第十四章 虚位移原理
（分析静力学）

矢量力学　　受力分析→主矢和主矩→平衡方程或动力学方程

动能定理　　理想约束，不涉及约束，但只有一个方程。

虚位移原理　质点系静力学的普遍原理，它将给出任意质点系平衡的充要条件. 是分析力学的理论基础。

1788年，拉格朗日《分析力学》中，从标量出发，追求一般理论与数学模型，不讲究技巧。

动力学普遍方程　　虚位移原理+达朗贝尔原理

§14-1 概 述

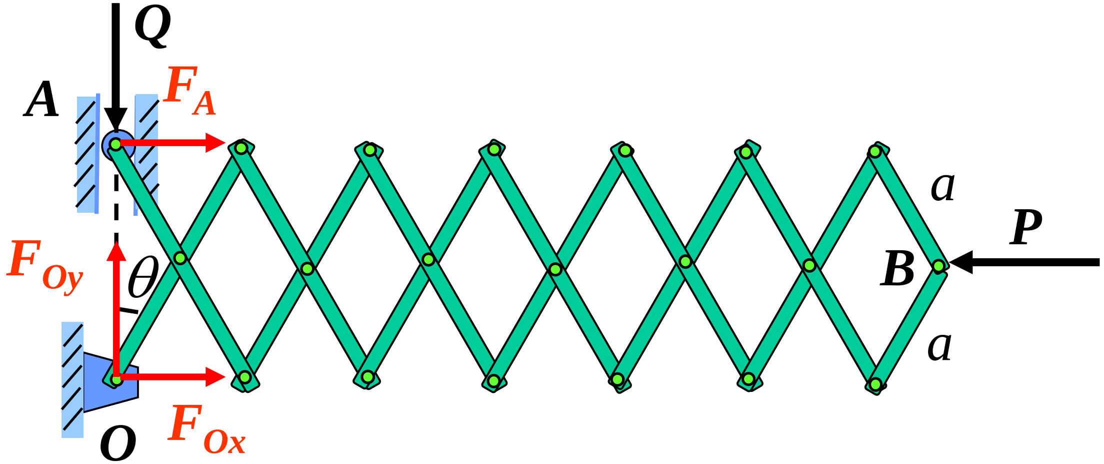
静力学

- 通过主动力和约束力之间的关系建立刚体的平衡条件。
- 给出了刚体平衡的充分必要条件，变形体平衡的必要条件。
- 借助力的投影和力矩建立方程。
- 包含未知约束力的联立方程组。

虚位移原理

- 通过主动力在约束所许可的位移上的表现（即功的形式）来给出质点系的平衡条件。
- 解决一般质点系（含刚体系统和变形体）平衡问题，给出质点系平衡的充分必要条件。
- 借助力的元功建立方程。
- 在一定的条件下方程中不出现约束力。

问题: 图示平面机构，受水平力P和铅垂力Q作用，对应任意角度θ，要使机构保持平衡，求P和Q应满足的比例关系。(忽略各构件自重及摩擦)



利用$F_R=0$, $M_O=0$求解,需要取多次研究对象,求解过程繁琐。

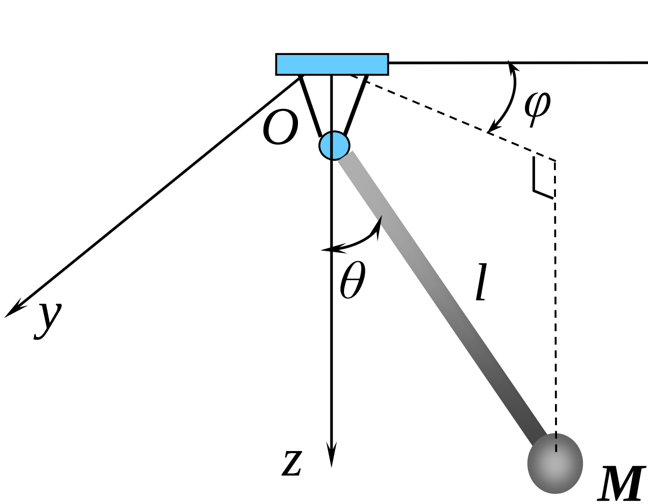
§14-2 约束、约束方程和自由度

一、约束、约束方程

约束的作用在于：一方面限制了受约束的物体沿某些方向的位移；另一方面约束也容许物体有可能沿另一些方向获得位移。

当质点系平衡时，主动力与约束反力之间，以及主动力与约束所许可位移之间，都存在着一定的关系。这两种关系都可以作为质点系平衡的判据。

限制非自由质点系运动的条件称为约束（既可以限制位置，也可以限制速度）。这种限制条件（也称约束条件）可以用数学方程加以描述，称为约束方程。



球面摆

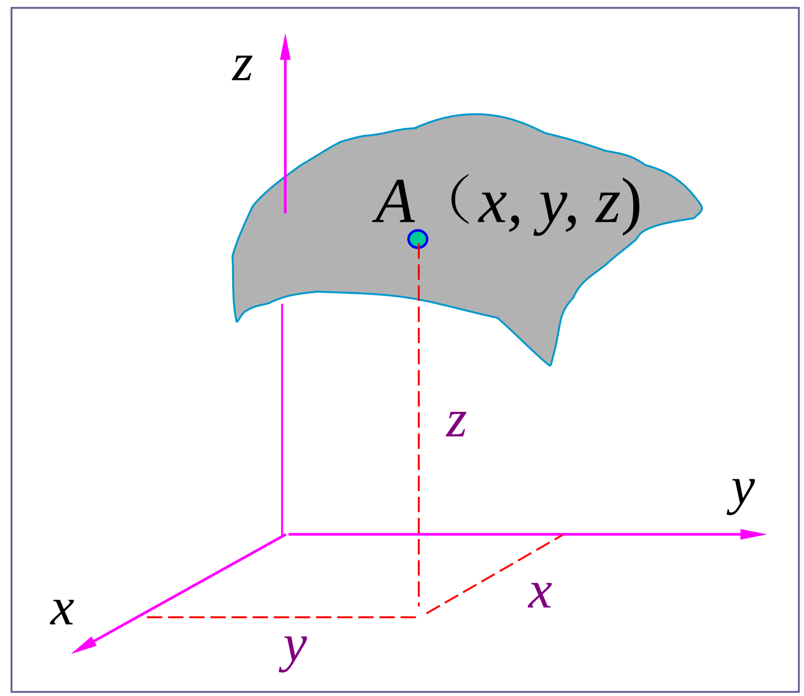
点M的坐标x，y，z满足方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

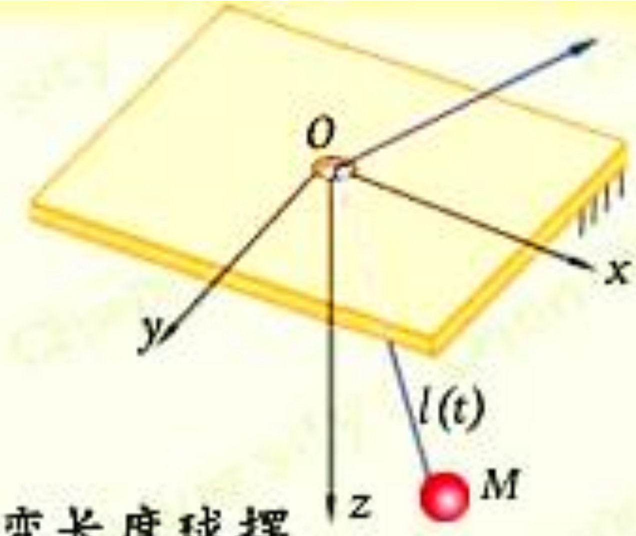
曲 面

$$f(x, y, z) = 0$$

质点A的约束方程就是曲面的曲面方程

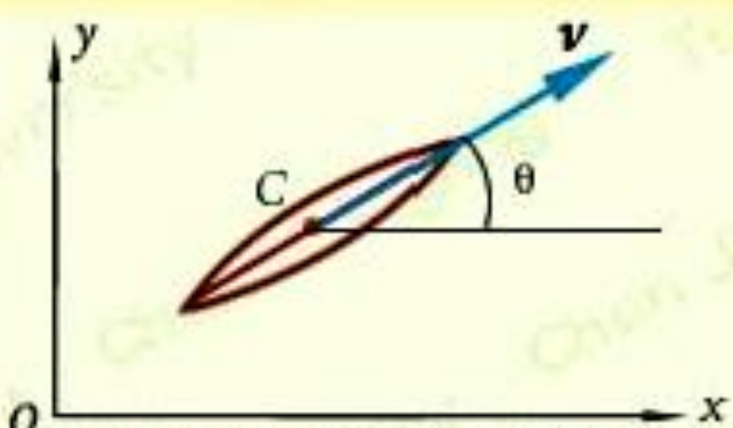


约束



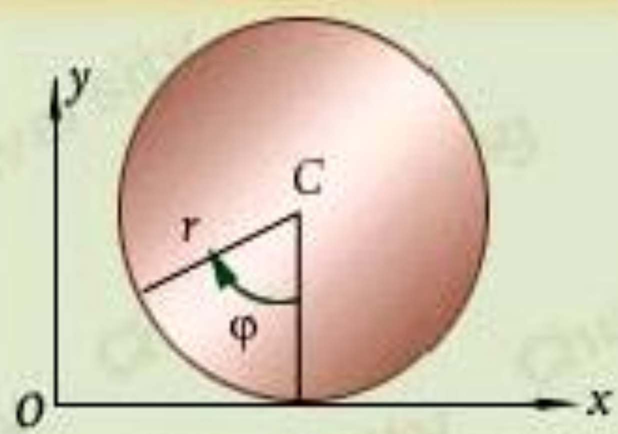
(c) 变长度球摆

$$x^2+y^2+z^2-l^2(t)=0$$



(d) 只沿纵向运动的冰刀

$$\dot{y}/\dot{x}=\tan\theta \qquad \dot{y}-\dot{x}\tan\theta=0$$



(e) 圆轮沿直线轨道作纯滚动

$$\dot{x}_C-r\dot{\varphi}=0 \qquad x_C-r\varphi=\text{const}$$

二、约束的分类

1. 几何约束和运动约束

几何约束:限制质点或质点系的几何位置的约束.

几何约束的一般形式为：

$$f_j(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

n为系统中质点的个数，s为约束方程的数目。

运动约束:除限制质点或质点系的几何位置外,还限制质点的速度的约束.

其约束方程的一般形式为

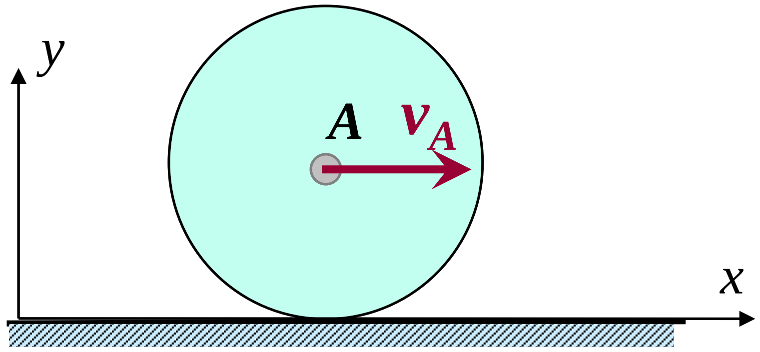
$$f_j(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots; \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, s)$$

● 显含坐标对时间的导数的约束方程是微分方程，如果这方程不可积分成有限形式，则相应的约束称为**非完整约束**（或**非全定约束**）.

