运动学部分

1. 研究内容和意义

运动学纯粹从几何的角度来研究物体的运动规律（运动的几何性质），而不涉及物体的受力和惯性。

- 选择适当参量，对物体运动进行数学描述。
- 研究表征物体运动几何性质的基本物理量。
- 研究物体系统各部分运动参量之间的关系。

意义：

- 工程实际中的应用—机构运动分析.
- 动力学的基础—分析运动与力的关系.

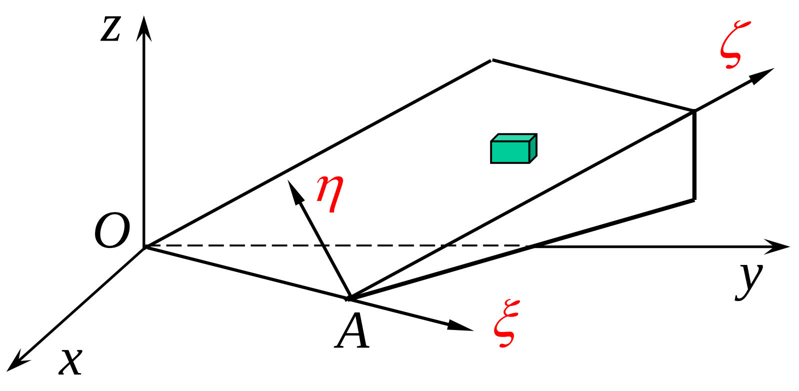
2. 运动的相对性及参考系

运动规律是指物体在空间的位置随时间变化的规律。

物体位置的描述必须指明相对的物体—参考体。
固连于参考体的延伸空间—参考系或参考空间。

对于不同的参考系，同一物体的运动的表现形式是不一样的，称为运动的相对性。

时间概念：瞬时、时间间隔



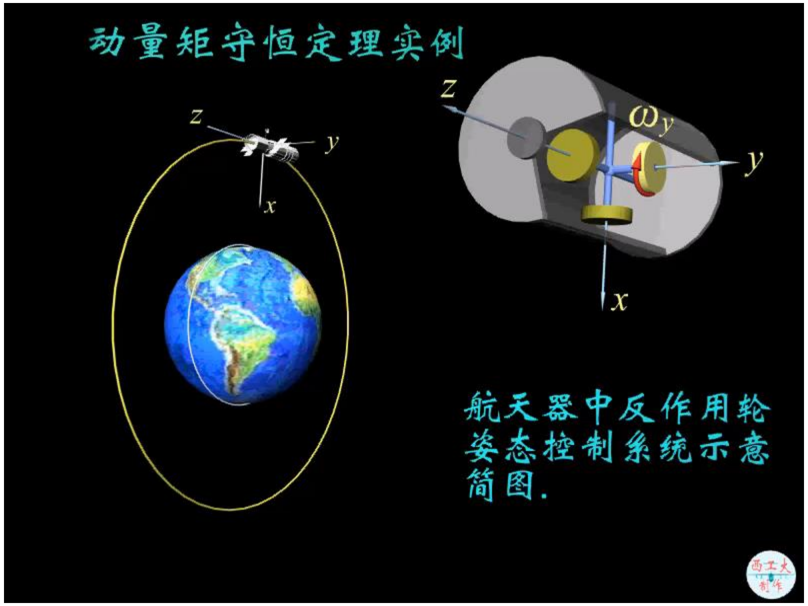
运动的描述方法

- 几何法 --- 瞬时
- 分析法 --- 全过程

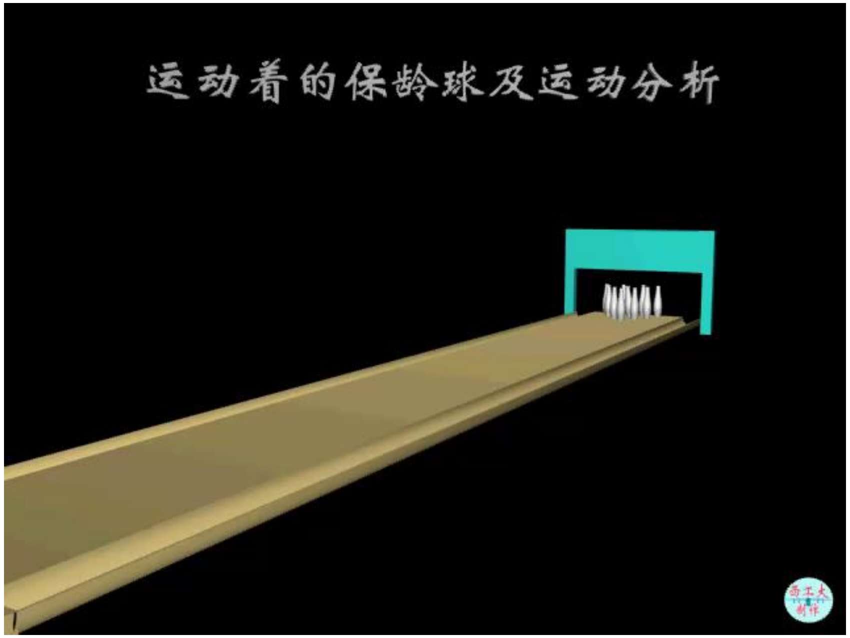
3. 研究对象及其运动形式

• **研究对象：** **点**（或**动点**）：可忽略大小的物体或刚体上的指定点

刚体：刚体整体的运动



研究卫星轨道时，卫星可以看作一个点。研究其运动姿态时，应看作刚体。



接触轨道之前，保龄球可以看作一个点；接触轨道之后，保龄球在摩擦力作用下发生滚动，保龄球应看作刚体。

•运动形式

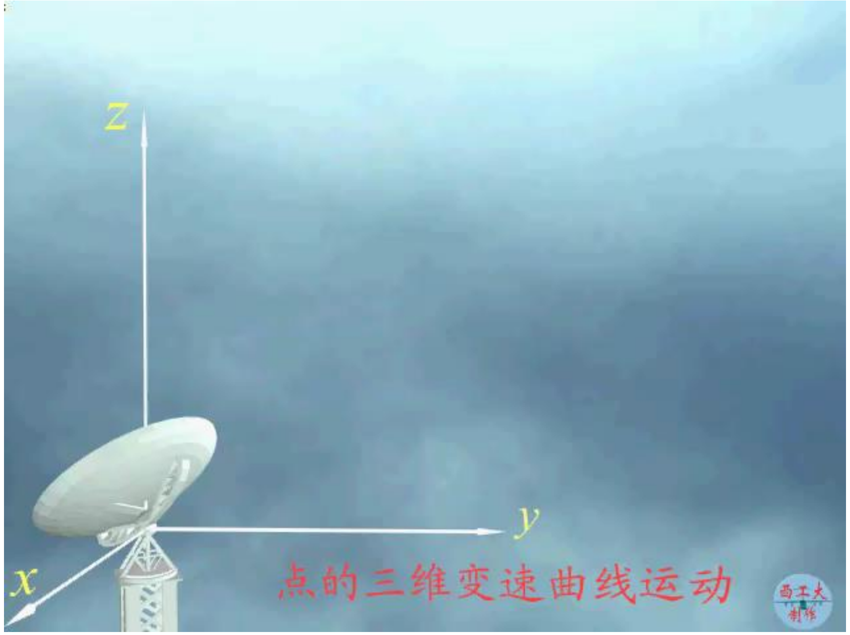
（1） 点的运动

A. 直线运动

B. 曲线运动——

最一般的情形为三维

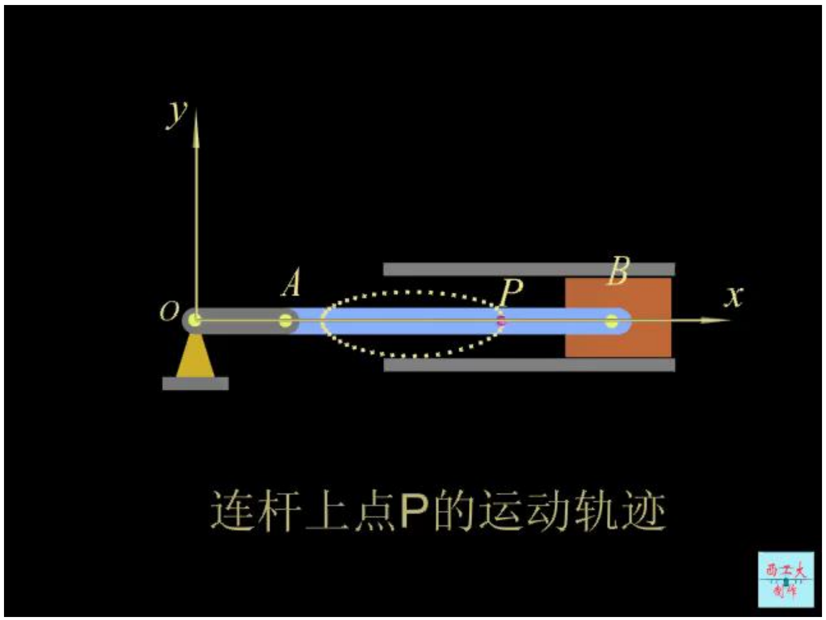
变速曲线运动



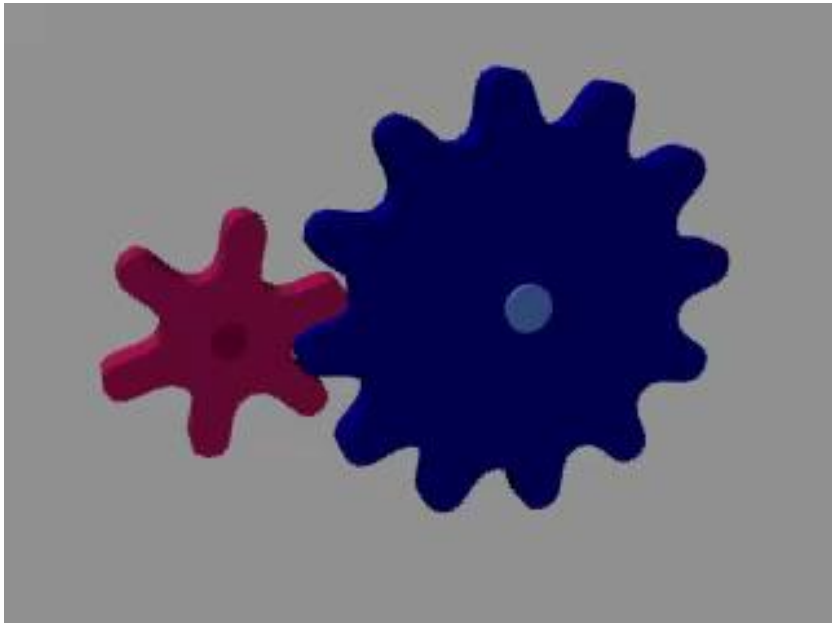
(2) 刚体的运动

A. 平动(translation)

