

# 平衡状态下的静定问题与约束的关系

(西安交通大学航天航空学院, 西安 710049)

**摘要** 《理论力学》静力学中的静定或超静定问题的判定不仅与独立平衡方程个数与未知量个数的比较有关, 还与约束类型相关; 与自由度的关系并没有确定的判据。

**关键词** 静定 超静定 约束 自由度

**中图分类号**:O312

## Relationship between statically determinate problems and constraint in equilibrium state

(School of Aerospace Engineering, XI'AN JiaoTong University, Xi'an 710049)

**Abstract** The determination of statically determinate or statically indeterminate problems in the statics of Theoretical Mechanics is not only related to the comparison of the number of independent equilibrium equations and the number of unknown quantities, but also related to the type of constraints; There is no definitive criterion for the relationship with degrees of freedom.

**Key word** statically determinate, statically indeterminate, constraint, degree of freedom

理论力学中的静力学任务就是解决物体系统的平衡问题, 该问题也是工程中经常遇到的一类力学问题。平衡是物体的一种运动状态, 即相对惯性参考系静止或匀速直线运动的物体, 称其处于平衡状态。工程上对于处于平衡状态的力学系统可以从自由度的角度去定义, 一种称为结构, 工程中用于承载的坚固不变形的系统, 其自由度小于或等于零; 另一种是工程机械中运动的构件组成的系统称为机构, 一般其自由度大于零。为了维持平衡状态, 无论结构或机构所受各力之间必然要满足一定的关系, 即平衡条件, 表达为数学形式则称为平衡方程<sup>[1]</sup>。通过平衡方程可以由已知的主动力求出各待定的未知量, 此时需要讨论的问题是能否由平衡方程唯一地求解出各未知量。

一般理论力学的教材中对于静定和超静定的定义是<sup>[2]</sup>, 在平衡状态下, 当独立平衡方程的个数与未知量的个数相等时, 由平衡条件可求出全部确定的未知量, 此类问题称为静定问题; 对于未知量的个数大于独立平衡方程个数的问题称为静不定或超静定问题。按上述定义从两个数目的比较得到的判据是不够准确的, 在后面的讨论中将进一步的阐述。这里所指的未知量包括未知约束力, 也包括未知的主动动力或描述平衡位置的物理量。文中所讨论的物体均按理论力学的

假设为刚体。

从约束的角度来看, 假设主动力已知, 未知量仅是约束反力的情况下, 未知量的数目就仅与物体所受约束有关。以单个平面物体为例说明, 平面内任一自由物体有三个自由度。1.如物体所受约束后仍然能够做某些运动, 或者仍有自由度, 物体的位置在力的作用下会发生变化, 这种约束称为不完全约束。如图 1 所示的物体在固定铰支座的约束下可以转动。此时未知量的个数 2 小于独立平衡方程数 3 个, 但实际上多余的平衡方程

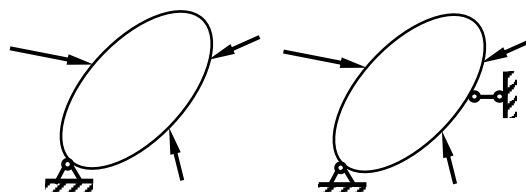


图 1

图 2

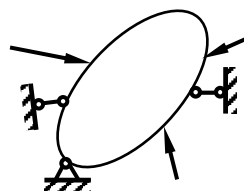


图 3

建立了主动力之间的关系或平衡位置, 也就

是只有在满足了平衡方程的特定的主动力或平衡位置下，物体才能保持平衡。2.如果物体受到约束后，在力的作用下保持位置不变，约束恰好完全限制了物体的运动，或者物体的自由度为零，这种约束称为完全约束。此时未知量的个数等于平衡方程数，如图2所示。3.如果在完全约束的物体上再增加约束，就称其为多余约束，此时物体的自由度小于或等于零。如图3所示物体的未知量为4大于独立平衡方程数3。这种情况下物体的约束反力与变形有关，材料力学中将作进一步的讨论<sup>[3]</sup>。下面的讨论均假设主动力已知，平衡位置确定，未知量仅是未知力。