● 如果约束方程可以积分成有限形式，则这样的约束称为**完整约束**。

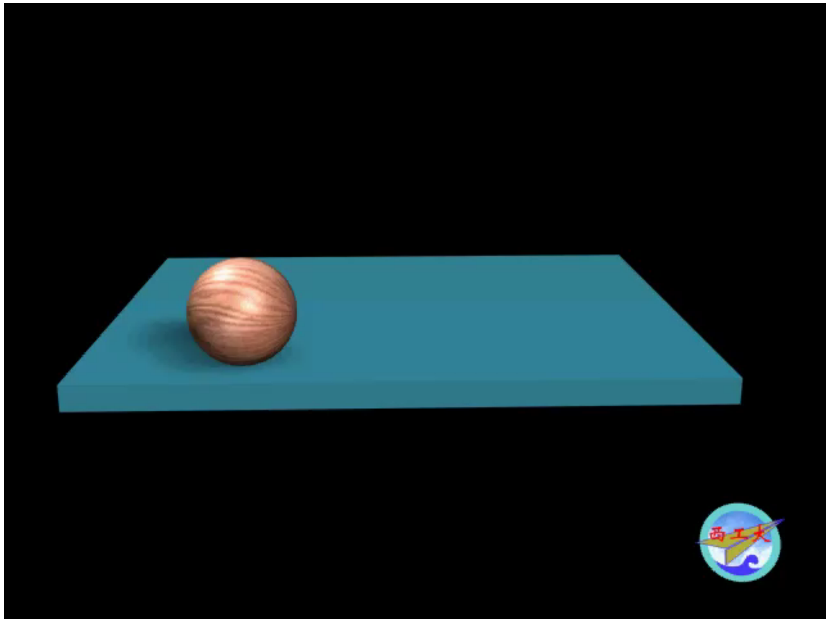
几何约束和**可以积分的运动约束**属于完整约束。

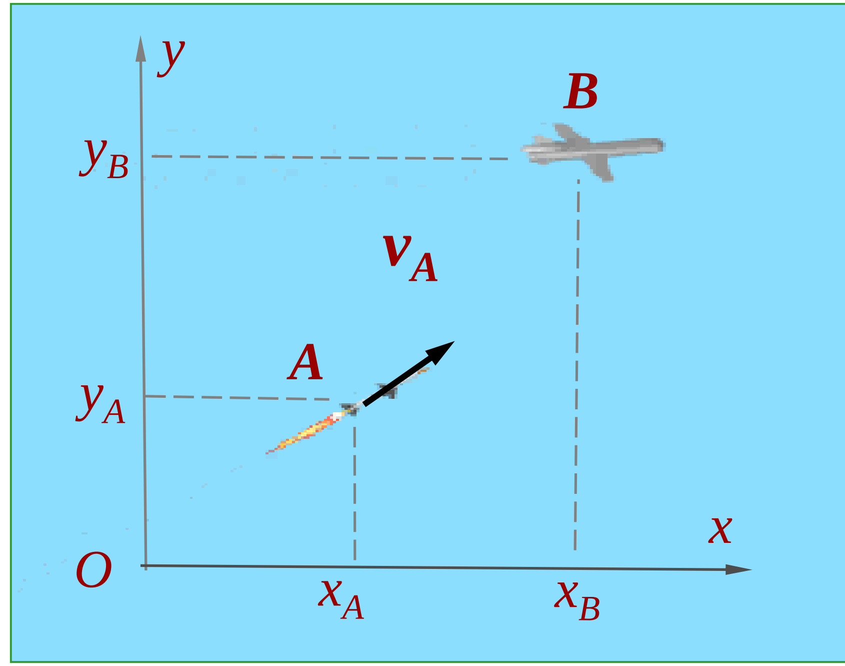


约束方程

$$y_A = r$$

$$\dot{x}_A = r\dot{\varphi}$$





约束方程

$$\dot{x}-r(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi+\dot{\theta}\sin\psi)=0$$

$$\dot{y}+r(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi)=0$$

x，y、z 为球心坐标。

θ、φ、ψ 为欧拉角。

导弹追踪敌机的可控系统，导弹A的速度$\boldsymbol{v}_A$始终指向敌机B，即$\boldsymbol{v}_A // AB$，

约束方程 $\dfrac{\dot{x}_A}{\dot{y}_A}=\dfrac{x_B-x_A}{y_B-y_A}$

非完整约束

2. 定常约束和非定常约束

- 如果约束方程中不含时间t，这种约束称为**定常约束**或**稳定约束**。

一般形式为

$$f_j(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots;\ x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots;\ \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n;) = 0$$

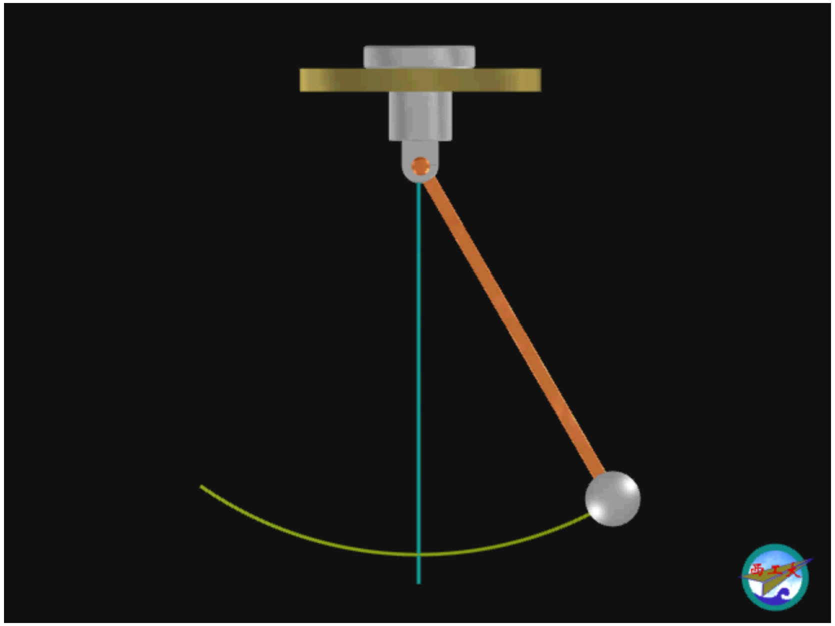
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots, s)$$

- 如果约束方程中含时间t，这种约束称为**非定常约束**或**不稳定约束**。

一般形式为

$$f_j(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots;\ x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots;\ \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots, s)$$