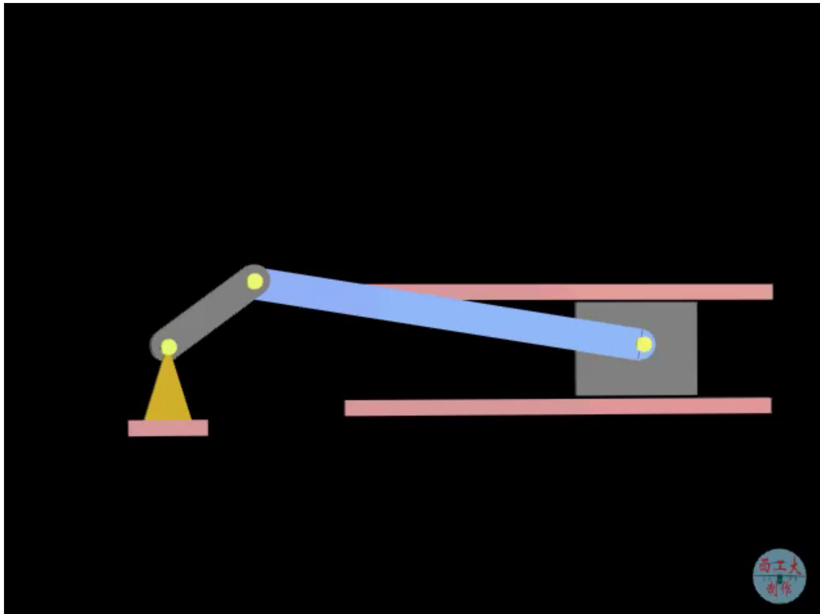
- 直线平动
- 曲线平动

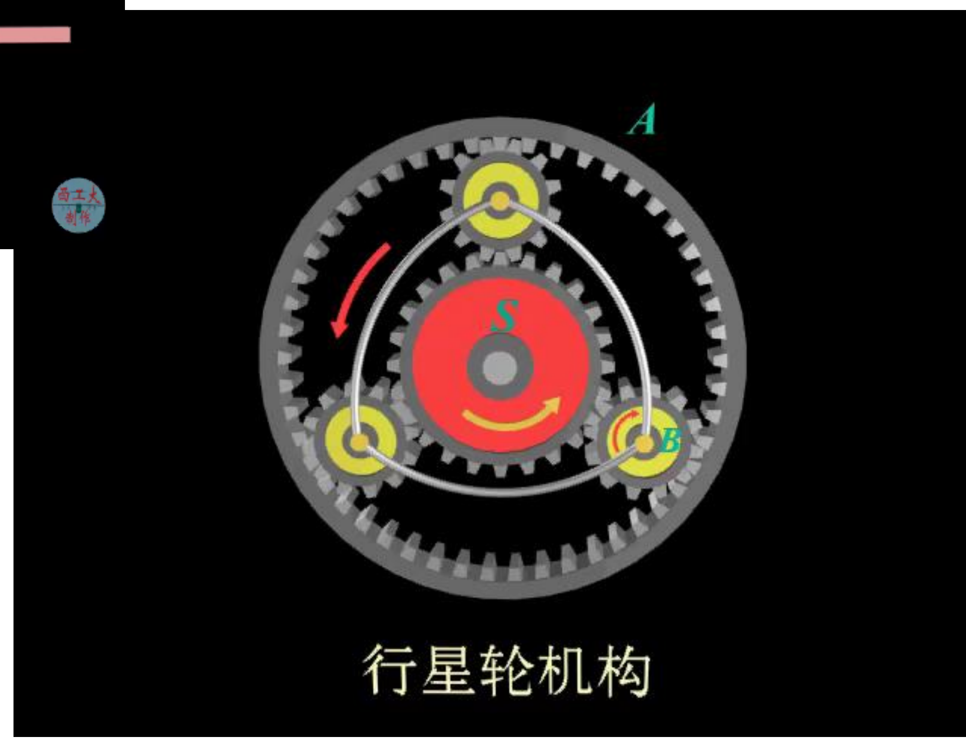


B. 定轴转动(fixed-axis rotation)

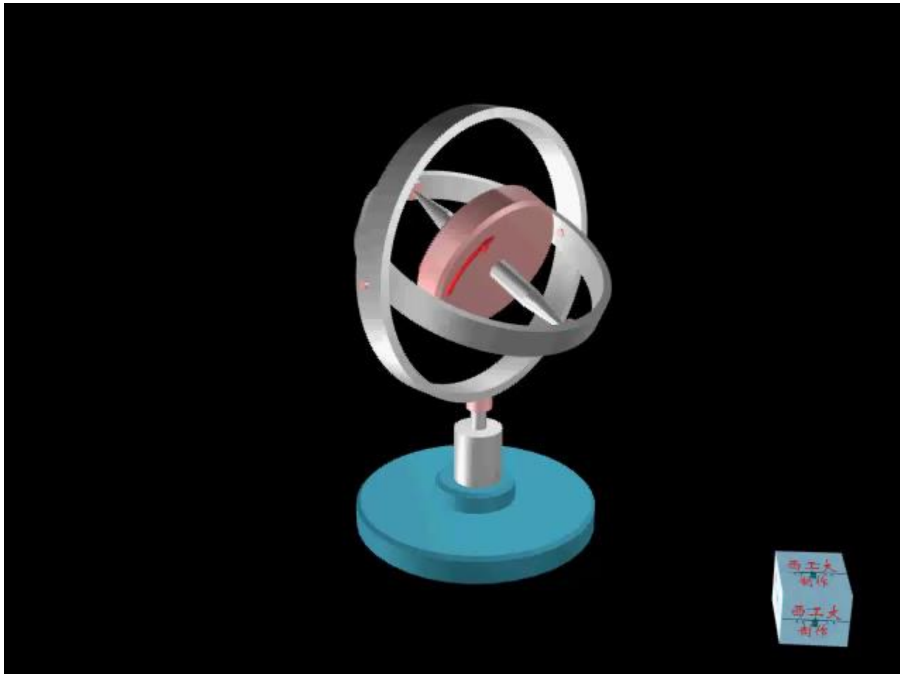


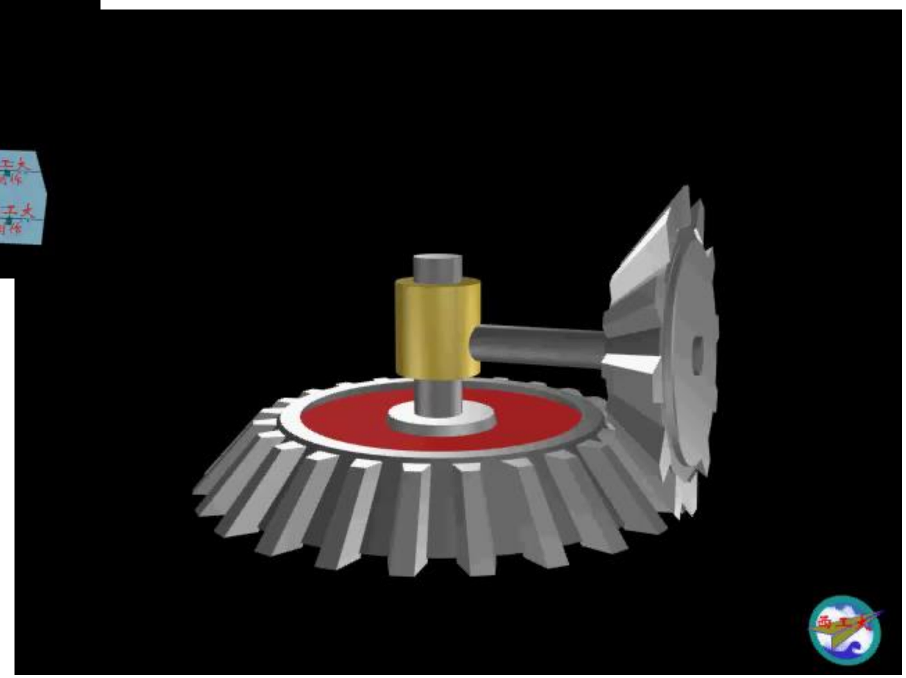
C. 平面运动(planar motion)





D. 定点运动(rotation around a fixed point)





第六章 运动学基础

§6-1 机构运动简图

§6-2 点的运动

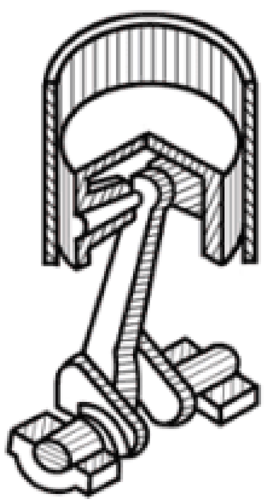
§6-3 刚体的基本运动

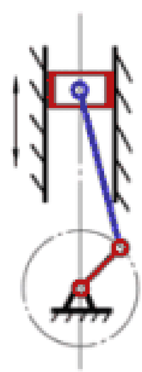
§6-1 机构运动简图

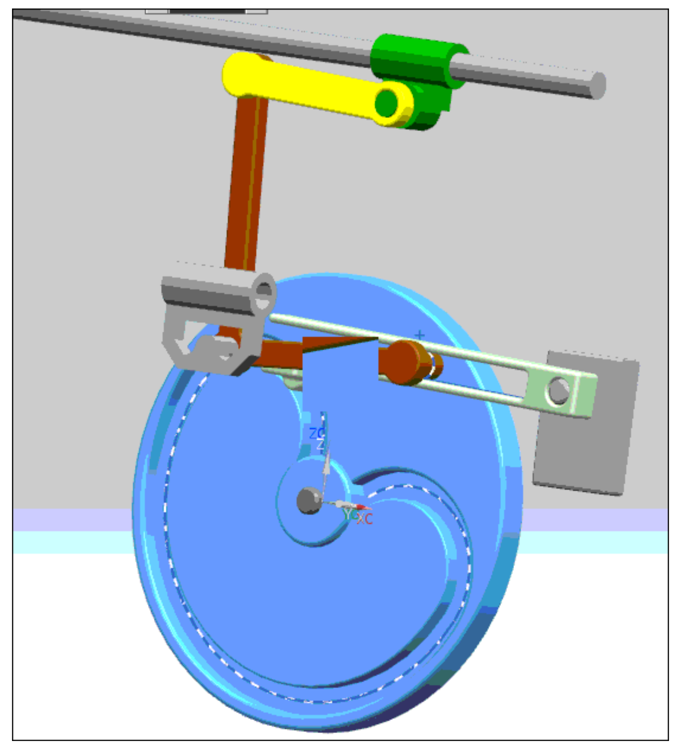
单个物体—— 大学物理的研究对象，一般看作质点，不计质量。
机构—— 具有确定相对运动的多个实体组成的系统.

1. 多个实体的组合 —— 构件
2. 各实体间具有确定的相对运动 ——运动副

约束-两个接触物体力的传递
运动副-两个物体之间的运动传递





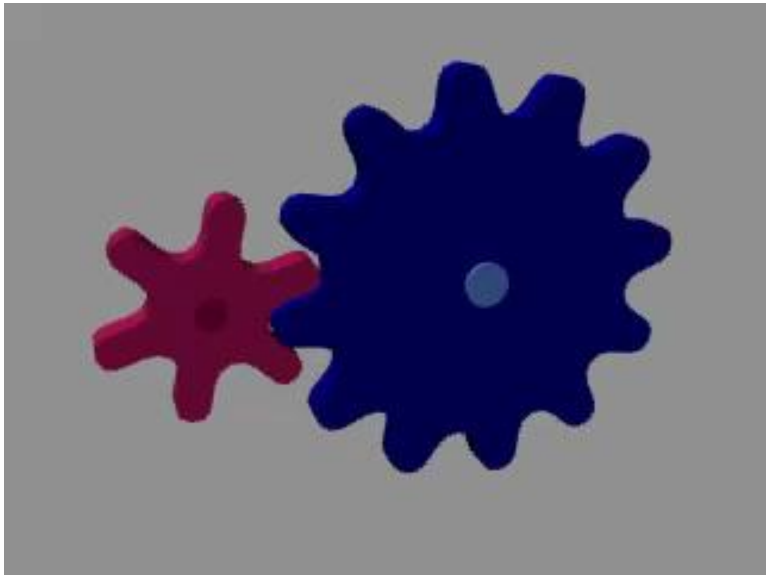


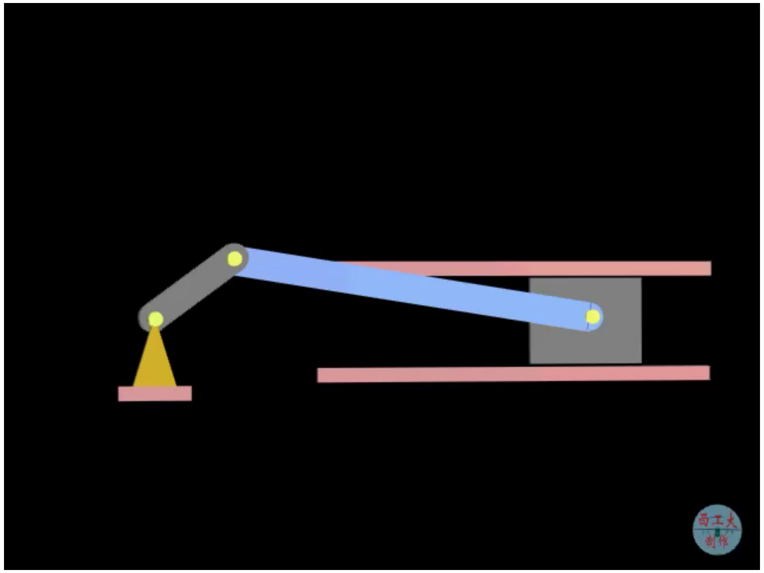
组成机构的各相对运动实体——**构件** member

- 固定件——支承运动构件的构件
- 主动件——驱动力作用的构件
- 从动件——随主动件运动而运动的构件

两构件组成有确定相对运动的可动联接——**运动副**

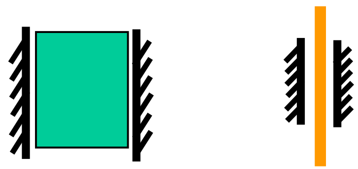
- 高副——通过点、线接触
- 低副——通过面接触
  - 移动副
  - 转动副