## 一、静定与超静定的判定与约束的关系

### 1.单个物体

当物体上的未知量的个数等于独立的平衡方程数时，可能为静定或超静定问题。

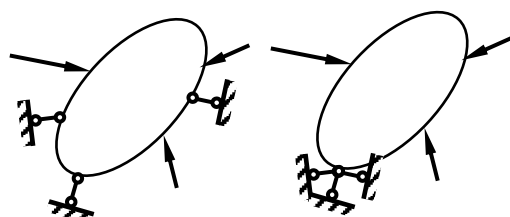


图4

图5

图4和图5两种情况下，未知量的个数都是3，但图4为静定问题，而图5在平衡状态下为超静定问题，不平衡状态下为动力学问题。图6和图7中，未知量的个数是3个，在平面一般力系的作用下独立平衡方程数也是3个，但关于未知约束力的独立方程数只有2个，为超静定问题。由此可以看出仅依据未知量个数与平衡方程数相等不能确定静定或超静定问题，需要结合约束条件，如果是完全约束为静定问题；如果是不完全约束为超静定问题。

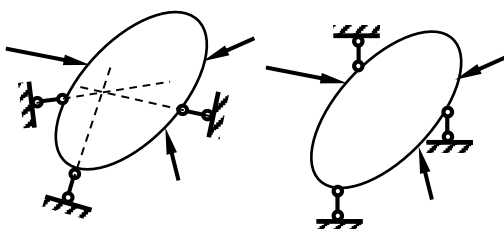


图6

图7

至于物体上的未知量的个数小于独立平衡方程数的情况，在主动力已知时，这个情况不会出现；主动力或平衡位置未知时相当于总的未知量个数等于平衡方程数的情况，而且为静定问题。

当物体上的未知量的个数大于独立的平衡方程数时，为超静定问题。约束可以是不完全约束或多余约束，如图8和9分别为不完全和多余约束<sup>[4]</sup>。图6和图7中，如果主动力系分别为汇交和平行力系，则独立平衡方程数是2个，仍为超静定问题。

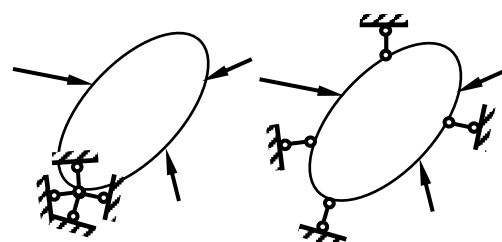


图8

图9

因此即使未知量的个数等于独立的平衡方程数，由平衡条件也不一定能求出全部未知量，所以对于静定和超静定问题的定义应为力学系统中所有的未知量均可以由平衡方程确定的静力学问题为静定问题；反之，仅由平衡条件无法求出所有的未知量的问题，或至少有一个未知量无法求出的问题为静不定或超静定问题<sup>[5]</sup>。

### 2.物体系统

力系的简化理论和力系的平衡方程都是针对单个物体建立的，若干物体组成的系统平衡问题不能由物体系统上的力系的主矢和主矩为零来唯一确定<sup>[6]</sup>。如图10中ABD保持平衡时  $F_A$ 、 $F_B$  和  $F$  构成一平面汇交力

