西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

易拉罐形状和尺寸的最优设计

小学期数学建模

数学与统计学院

飞机的舷窗为什么是圆的：

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

为什么飞机的舷窗是圆的？这要从飞机的演变历程说起。

最初飞机的舷窗并不是圆角的，而是方形的。1952年，英国德.哈维兰公司研制的“彗星”喷气式客机横空出世，本以为乘坐这架飞机可以扶摇直上，但是结果惨不忍睹。

从1952.10到1954.4这短短18个月的时间里，在17架投入飞行的“彗星”中，竟有6架相继发生事故，有99名旅客和机组人员遇到此类事件。

发生如此惨烈的事故，让大家不得不加速寻找原因。时任英国首相丘吉尔派出海军舰队，不惜一切代价来查明真相。

经过分析，技术人员发现了事故原因：“彗星”号的方形舷窗在多次起降后，舷窗拐角处出现了因金属疲惫而导致的裂痕，从而在内外压差所产生的强大外推力作用下造成机身解体。原来，方形的窗户放在飞机上是不合适的！

为了解决舷窗的问题，科学家经过大量的尝试后发现，曲形设计舷窗没有焦点，能够平均分散重量和压力，从而大大降低窗户破碎和裂缝的可能性。

历史的演进总是需要付出代价，今天的安全出行也归功于科学家不断的探索和努力！最终，飞机舷窗就变成了今天这“圆胖圆胖”的样子啦。

日常生活中用到的数学

1、乘坐公交车；公交车站的设置点的选择；饮料自动售货机的摆放位置的选择.

2、挑选水果；（可食率：可食部分与整个水果体积之比.）

3、韩国（真露竹炭）酒瓶子的设计；

（趣味题）某甲早8:00从山下旅店出发，沿一条路径上山，下午5:00到达山顶并留宿.次日早8:00沿同一路径下山，下午5:00回到旅店.某乙说，甲必在两天中的同一时刻经过同一地点.为什么？

简单的数学建模问题：（赶火车的策略）12名旅客要赶往40千米远的火车站去乘火车，距离开车时间只有3小时.每人步行速度每小时4千米.唯一的交通工具是一辆小汽车，司机在内只能乘坐5人，汽车的速度是每小时60千米.问这12名旅客能赶上火车吗？

不同的搭乘策略就有不同的结果：不能赶上；勉强赶上；最快赶上.

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

题目（2006年国赛C题）

我们只要稍加留意就会发现销量很大的饮料（例如饮料量为355毫升的可口可乐、青岛啤酒;）的饮料罐（即易拉罐）的形状和尺寸几乎都是一样的.看来，这并非偶然，这应该是某种意义下的最优设计.当然，对于单个的易拉罐来说，这种最优设计可以节省的资源可能是很有限的，但是如果是生产几亿，甚至几十亿、几万亿个易拉罐的话，可以节约的资源就很可观了.

现在就请你们小组来研究易拉罐的形状和尺寸的最优设计问题，具体说，请你们完成以下的任务：

1、取一个饮料量为355毫升的易拉罐，例如355毫升的可口可乐饮料罐，测量你们认为验证模型所需要的数据，例如易拉罐各部分的直径、高度、厚度等，并把数据表加以说明；如果数据不是你们自己测量得到的，那么你们必须说明出处.

2、设易拉罐是一个正圆柱体，什么是它的最优设计？其结果是否可以合理地说明你们所测量的易拉罐的形状和尺寸，例如说，半径和高之比，等等.

3、设易拉罐的中心纵断面是：上面部分是一个正圆台，下面部分是一个正圆柱体，什么是它的最优设计？其结果是否可以合理地说明你们所测量的易拉罐的形状和尺寸.

4、利用你们对所测量的易拉罐的洞察和想象力，做出你们自己的关于易拉罐形状和尺寸的最优设计.

5、用你们做本题以及以前学习和实践数学建模的亲身体验，写一篇短文（不超过1000字，你们的论文中必须包括这篇短文），阐述什么是数学建模，它的关键步骤，以及难点.

1、题目分析：

1、对易拉罐的最优设计主要从用料最省的角度进行研究.

2、题目要求就易拉罐为圆柱体和组合体（圆柱体和圆台）两种情况进行研究.

2、模型假设：

1、所取易拉罐各面的厚度均匀；
2、易拉罐的顶盖和下底盖都是规则的平面；
3、易拉罐都是规则的多面体；
4、易拉罐用同种材料制成；
5、不考虑各种因素对测量仪器的影响.

