第八章 刚体的平面运动

§8-1 平面运动方程及其运动分解

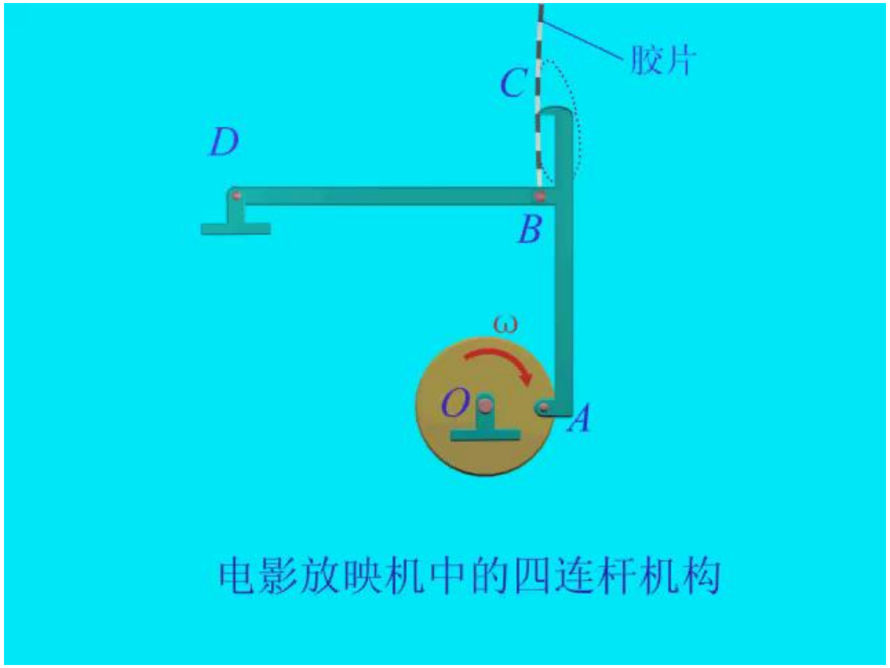
§8-2 平面运动的速度分析

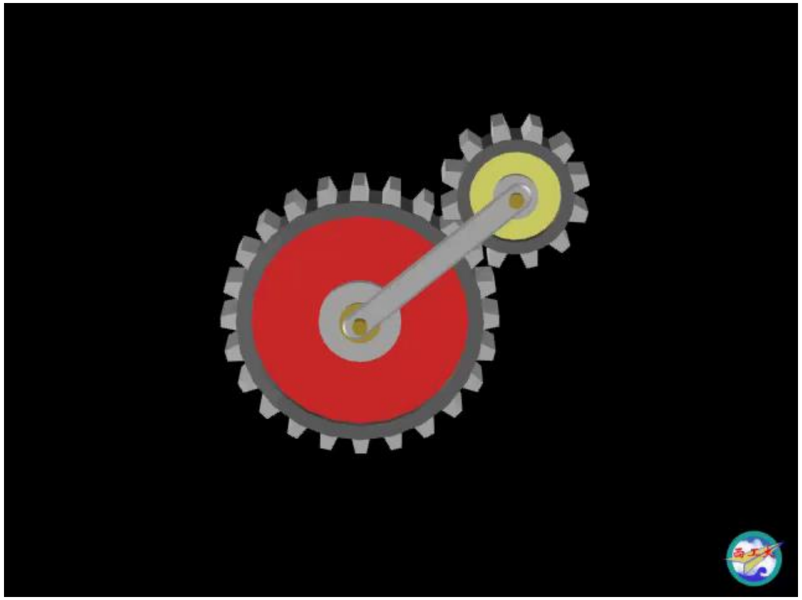
§8-3 平面运动的加速度分析

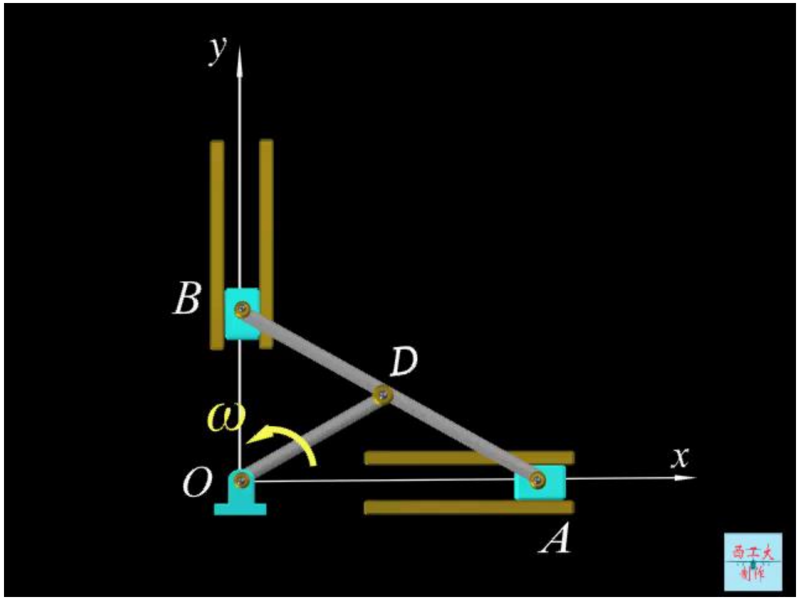
§8-4 刚体转动的合成

§8-1 平面运动方程及其运动分解

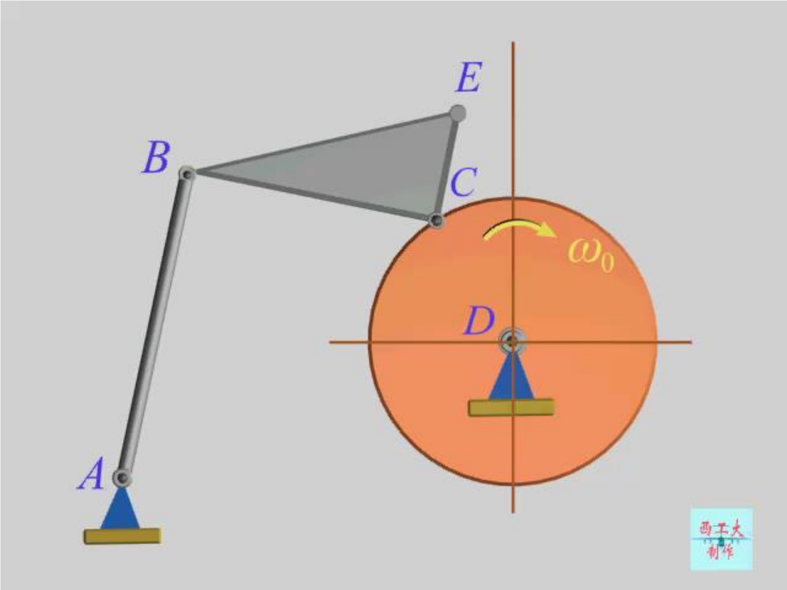
● 刚体平面运动实例





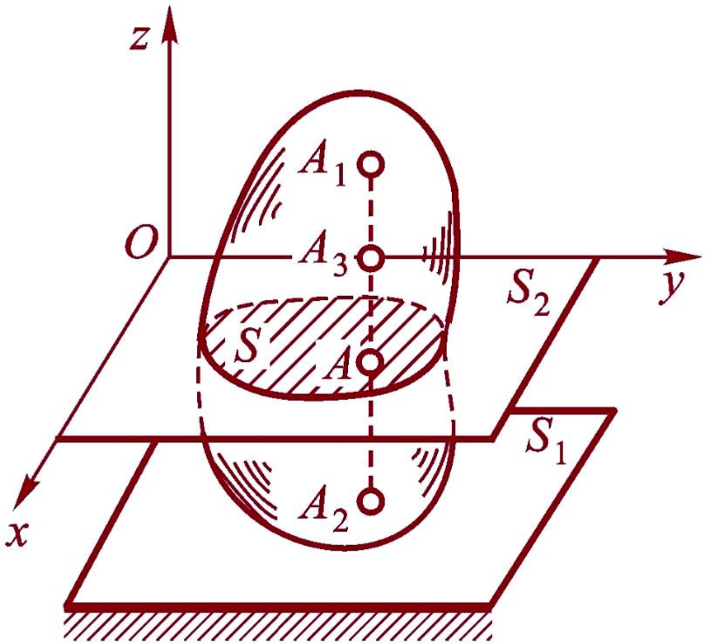


● 刚体平面运动实例



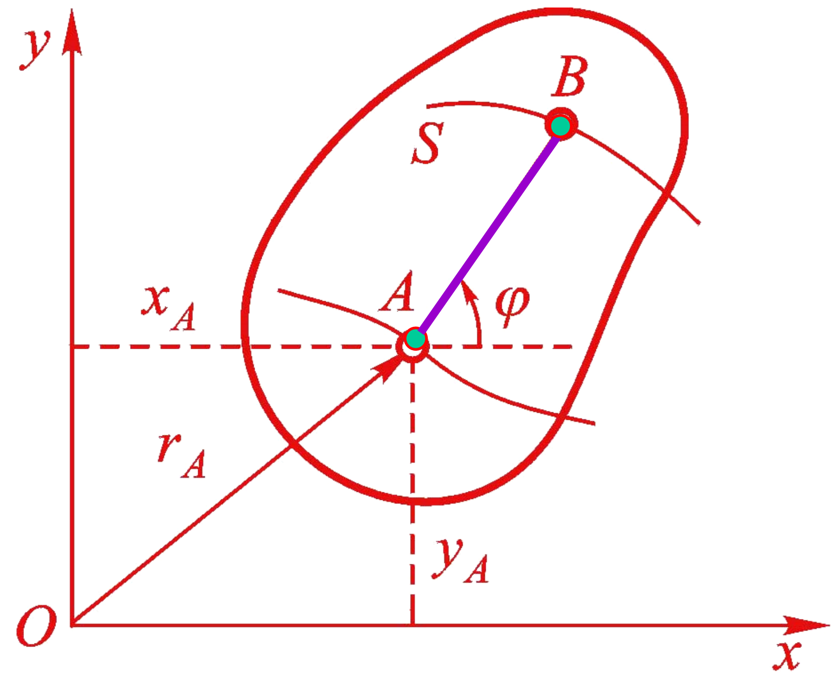