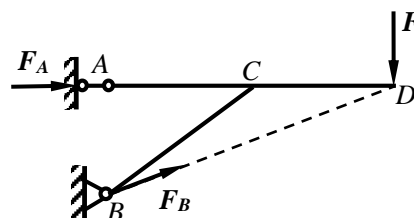


图10

系；若将C处改成光滑圆柱铰链，见图11。原来的一个物体ABD变成了由AD和BC杆组成的物体系统，此时仍将图10中的平衡

力系作用在图 11 的系统上, 显然该力系的

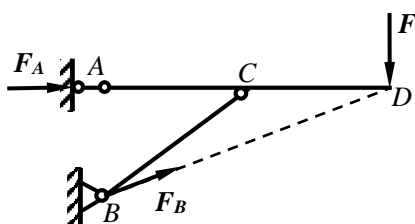


图 11

主矢和主矩仍为零, 但单个物体都不能平衡, 那么整个物体系统也不平衡。因此判断物体系统是否平衡或静定必须通过分析其中每个物体的受力, 即判定物体系统是否静定时的未知量的个数, 是包括作用于物体系统上的外力系和物体之间的内力系的总数, 独立的平衡方程数是系统中每个物体的独立平衡方程的总和。下面分情况讨论:

#### 2.1 未知量的个数等于独立的平衡方程数

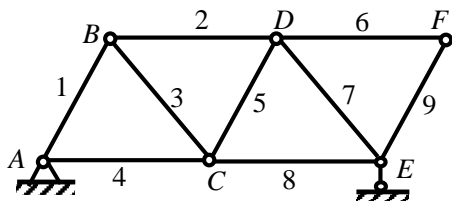


图 12

以图 12 所示的平面结构为例。如果将各杆看作一般平面刚体, 未知量的个数是 39, 独立的平衡方程数也是 39; 如果将各杆看作二力杆, 则未知量和平衡方程的个数均为 12, 且该结构为完全约束, 属于静定问题。

在平面内由三根杆与三个节点组成一个基本三角形后, 依次每增加一个三角形 (2 个杆件、1 个节点), 这样构成的平面桁架为简单桁架, 节点数与杆件数满足关系: 杆件数 =  $2 \times$  节点数 - 3。可以分析出简单桁架的未知量个数 = 杆件数 + 3, 独立的平衡方程数 =  $2 \times$  节点数, 这样简单桁架必为静定且为几何形状不变系统, 也就是结构在外力作用下总保持平衡状态, 此时的约束为完全约束。

如果将图 12 中的 7 号杆去掉, 移到 AD 处, 变成图 13 所示结构。杆件数和节点数都没有变化, 即未知量的个数仍等于独立的平衡方程数, 但是结构中的 CDFE 部分不能保证平衡, 整个结构有不完全约束, 属于几何可变系统。几何可变体系在任意给定的主

动载荷作用下其约束力是不能由平衡方程

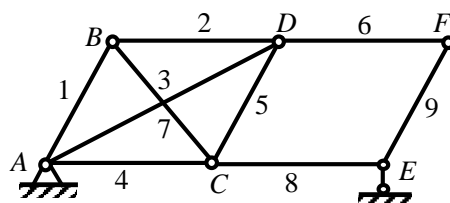


图 13

确定的, 属于超静定问题。对于几何可变系统, 如果平衡, 主动力不能预先任意给出, 而必须满足平衡条件, 或者平衡位置也与主动力相关, 如果不平衡属于动力学问题<sup>[5]</sup>。

#### 2.2 未知量的个数小于独立的平衡方程数

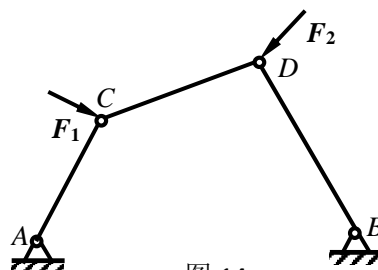


图 14

以图 14 中的平面机构为例, 未知量个数为 3 个, 而平衡方程数为 4, 此时若要保持平衡, 主动力  $F_1$  和  $F_2$  之间必须满足平衡条件, 属于静定问题。

#### 2.3 未知量的个数大于独立的平衡方程数

在 2.1 的桁架结构中再增加约束, 如图 15 和图 16 为多余约束, 成为超静定结构。在图 13 的基础上再增加约束如图 17, 有不完全约束和多余约束, 也是超静定问题。