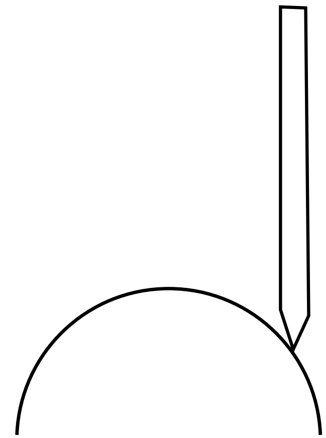


平面运动副及构件的表示方法

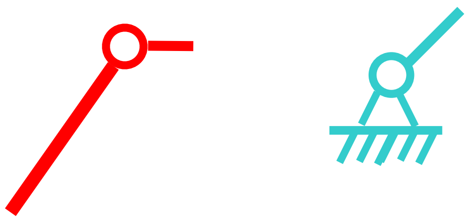
移动副

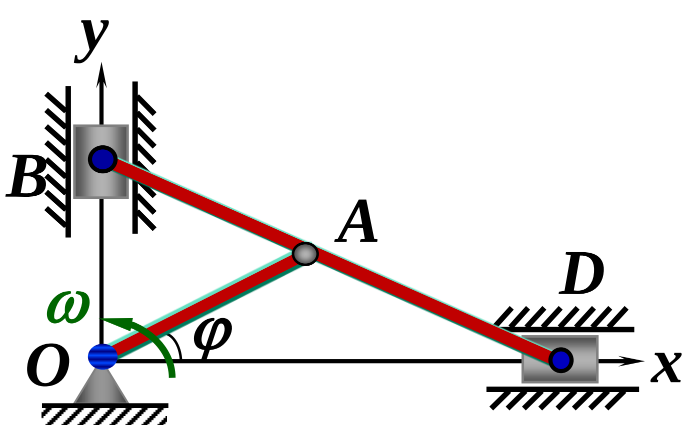


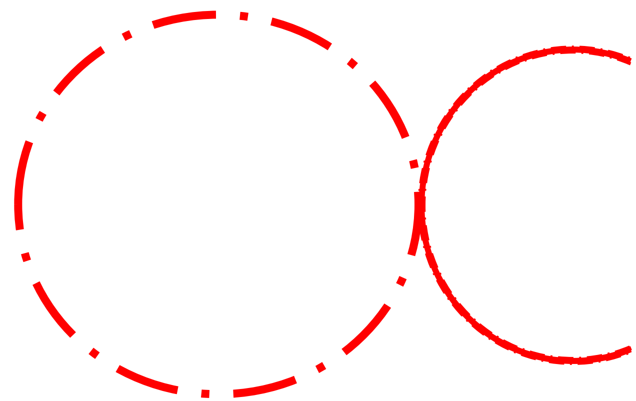
高副



转动副

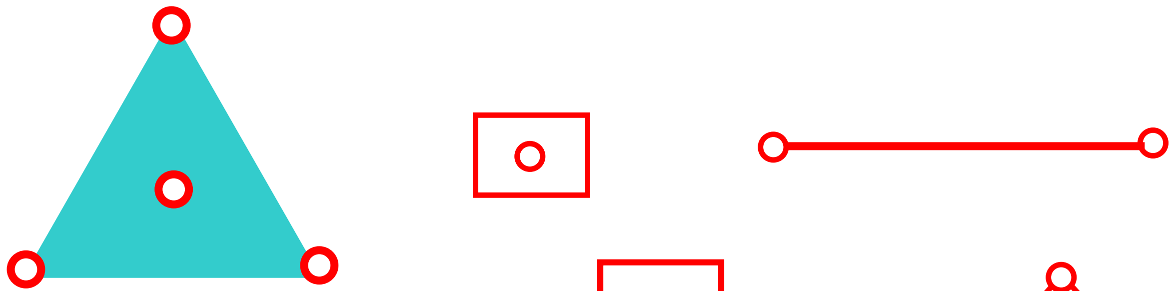


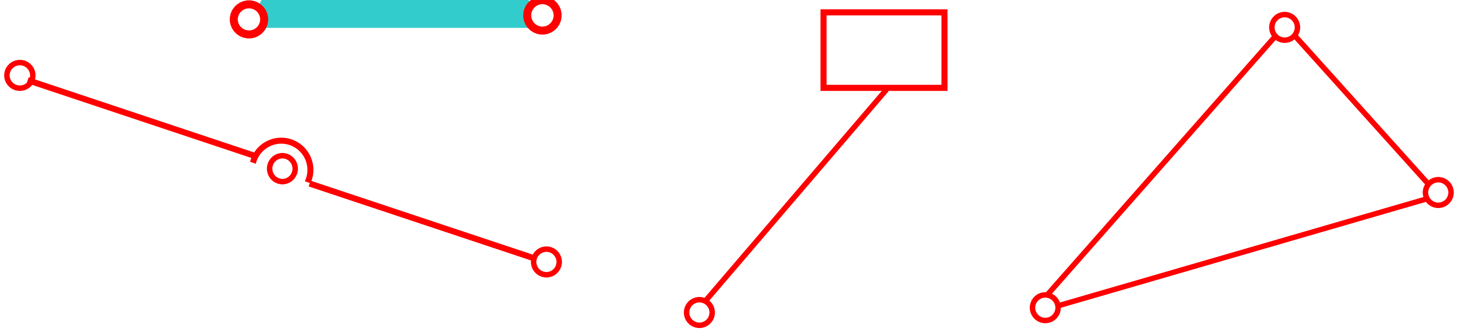




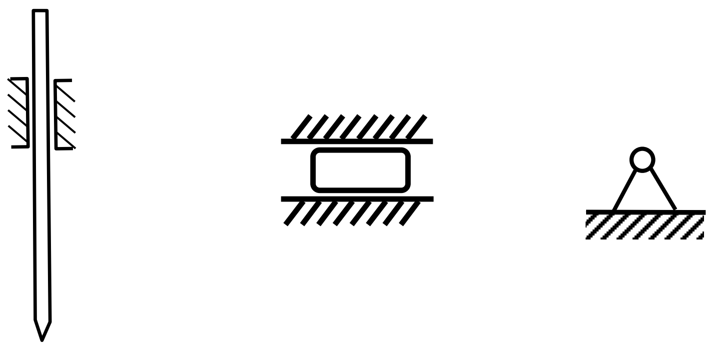
平面运动副及构件的表示方法

构件



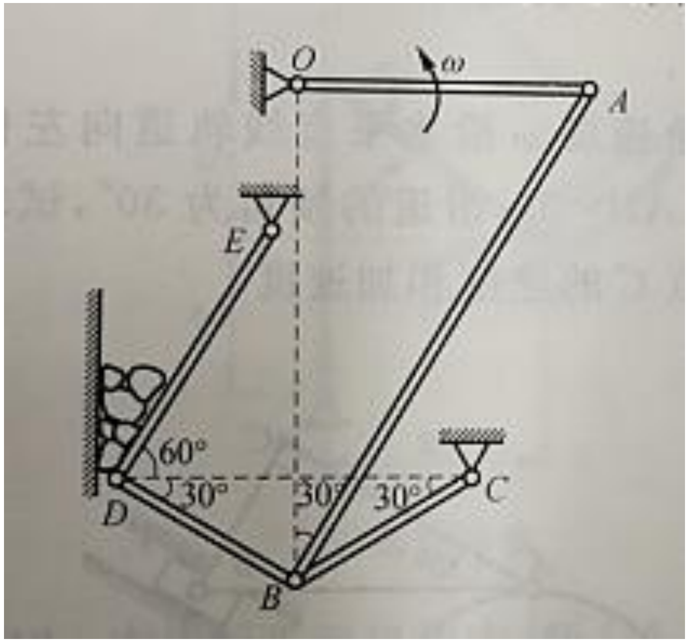


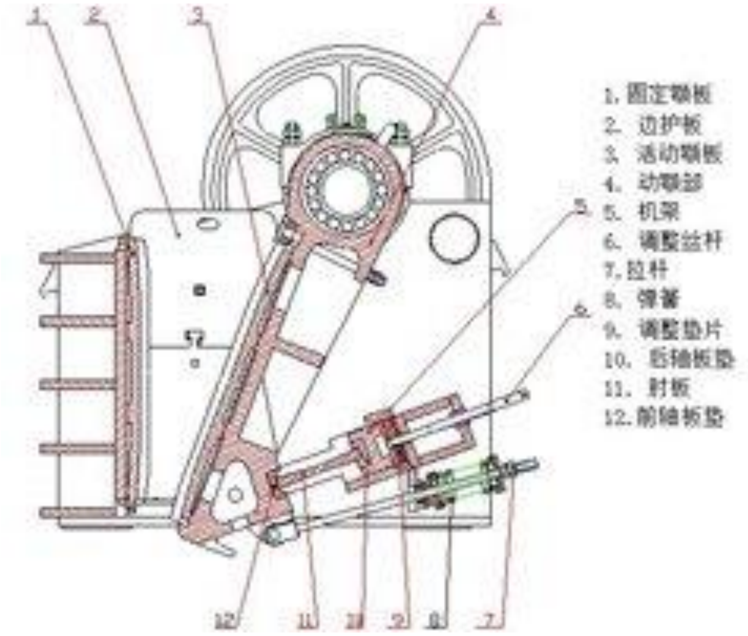
固定件——加剖面线



平面机构的运动简图

用简单的符号和线条表达机构的组成和构件之间的相对运动——**机构运动简图**



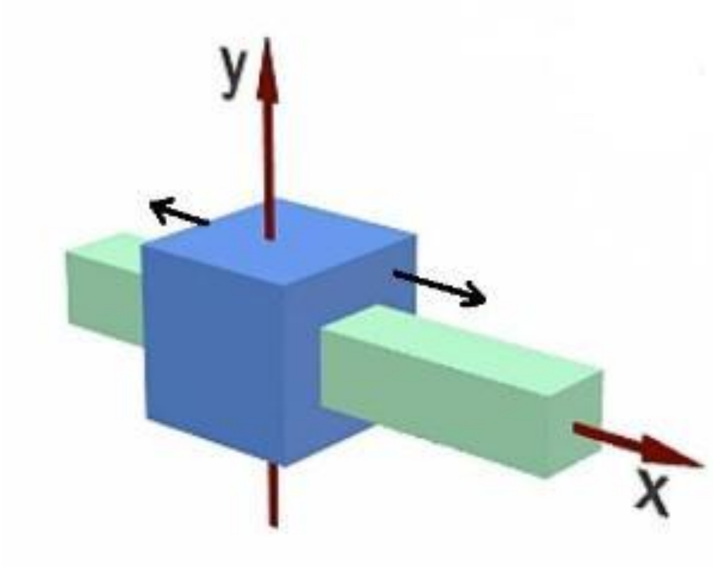


平面机构的自由度

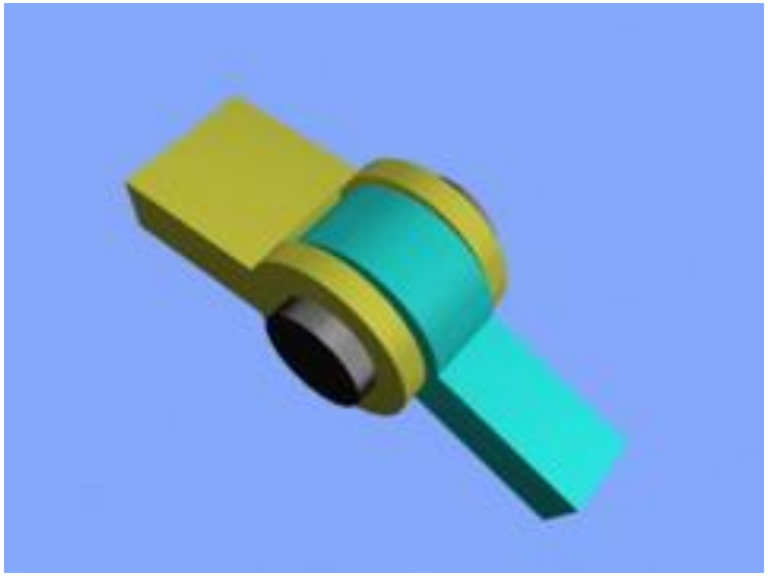
自由度----构件的独立运动数目(位移)

单个平面自由运动构件的自由度= 3（x，y，φ）

构件之间用运动副联接后，某些独立运动将受到限制，自由度将随之减少。增加约束，构件的自由度减少。

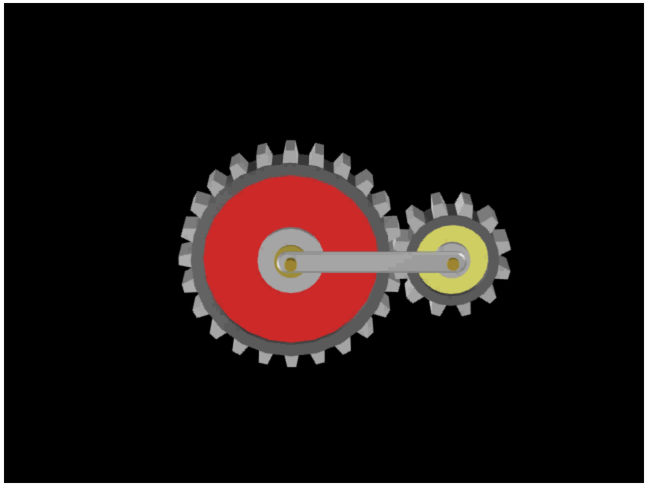


受移动副约束的运动构件的自由度=1（x或y）



受转动副约束的运动构件的自由度=1（φ）

平面机构的自由度



总结：在平面机构中，平面低副具有两个约束，一个自由度； 平面高副具有一个约束，两个自由度.

由N个构件组成平面机构中，必取一个构件作机架，则活动构件数为 $n = N - 1$

受高副约束的运动构件的自由度= 2（τ，φ）

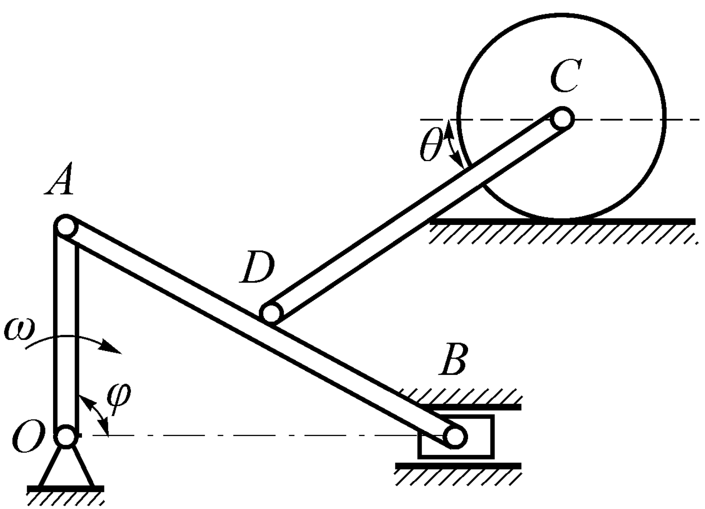
F —平面机构的自由度数，

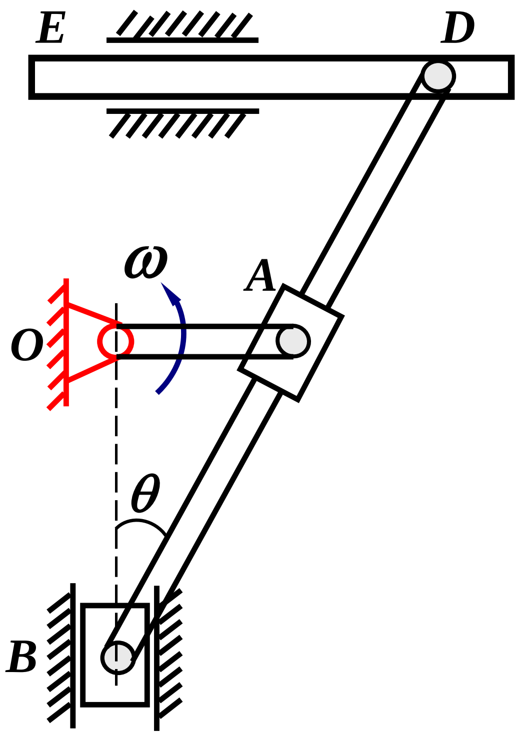
P_L—低副个数，P_H—高副个数

平面机构自由度的计算公式 ：

$$F = 3n - 2P_L - P_H$$

图示平面机构中共包括______个构件，______个运动副；运动副中共包括______个高副，______个低副；低副中共包括______个转动副，______个移动副。机构的自由度=______。