1. **定义**　　若刚体在运动过程中，刚体上的任意一点与某一固定平面之间的距离保持不变，这种运动称为**平面运动**。

2. 运动模型的建立



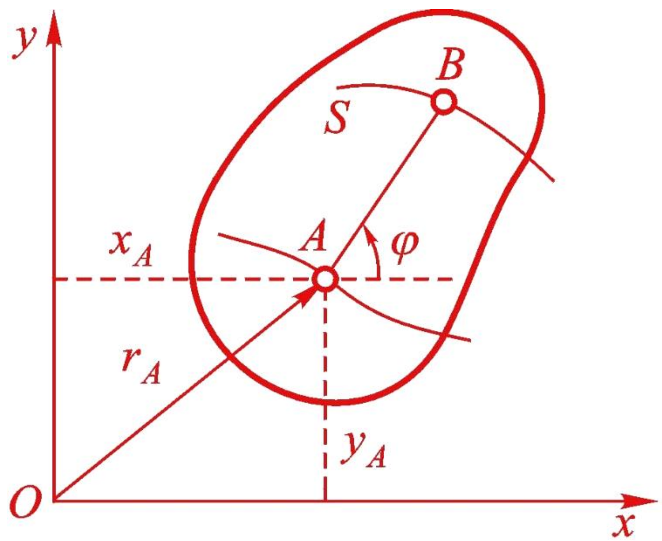
刚体上平行于固定平面的所有平面具有相同的运动规律。

刚体的平面运动简化为平面图形S在其自身平面内的平面运动。



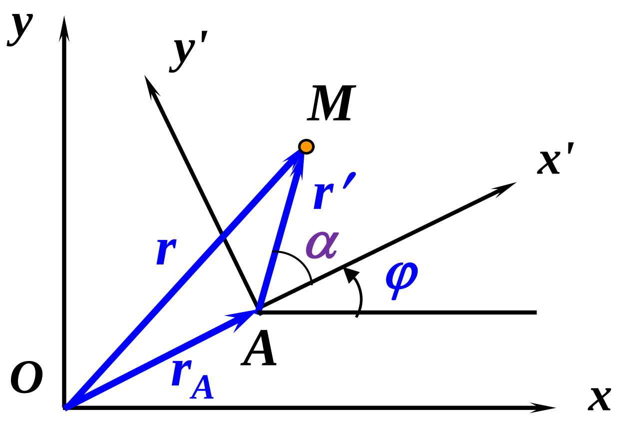
平面图形S的位置可由其上的任意直线AB完全确定。

3. 刚体平面运动方程



$$\left.\begin{aligned} x_A &= f_1(t) \\ y_A &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$$