3、问题分析：

1、在对易拉罐的形状进行研究时，首先要分析出模型可能需要的数据，利用相应的工具多次测量，求平均值，确定出易拉罐各项尺寸的大小.

2、易拉罐的形状为一正圆柱体时，并没有对各部分的壁厚做出说明，在求解的过程中可分易拉罐各面厚度相同和不同两种情况进行求解，确定出高度与半径的比值关系，并与实际测量数据进行比较，判断易拉罐设计的合理性；

3、易拉罐的形状为组合体时，求解过程仍以材料最省为最优设计，同时要满足上、下顶面的强度要求，并要满足加工方面的要求，建立一个广泛的最优化模型.再依据假设的各种情况对模型进行逐步改进，最终求得既满足材料最省又满足其它方面（如强度、美观、易加工等）要求的易拉罐形状和尺寸，与实际测量值进行比较，分析其设计的合理性.

4、根据多面体中球体表面积与体积比值最小的基本原理，将易拉罐上部的圆台设计为球台.

4、模型的建立与求解

4.1、问题一

4.1.1 需要测量的数据

模型中可能用到的数据：罐的直径、罐高、罐壁厚、顶盖厚、罐底厚、圆台高、顶盖直径、圆柱体的高、罐内体积等.

直接测量：罐的直径、罐高、圆台高、顶盖直径、圆柱直径等数据属于外部属性，可以直接进行测量.测量工具—游标卡尺（50分度）.

易拉罐罐壁厚、顶盖厚、罐底厚其厚度较小，可用螺旋测微器进行测量.

间接测量：取一个500毫升的量筒和空的易拉罐，就可测得易拉罐的体积和罐内体积

关于两种测量工具的简单介绍：

游标卡尺：一种常用的度量工具，以其精度为名，一般可以精确到0.01cm.
测量外径、测量内径、测量深度（分别用到三个不同的部位）.

螺旋测微器：又称千分尺（micrometer）.螺旋测微器是比游标卡尺更精密的测量长度的工具，用它测长度可以精确到0.01mm.测量范围为几个厘米.螺旋测微器是由法国发明家Jean.Laurent.Palmer在1848年获得专利（外径千分尺的专利）.美国有两个人在1867年获得制造 专利.螺旋测微器分为：机械千分尺；
电子千分尺（1970左右）.

			表1：易拉罐（可口可乐）各项尺寸表				
数据种类			实测数据			平均值	单位
罐高	12.06	12.04	12.06	12.08	12.06	12.06	cm
罐桶直径	6.62	6.6	6.58	6.58	6.66	6.61	cm
罐壁厚	0.112	0.106	0.099	0.101	0.095	0.103	mm
顶盖厚	0.295	0.298	0.321	0.304	0.311	0.306	mm
罐底厚	0.303	0.289	0.305	0.294	0.311	0.3	mm
圆台高	1.01	1.01	1	0.98	1.02	1.01	cm
顶盖直径	6.02	6	6.02	5.98	6	6.01	cm
圆柱体高	11.04	11.02	11.06	11.08	11.06	11.05	cm
罐内体积	364.9	365.2	364.5	364	365.6	364.8	cm立方

4.1.2 易拉罐体积的说明

根据测量数据可以得出：对于标注为355毫升的可口可乐易拉罐，它的实际罐体容量为365毫升，所以在题目的求解中对于易拉罐的容积都以365毫升为标准进行计算.

4.2、问题二

4.2.1、模型建立

简单模型：不考虑易拉罐的厚度——在体积一定的条件下表面积最小

由于考虑了易拉罐的厚度，以用料最省为目标的最优设计是研究什么问题？

以易拉罐的用料体积最小为目标，可使制造易拉罐的用料最省.
易拉罐的用料体积包括三部分：顶盖所用的用料体积、罐底所用的用料体积、侧面所用的用料体积.

用料体积：表面积乘以厚度

假设除易拉罐的顶盖外，罐的厚度相同，记作b;

顶盖的厚度为$k\times b$(k表示倍数)；易拉罐的半径为r,

直径为d；罐高为h;罐内体积为V;所用用料的总体积为S_V.