§6-2 点的运动

- 确定任一时刻点在参考坐标系(坐标原点和坐标轴)中的位置，即点的**运动规律**。用数学式表示称为**运动方程**。

  1. 一般位置　2. 建立坐标系。

- 点在空间运动时所经过的路线称为该点的**运动轨迹**。

- 点的**速度**是描述点在某一瞬时运动的快慢和方向的物理量。

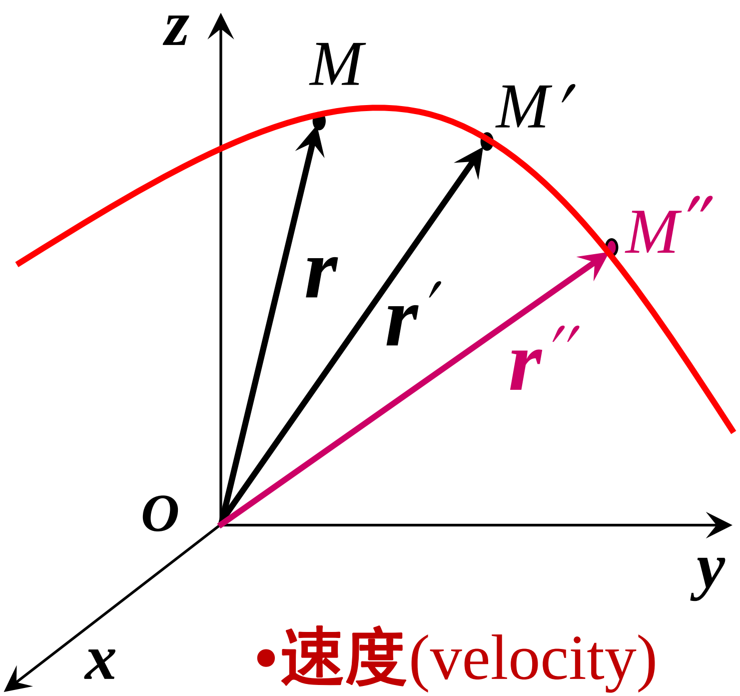
点的**加速度**是描写点的速度的大小和方向变化快慢（率）的物理量。

点的运动的两类问题：1. 由运动方程求速度、加速度

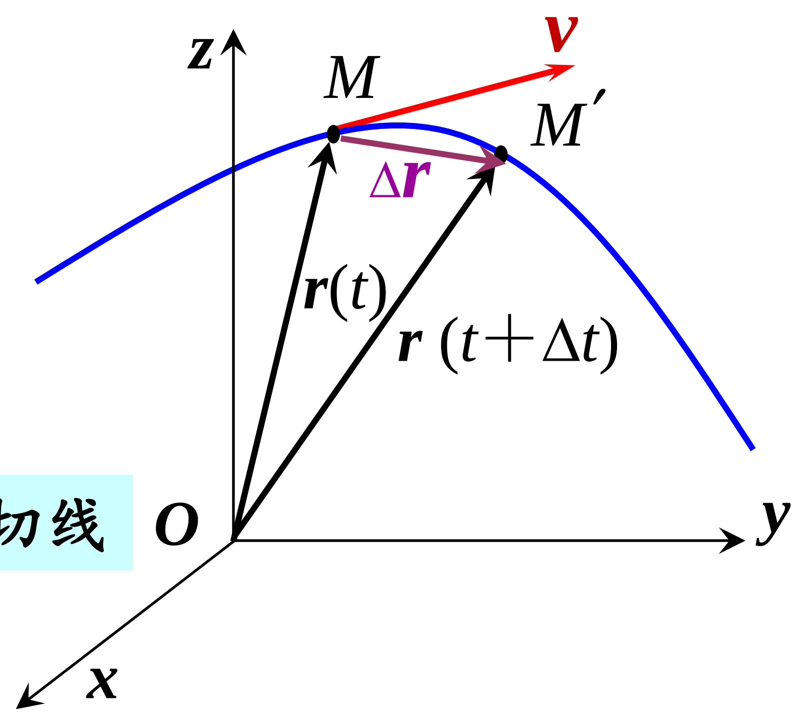
2. 由速度、加速度求运动规律。

1. 矢量法

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ ---运动方程



点在运动过程中，其位置矢量的端点描绘出一条连续曲线---矢端图(运动轨迹)



•**速度**(velocity)

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}$$

沿t时刻轨迹切线

•**加速度**(acceleration)

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$$

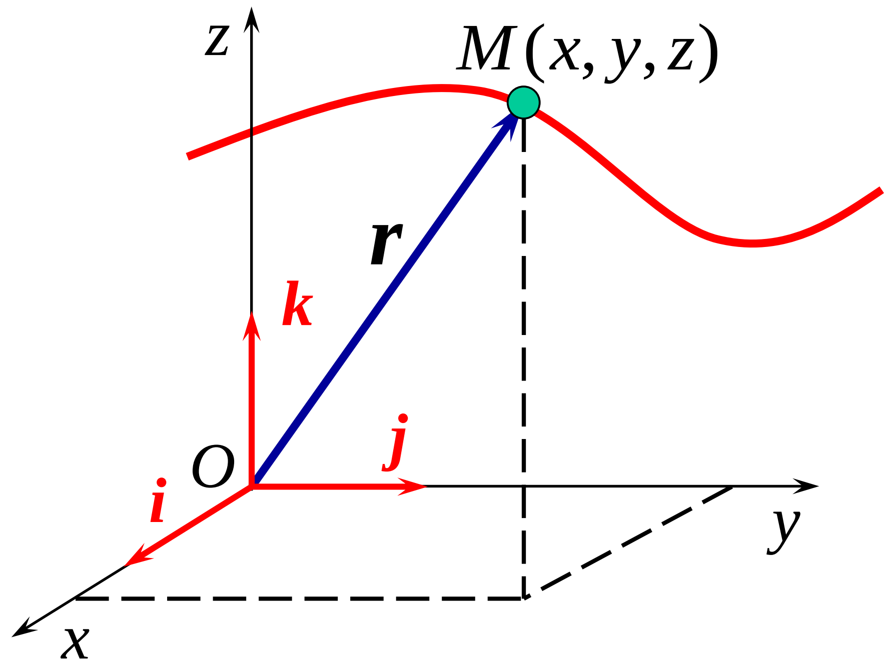
沿t时刻速度矢端图的切线

2. 直角坐标法

运动方程

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$$



轨迹方程

$$f(x, y, z) = 0$$

速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

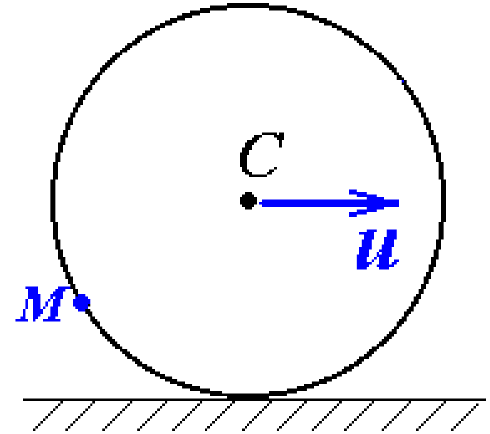
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

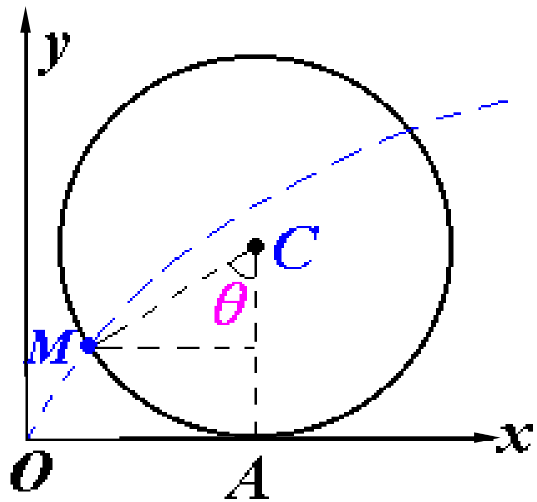
$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, a_y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, a_z = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

例 已知半径为R的圆轮在固定直线轨道上作纯滚动（只滚不滑）。轮心速度u=const。求：轮缘一点M的运动方程及任一瞬时的速度与加速度。



解：(1)建立参考坐标系Oxy

(2) 任意瞬时M点的位置坐标



$$x = \overline{OA} - R\sin\theta$$

$$y = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$$

$$\overline{OA} = AM = R\theta = ut$$

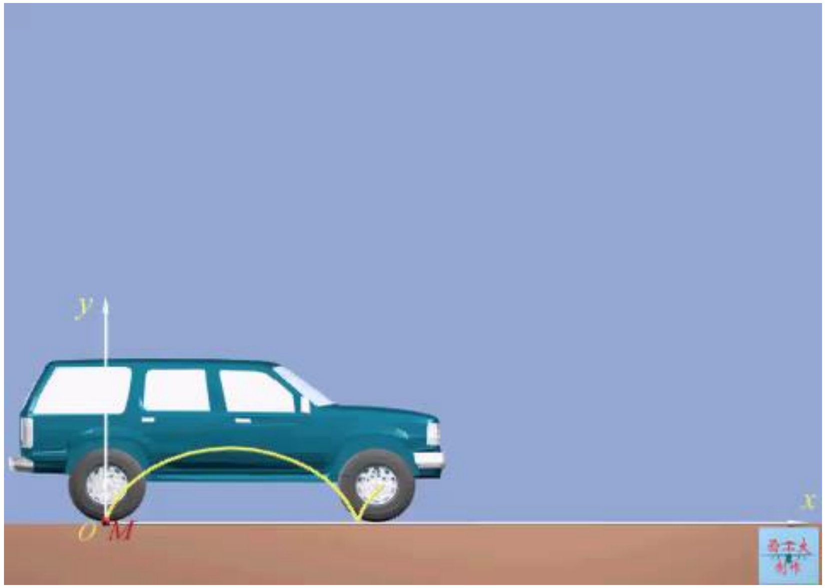
$$\therefore \quad \theta = \frac{ut}{R}$$

M点的运动方程：

$$x = R\left(\frac{ut}{R} - \sin\frac{ut}{R}\right)$$

$$y = R\left(1-\cos\frac{ut}{R}\right)$$

(3) M点轨迹是旋轮线 $x = R(\frac{ut}{R} - \sin\frac{ut}{R})$ $y = R(1-\cos\frac{ut}{R})$



(4) M点的速度

令 $\omega = \frac{u}{R}$

$$x = R(\omega t - \sin\omega t)$$

$$y = R(1-\cos\omega t)$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R\omega(1-\cos\omega t)$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R\omega\sin\omega t$$

(5) M点的加速度

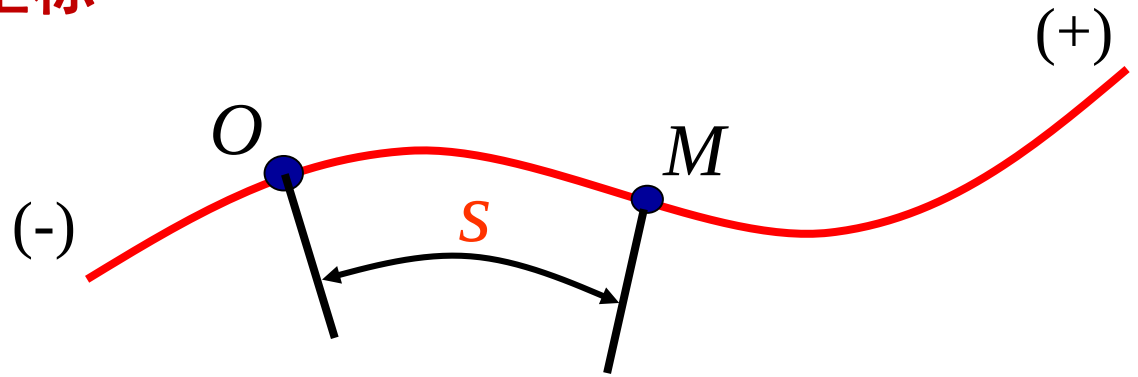
$$a_x = \ddot{x} = R\omega^2\sin\omega t$$

$$a_y = \ddot{y} = R\omega^2\cos\omega t$$

3. 自然坐标法

★自然法适用于描述非自由质点运动（轨迹已知）

（1）弧坐标



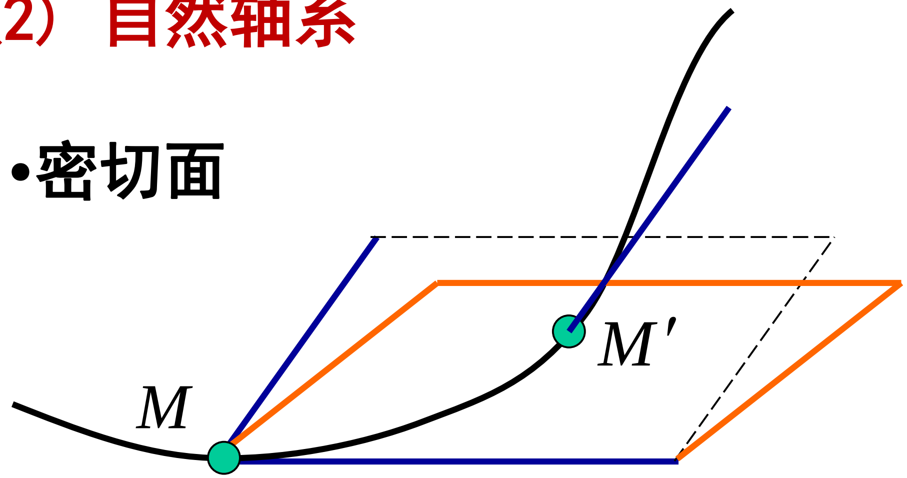
规定：原点、正向

s称为弧坐标，是代数量

运动方程 $s = f(t)$

(2) 自然轴系

•密切面



轨迹曲线上任两点的切向量所决定平面的极限位置.