刚体平面运动方程



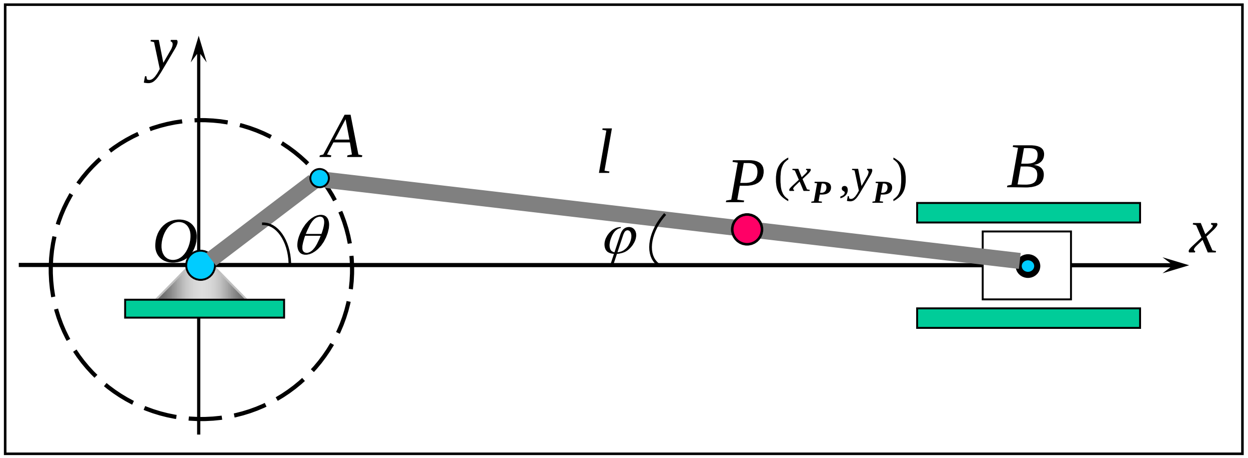
任意两点运动的关系

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}'$$

$$x_M = x_A + r'\cos(\varphi + \alpha)$$

$$y_M = y_A + r'\sin(\varphi + \alpha)$$

例 已知曲柄一滑块机构中$OA=r$，$AB=l$，曲柄OA以等角速度ω绕O轴转动。求（1）连杆的平面运动方程；（2）连杆上P点($AP=l_1$)的运动方程。



$$\frac{l}{\sin\theta}=\frac{r}{\sin\varphi}$$

$$\theta=\omega t$$

解：(1) 连杆的平面运动方程

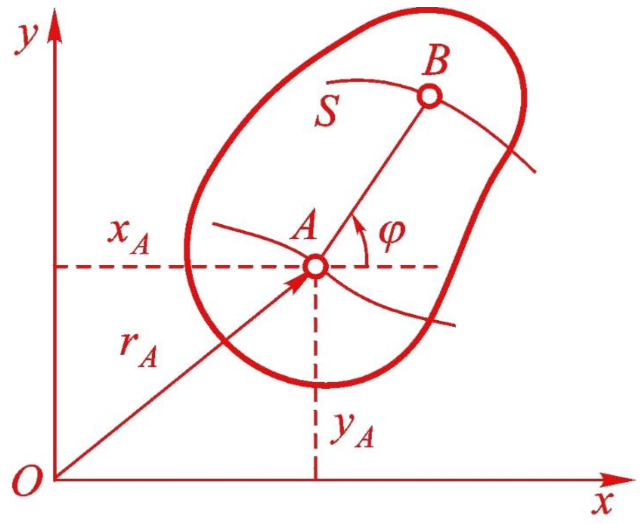
$$x_A=r\cos\omega t\,,\quad y_A=r\sin\omega t\,,\quad \varphi=\arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)$$

(2) 连杆上P点的运动方程

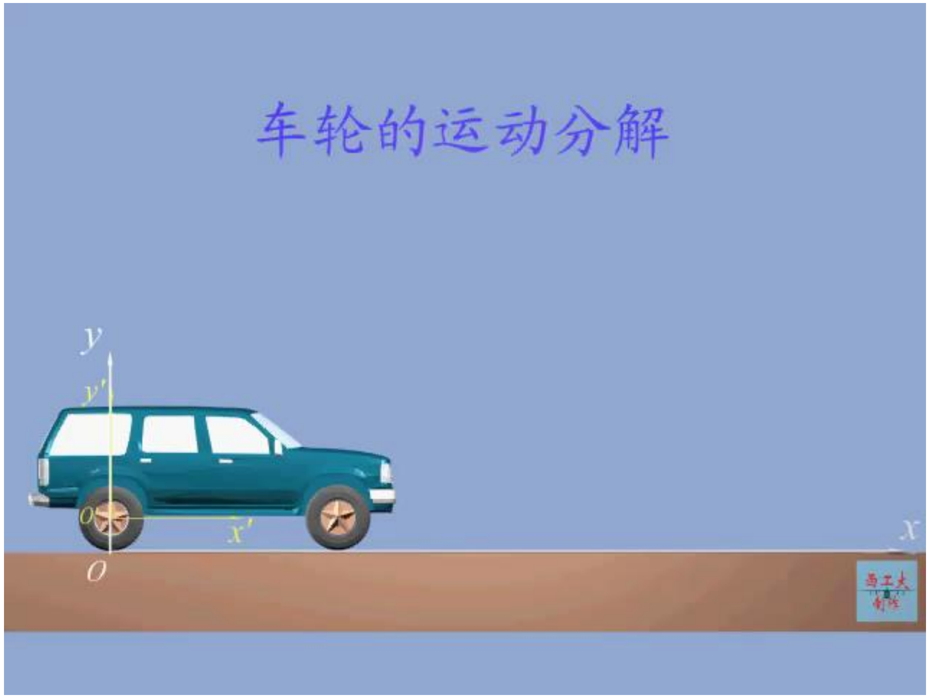
$$x_P=r\cos\omega t+l_1\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2}$$