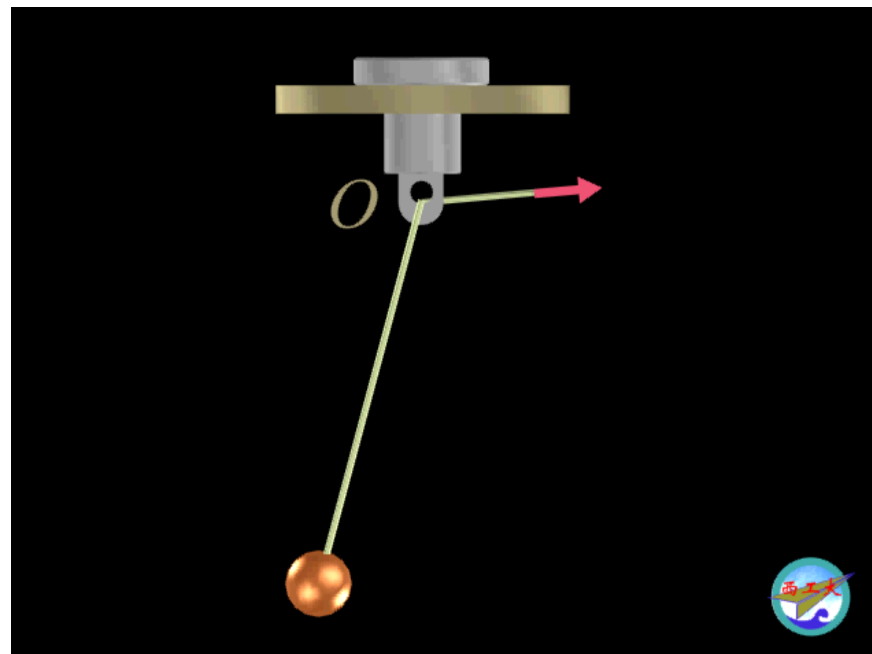


$$x^2 + y^2 = l_0^2$$

定常约束

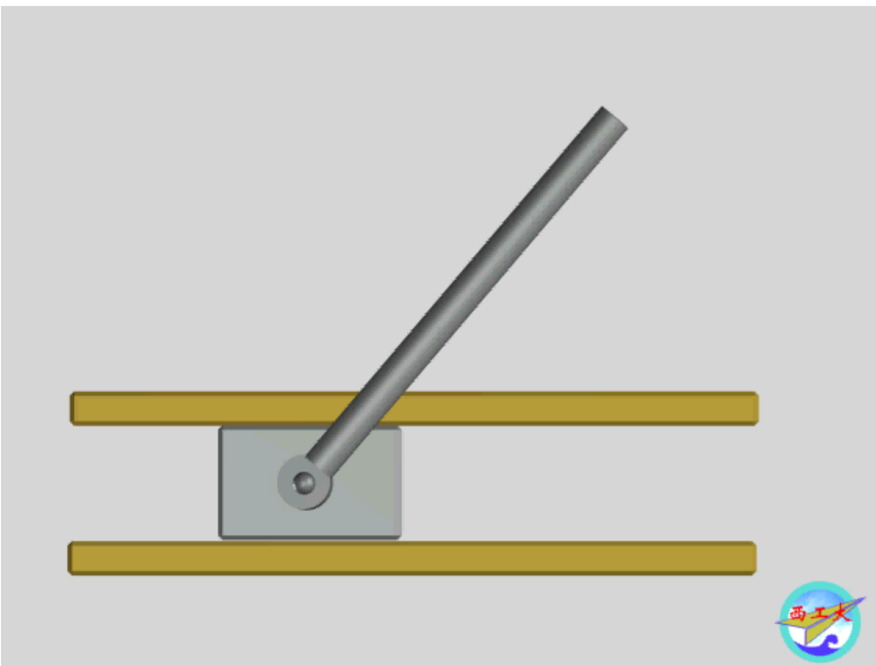
$$x^2 + y^2 = (l_0 - v_0 t)^2$$

非定常约束

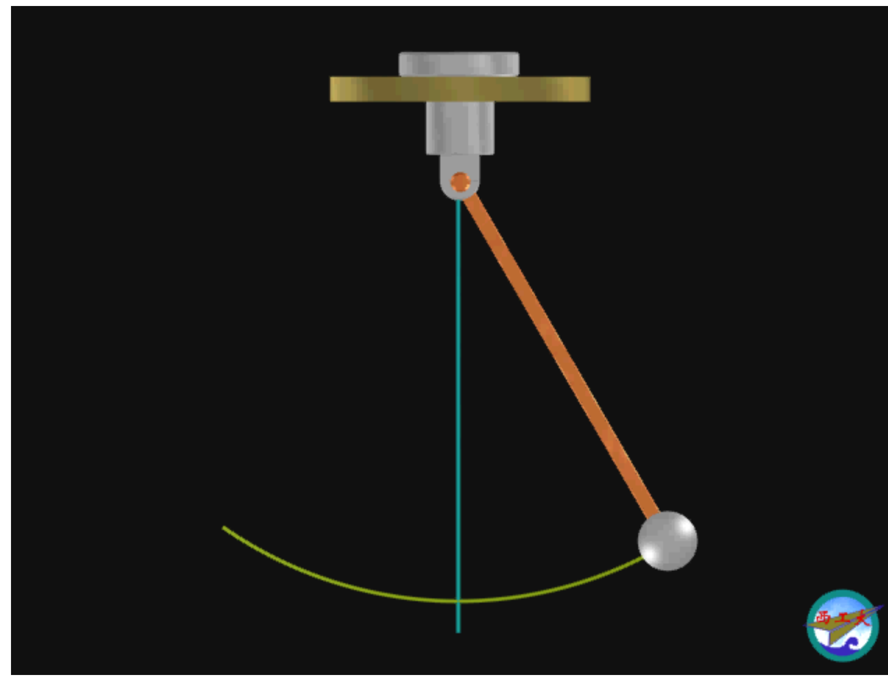


3．双面约束和单面约束

- 由等式表示的约束称为双面约束。



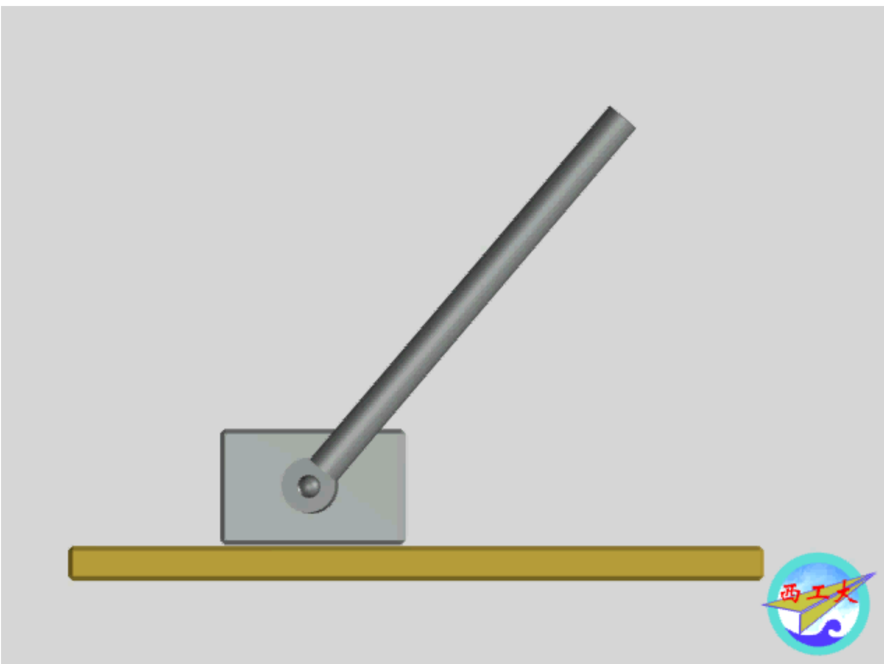
$$y=0$$



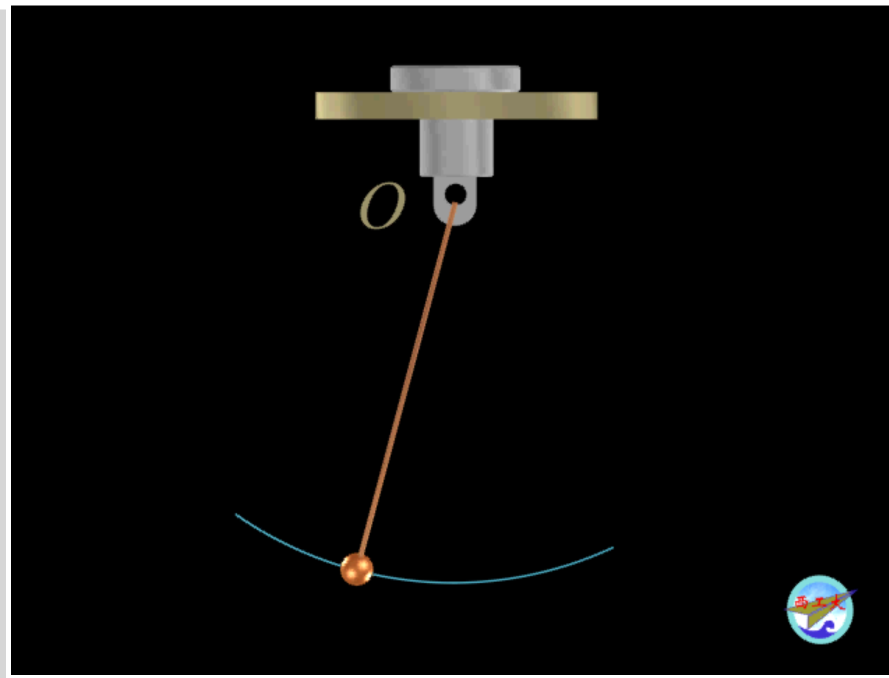
$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

3．双面约束和单面约束

- 由不等式表示的约束称为单面约束。



$$y \geq 0$$



$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$$

约束分类

（1）**几何约束：**只限制位置

运动约束：还限制速度

（2）**定常约束：**约束方程中不显含时间

不定常约束：约束方程中显含时间

（3）**双面约束：**约束方程为等式

单面约束：约束方程为不等式

（4）**完整约束：**几何约束及可积分的运动约束

非完整约束：不可积分的运动约束

完整、定常、双面约束

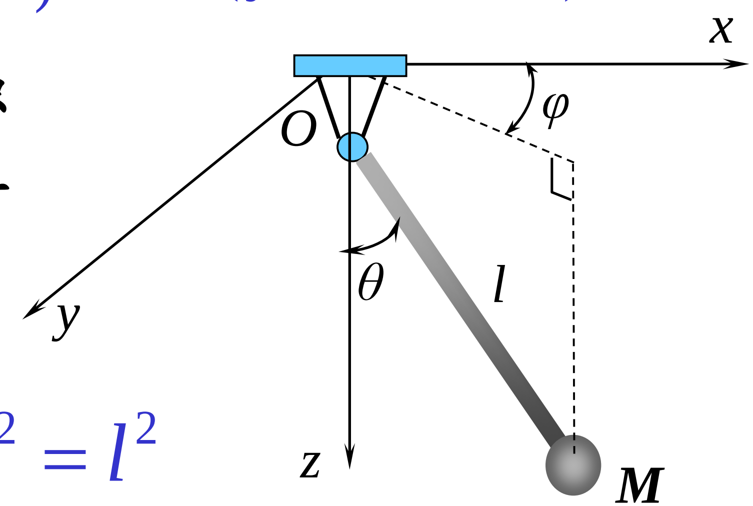
三、自由度和广义坐标

自由度----确定受完整约束的质点系位形的独立坐标数目称为系统的自由度。

一个质点系（n个质点）在空间的位形用直角坐标来确定需要$3n$个坐标，即x_i，y_i，z_i（i=1，2, …, n）。如果系统受到有s个完整约束，其约束方程为

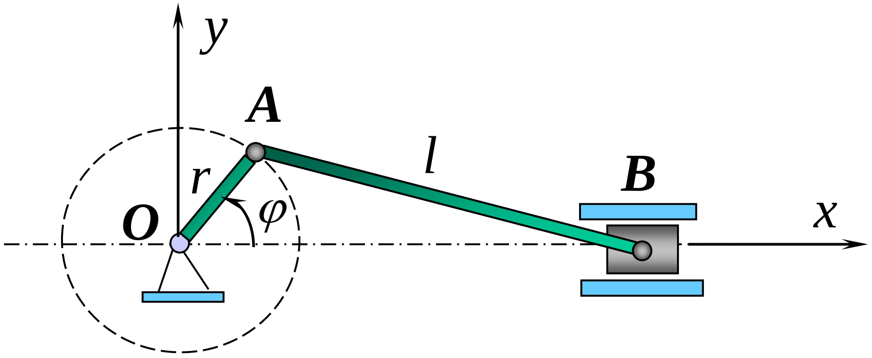
$$f_j(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots;\ x_n,\ y_n,\ z_n;\ t)=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

系统只有k =$3n$-s个坐标是独立的，故确定该质点系的位形只需$3n$-s个坐标，该质点系有$3n$-s个自由度。



约束方程 $x^2+y^2+z^2=l^2$

曲柄连杆机构



约束方程

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

质点系的自由度=1

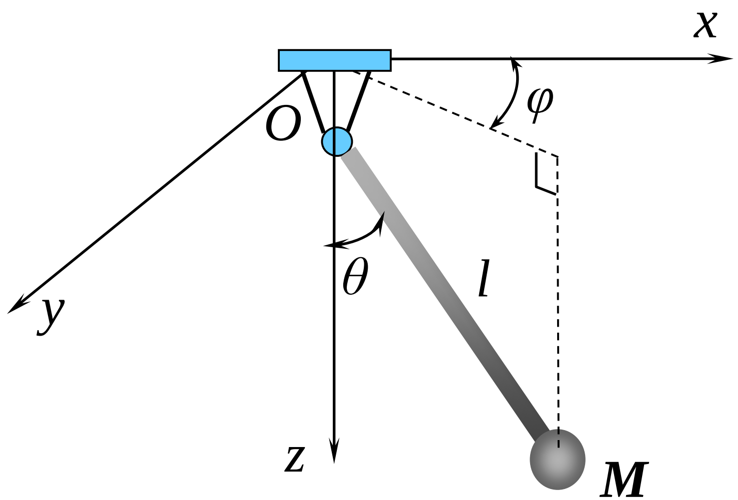
$$x_A = r\cos\varphi$$

$$y_A = r\sin\varphi$$

$$x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

$$y_B = 0$$

广义坐标--确定质点系位置的独立参量，
在完整约束的情况下，独立广义坐标的个数等于质点系的**自由度数**。



选θ，φ为广义坐标

$$x = l\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = l\sin\theta\,\mathrm{con}\,\varphi$$

$$z = l\cos\varphi$$

可以选任意合适的变量作为广义坐标。

- 平面机构的自由度

在平面机构中，平面低副具有两个约束，一个自由度；平面高副具有一个约束，两个自由度

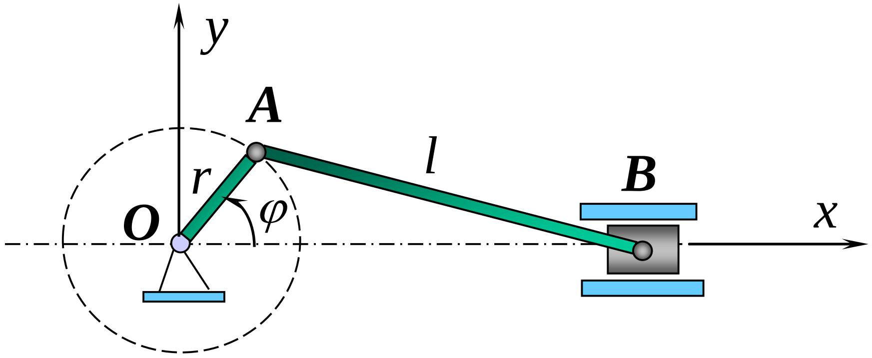
由N个构件组成平面机构中，必取一个构件作机架，则活动构件数为 $n = N - 1$