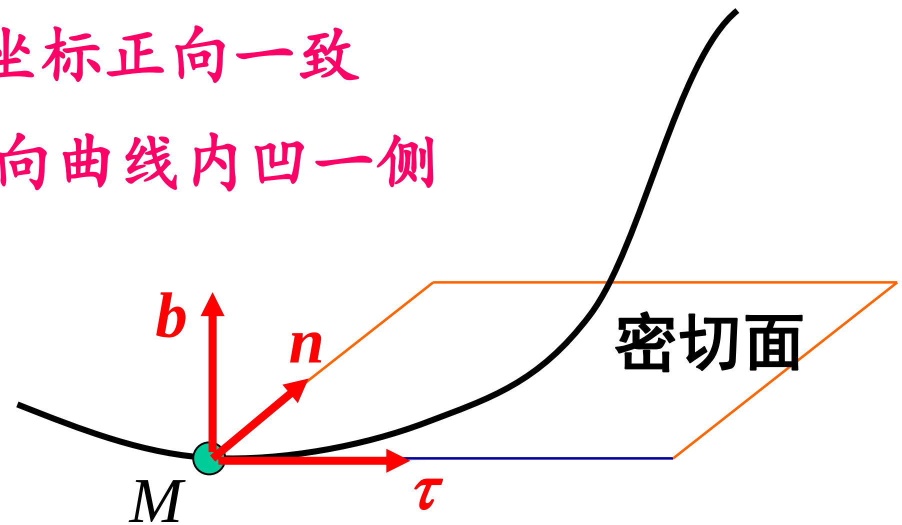
平面曲线上任一点的密切面就是曲线所在平面.

$\boldsymbol{\tau}$-切向单位矢量，正向与弧坐标正向一致

$\boldsymbol{n}$-主法线单位矢量，正向指向曲线内凹一侧

$\boldsymbol{b}$-副法线单位矢量

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$$



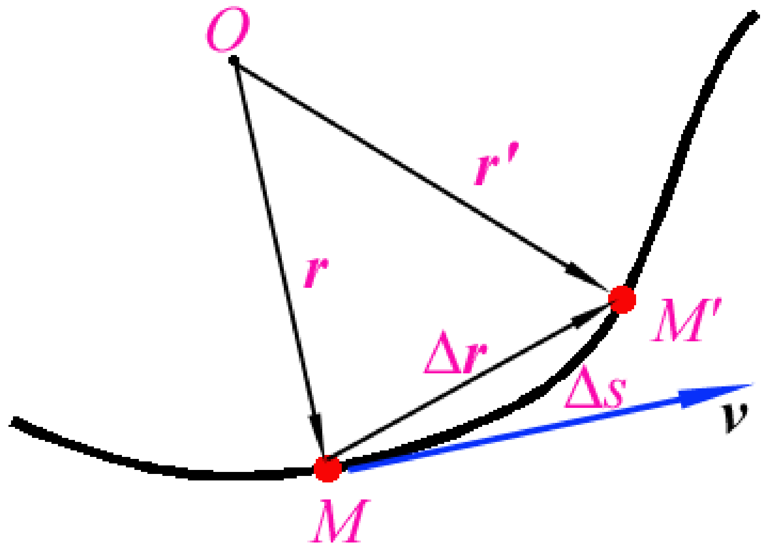
•自然轴系（游动坐标系）

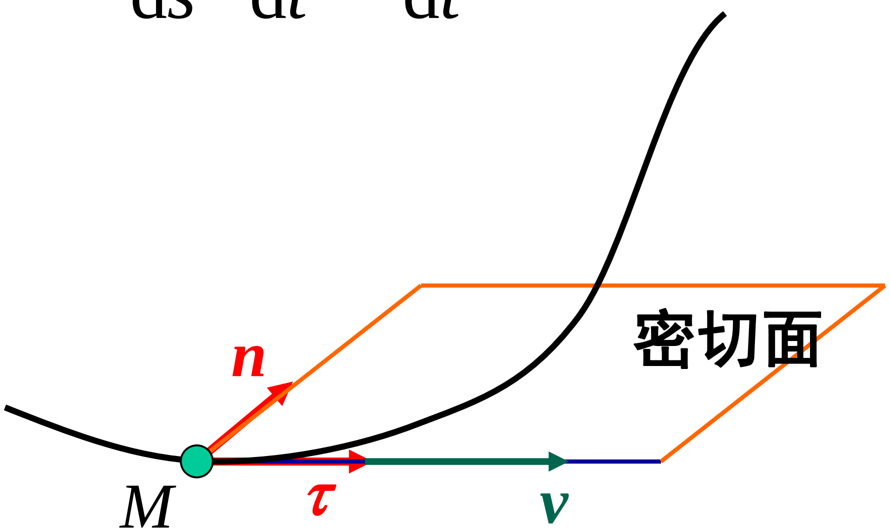
(3) 速度与加速度

•速度

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

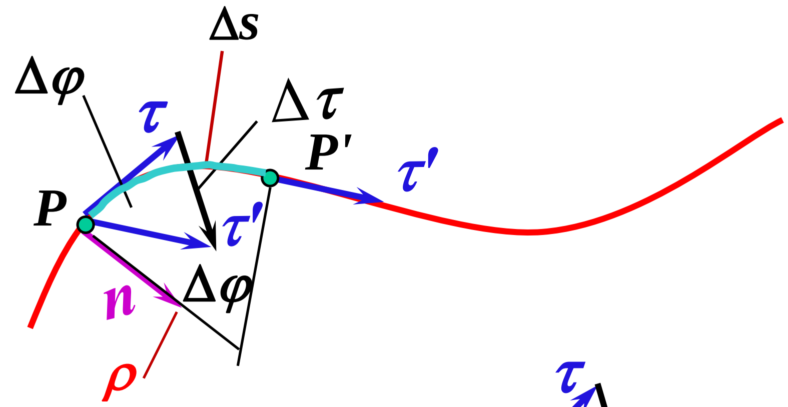
$$=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$$





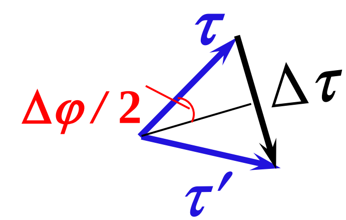
方向沿轨迹
切线方向

(3) 速度与加速度



•加速度

$$\boldsymbol{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau}$$



$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_\tau \boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

$$\left|\Delta\boldsymbol{\tau}\right| = \left|\boldsymbol{\tau}\right|\Delta\varphi = \Delta\varphi$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v_\tau}{\rho}$$

当$\Delta t\to 0$时，$\Delta\boldsymbol{\tau}$的极限方向垂直于$\boldsymbol{\tau}$，亦即$\boldsymbol{n}$方向。

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho}\boldsymbol{n}}$$

（3）速度与加速度

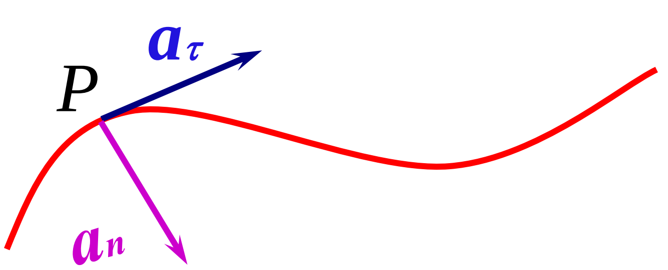
•加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v_\tau^2}{\rho}\boldsymbol{n}=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n$$

- **切向加速度** $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$ 表示速度矢量大小的变化率；
- **法向加速度** $a_n=\frac{v_\tau^2}{\rho}$ 表示速度矢量方向的变化率；

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\rho}$$

$$y=f(x)\qquad \frac{1}{\rho}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$



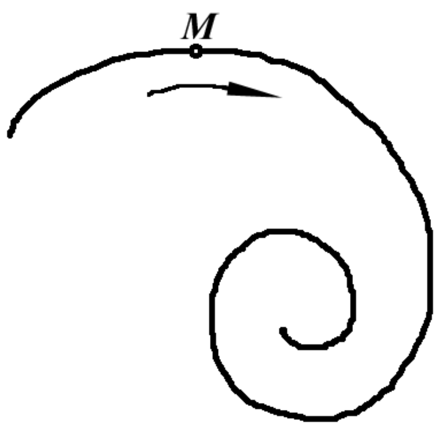
思考1：点M沿螺线自外向内运动，如图所示。它走过的弧长与时间的一次方成正比，问点M__________。

A 加速度越来越大

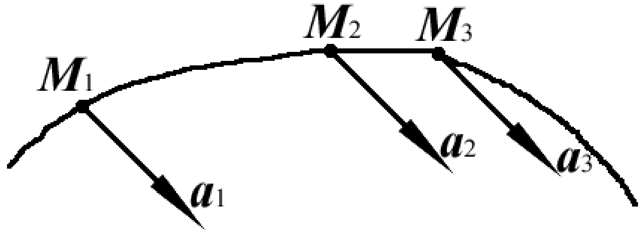
B 加速度越来越小

C 越跑越快

D 越跑越慢



思考2：当点作曲线运动时，点的加速度a是恒矢量，如图所示。则点的运动__________匀变速曲线运动（是或不是）。



直线运动：$a_n = 0, a = a_\tau$

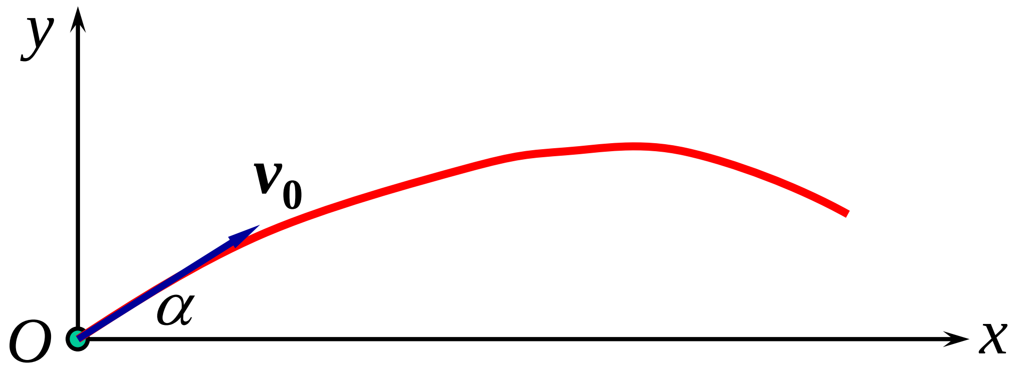
匀速曲线运动：$a_\tau = 0, a = a_n$

匀变速曲线运动：$a_\tau = \text{const}$

例：炮弹射出，直角坐标运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

求：$t = 0$时炮弹的切向加速度和法向加速度，以及这时轨迹的曲率半径。



解：$\begin{cases} x = v_0 \cos a \cdot t \\ y = v_0 \sin a \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g$$

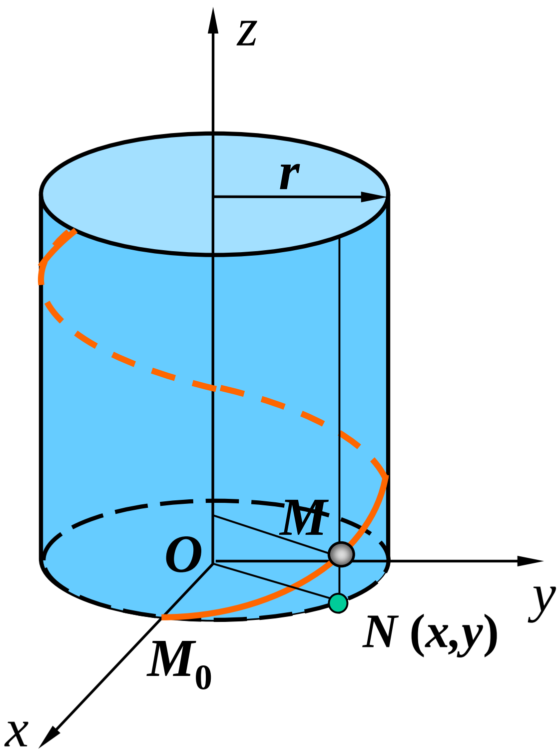
当$t=0$时　$v = v_0$，　$a = g$

将加速度在切线和法线方向分解有　$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{v}(v_0\sin\alpha - gt) \Rightarrow a_\tau = -g\sin\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = g\cos\alpha \\ a_n &= \frac{v_0^2}{\rho} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \rho = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$$

例 圆柱的半径为r，绕铅直固定轴z作匀速转动，周期为T秒。动点M以匀速$\boldsymbol{u}$沿圆柱的一条母线NM运动（如图）试求M点的轨迹、速度和加速度，并求轨迹的曲率半径。