$$y_P=\frac{r(l-l_1)}{l}\sin\omega t$$

4. 运动的分解

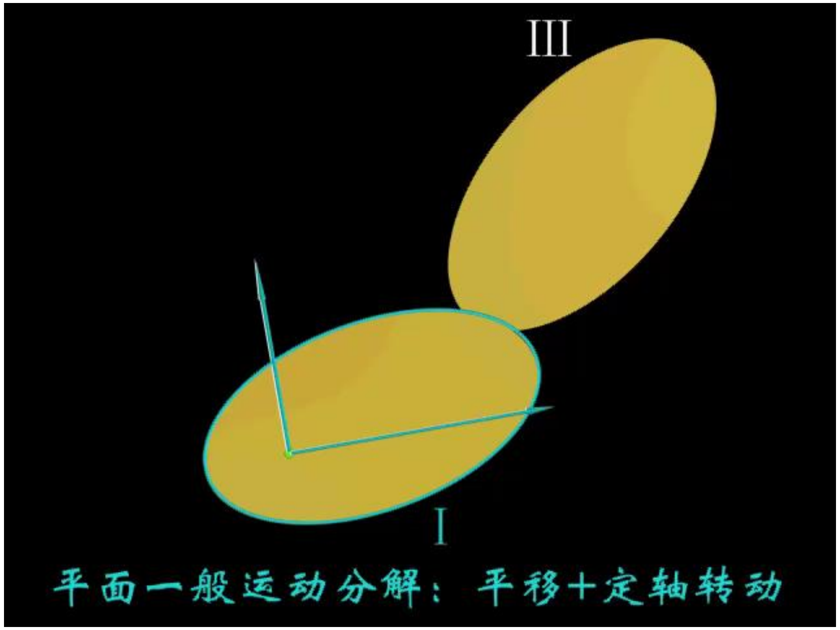


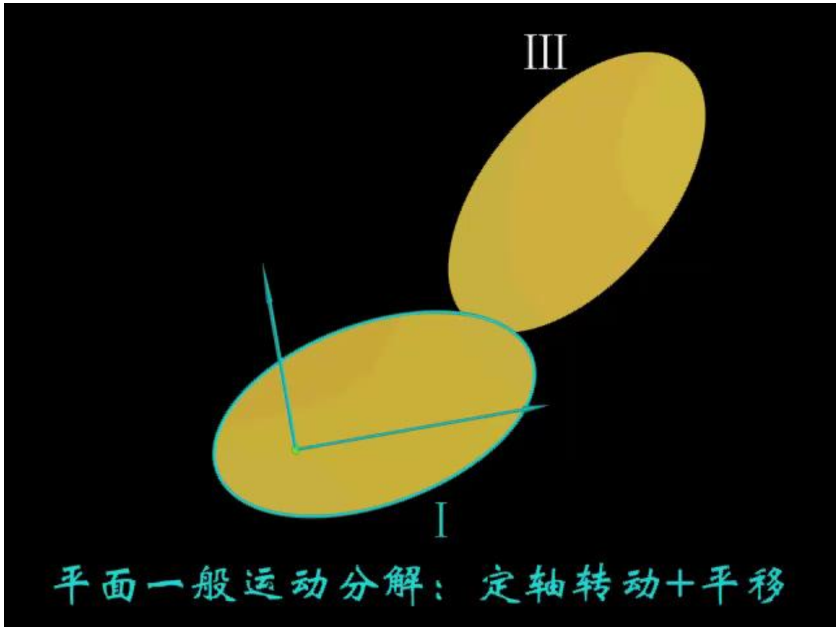
$$\left.\begin{aligned} x_A &= f_1(t) \\ y_A &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$$

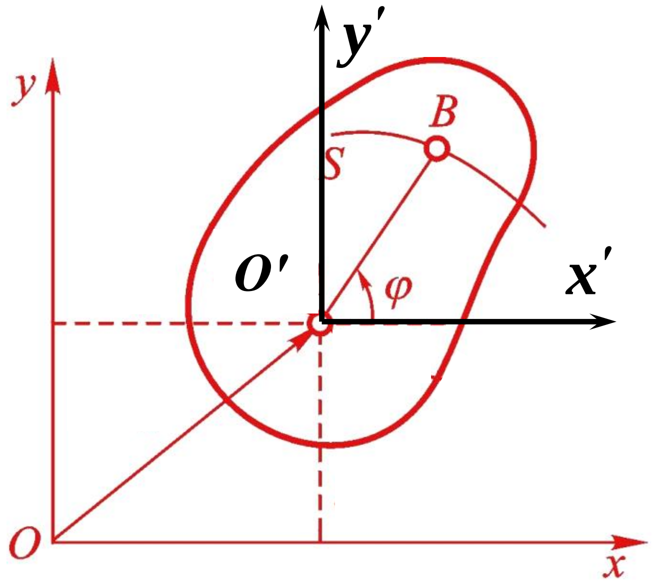


平面图形的运动可以看成是平移和转动的合成运动?