则平面机构自由度的计算公式为 ：

$$F = 3n - 2P_{\mathrm{L}} - P_{\mathrm{H}}$$

其中：F —平面机构的自由度数，
P_{L}—低副个数，P_{H}—高副个数，

$$F = 3n - 2P_{\mathrm{L}} - P_{\mathrm{H}}$$
$$= 3\times3 - 2\times4$$
$$= 1$$



§14-3 虚位移和理想约束

1、虚位移

定义：质点或质点系, 某瞬时在给定位置上为约束所容许的任何无限小位移（包括刚体角位移）。

实位移 —实际发生的位移，用d$\boldsymbol{r}$表示，其投影用dx，dy，dz 表示。它同时满足动力学方程、初始条件和约束条件。

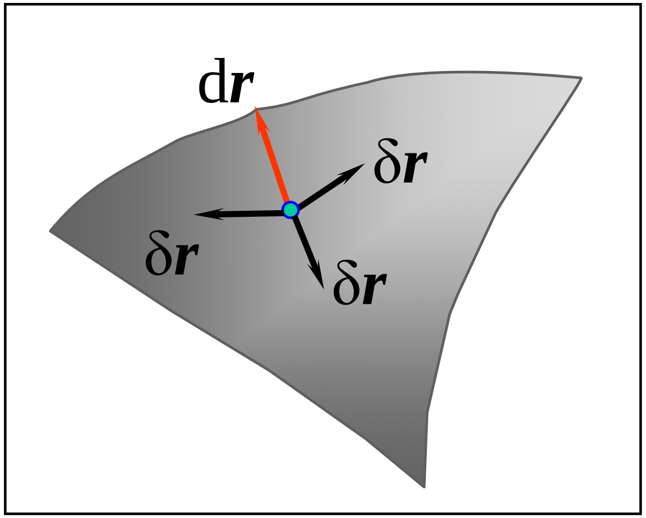
可能位移 —约束允许的位移，用$\Delta\boldsymbol{r}$表示，只需满足约束条件。

虚位移也可表述为：定常约束情况下的可能位移，用$\delta\boldsymbol{r}$表示。其投影用δx，δy，δz表示.

δ 表示变分,运算规则同微分.

虚位移与实位移的区别：

- 虚位移是纯粹几何概念，是假想位移，只是用来反映约束在给定瞬时的性质．它与质点系是否实际发生运动无关，不涉及时间、主动力和运动初始条件。
- 虚位移仅与约束条件有关，在不破坏约束情况下具有任意性。而实位移是在一定时间内真正实现的位移，具有确定的方向，它除了与约束条件有关外，还与时间、主动力以及运动的初始条件有关。

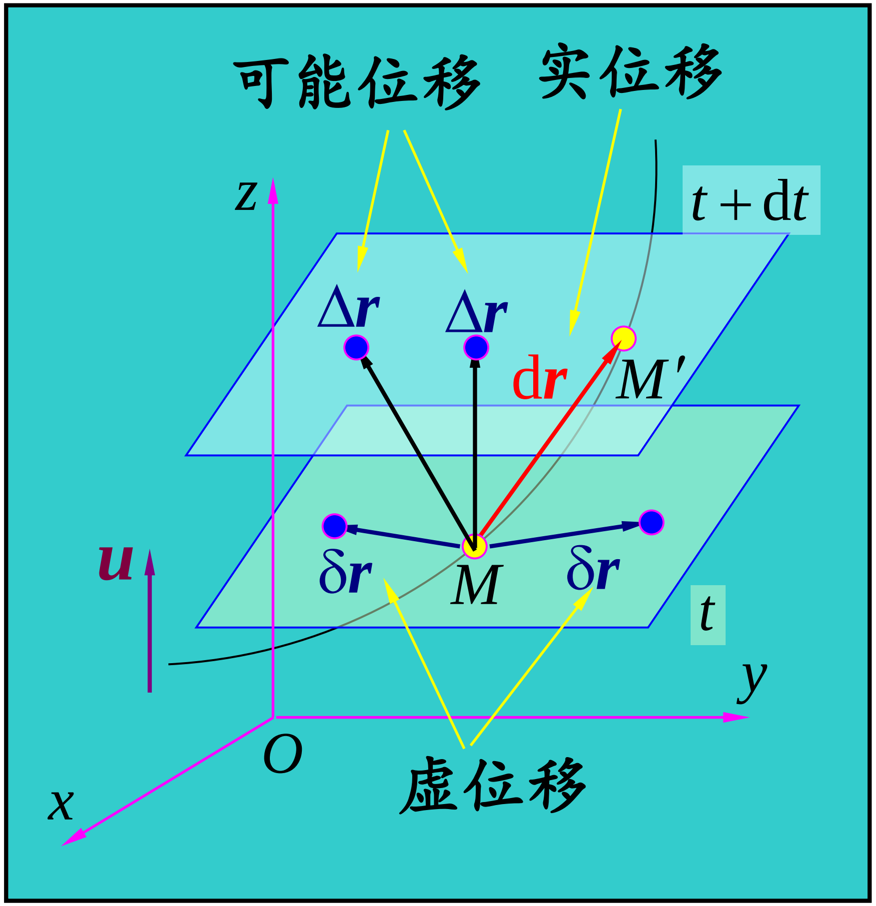


例如一个被约束固定曲面上的质点，它的实际位移只是一个，而虚位移在它的约束面上则有任意多个。

虚位移与实位移的区别：

在定常约束的情况下，约束性质不随时间而变，因此实位移只是所有虚位移中的一个。但对非定常约束，实位移不会和某个虚位移相重合。

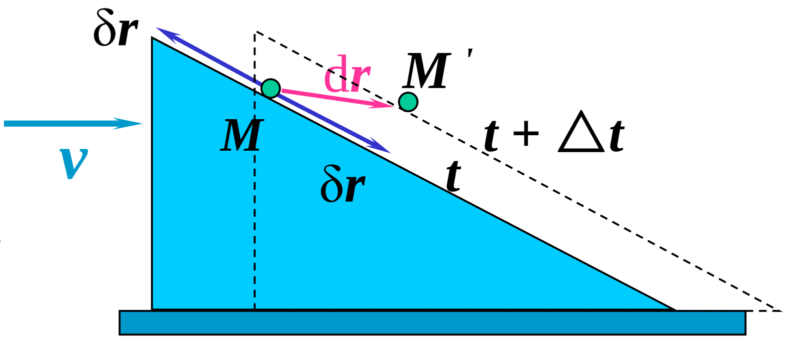
$$z - ut = 0$$



虚位移是约束被“冻结”后此瞬时约束允许的无限小位移，与时间t的变化无关 $(\delta t \equiv 0)$。

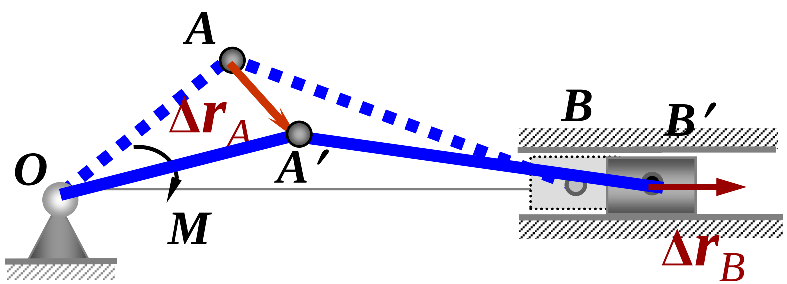
虚位移与实位移的区别：

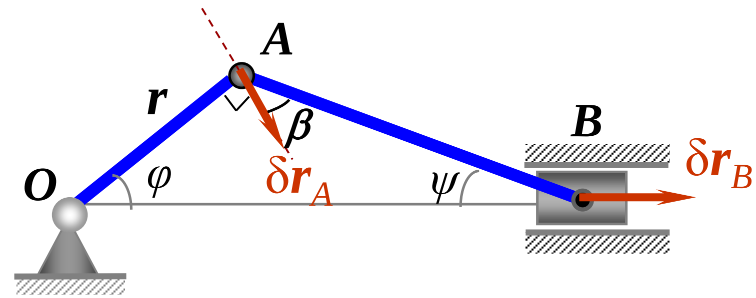
质点M在斜面上运动，同时斜面本身以匀速v作水平直线运动，斜面就构成了非定常约束。



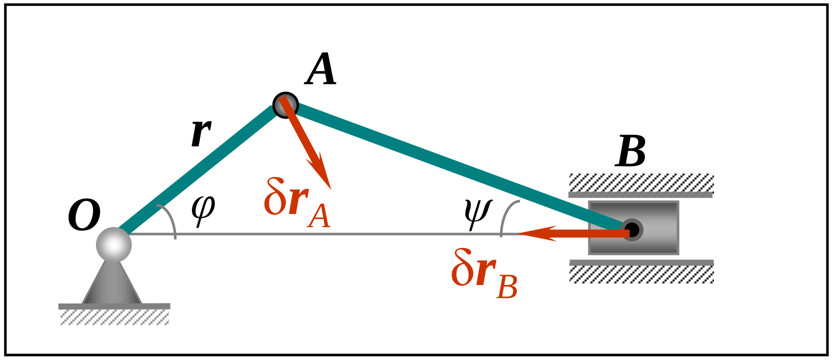
虚位移	实位移
满足约束条件	满足约束条件
不涉及力、时间、运动过程	与受力、初始条件和经历的时间有关
独立虚位移指向可假设，大小可任意取值。虚位移实际是一个集合。	有确定的大小和方向
定常约束下：实位移是虚位移集合中的一个元素；可将实位移取为特定的虚位移。	

