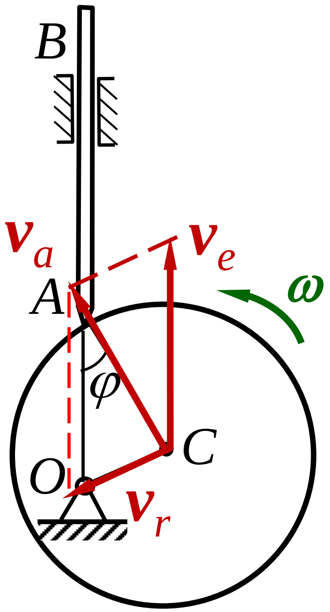


$a_e=2e\omega^2$ $a_c=2v_r\omega$

$a_r^n=v_r^2/r$

$$a_a=-\frac{2}{9}e\omega^2$$

解法2　动点—轮心C，动系—固连于AB杆



速度分析　$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

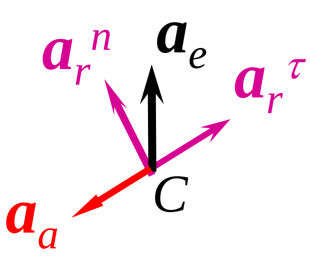
$v_a = e\omega$

$$v_e = \frac{2\sqrt{3}}{3}e\omega, v_r = \frac{\sqrt{3}}{3}e\omega$$

加速度分析　$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_r^\tau + \boldsymbol{a}_e$

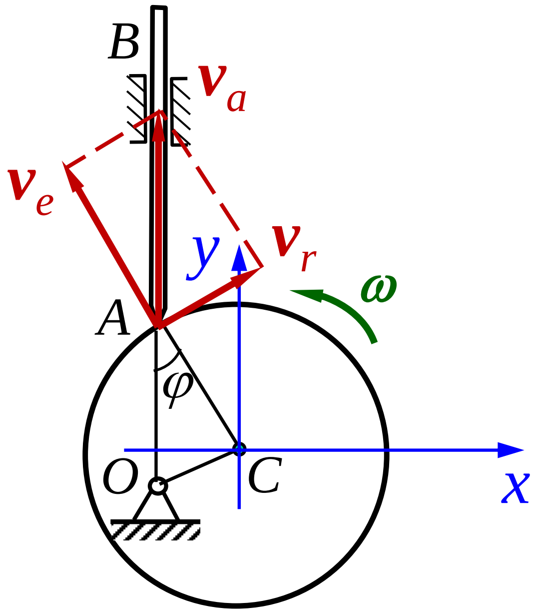
$a_a = e\omega^2$

$$a_r^n = v_r^2/r$$



$$a_e = -\frac{2}{9}e\omega^2$$

解法3 动点—AB的端点A，
动系—过轮心C的平动坐标系Cxy



速度分析 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

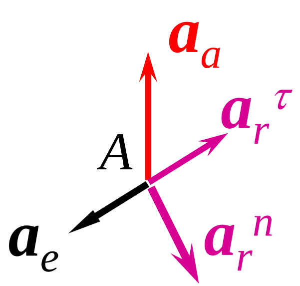
$v_e = e\omega$

$$v_a = \frac{2\sqrt{3}}{3}e\omega, v_r = \frac{\sqrt{3}}{3}e\omega$$

加速度分析 $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_r^\tau + \boldsymbol{a}_e$