则易拉罐顶盖用料体积为$\pi r^2 kb$,易拉罐底用料体积为$\pi r^2 b$,

易拉罐侧面用料体积为

$$(\pi(r+b)^2-\pi r^2)(h+(1+k)b)=2\pi hbr+2\pi(1+k)b^2r+\pi hb^2+\pi(1+k)b^3$$

综上可得易拉罐用料的总体积为：

$$S_V(r,h)=2\pi hbr+\pi(1+k)br^2+2\pi(1+k)b^2r+\pi hb^2+r(1+k)b^3$$

主要约束：易拉罐的容积是一个固定的常量.

设易拉罐的罐内体积$V(r,h)=\pi r^2 h=365cm^3$

以易拉罐罐内体积和饮料容量相同为约束条件，

制作易拉罐需要的用料最省为目标建立最优化模型：

因为$b \ll r$,为简化模型求解，所以b^2,b^3的项可以忽略，从而建立如下最优化模型：

$$\min S_V(r,h)=2\pi rhb+\pi r^2(1+k)b,$$

$$s.t.\begin{cases} V(r,h)=\pi r^2 h=365 \\ r>0,h>0 \end{cases}$$

4.2.2、模型求解

对于以上建立的模型可用多种方法求解：

(1)条件极值法；

(2)数学软件*Matlab*;

(3)数学软件*Lingo*.

用条件极值法求解：

由$\pi r^2 h = V_0$解出$h = \dfrac{V_0}{\pi r^2}$，代入$S(r,h)$得

$$S(r,h(r)) = b[\frac{2V_0}{r} + \pi(1+k)r^2],$$

由$\dfrac{dS}{dr}=0$可得：$r=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{(1+k)\pi}}$.

所以：$h=\dfrac{V_0}{\pi}\left(\sqrt[3]{\dfrac{2(1+k)\pi}{V_0}}\right)^2=2(1+k)\left(\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{(1+k)\pi}}\right)=(1+k)r$

$$S''=4b[2\pi(1+r)+\frac{2V_0}{r^3}]>0, r>0.$$

因此r使S取得极小值，且是唯一极小值点.

所以, $r=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{(1+k)\pi}}$时，$S(r,h(r))$取得最小值.

结果检验：

经过上面的求解得到易拉罐的罐高$h=(1+k)\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{(1+k)\pi}}$,

罐的半径$r=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{(1+k)\pi}}$,因此易拉罐的半径与罐高之比$\dfrac{r}{h}=\dfrac{1}{1+k}$.

测量数据易拉罐的顶盖厚大约是罐壁厚的3倍，即$k=3$.

代入:$\dfrac{r}{h}=\dfrac{1}{1+k}$可得罐的半径与罐高之比为$1:4$.

实际测量的数据近似也是这个比例.

依据半径与高度的比值能够说明易拉罐的形状符合用料最省的最优设计.

4.3、问题三

4.3.1 模型建立

1.易拉罐容积的确定

对于易拉罐的简化形状，可将其分成两部分考虑，上部分为一正圆台，下部分为一正圆柱体.

1)正圆台部分的体积：$V_1=\dfrac{\pi(r_1^3-r_2^3)\tan\theta}{3}$

2)正圆柱部分的体积：$V_2=\pi r_1^2 h$

综上可得：易拉罐结构的总体积为

$$V=V_1+V_2=\frac{\pi(r_1^3-r_2^3)\tan\theta}{3}+\pi r_1^2 h$$

根据测量数据，易拉罐壁厚$b \ll r_1, b \ll r_2, b \ll h$;因此在确定易拉罐的容积$V_P$时可近似看成体积，即

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi(r_1^3 - r_2^3)\tan\theta}{3} + \pi r_1^2 h$$

2.易拉罐用料体积S_V的确定

易拉罐用料主要包括四部分：上顶面S_{V1}、圆台侧面S_{V2}、下底面S_{V3}、圆柱侧面S_{V4}.

根据问题二可知，由于易拉罐壁厚$b \ll r_1, b \ll r_2, b \ll h$;为简化计算，在求易拉罐用料体积$S_V$时，可近似看成各个面的面积与其厚度乘积之和，忽略各个面由于相交产生的体积偏差.

在求各个面的面积时，以外表面的测量值为准.

设圆柱侧面的厚度b为一单位，上顶面、圆台侧面、下底面分别是圆柱侧面厚度的k_1, k_2, k_3倍.