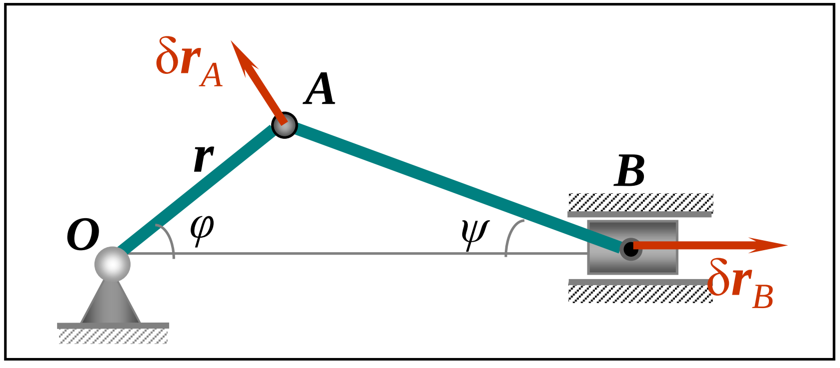
虚位移必须是约束所允许的。如何理解？





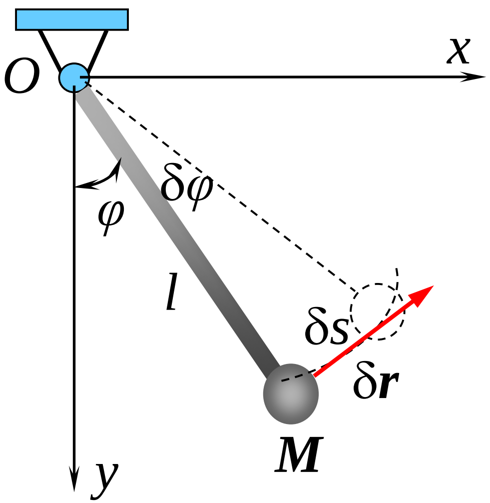
图示机构，如果先给A点图示虚位移，那么B点的虚位移就是错的，是约束不允许的。





虚位移的表示方法：

一质点M固定在长为l的刚性杆的一端，杆可绕定轴O转动，试分析图示位置的质点M的虚位移。



几何表示法

$$\delta s = l\,\delta\varphi$$

分析法

$$x = l\sin\varphi,\quad y = l\cos\varphi$$

$$\delta x = l\cos\varphi\,\delta\varphi$$
$$\delta y = -l\sin\varphi\,\delta\varphi$$

2、虚功

力在虚位移上所做的功称为虚功，记为δW。

力$\boldsymbol{F}$ 在虚位移$\delta\boldsymbol{r}$上所做的虚功为

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{r}$$

$$\delta W = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$$

- ◆ 一般来说，主动力和约束力都可以做虚功。
- ◆ 虚位移是假想位移，所以虚功也是假想的概念。无有限虚功。

3、理想约束

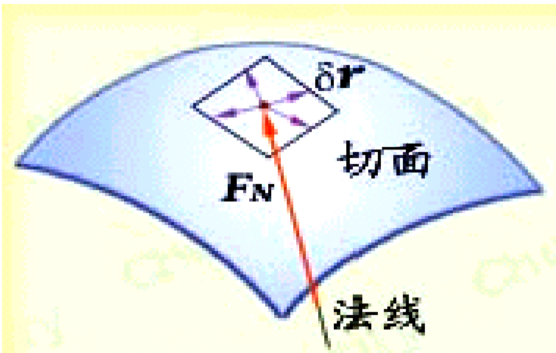
理想约束：在质点系的任何虚位移上，约束力的元功之和总等于零的约束。

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}} = 0$$

式中$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Ni}}$是作用在第$i$个质点上的约束力。

- 对任何虚位移都成立
- 在数学上称约束力与虚位移正交
- 力学建模简化处理（忽略摩擦、变形）的必然结果

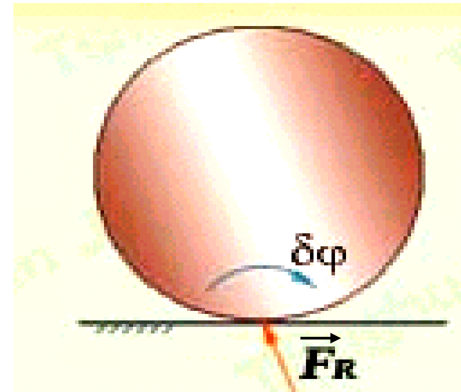
3、理想约束



(a) 光滑曲面

$$F_N \perp \delta \boldsymbol{r}$$

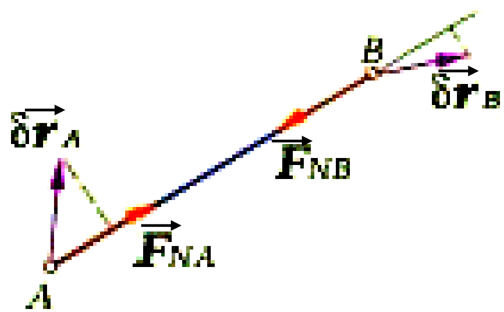
$$\delta W = \boldsymbol{F}_N \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$$



(b) 纯滚动

$$\delta \boldsymbol{r} = 0$$

$$\sum \delta W_i = \boldsymbol{F}_N \cdot \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}_f \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$$



(c) 不可伸长的轻杆

$$\sum \delta W_i = \boldsymbol{F}_{NA} \cdot \delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{F}_{NB} \cdot \delta \boldsymbol{r}_B = 0$$

$$[\delta \boldsymbol{r}_B]_{AB} = [\delta \boldsymbol{r}_A]_{AB}$$

$$\boldsymbol{F}_{NB} = -\boldsymbol{F}_{NA}$$

常见理想约束： 光滑固定面约束、光滑铰链、无重刚杆、不可伸长的柔索、固定端

§ 14-4 虚位移原理

质点系平衡 $\rightleftarrows$ 质点系中每一个质点平衡

虚位移原理(虚功原理)

如果质点系受双面、定常、理想约束，静止的质点系在给定位置上保持平衡的必要且充分条件是：所有作用在质点系上的主动力在该位置的任何虚位移上的元功之和等于零。

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

虚功方程　　静力学普遍方程

对于二维情况：$\sum(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i) = 0$

意义：1. 静力学普遍原理

2. 从功的观点研究力学系统的平衡。

3. 当系统约束较多时，虚位移原理比几何静力学简便。

应用虚位移原理解题的步骤

1. 确定研究对象：常选定整体为研究对象；
2. 约束分析：是否理想约束？
3. 受力分析

- 求主动力之间的关系或平衡位置时：只画主动力
- 求约束反力时：解除约束，视约束反力作为主动力

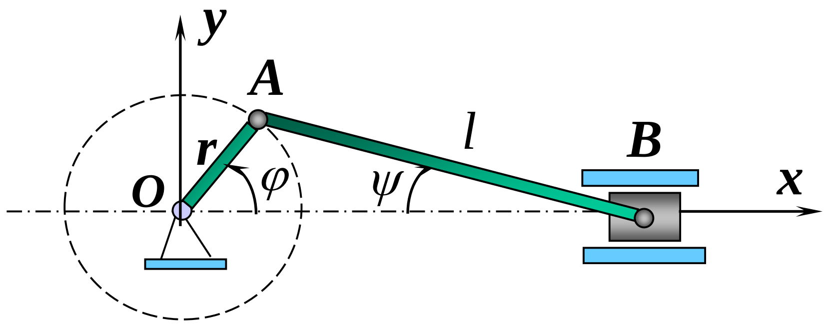
4. 列出虚功方程。

5. 建立虚位移之间的关系；

- 直接按几何关系
- 坐标变分法
- 虚速度法

确定虚位移之间关系的方法—虚位移方程

1. 解析法(坐标变分法) 建立一固定坐标系，将系统放在一般位置，写出各力作用点的直角坐标（表示为某些独立参变量的函数），然后进行变分运算，这种确定虚位移间关系的方法称为解析法。



$$x_A = r\cos\varphi, \quad y_A = r\sin\varphi$$

$$x_B = r\cos\varphi + l\cos\psi$$

$$r\sin\varphi = l\sin\psi$$

$$\delta x_A = -r\sin\varphi\delta\varphi, \ \delta y_A = r\cos\varphi\delta\varphi$$

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\delta\varphi - l\sin\psi\delta\psi$$

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\delta\varphi - r\cos\varphi\tan\psi\delta\varphi$$

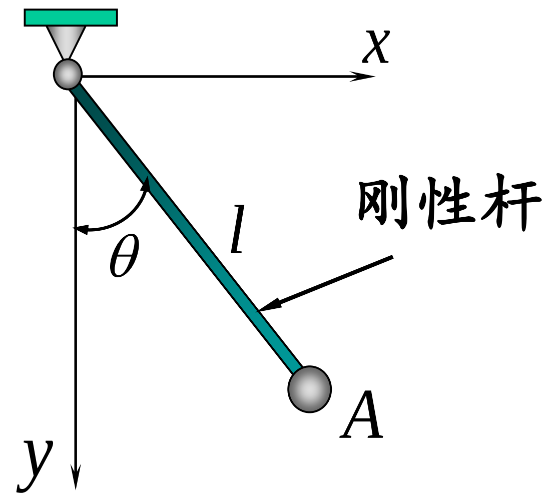
或选取适当的固定坐标系，写出约束方程并进行变分，即可求得各点的虚位移间的关系。

例如图示单摆，

约束方程为 $x^2+y^2-l^2=0$

变分

$$2x\delta x+2y\delta y=0$$



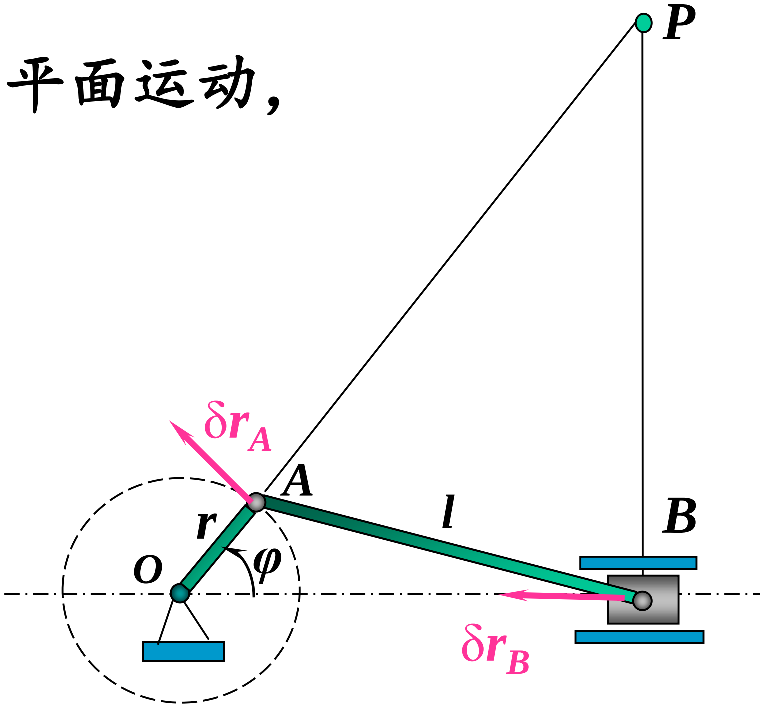
此方法中约束方程必须是一般表达式，往往用在“菱形、等腰三角形”等特殊几何关系情况下使用.