解：1. M点的运动方程和轨迹。

$$\angle M_oON = \frac{2\pi}{T}t$$

$$x = r\cos(\frac{2\pi}{T}t),$$

$$y = r\sin(\frac{2\pi}{T}t),$$

$$z = ut$$

M点的轨迹（螺旋线）方程

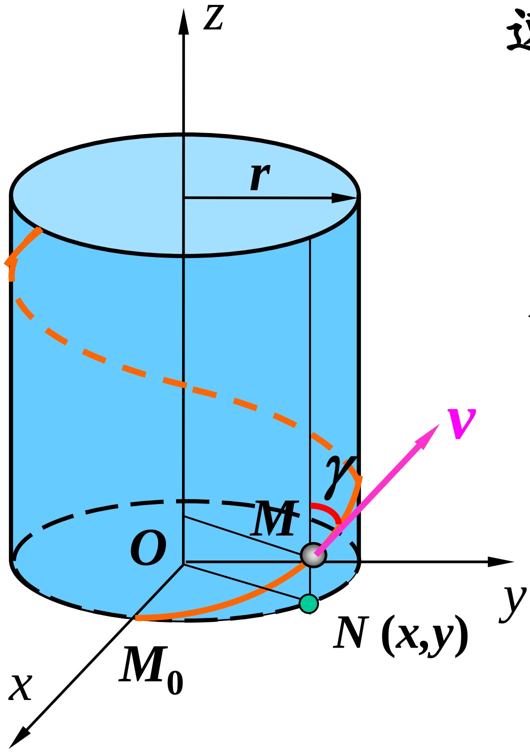
$$x = r\cos(\frac{\omega z}{u}),$$

$$y = r\sin(\frac{\omega z}{u})$$

2. M点的速度

$$x = r\cos(\frac{2\pi}{T}t),\quad y = r\sin(\frac{2\pi}{T}t),\quad z = ut$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r\omega\sin\omega t \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\omega\cos\omega t \qquad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = u$$



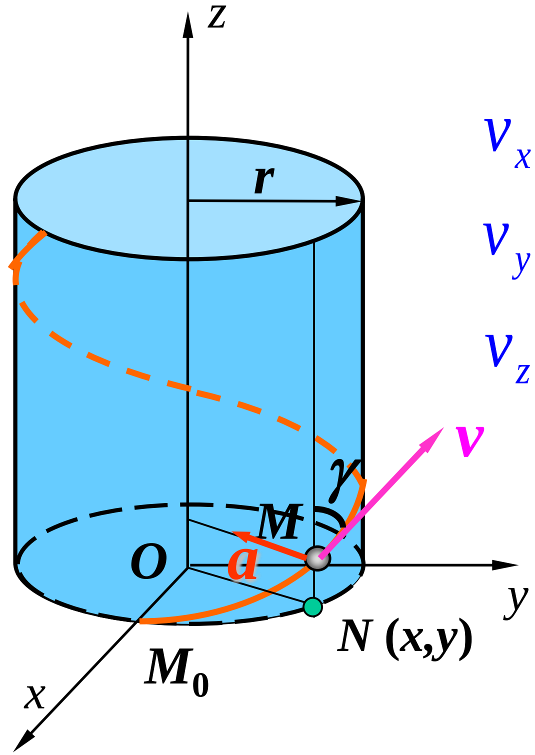
速度在平面Oxy上的投影大小等于

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + u^2} = \mathrm{const}$$

$$\cos\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{u}{\sqrt{r^2\omega^2 + u^2}}$$

速度与圆柱母线的交角γ 不变。



$$v_x = -r\omega \sin \omega t$$

$$v_y = r\omega \cos \omega t$$

$$v_z = u$$

3. M点的加速度

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2 \cos\omega t$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2 \sin\omega t$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 = \mathrm{const}$$

加速度的方向垂直并指向z轴。

4. 曲率半径

$$a_\tau = 0,\ a = a_n$$

$$\rho = \frac{v^2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{r^2\omega^2 + u^2}{r\omega^2} = r + \frac{u^2}{r\omega^2}$$

$$\rho = \frac{r}{\sin^2 \gamma}$$

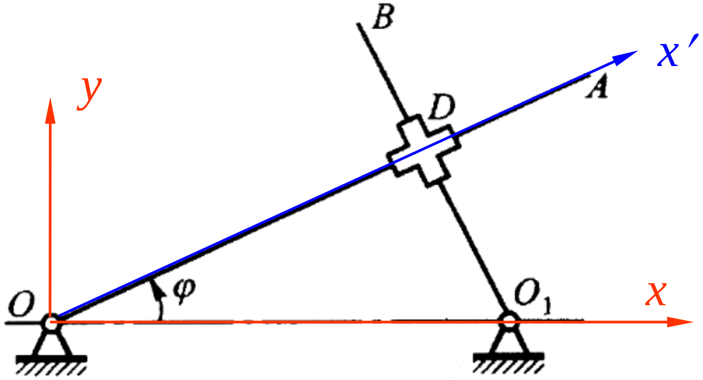
例 如图所示，杆OA和O_1B分别绕O轴和O_1轴转动，用十字形滑块D将两杆连接。在运动过程中，两杆保持相交成直角。已知：$OO_1=a$；$\varphi=kt$，其中k为常数。求滑块D的速度和相对于OA的速度。

解：建立坐标系Oxy

$$x_D=\overline{OO_1}\cos\varphi\cos\varphi=a\cos^2 kt$$

$$y_D=\overline{OO_1}\cos\varphi\sin\varphi=\frac{a}{2}\sin 2kt$$

$$v_D=\sqrt{\dot{x}_D{}^2+\dot{y}_D{}^2}=ak$$



自然坐标系

$$s=\frac{a}{2}\cdot 2\varphi=a\varphi$$

$$v_D=ak$$

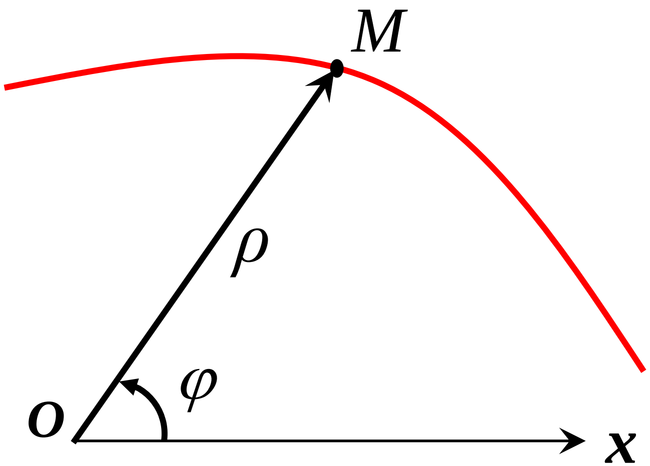
建立坐标轴Ox'

$$x'_D=\overline{OO_1}\cos\varphi=a\cos kt$$

$$v'_D=-ak\sin kt$$

4. 极坐标法

★极坐标法适用于描述平面曲线运动



极点O, 极轴x

ρ ---极半径,

φ ---极角

运动方程 $\rho = \rho(t)$

$\varphi = \varphi(t)$

速度

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}, \quad v_\varphi = \rho\frac{d\varphi}{dt}$$

加速度 $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$$

♣ 描述点运动的三种方法比较

●矢量法—结果简明，具有概括性，且与坐标选择无关。对于实际问题需将变矢量及其导数表示成标量及其导数的形式。

●直角坐标法—实际问题中，一种广泛应用的方法。

●弧坐标法—应用于运动轨迹已知的情形，其最大特点是将速度矢量大小的变化率和方向变化率区分开来，使得数学表达式的物理含义更加清晰。

§6-3 刚体的基本运动

刚体的基本运动:平动和定轴转动

研究刚体基本运动的目的:

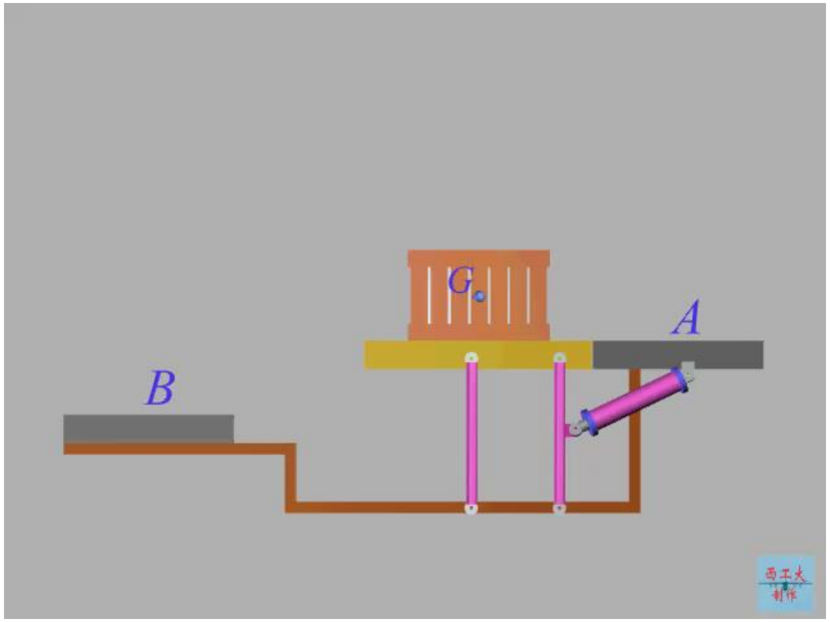
研究复杂运动的基础

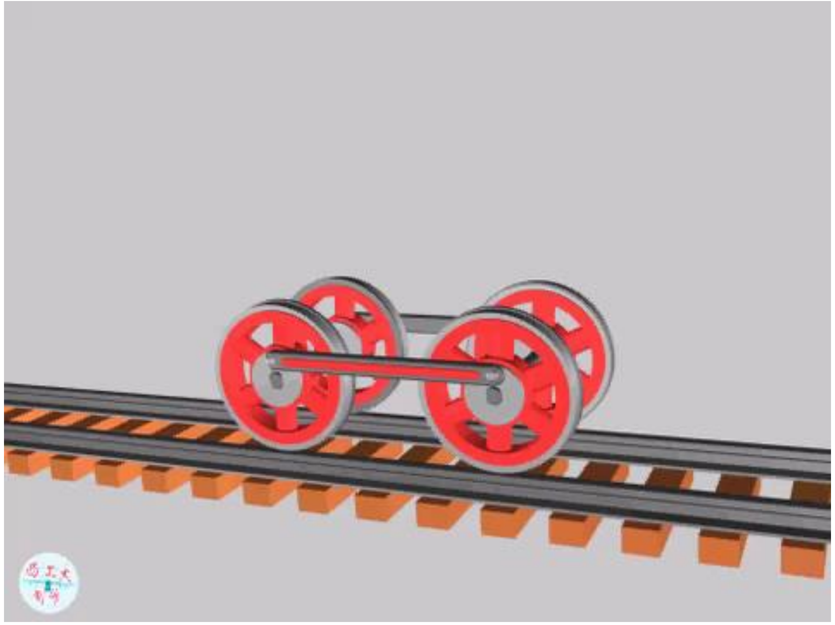
研究参考系的运动

内容: 1. 刚体整体运动的描述(角速度, 角加速度)

2. 刚体上各点的运动描述(速度,加速度)