因此易拉罐用料体积为

$$S_V(r_1, r_2, h, \theta) \approx S_{V1} + S_{V2} + S_{V3} + S_{V4}$$

$$= \pi r_2^2 k_1 b + \frac{\pi(r_1^2 - r_2^2) k_2 b}{\cos\theta} + \pi r_1^2 k_3 b + 2\pi r_1 h b$$

于是，可根据易拉罐容积一定，用料体积最省的最优化设计建立以下模型：

$$\min S_V(r_1,r_2,h,\theta)=\pi r_2^2 k_1 b+\frac{\pi(r_1^2-r_2^2)k_2 b}{\cos\theta}+\pi r_1^2 k_3 b+2\pi r_1 hb$$

$$s.t.\begin{cases} V_P(r_1,r_2,h,\theta)=V_0, \\ r_1\geq 0, r_2\geq 0, h\geq 0, \\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4.3.2 模型求解

在求解过程中，为满足设计要求，设上顶面、圆台侧面、下底面分别是圆柱侧面厚度的 $k_1=3, k_2=1, k_3=1$倍，下面分别用两种方法对模型求解.

方法一：*Lingo*软件求解

本模型属于最优化模型，可利用*Lingo*软件直接求解得到：上顶盖半径$r_2=0cm$，圆柱体半径$r_1=4.2cm$,圆台倾斜角θ=41. 8^0,圆柱体高度$h=5.9cm$,所用材料$V_P=2.76cm^3$.

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

方法二：*Lagrange*乘数法和*Matlab*软件求解

构造*Lagrange*函数 $L(r_1,r_2,h,\theta)=S_V(r_1,r_2,h,\theta)+\lambda V_P(r_1,r_2,h,\theta)$

$$=k_1b\pi r_2^2+\frac{k_2b\pi(r_1^2-r_2^2)}{\cos\theta}+2b\pi r_1h+k_3b\pi r_1^2+\lambda[\frac{1}{3}\pi(r_1^3-r_2^3)\tan\theta+\pi r_1^2h-365]$$

分别对r_1,r_2,θ,h求偏导，并使之为零，与$V_P(r_1,r_2,h,\theta)-365=0$联立得到如下方程组

$$\begin{cases}\dfrac{2k_2b\pi}{\cos\theta}r_1+2k_3b\pi r_1+2\pi bh+\lambda\pi r_1^2\tan\theta+2\lambda\pi hr_1=0\\ 2k_1b\pi r_2-\dfrac{2k_2b\pi r_2}{\cos\theta}-\lambda\pi r_2^2\tan\theta=0\\ k_2b\pi(r_1^2-r_2^2)\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\lambda\pi(r_1^3-r_2^3)}{3\cos^2\theta}=0\\ 2b\pi r_1+\lambda\pi r_1^2=0\\ \dfrac{1}{3}\pi(r_1^3-r_2^3)\tan\theta+\pi r_1^2h-365=0\end{cases}$$

上述方程组，利用*Matlab*软件中的*fsolve*函数求解得到，：上顶盖半径$r_2=0$

圆柱体半径$r_1=4.0154cm$,圆台倾斜角θ=41.7^0,圆柱体高度$h=5.8112cm$,

*Lagrange*乘数$\lambda=-0.4981$,所用材料$V_P=2.7053cm^3$.

结果说明：通过观察数据，两种方法求得的结果基本一样，各项取其平均值，得到上顶盖半径$r_2=0$,圆柱体半径$r_1=4.1cm$,圆台倾斜角$\theta=41.75^0$,圆柱体的高度$h=5.86cm$,此时所用材料$V^{'}=2.73cm^3$.

根据以上两种求解方法所求数据相同，但与易拉罐的实际形状和尺寸相差很大.需要对模型作出进一步改进.

4.3.3模型改进一

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

分析需改进的因素：

上述模型中，在处理易拉罐底面厚度时是简化为与易拉罐圆柱体壁厚相同来解决的，但通过实际测量发现底面厚度与圆柱体壁厚是不相等的，并且底面厚度与顶面厚度相同都为$3b$,即此时$k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 3$.

将修改后的值代入模型：求得上顶盖半径$r_2 = 0cm$,圆柱体半径$r_1 = 3.1cm$,圆台倾斜角$\theta = 41.8^0$,圆柱体高度$h = 10.8cm$,所用材料$V_P = 3.55cm^3$.

观察数据发现：与问题一中实测数据进行比较，相差仍然比较大，

所以还要对模型进行改进.