2. 虚速度法 在定常约束的情况下，可通过建立各点速度间的关系来确定对应点的虚位移关系。

如平动刚体上各点的虚位移相等，定轴转动刚体上各点虚位移与其到转轴的距离成正比；平面运动刚体则一般可用速度投影定理和速度瞬心法求两点虚位移间关系等。

曲柄连杆机构，连杆AB作平面运动，其速度瞬心为点P。

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{PA}{PB}=\frac{\delta r_A}{\delta r_B}$$



例 螺旋压榨机中螺杆的螺距为h。如果在手柄上作用一在水平面内的力偶，其力偶矩为$2Fl$，求平衡时作用于被压榨物体上的压力。（忽略螺杆与螺母之间的摩擦）

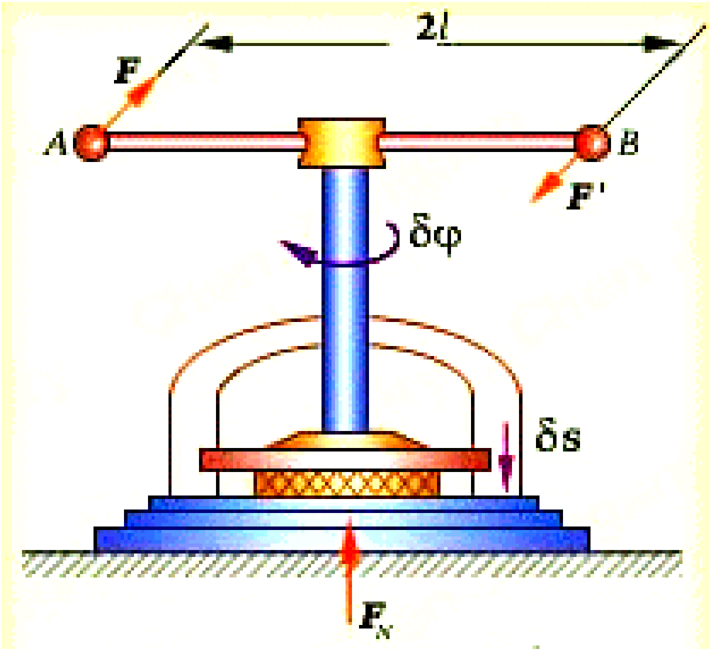
解：研究整体，理想约束

$$\delta W = 2Fl\delta\varphi - F_N \delta s$$

$$\delta s = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi$$

$$\delta W = (2Fl - \frac{h}{2\pi}F_N)\delta\varphi = 0$$

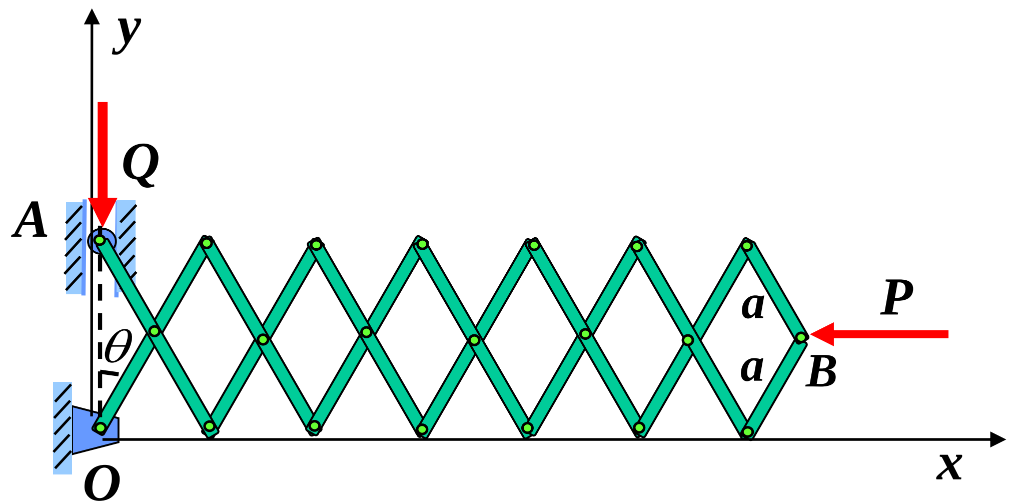
$$F_N = \frac{4\pi l}{h}F$$



例 图示平面机构，受水平力P和铅垂力Q作用，对应任意角度θ，要使机构保持平衡，求P和Q应满足的比例关系。(忽略各构件自重及摩擦）

解：取整体为研究对象。

系统受理想约束，
受力分析如图，
主动力有P和Q。



$$-Q\delta y_A - P\delta x_B = 0$$

$$y_A = 2a\cos\theta$$

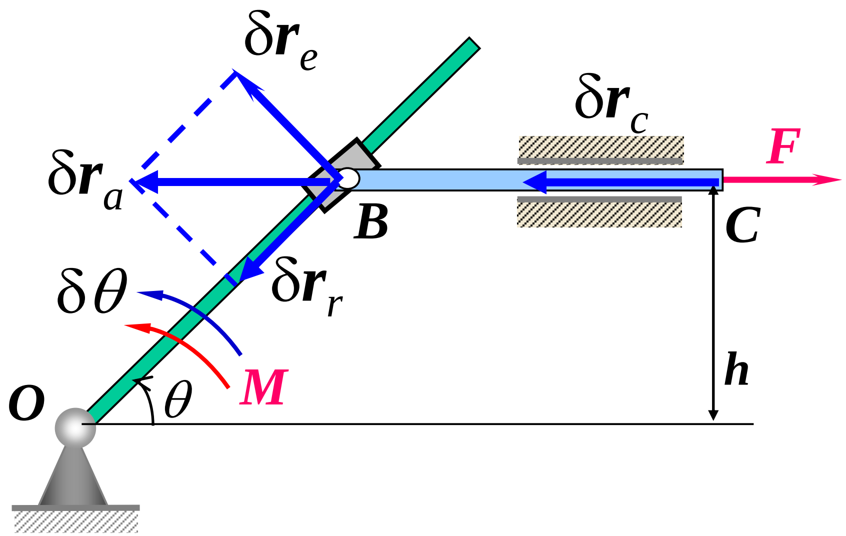
$$x_B = 13a\sin\theta$$

$$\delta y_A = -2a\sin\theta\,\delta\theta$$

$$\delta x_B = 13a\cos\theta\,\delta\theta$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{13}{2}\cot\theta$$

例 图示机构,不计各构件自重与各处摩擦,求机构在图示位置平衡时,主动力偶矩M与主动力F之间的关系.



解:取整体为研究对象。

系统受理想约束,

受力分析如图。

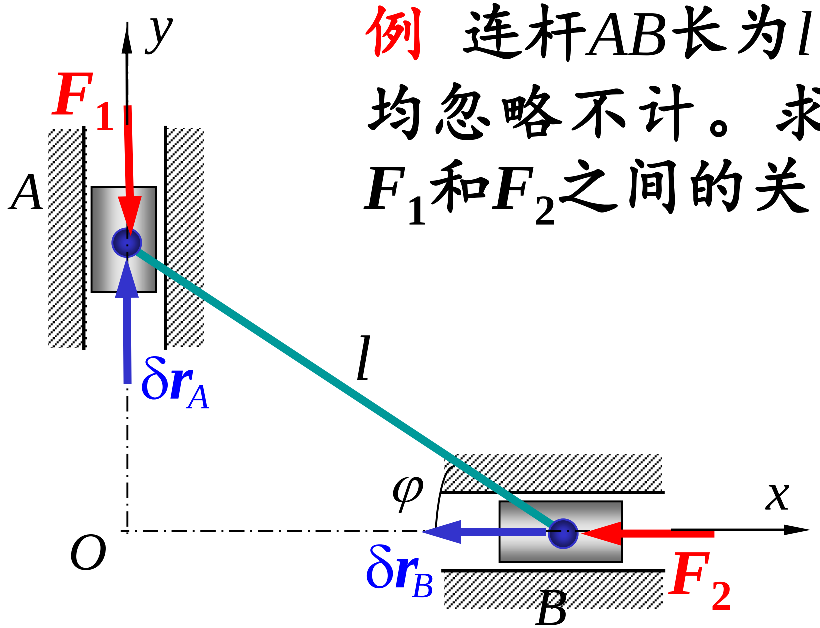
$$M\,\delta\theta - F\,\delta r_c = 0$$

$$\delta r_e = OB\cdot\delta\theta = \frac{h\delta\theta}{\sin\theta}$$

$$\delta r_c = \delta r_a = \frac{h\delta\theta}{\sin^2\theta}$$

$$M = \frac{Fh}{\sin^2\theta}$$

例 连杆AB长为l，杆重和滑道、铰链上的摩擦均忽略不计。求在图示位置平衡时，主动力F_1和F_2之间的关系。



几何法

$$\delta W = -F_1 \delta r_A + F_2 \delta r_B = 0$$

$$\delta r_B \cos\varphi = \delta r_A \sin\varphi$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \tan\varphi$$

解析法

$$\delta W = -F_1 \delta y_A - F_2 \delta x_B = 0$$

$$x_B = l\cos\varphi \qquad \delta x_B = -l\sin\varphi\delta\varphi$$

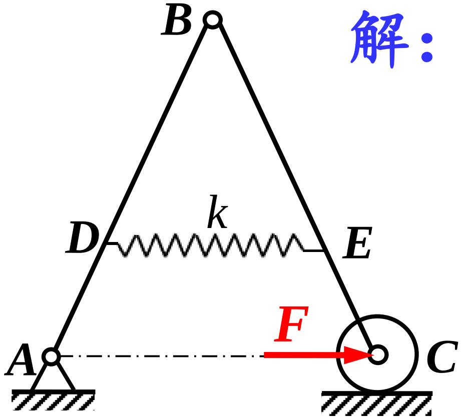
$$y_A = l\sin\varphi \qquad \delta y_A = l\cos\varphi\delta\varphi$$

$$\frac{F_1}{F_2} = -\frac{\delta x_B}{\delta y_A} = \tan\varphi$$

约束方程：$x_B^2 + y_A^2 = l^2$

$$2x_B\delta x_B + 2y_A\delta y_A = 0$$

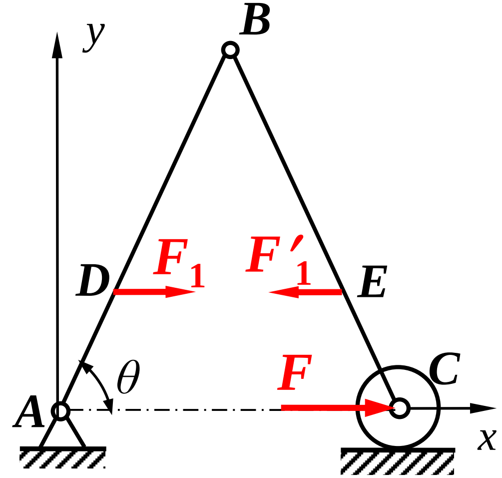
例 两等长杆AB和BC，在B点铰接，在D和E点连一弹簧。已知弹簧刚度系数为k，当距离$AC=a$时，弹簧内力为零。设$AB=l$，$BD=b$，杆重不计。如在C点作用一水平力$\boldsymbol{F}$，求系统处于平衡状态时距离AC之值。



解：研究整体，理想约束

设平衡时$AC=x$，

$$F_1=F_1'=k\frac{b}{l}(x-a)$$



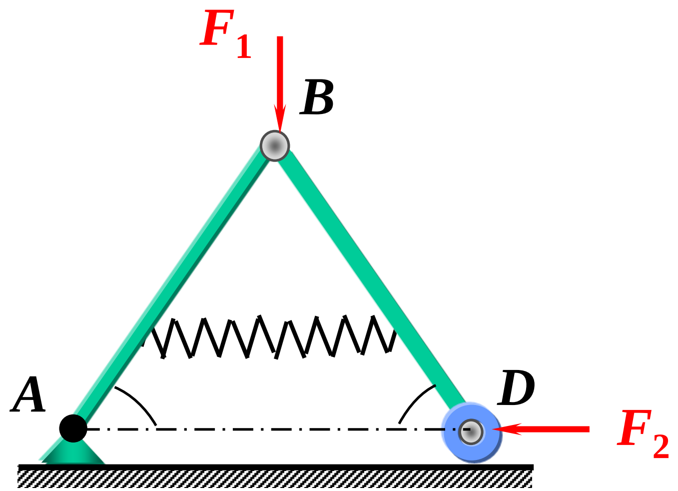
$$F\delta x_C+F_1\delta x_D-F_1'\delta x_E=0$$

$$x_C=2l\cos\theta \qquad \delta x_C=-2l\sin\theta\delta\theta$$

$$x_D=(l-b)\cos\theta \qquad \delta x_D=-(l-b)\sin\theta\delta\theta$$

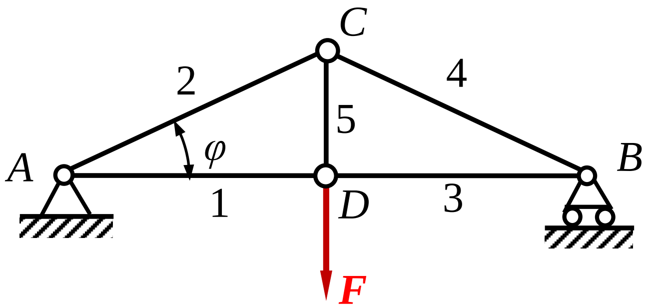
$$x_E=(l+b)\cos\theta \qquad \delta x_E=-(l+b)\sin\theta\delta\theta$$

$$x=a+\frac{F}{k}\left(\frac{l}{b}\right)^2$$



图示平面平衡系统,列整体平衡方程时不计弹簧内力,而用虚位移原理求F_1与F_2之间的关系时必须考虑弹簧的虚功,二者是否矛盾?