4. 运动的分解







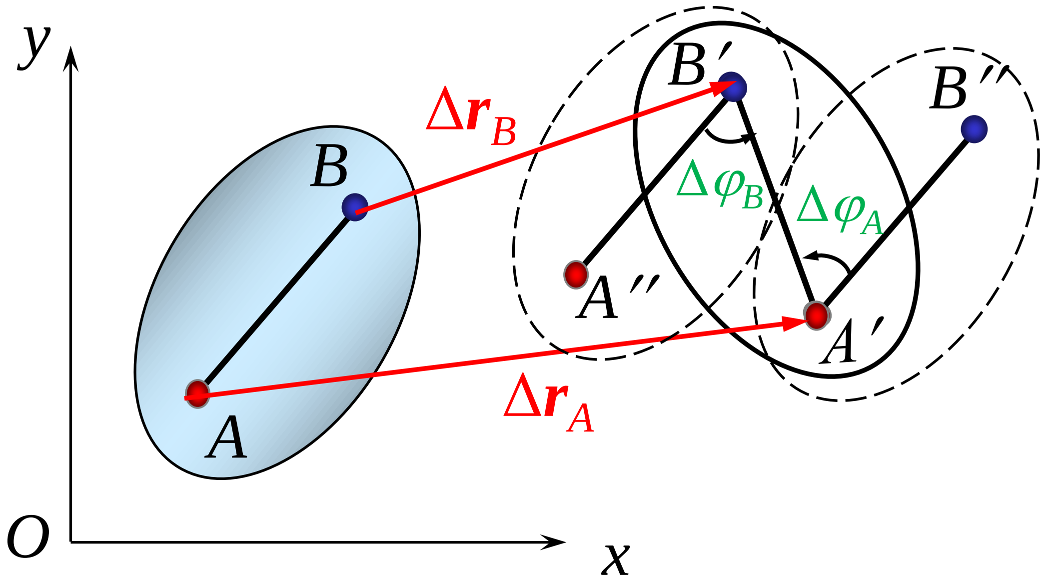
$O'x'y'$—平动坐标系

O'—基点

平面图形的运动可分解为随基点的平动及绕基点的转动。

基点的选择是任意的

4. 运动的分解



基点A $\quad AB \xrightarrow{\Delta \boldsymbol{r}_A} A'B'' \xrightarrow{\Delta\varphi_A} A'B'$

基点B $\quad AB \xrightarrow{\Delta \boldsymbol{r}_B} A''B' \xrightarrow{\Delta\varphi_B} A'B'$

$\Delta \boldsymbol{r}_A \neq \Delta \boldsymbol{r}_B$， $\boldsymbol{v}_A \neq \boldsymbol{v}_B$， $\boldsymbol{a}_A \neq \boldsymbol{a}_B$

$\Delta\varphi_A = \Delta\varphi_B \quad \omega_A = \omega_B \quad \alpha_A = \alpha_B$

平动与基点选择有关
转动与基点选择无关

结论

1. 平面运动的分解普遍成立。分解的关键在于平动坐标系的引入。

2. 平面运动分解与点的复合运动分解的异同。

3. 随基点的平动部分与基点选择有关。

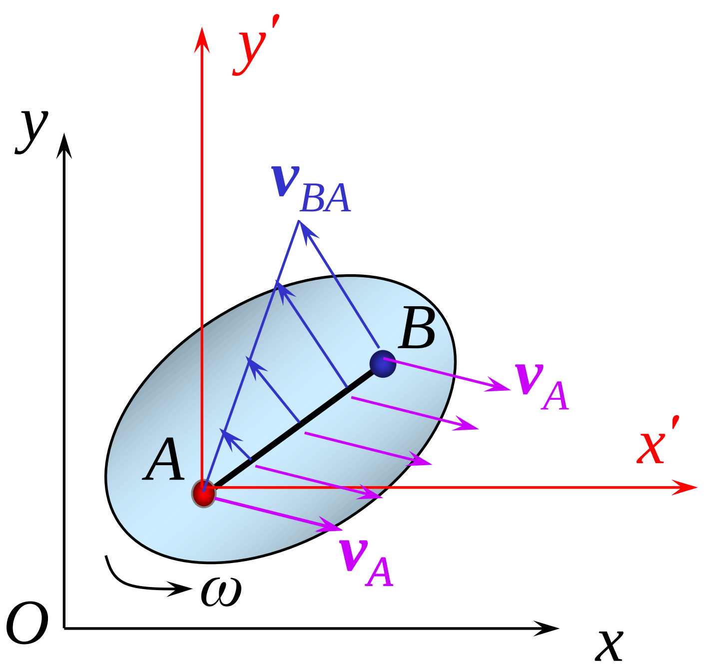
4. 绕基点的转动部分与基点选择无关。

平面运动图形的角速度和角加速度，不必指明基点和坐标系，就是平面图形的角速度和角加速度。 相对基点的转动角速度(角加速度)就是绝对角速度(角加速度).

§8-2 平面运动的速度分析

1. 基点法

已知平面运动刚体的角速度为ω，A点速度为$\boldsymbol{v}_A$，分析图形上任一点B的速度。



动点—B点

动系—平移系$Ax'y'$

定系—固连于地球

绝对运动—平面曲线

相对运动—圆周运动

$$v_r = v_{BA} = AB \cdot \omega$$

牵连运动—平动

$$v_e = v_A$$

1. 基点法

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_B$$

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_A$$

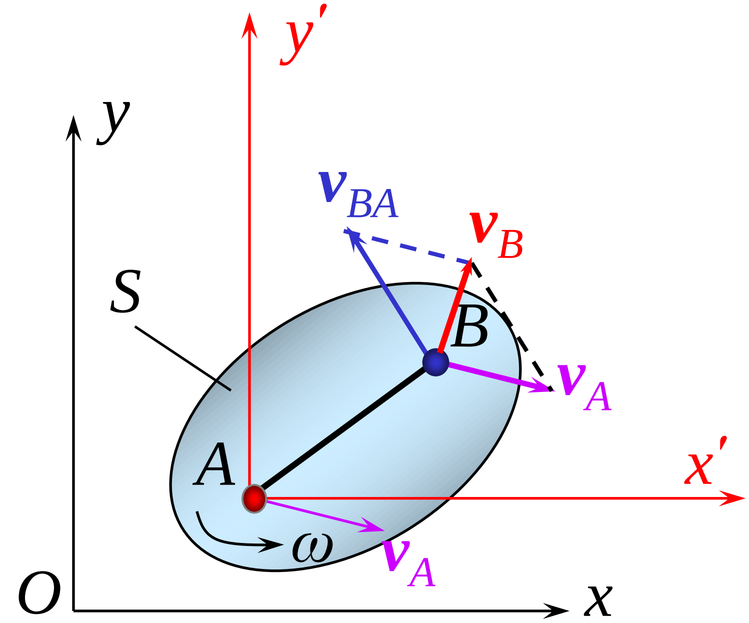
$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_{BA}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}}$$