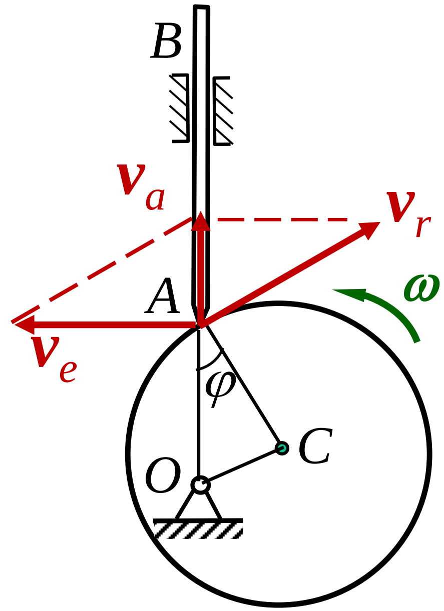
$a_e = e\omega^2$

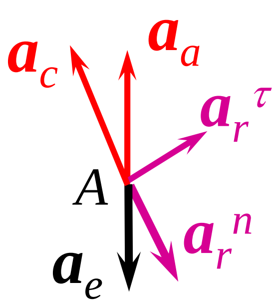
$\boxed{a_r^n = v_r^2/r}$



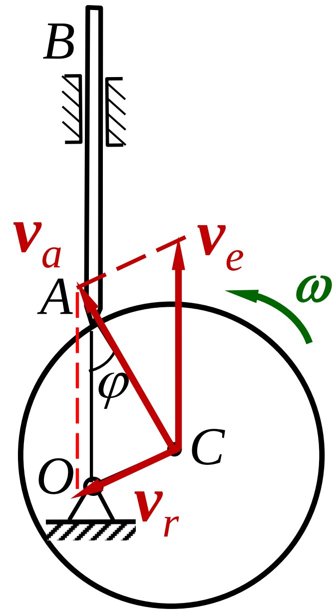
$$a_a = -\frac{2}{9}e\omega^2$$

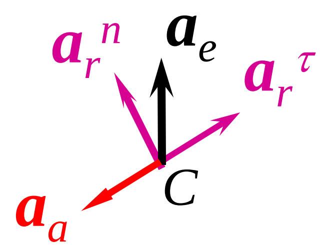
解法1


B
v_a
v_r
A
ω
v_e
φ
C
O

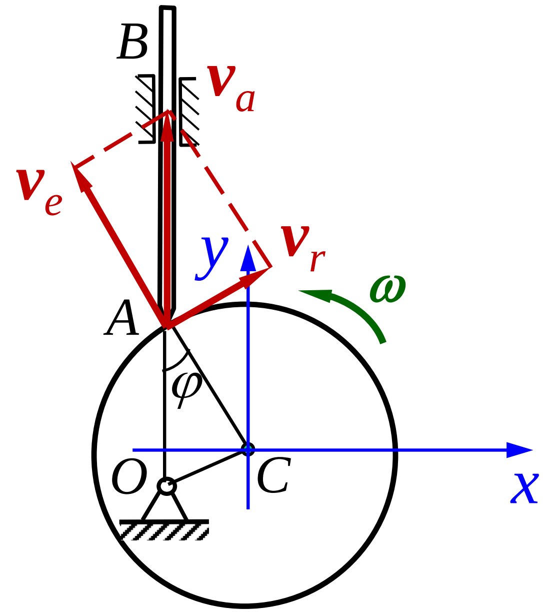

a_c
a_a
a_r^τ
A
a_r^n
a_e

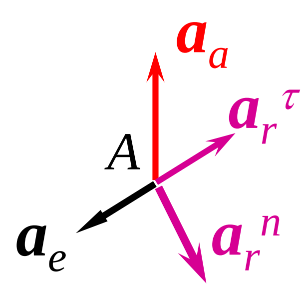
解法2


B
v_a
v_e
A
ω
φ
C
O
v_r

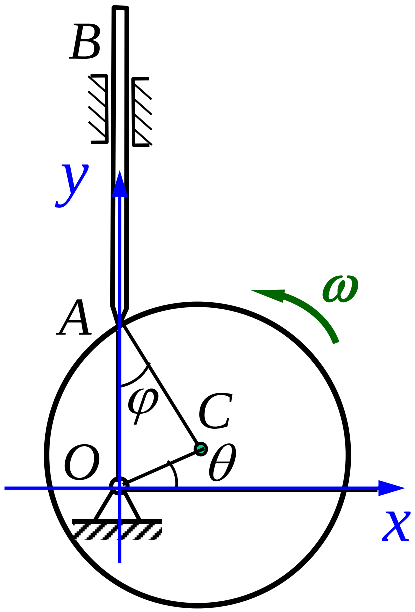

a_r^n
a_e
a_r^τ
C
a_a

解法3


B
v_a
v_e
y
v_r
A
ω
φ
O
C
x


a_a
a_r^τ
A
a_e
a_r^n

解法4---解析法



一般位置，建坐标系Oxy

$$y_A = e\sin\theta + \sqrt{3}e\cos\varphi$$

$$\frac{e}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}e}{\cos\theta} \qquad \theta = \omega t$$

$$y_A = e\sin\omega t + \sqrt{3}e\sqrt{1-\frac{\cos^2\omega t}{3}}$$

$$v_A = \dot{y}_A$$

$$a_A = \ddot{y}_A$$

$AC \perp OC$，$\varphi = \theta = 30^{\circ}$

望天门山

唐 李白

天门中断楚江开，
碧水东流至此回。
两岸青山相对出，
孤帆一片日边来。