例 在图示的平面桁架中，已知AD=DB=6m，CD=3m，F= 30kN。试求杆3的内力。



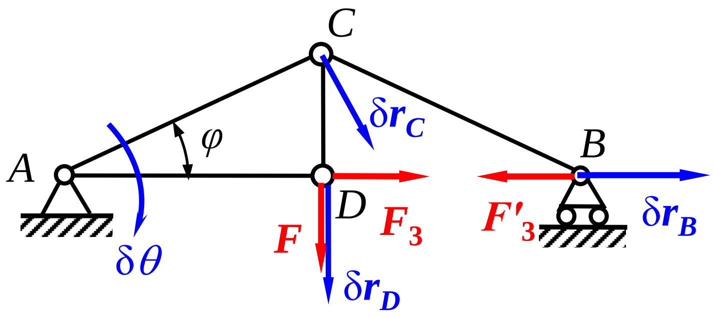
解：研究整体，理想约束

给ΔACD以虚转角$\delta\theta$

$$\delta r_C = \overline{AC} \bullet \delta\theta$$

$$\delta r_D = \overline{AD} \bullet \delta\theta$$

$$\delta r_C \cos\left(90^\circ - 2\varphi\right) = \delta r_B \cos\varphi$$

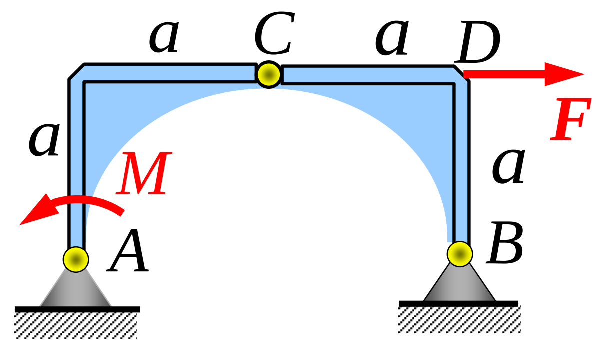


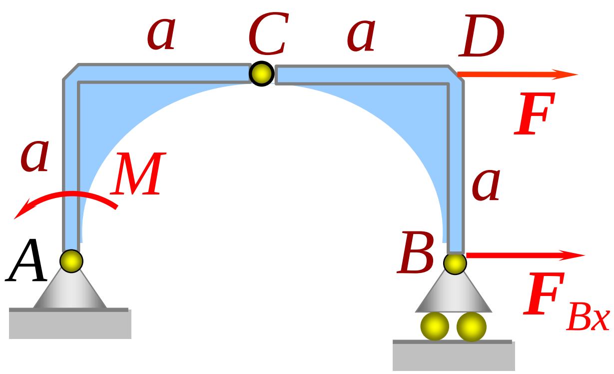
虚功方程

$$F\delta r_D - F_3'\delta r_B = 0$$

$$F_3 = F_3' = 30\text{kN}$$

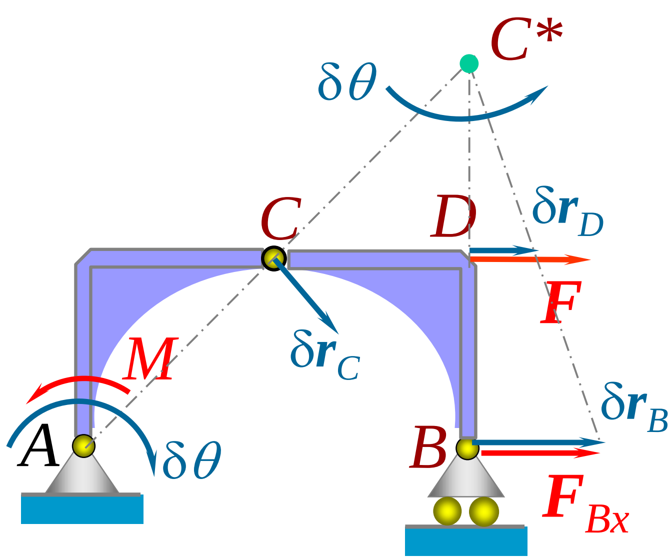
例 如图所示三铰拱，拱重不计。试求在力F及力偶M作用下铰B的约束力。





1. 求铰B的水平约束力。

给曲杆AC一微小转角$\delta\theta$,曲杆BC的速度瞬心在C^*.



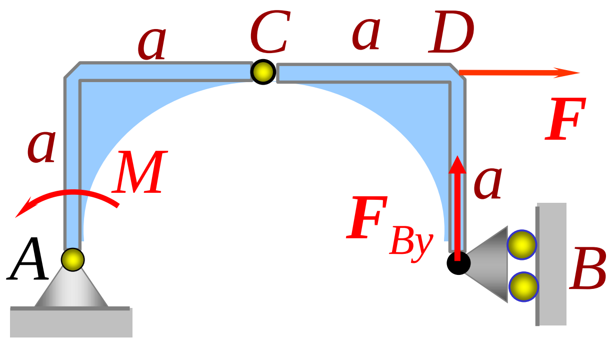
$$-M\cdot\delta\theta+F\delta r_D+F_{Bx}\delta r_B=0$$

$$\delta r_D=a\delta\theta \qquad \delta r_B=2a\delta\theta$$

$$(-M+Fa+2F_{Bx}\cdot a)\delta\theta=0$$

$$F_{Bx}=\frac{M}{2a}-\frac{F}{2}$$

2. 求铰B的垂直约束力。

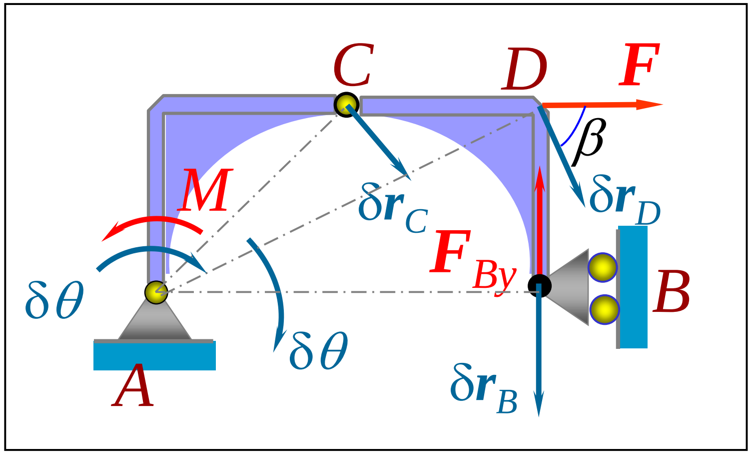


给杆AC一微小转角$\delta\theta$，
杆BC的速度瞬心在A.

$$-M\cdot\delta\theta+\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}_D-F_{By}\delta r_B=0$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}_D=F\delta r_D\cos\beta=Fa\delta\theta$$

$$\delta r_B=2a\delta\theta$$

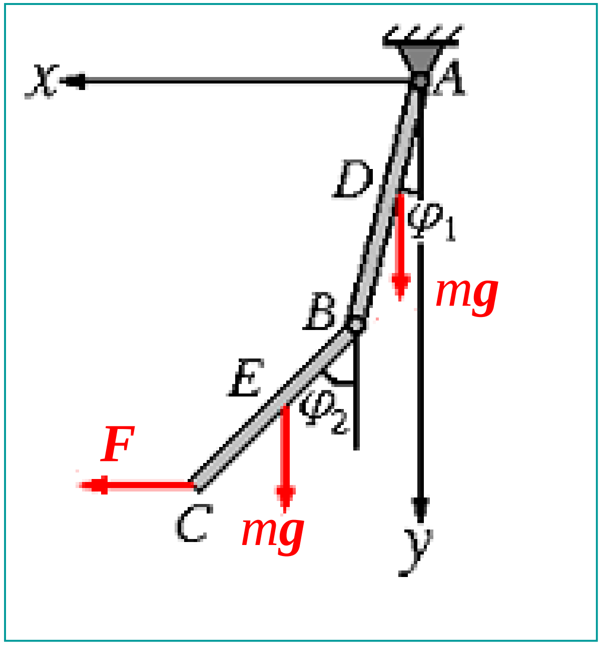


$$(-M+Fa-2F_{By}a)\delta\theta=0$$

$$F_{By}=-\frac{M}{2a}+\frac{F}{2}$$

思考：能否同时求出两个力？

例 图中两根匀质刚杆各长$2l$，质量为m，在B端用铰链连接，A端用铰链固定，而自由端C有水平力$\boldsymbol{F}$作用，求系统在铅直面内的平衡位置。