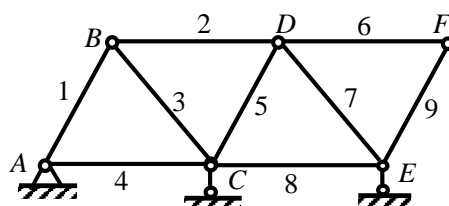


图 15

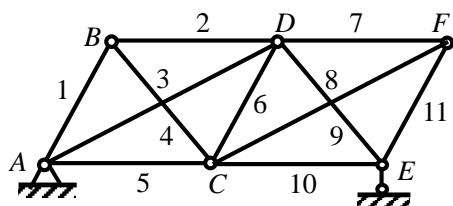


图 16

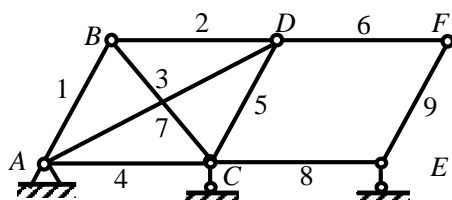


图 17

总结以上分析,可以得到结论:无论单个物体还是物体系统,在正确的确定未知量个数和独立的平衡方程数的基础上,还需要结合约束的情况,才能判断静定问题或超静定问题。

## 二、静定与静不定的判定与自由度的关系

约束的作用就是限制物体的某些运动,随之物体的自由度减少,是否能够通过物体系统的自由度来判定静定或超静定呢?机械工程中定义当系统的自由度大于0时,力学系统为机构,受到不完全约束;系统的自由度等于或小于0时,力学系统为结构,所受约束为完全或多余约束。文献[7]中提出当系统的自由度大于或等于0时,力学系统为静定的结构或机构;系统的自由度小于0时,力学系统为超静定的结构或机构。下面通过一些例题验证上述结论是否正确。已知图12所示的结构为静定结构,按照机械原理中计算平面机构的自由度的公式,其自由度 $=3 \times 10 - 2 \times 15 = 0$ ,结论吻合。图13所示的结构为超静定结构,其自由度 $=3 \times 10 - 2 \times 15 = 0$ ,按文中不去掉虚约束的情况下,与上述结论出现矛盾。图15、16和17的自由度分别为 $3 \times 11 - 2 \times 17 = -1 < 0$ ,  $3 \times 12 - 2 \times 19 = -2 < 0$ ,  $3 \times 11 - 2 \times 17 = -1 < 0$ ,结论均吻合。图14所示机构的自由度 $=3 \times 3 - 2 \times 4 = 1 > 0$ ,为静定问题,结果仍然成立。总之,文中的结论大多数情况成立,但是不能作为静定与超静定问题的判断依据。分析原因,自由度是指确定物体系统空

间位置所需的独立的坐标或变量的个数,在一定程度上,可以反映约束的程度,但无法体现约束的类型。以图5中的物体为例,物体受到不完全约束,有1个自由度,但是为超静定问题。

**结论** 在平衡状态下,无论结构或机构,静定或超静定的判定分为两种情况(未知量包含待定的主动力或平衡位置):未知量的个数等于独立的平衡方程数时,如果是完全约束,为静定问题;如果是不完全约束,为超静定问题。未知量的个数大于独立的平衡方程数时,一定是超静定问题。以结构或机构的自由度作为判定静定或超静定的依据不充分。

## 参考文献

- 1 张亚红 刘睫 《理论力学》科学出版社, 2018.
- 2 哈尔滨工业大学理论力学教研室《理论力学》(I) (第7版) 高等教育出版社, 2009.
- 3 清华大学理论力学教研组 《理论力学》高等教育出版社, 1981.
- 4 贾书惠 李万琼 《理论力学》高等教育出版社, 2002.
- 5 周又和 《理论力学》高等教育出版社, 2015.
- 6 梅凤翔 《工程力学》(上册) 高等教育出版社, 2003.
- 7 高颂文 静定与超静定问题的判断依据《滁州职业技术学院学报》vol 2,3 ,2003

西安交通大学“名课程”线下金课建设项目资助