4.3.4模型改进二

分析需改进的因素：

通过对易拉罐的观察发现：易拉罐的顶盖实际上不是平面，略有上拱，顶盖实际上是半径为$3+0.4+0.2=3.6cm$的材料冲压而成的，从顶盖到圆柱体部分的斜率为0.3,这些要求很可能是保证了和易拉罐的薄的部分的焊接（粘合）很牢固、耐压. 所有这些都是物理、力学、工程或材料方面的要求，简单通过求材料最省是得不到满意的结果的.

实际上易拉罐的下底面也不是平面，是向里面凸的.

要改进模型，假设易拉罐的上顶盖半径是已知的，通过问题一数据分析得到$r_2=3.005cm$,将此值代入本题模型，并利用上述的两种求解方法，求得易拉罐形状的各项尺寸：圆柱体半径$r_1=3.25cm$,圆台倾斜角$\theta=73.9^0$,圆柱体高度$h=10.2cm$,所用材料$V_P=4.12cm^3$.

讨论部分：

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

请同学们想一想：易拉罐还可以设计成其它形状吗？

（1）形状——球体从上下截掉两个同样大小的球冠

设计结果：球体的半径$R=4.4006cm$;罐高$h=8.25cm$;

罐盖半径=1. 55cm;罐体的容积=$356.278cm^3$;

用料$V=6.682cm^3$.

结果评价：虽然在材料方面取得了较好的节省，但是从球体直径大小不难发现所设计的形状不便于人们握住.一般成人的虎口大小为5-7cm.而上面所得结果都在8.8cm以上，这对大多数人来讲都很不方便的,所以这个设计图形很有必要修改.

（2）形状——双球重叠样式

为了保证节约材料，类似于上面的设计定性为球体形，在兼顾球体直径的大小符合大部分人的方便需要的情况下，设计出以下的双球重叠样式.

其初图如下：

图形上让人感觉新颖，显然的更加方便好拿.
请给出解答.

求解结果： 罐盖半径:2.5*cm*;

罐身最宽处半径3.6172*cm*;

总高度为10.457*cm*;

所需材料总体积为8.105cm^3.

4.4 问题四

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

4.4.1 提出易拉罐形状与尺寸的最优设计

通过对所测量易拉罐的观察分析，发现这种易拉罐还不是最省材料的，根据多面体中球体的表面积与其体积的比值最小的原理，提出将易拉罐中的圆台设计成球台.

4.4. 2模型的建立

1、球台部分的求解

运用重积分(二或三)求得球台体积为

$$V_1 = \frac{2\pi r_3^3(\cos\alpha - \cos\beta)}{3} + \frac{\pi}{3}\left(\frac{r_2^3}{\tan\alpha} - \frac{r_1^3}{\tan\beta}\right)$$

球台上表面的面积 $S_{V1}=\pi r_2^2$;

球台弧形部分表面积 S_{V2},**根据二重积分用球面坐标对其表面积积分可求得球台部分表面积为**

$$S_{V2}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_\alpha^\beta r_3^2\sin\theta d\theta=2\pi r_3^2(\cos\alpha-\cos\beta)$$

2、圆柱体部分的求解

设圆柱体的高为 h,**底面半径为** r_1,**圆柱体的壁厚为** b,**上、下底面厚度为** kb.
圆柱体的体积 $V_2=\pi r_1^2h$,**侧面表面积** $S_{V3}=2\pi r_1 h$,**圆柱体的底面积** $S_{V4}=\pi r_1^2$.

3、易拉罐的容积

由于 $b\ll r$,所以易拉罐的整体体积看成易拉罐的容积，所以总的易拉罐容积 V 为

$$V(\alpha,\beta,r_1,r_2,r_3,h)=V_1+V_2=\frac{2\pi r_3^3(\cos\alpha-\cos\beta)}{3}+\frac{\pi}{3}\left(\frac{r_2^3}{\tan\alpha}-\frac{r_1^3}{\tan\beta}\right)+\pi r_1^2 h$$

4、易拉罐所用材料的体积

由于薄片的体积等于面积乘以厚度，所以易拉罐所用材料的体积S_V为

$$\begin{aligned}S_V(\alpha,\beta,r_1,r_2,r_3,h)&=kb\times S_{V1}+b\times S_{V2}+b\times S_{V3}+kb\times S_{V4}\\&=kb\pi r_2^2+2b\pi r_3^2(\cos\alpha-\cos\beta)+2b\pi r_1 h+kb\pi r_1^2\end{aligned}$$