1、刚体的平动





定义 刚体在运动过程中，如果其上任一直线始终与的初始位置平行，这种运动称为**平动**。（直线平动和曲线平动）

- 如何识别?
- 正确区分点的直线运动与刚体平动

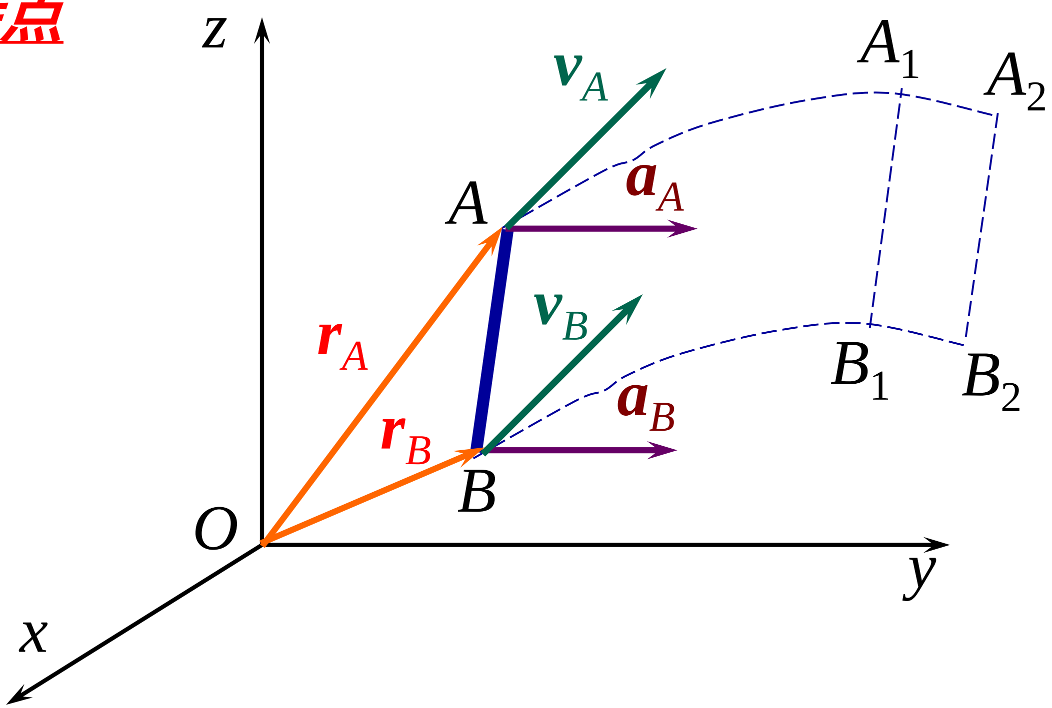
平动刚体的运动特点

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_{BA}$$

求导 →

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B$$

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B$$

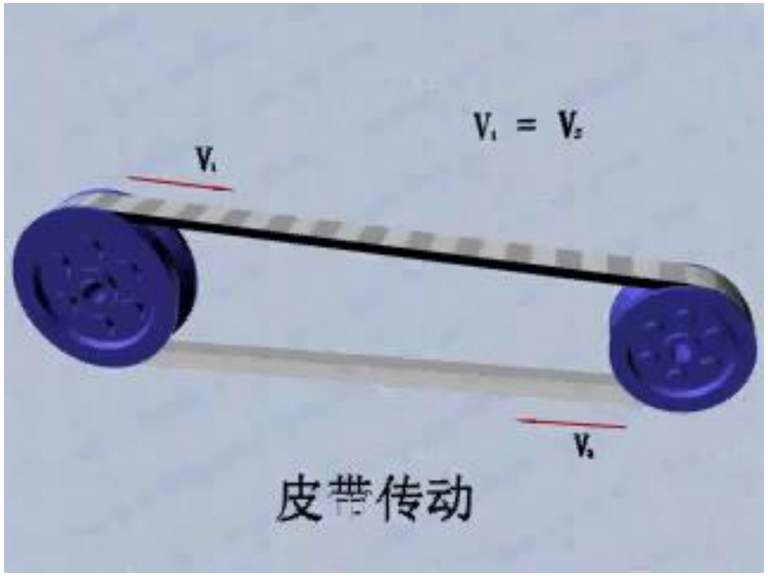


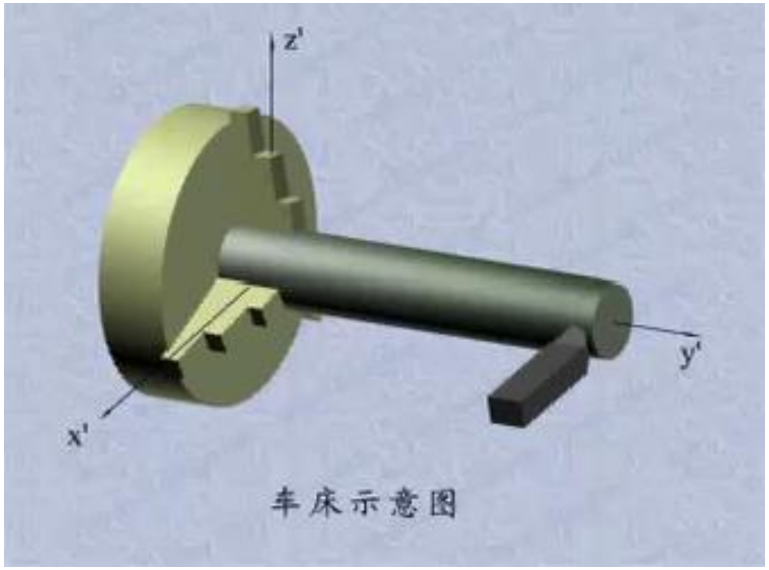
结论

当刚体平行移动时，其上各点的轨迹形状相同；在每一瞬时，各点的速度相同，加速度也相同。

研究刚体平动可归结为其上任一点的运动规律.

2、刚体的定轴转动





定义

刚体在运动时，其中有两点(或某一直线)保持不动，则称这种运动为刚体绕定轴的转动。简称刚体的转动。

通过这两个点的一条不动的直线，称为刚体的转轴。可在刚体的延伸部分。

刚体的运动方程 $\varphi = \varphi(t)$

转角 φ —— 代数量（弧度rad）

转动刚体的角速度

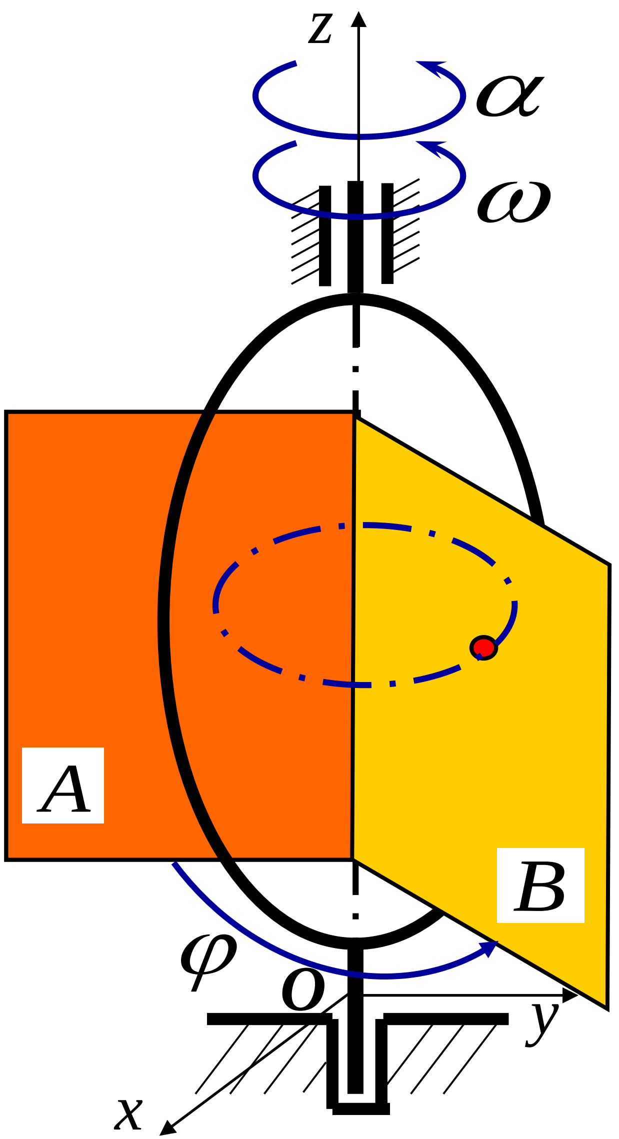
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad (\mathrm{rad/s})$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \qquad n — \text{转速}\ (\mathrm{r/min})$$

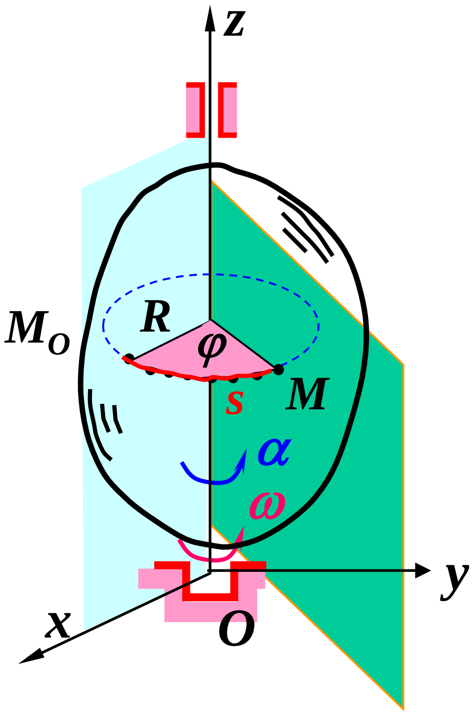
转动刚体的角加速度

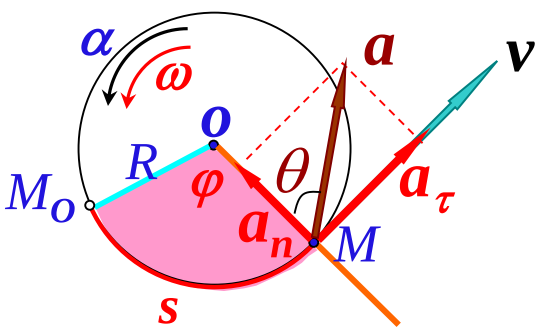
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \quad (\mathrm{rad/s^2})$$

注意 角速度和角加速度是反映刚体整体运动的物理量，通常为代数量标转向



刚体上各点速度加速度分布





$$s = R\varphi$$

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

$$a_\tau = \dot{v} = R\dot{\omega} = R\alpha$$

$$a_n = v^2/R = R\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

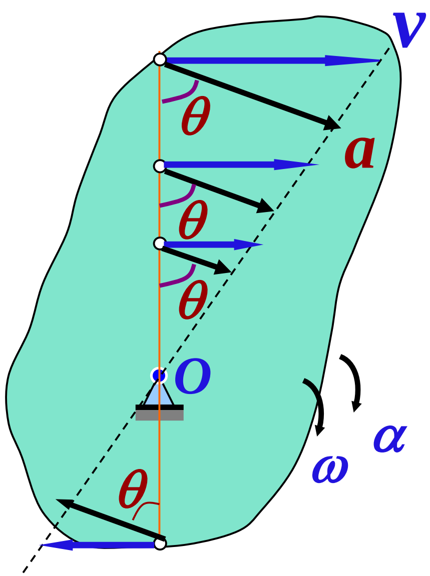
$$\tan\theta = |a_\tau|/a_n = |\alpha|/\omega^2$$

刚体上各点速度加速度分布

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

$$a_\tau = \dot{v} = R\dot{\omega} = R\alpha$$

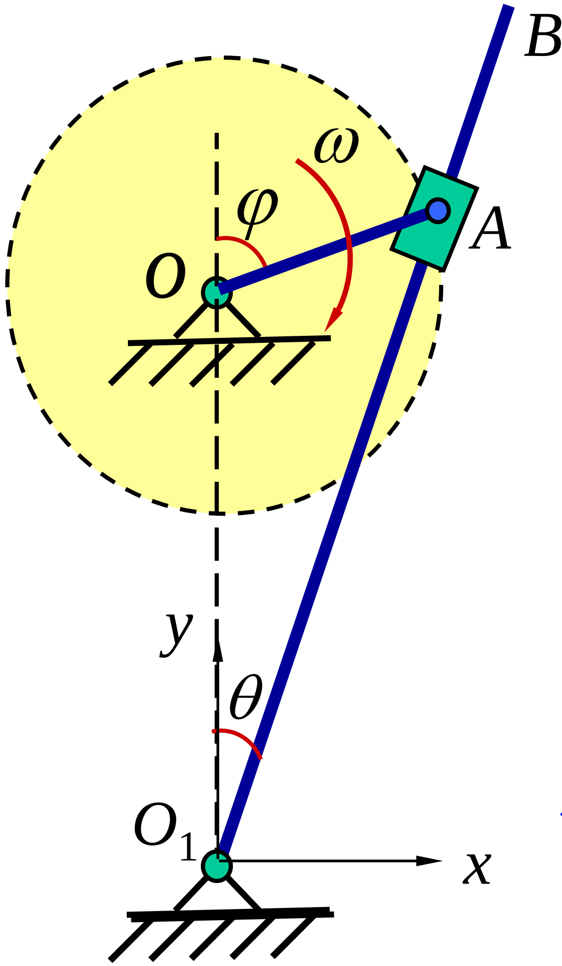
$$a_n = v^2 / R = R\omega^2$$



结论：

- 转动刚体内各点的速度大小与该点到转轴的距离R呈正比；方向与R相垂直且与ω转向一致。
- 转动刚体内各点的加速度大小与该点到转轴的距离R呈正比；方向一致且与R夹角相等。

例：曲柄导杆机构如图所示，曲柄$OA=r$,以匀角速度ω顺时针转动，$\varphi=\omega t$，带动导杆O_1B往复摆动，$OO_1=l$，求导杆的运动方程、角速度和角加速度。



解：导杆O_1B定轴转动

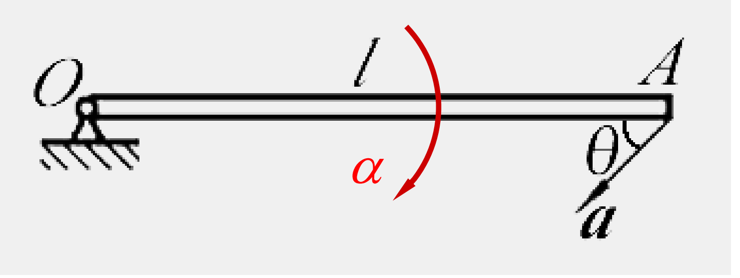
$$\frac{\sin\theta}{r}=\frac{\sin(\varphi-\theta)}{l}$$

运动方程 $$\theta=\arctan\left(\frac{r\sin\omega t}{l+r\cos\omega t}\right)$$

角速度 $$\omega_1=\dot{\theta}=\omega\frac{r(r+l\cos\omega t)}{r^2+2lr\cos\omega t+l^2}$$

角加速度 $$\alpha_1=\ddot{\theta}=\omega^2\frac{lr(r^2-l^2)\sin\omega t}{(r^2+2lr\cos\omega t+l^2)^2}$$

例 长为l的杆OA绕固定轴O转动，某瞬时杆端A点的加速度如图所示，大小为a，方向与OA夹角为θ。则该瞬时杆转动的角速度及角加速度为________________。



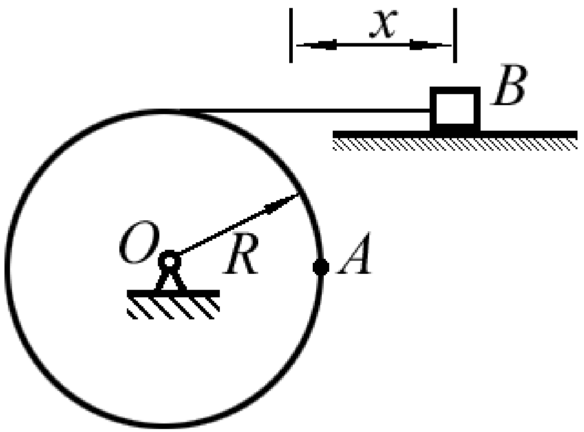
解(1)根据全加速度确定其切、法向加速度大小：

$$a_A^\tau = a\sin\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = l\alpha \qquad a_A^n = a\cos\theta = \frac{v_A^2}{l} = l\omega^2$$

(2) 确定杆的角速度及角加速度：

$$\alpha = \frac{a_A^\tau}{l} = \frac{a\sin\theta}{l}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{a\cos\theta}{l}}$$

例：绳子的一端绕在滑轮上，另一端与置于水平面上的物块B相连，若物块B的运动方程为：$x=kt^2$ ，其中k为常数，轮子半径为R。则轮缘上A点的加速度的大小为__________。