解：系统具有两个自由度，位置用φ_1和φ_2（以顺时针为正）表示。

$$F\delta x_C + mg\delta y_D + mg\delta y_E = 0$$

$$y_D = l\cos\varphi_1$$

$$y_E = 2l\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2$$

$$x_C = 2l\sin\varphi_1 + 2l\sin\varphi_2$$

$$\delta y_D = -l\sin\varphi_1\delta\varphi_1$$

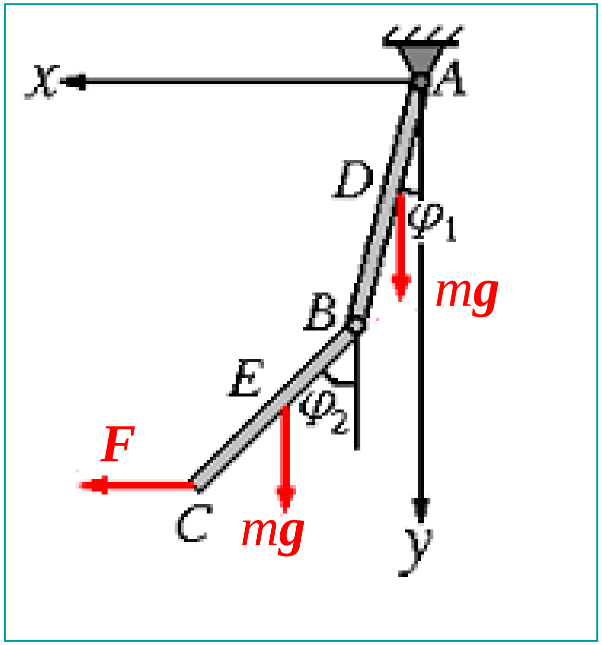
$$\delta y_E = -l(2\sin\varphi_1\delta\varphi_1 + \sin\varphi_2\delta\varphi_2)$$

$$\delta x_C = 2l(2\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + \cos\varphi_2\delta\varphi_2)$$

$$(2F\cos\varphi_1 - 3mg\sin\varphi_1)l\delta\varphi_1 + (2F\cos\varphi_2 - mg\sin\varphi_2)l\delta\varphi_2 = 0$$

$$(2F\cos\varphi_1 - 3mg\sin\varphi_1)l\delta\varphi_1 + (2F\cos\varphi_2 - mg\sin\varphi_2)l\delta\varphi_2 = 0$$

因$\delta\varphi_1$和$\delta\varphi_2$是彼此独立的，所以上式可以分解成两个独立方程



$$2F\cos\varphi_1 - 3mg\sin\varphi_1 = 0$$

$$2F\cos\varphi_2 - mg\sin\varphi_2 = 0$$

$$\varphi_1 = \arctan\frac{2F}{3mg}$$

$$\varphi_2 = \arctan\frac{2F}{mg}$$

§14-5 广义坐标形式的虚位移原理

1、广义虚位移(广义位移)

定义 广义坐标的变分称为广义虚位移，记为δq_j 。

由n个质点A_1，A_2，…，A_n组成的系统，受到s个约束（即有s个独立的约束方程）时，总可以选取k=3n-s个广义坐标q_1，q_2，…，q_k来确定它的位置。于是，质点系内任一点A_i的矢径可表示成广义坐标的函数，

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,\ q_2,\ \dots,q_k;\ t)\qquad (i=1,2,\dots,n)$$

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

2、广义力

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

广义力 $$\boxed{Q_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}} \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

广义力 $\boxed{Q_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}}$ $(j = 1, 2, ..., k)$

广义力的量纲

广义力的量纲由它对应的广义虚位移δq_j 而定。

当δq_j的量纲是长度时，Q_j的量纲就是力量纲；当δq_j量纲是角度时，Q_j的量纲就是力矩的量纲。

广义力的解析表达式

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j})$$

$$(j = 1,\ 2,\ ...,\ k)$$

3、广义坐标形式的虚位移原理

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j=0$$

对于完整系统，各个广义坐标的变分δq_j都是独立的，

$$\boxed{Q_j=0}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

受双面、定常、理想、完整约束的质点系，其平衡的必要和充分的条件是，系统的所有广义力都等于零。

上式方程组是彼此独立的，其数目等于广义坐标的数目，也恰好等于系统的自由度。

4、广义力的求解

- **应用广义力定义**

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\qquad (j=1,\ 2,\ ...,\ k)$$

- **应用虚功**

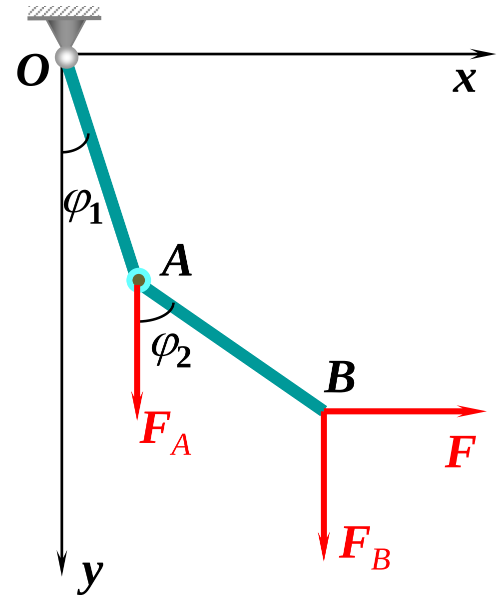
令某一个广义位移不为零，其余广义位移均为零

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j=0 \longrightarrow \delta W_j=Q_j\delta q_j$$

$$\longrightarrow Q_j=\frac{\delta W_j}{\delta q_j}$$

对应某一广义坐标的广义力就是当只有该坐标有广义位移时，作用在质点系上的所有主动力在此广义位移上所做的元功之和与广义位移之比.

例 杆OA和AB以铰链连接，O端悬挂于圆柱铰链上。杆长$OA=a$，$AB=b$,杆重和铰链的摩擦都忽略不计。今在点A和B分别作用向下的铅垂力$\boldsymbol{F}_A$和$\boldsymbol{F}_B$，又在点B作用一水平力$\boldsymbol{F}$。试求图示位置时广义力，及平衡时φ_1，φ_2与$\boldsymbol{F}_A$,$\boldsymbol{F}_B$,$\boldsymbol{F}$之间的关系。

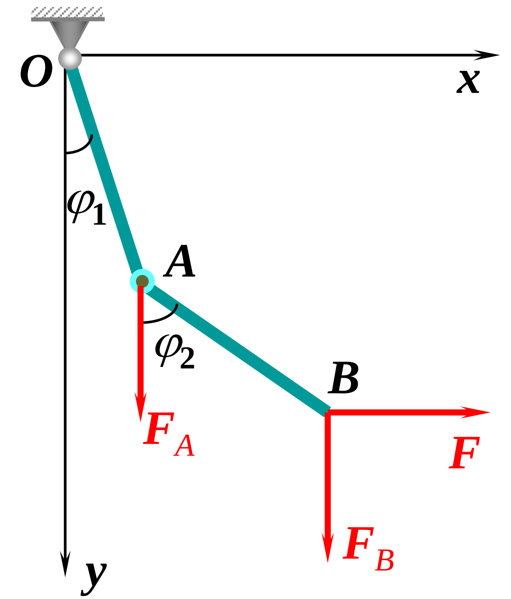


杆OA和AB的位置可由点A和B的四个坐标x_A，y_A和x_B，y_B完全确定，

$$x_A^2+y_A^2=a^2 \qquad (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=b^2$$

因此系统有两个自由度。现选择φ_1和φ_2为系统的两个广义坐标，计算其对应的广义力Q_1和Q_2。

1. 用定义计算



$$\boxed{Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)}$$

$$Q_1=F_A\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1}+F_B\frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1}+F\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1}$$

$$Q_2=F_A\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2}+F_B\frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2}+F\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2}$$

$$y_A=a\cos\ \varphi_1$$
$$y_B=a\cos\ \varphi_1+b\cos\ \varphi_2$$
$$x_B=a\sin\ \varphi_1+b\sin\ \varphi_2$$

$$\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1}=-a\sin\varphi_1,\qquad \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2}=0,$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1}=-a\sin\varphi_1,\qquad \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2}=-b\sin\varphi_2\ ,$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1}=a\cos\varphi_1\qquad \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2}=b\cos\varphi_2$$

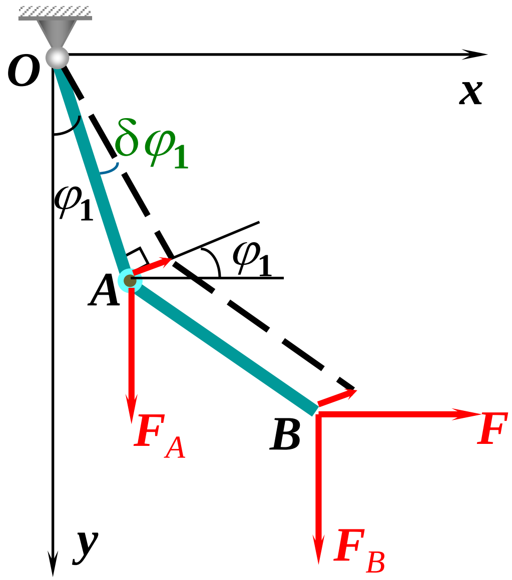
$$Q_1=-(F_A+F_B)a\sin\ \varphi_1+Fa\cos\ \varphi_1=0$$

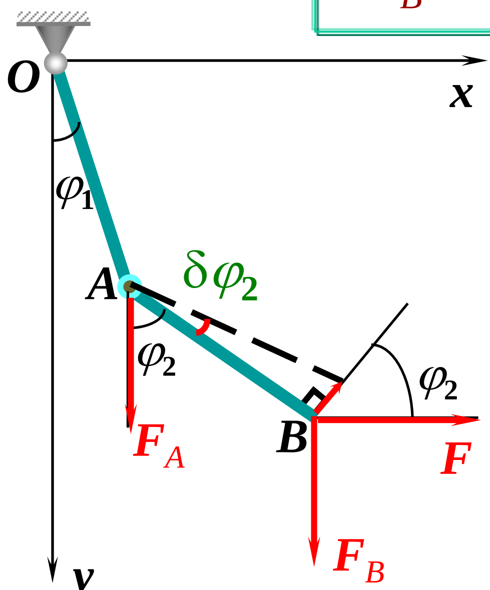
$$Q_2=-F_Bb\sin\varphi_2+Fb\cos\varphi_2=0$$

2. 用虚功计算

$\delta\varphi_2=0$，只有$\delta\varphi_1$

$$y_A = a\cos\ \varphi_1$$
$$y_B = a\cos\ \varphi_1 + b\cos\ \varphi_2$$
$$x_B = a\sin\ \varphi_1 + b\sin\ \varphi_2$$





$$\delta y_A = \delta y_B = -a\sin\varphi_1\delta\varphi_1$$
$$\delta x_B = a\cos\varphi_1\delta\varphi_1$$
$$Q_1 = \frac{F_A\delta y_A + F_B\delta y_B + F\delta x_B}{\delta\varphi_1}$$
$$Q_1 = -(F_A + F_B)a\sin\varphi_1 + Fa\cos\varphi_1$$

$\delta\varphi_1=0$，只有$\delta\varphi_2$

$$\delta y_A = 0$$
$$\delta y_B = -b\sin\varphi_2\delta\varphi_2$$
$$\delta x_B = b\cos\varphi_2\delta\varphi_2$$
$$Q_2 = \frac{F_A\delta y_A + F_B\delta y_B + F\delta x_B}{\delta\varphi_2}$$
$$Q_2 = -F_B b\sin\varphi_2 + Fb\cos\varphi_2$$

本章小结

1. 分析力学主要研究非自由质点系的运动，它的特点是通过功、能等标量用数学分析的方法进行研究。其中的基本概念有约束及约束方程、广义坐标、自由度数、虚位移、广义力、理想约束等。

2. 受完整约束的质点系，自由度数等于广义坐标数目。

3. 虚位移只是对约束特性的进一步描述，与实际上作用的主动力无关。在稳定约束情况下，实位移是虚位移的一种。

4. 确定质点系中各质点虚位移之间关系的方法：

   直接按几何关系、坐标变分法、虚速度法

5. 虚位移原理 $\delta W = 0$

6. 广义坐标形式的虚位移原理是：$Q_j = 0$