动点—B点

基点—A点

（平动坐标系）

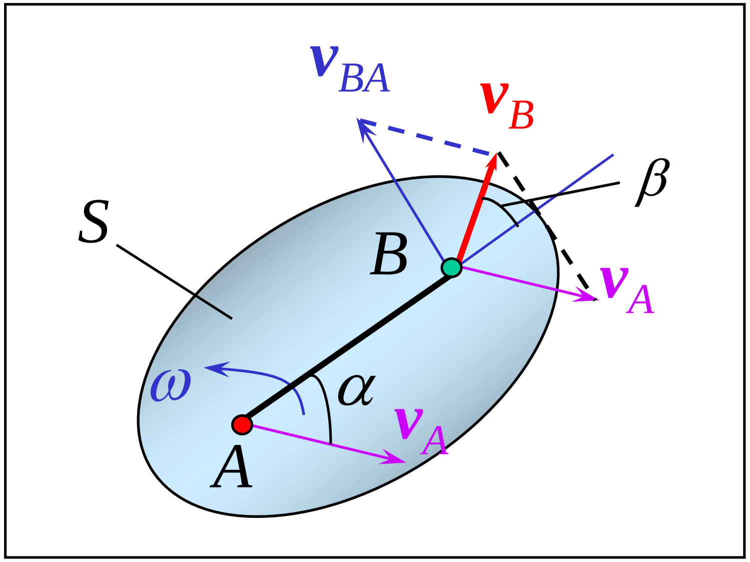


$$v_{BA} = AB \cdot \omega$$

方向垂直于AB，同ω转向

平面图形上任意点的速度，等于基点的速度与该点相对于基点（平移系）的相对速度的矢量和。

2. 速度投影定理



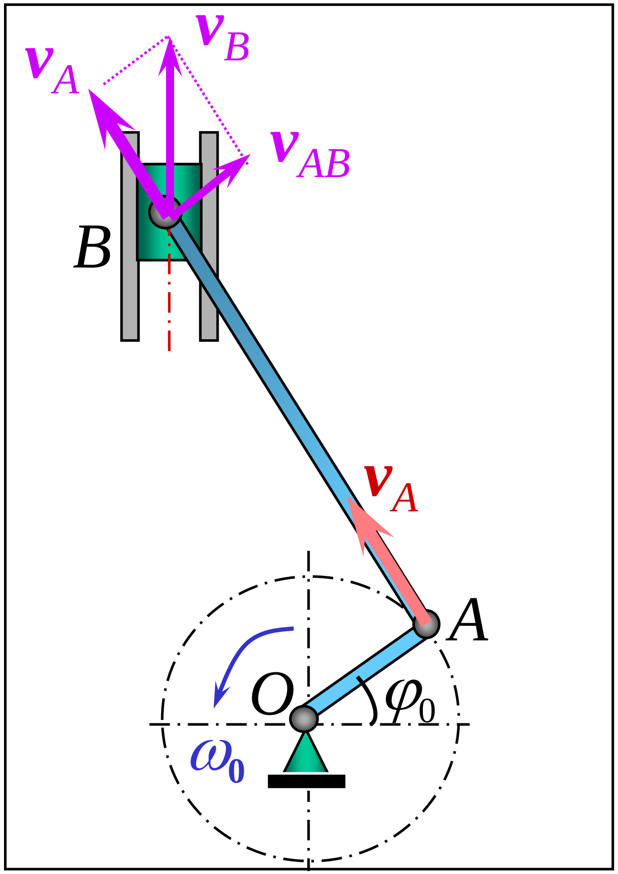
$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$$

速度投影定理：同一平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。

1. 该定理反映了刚体中两点间距离不变的特性。
2. 无法求解平面运动刚体的角速度。
3. 当两点速度方向与其连线垂直时，该定理失效。

补充说明：两点速度在两点连线垂直方向的投影之差等于平面图形角速度与两点距离的乘积。



例 已知曲柄滑块机构中，曲柄$OA=r$，以匀角速度ω_0绕O轴转动，连杆$AB=l$。在图示情形下连杆与曲柄垂直。求该瞬时(1) 滑块的速度；(2) 连杆AB的角速度。