解：(1) 确定B的速度、加速度大小：

$$v_B = 2kt \quad a_B = 2k$$

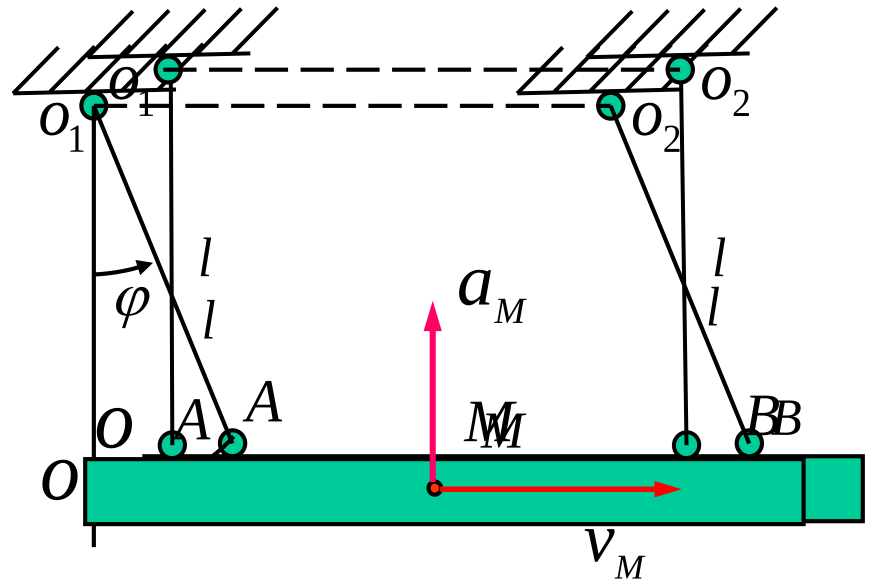
(2) 根据物块与滑轮的运动关系：

$$v_A = v_B = 2kt, \qquad a_A^{\tau} = a_B = 2k$$

(3) 确定A点法向加速度：
$$a_A^{\ n} = \frac{v_A^{\ 2}}{R} = \frac{(2kt)^2}{R}$$

(4) 确定全加速度大小：
$$a_A = \sqrt{(a_A^{\ n})^2 + (a_A^{\ \tau})^2}$$

例：荡木用两条等长的钢索平行吊起，钢索的摆动规律为$\varphi=\varphi_0\sin(\pi t/4)$。试求当$t$=0和$t$=2s时，荡木中点$M$的速度和加速度。



解：$$\varphi=\varphi_0\sin\frac{\pi}{4}t$$

$$\omega=\frac{\pi}{4}\varphi_0\cos\frac{\pi}{4}t \qquad \alpha=-\frac{\pi^2}{16}\varphi_0\sin\frac{\pi}{4}t$$

$$t=0,\varphi=0$$

$$v_A=l\omega=\frac{\pi}{4}l\varphi_0\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$v_M=v_A=\frac{\pi}{4}l\varphi_0$$

$$a_\tau=l\alpha=-\frac{\pi^2}{16}l\varphi_0\sin\frac{\pi}{4}t$$

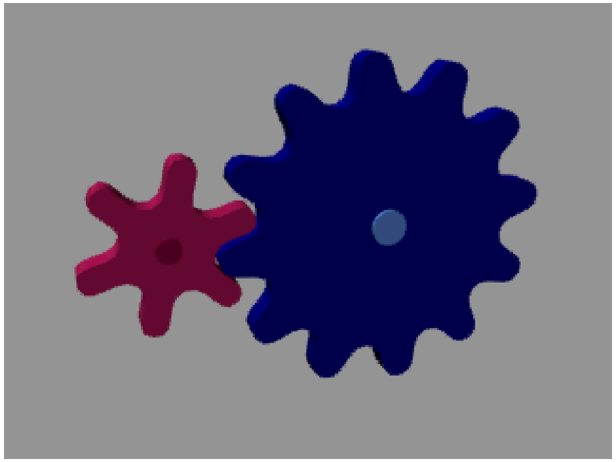
$$a_M^\tau=a_A^\tau=0$$

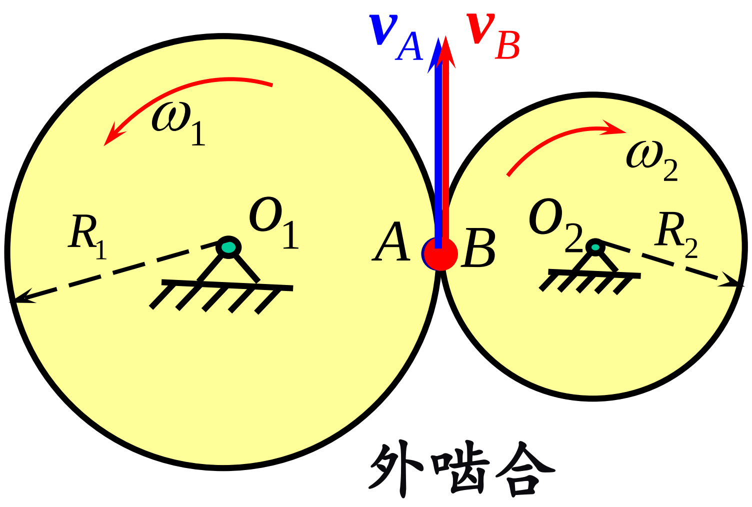
$$a_n=l\omega^2=\frac{\pi^2}{16}l\varphi_0^2\cos^2\frac{\pi}{4}t$$

$$a_M^n=a_A^n=\frac{\pi^2}{16}l\varphi_0^2$$

请大家自己讨论t=2秒时M点的速度和加速度

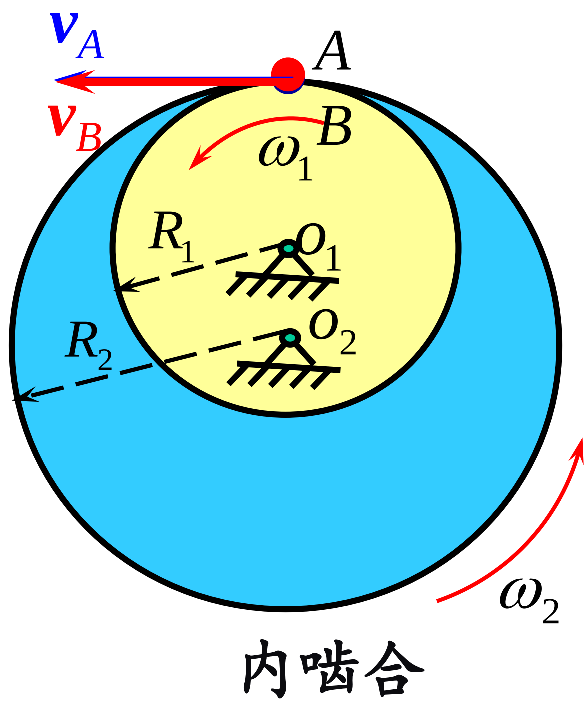
齿轮的传动比





$$v_A = v_B$$

$$v_A = \omega_1 R_1 \ , v_B = \omega_2 R_2$$



主动轮和从动轮的角速度比值称为**传动比**。

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{R_2}{R_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}$$

3、角速度矢量和角加速度矢量

- 角速度矢

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

- 角加速度矢

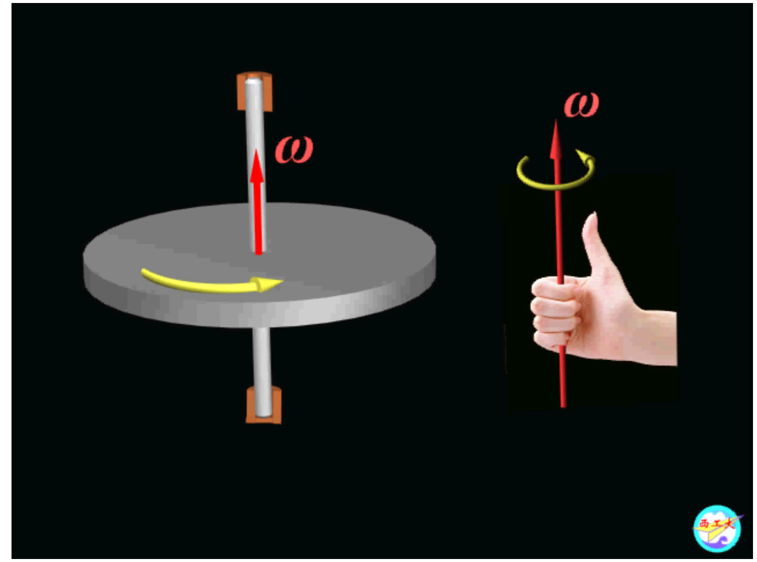
$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

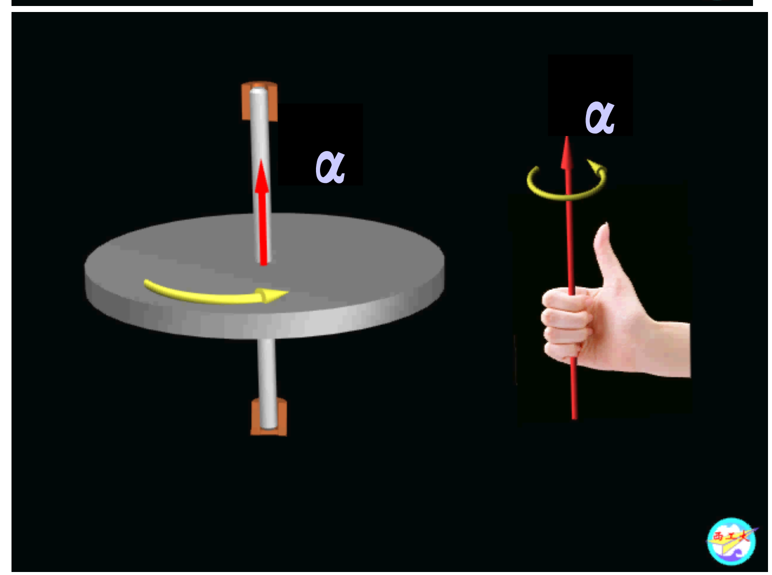
大小:同前

位置:转轴

指向:右手螺旋法则

滑动矢量





● 用矢积表示刚体上点的速度与加速度

$$v = R\omega$$

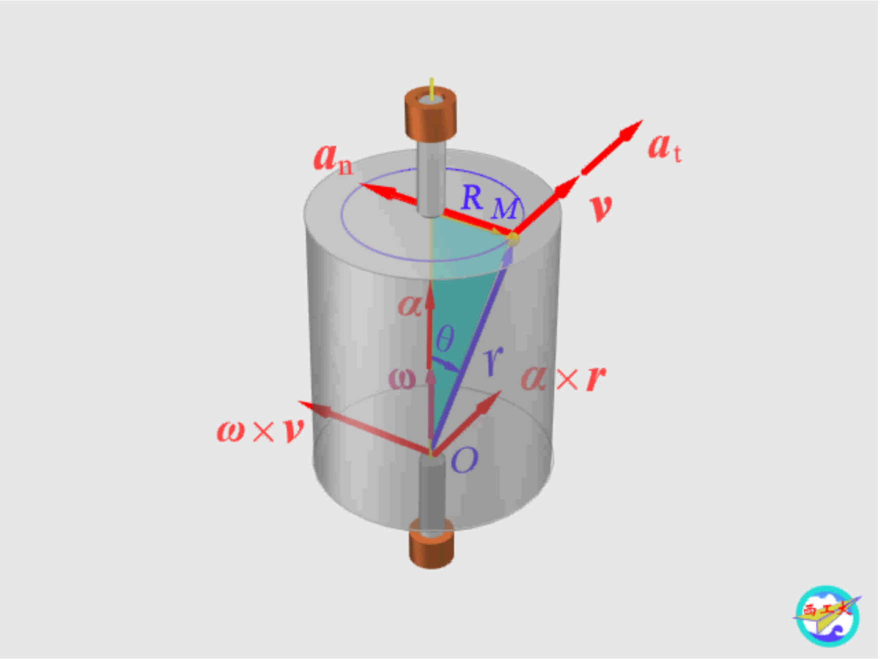
$$R = r\sin\theta$$

$$v = R\omega = r\omega\sin\theta$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}$$

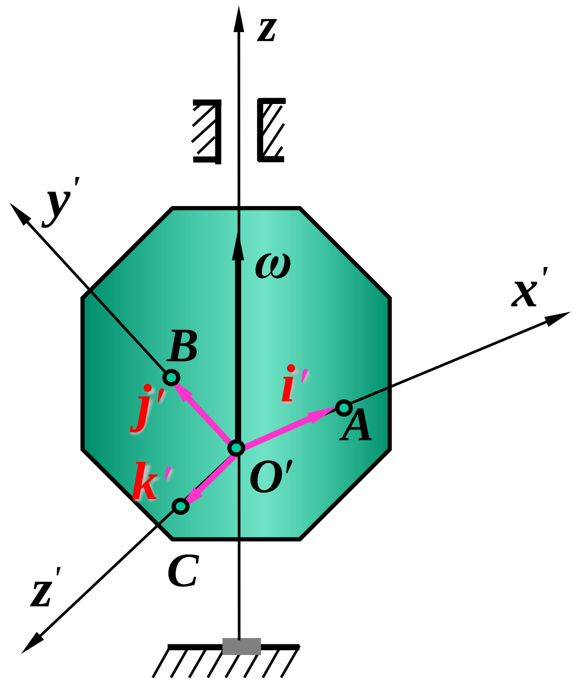
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}}$$



定轴转动刚体内任一点的速度，等于刚体的角速度矢与该点的矢径的矢积。任一点的切向加速度，等于刚体的角加速度矢与该点矢径的矢积，法向加速度等于刚体的角速度矢与该点速度的矢积。

例 刚体以角速度ω绕定轴Oz转动，其上固连有动坐标系$O'x'y'z'$（如图），试求由O'点画出的动系轴向单位矢$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$ 端点A，B，C的速度。



解：

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} \qquad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_A$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_A \qquad \boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{i}',$$

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}'$$

泊松公式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}'} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}'} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}'}$$

本章小结

- 机构运动简图是运动学建模的结果。
- 点的运动（直角坐标法、自然坐标法），描述运动的全过程。
- 刚体的基本运动（平动、定轴转动）。
- 区分刚体整体运动与其上各点运动的关系。
- 本章内容均为分析（解析）法。