综上所述，在易拉罐体积一定的条件下，

以总用料最省为目标建立最优化模型如下：

$$\min S_V(\alpha,\beta,r_1,r_2,r_3,h)=kb\pi r_2^2+2b\pi r_3^2(\cos\alpha-\cos\beta)+2b\pi r_1 h+kb\pi r_1^2$$

$$s.t.\begin{cases} V(\alpha,\beta,r_1,r_2,r_3,h)=V_0, \\ r_1=r_3\sin\beta, \\ r_2=r_3\sin\alpha, \\ r_1>0, r_2>0, \\ r_3>0, h>0, \\ 0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4.4. 3模型求解

1、模型简化

1、模型简化

在这个模型中有不少数据是不能通过材料最省来确定的，它们的尺寸与其它方面（如焊缝长度、工时少、运输方便等）有关系，所以通过以上模型不能对其求解，进行简化如下：

1)k值的确定是根据易拉罐顶盖和底盖所需要的强度来确定的，不能因为省材料而使k值变小，通过问题一的测量数据可以得到$k = 2.9881$;

2)顶盖其实不是完全的平面，而是向上拱起的，是由薄片挤压而成，并且考虑到罐体的美观、实用性、运输方便等，其大小不能通过求材料最省得到，根据问题一的测量得到$r_2 = 3.005cm$.

2、求解方法

方法一：Lingo软件求解

本模型属于最优化模型，在求解时可利用Lingo软件求解.

所得结果： 圆柱体半径$r_1=3.24cm$,球台的半径r_3=$3.24cm$,圆柱体高$h=9.77cm$,与弧形部分有关的角$\alpha=1.17,\beta=1.57$,此时所用材料为$4.10cm^3$.

方法二：Lagrange乘数法和Matlab软件求解

构造*Lagrange*函数：

$$L(\alpha,\beta,r_1,r_2,r_3,h)=kb\pi r_2^2+2b\pi r_3^2(\cos\alpha-\cos\beta)+2b\pi r_1 h+kb\pi r_1^2$$
$$+\lambda\left(\frac{2\pi r_3^3(\cos\alpha-\cos\beta)}{3}+\frac{\pi}{3}\left(\frac{r_2^3}{\tan\alpha}-\frac{r_1^3}{\tan\beta}\right)+\pi r_1^2 h-365\right)$$

分别对$\alpha,\beta,r_1,r_2,r_3,h$求偏导，并把$b=0.0102cm,k=2.9881,r_2=3.005cm$,$V_0=365cm^3$代入以上方程组，利用*Matlab*中的*fsolve*函数求解：

所得结果：圆柱体的半径$r_1=3.2463cm$,球台所在球体的半径$r_3=3.2465cm$,圆柱体的高$h=9.7679cm$,与弧形部分有关的两个角度$\alpha=1.1689,\beta=1.57$,所用材料为$4.0979cm^3$.

对两种方法所得结果，求算术平均值得到易拉罐各项的尺寸：

圆柱体半径为$3.24cm$,圆柱体的高度为$9.77cm$,球台所在球体的半径$r_3=3.2465cm$,球台上顶盖半径为$3cm$,球台弧形部分壁厚为$0.1mm$,圆柱体底面厚度为$0.31mm$.

4.4. 4结果说明

这种设计，易拉罐所用的总材料体积为$4.10cm^3$,实际所用材料总体积为$4.12cm^3$.（问题三求得），所以这种设计能节省0. 49%的材料. 由新设计的易拉罐可得圆柱体的高度为$9.77cm$,直径为$6.48cm$,直径与高度的比值为$^2\!/_3$,这也是基本符合“黄金分割”的.

西安交通大學

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

课后小作业：

1、何处看塑像最好：海洋公园中有一高为a米的美人鱼塑像，其底座高为b米.为了观赏时对塑像张成的夹角最大（即看得最清楚），应该站在离底座脚多远的地方？

塑像的高度与基座的高度之间有没有一定的比例关系？
如果二者之间有关系，关系是什么？如何得出？
如果二者之间没有关系，证据是什么？（统计数据）

美国纽约的自由女神像：像高46.5m,基座46.5m

巴西里约热内卢的救赎：像高39.6m,基座9.5m

香港的天坛大佛：像高26.4m,基座7.599m

2、易拉罐尺寸的最优设计：

将双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$绕$y$轴旋转一周，制作一个外形相似于此旋转曲面的容积是365毫升的易拉罐，试确定易拉罐的各项尺寸大小及制作易拉罐的用料体积.