解：基点法

曲柄OA定轴转动 $v_A=r\omega_0$

连杆AB作平面运动，

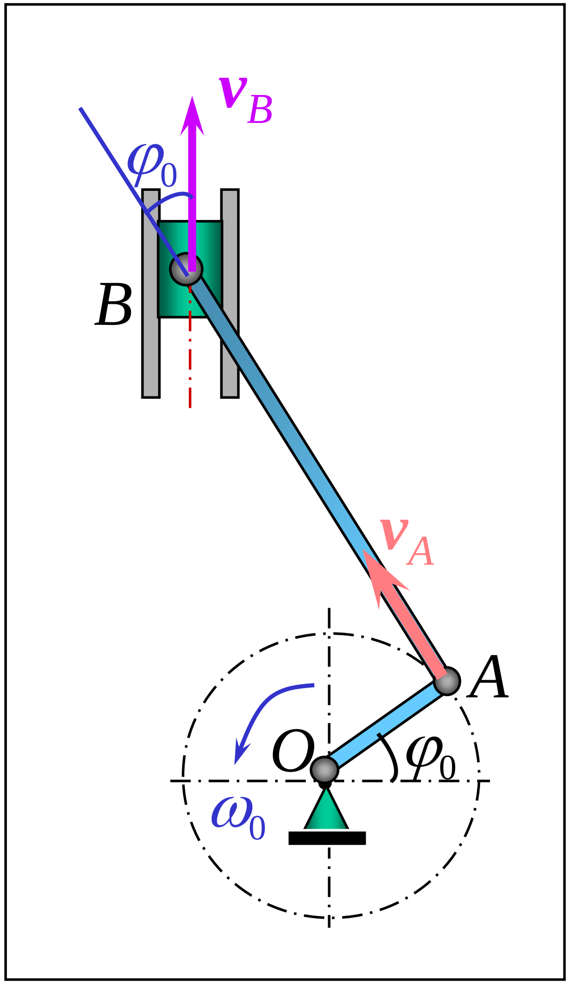
A为基点,B为动点

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}$$

$$v_B=\frac{v_A}{\cos\varphi_0}=\frac{r\omega_0}{\cos\varphi_0}$$

$$\omega_{AB}=\frac{v_{AB}}{l}=\frac{r\omega_0}{l}\tan\varphi_0$$

顺时针转向



速度投影法

曲柄OA定轴转动 $v_A = r\omega_0$

连杆AB作平面运动，

$$[v_A]_{AB} = [v_B]_{AB}$$

$$v_A = v_B \cos\varphi_0$$

$$v_B = \frac{r\omega_0}{\cos\varphi_0}$$

应用速度投影定理无法求得连杆AB的角速度。

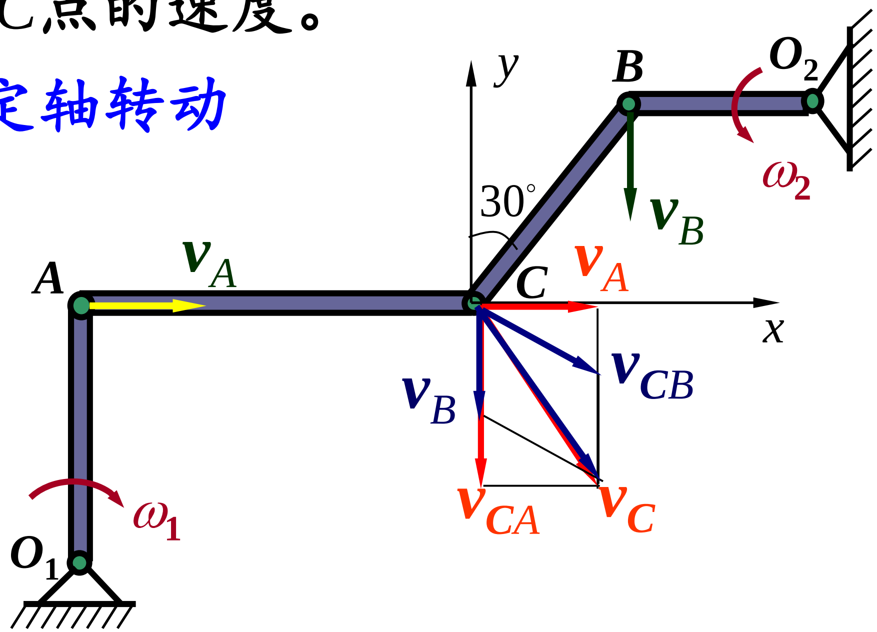
例 如图平面铰链机构。已知杆O_1A的角速度ω_1，杆O_2B的角速度ω_2，转向如图，且在图示瞬时，杆O_1A铅直，杆AC和O_2B水平，杆BC对铅直线的偏角30°；又$O_2B=b$，$O_1A=\sqrt{3}b$。试求该瞬时C点的速度。

解： O_1A与O_2B杆均为定轴转动

$$v_A=\omega_1 O_1A=\sqrt{3}\omega_1 b$$

$$v_B=\omega_2 O_2B=\omega_2 b$$

AC和BC均作平面运动



A为基点,动点C $\quad \boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{CA}$

B为基点,动点C $\quad \boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{CB}$

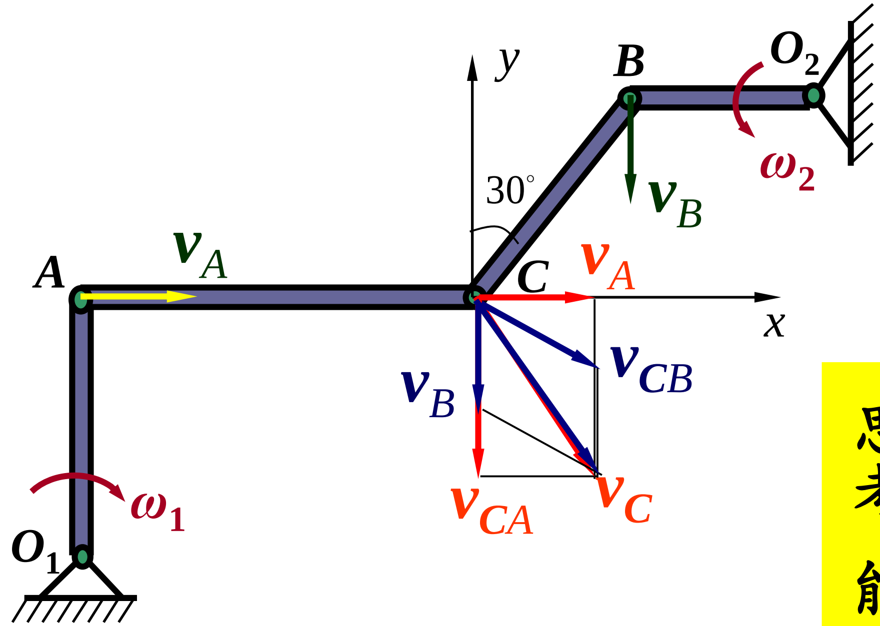
$$\boxed{\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{CA}=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{CB}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}}$$

沿x轴投影上式

$$v_A = v_{CB}\cos 30^\circ$$

$$v_{CB} = \frac{v_A}{\cos\ 30^\circ} = 2\omega_1 b$$



$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$ 式分别投影到x，y轴上

$$v_{Cx} = v_{Bx} + v_{CBx} = 0 + v_{CB}\cos 30^\circ = \sqrt{3}\omega_1 b$$

$$v_{Cy} = v_{By} + v_{CBy} = -v_B - v_{CB}\sin 30^\circ = -(\omega_1 + \omega_2)b$$

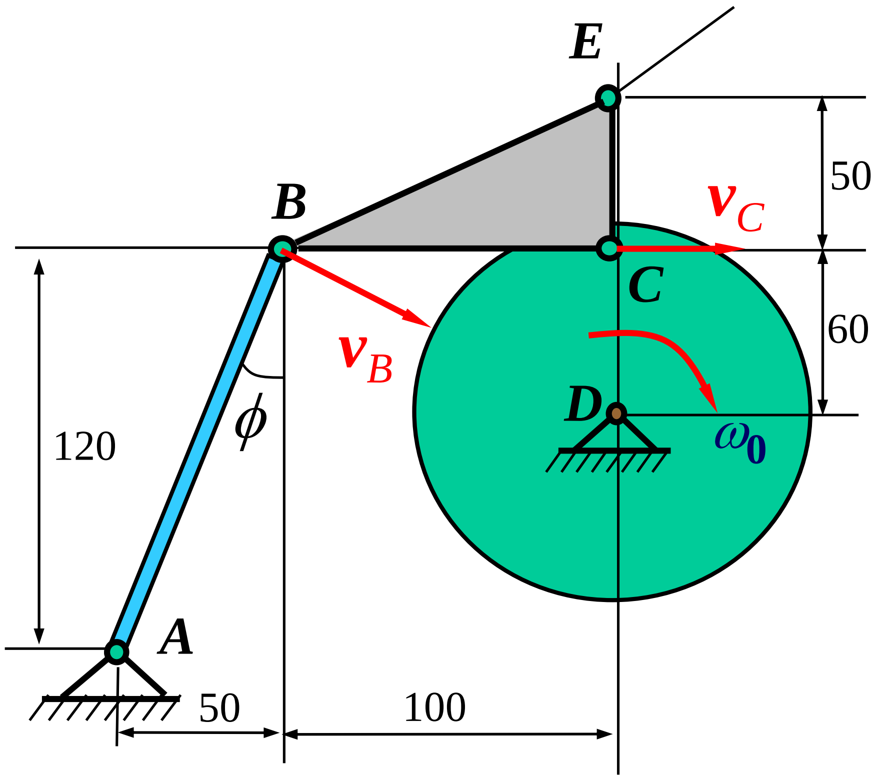
$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = b\sqrt{3\omega_1^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2}$$

$$= b\sqrt{4\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2}$$

$$\tan(\boldsymbol{v}_C, \boldsymbol{x}) = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} = \frac{-(\omega_1 + \omega_2)}{\sqrt{3}\omega_1}$$

思考 能否用速度投影定理？

例 图示一连杆机构，曲柄AB和圆盘CD分别绕固定轴A和D转动。BCE为三角形构件,B,C为销钉连接。设圆盘以匀速n_0=40r/min顺时针转动，尺寸如图。试求图示位置时曲柄AB的角速度ω_{AB}和构件BCE上点E的速度$\mathbf{v}_E$。



$$\cos\phi = \frac{120}{\sqrt{120^2+50^2}} = \frac{12}{13}, \phi = 22.6^\circ$$

解：轮D定轴转动

$$\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60} = 4.19 \quad \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

$$v_C = CD \cdot \omega_0$$

AB定轴转动

BCE 作平面运动

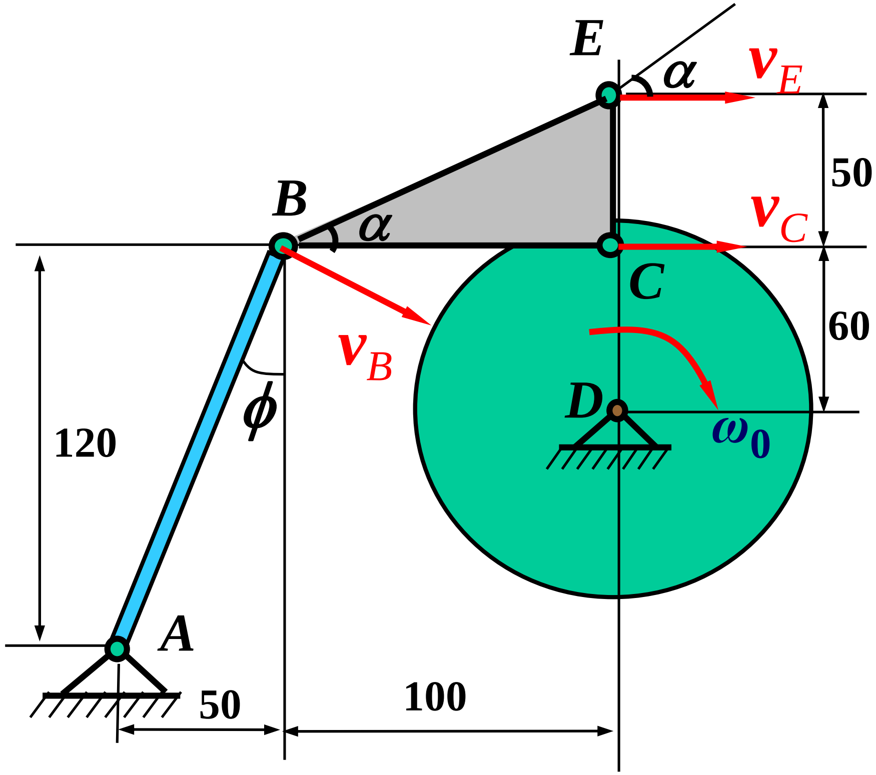
$$v_B \cos\phi = v_C$$

$$v_B = 272\mathrm{mm/s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB} = 2.09 \quad \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

(顺时针)

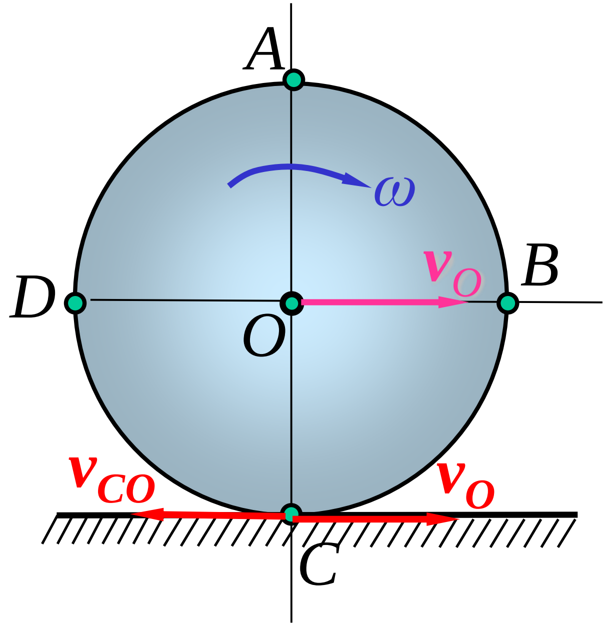
构件BCE上C点的速度$v_C \perp CE$，由速度投影定理可知$v_E \perp CE$。



$$v_B \cos(\alpha + \phi) = v_E \cos \alpha \qquad \alpha = \arctan \frac{CE}{BC} = 26.6^\circ$$

$$v_E = \frac{v_B \cos(\alpha + \phi)}{\cos \alpha} = 199\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$$ （水平向右）

例 如图所示，半径为R的车轮，沿直线轨道作无滑动的滚动，已知轮心O以匀速$\boldsymbol{v}_O$前进。求轮缘上A，B，C和D各点的速度。

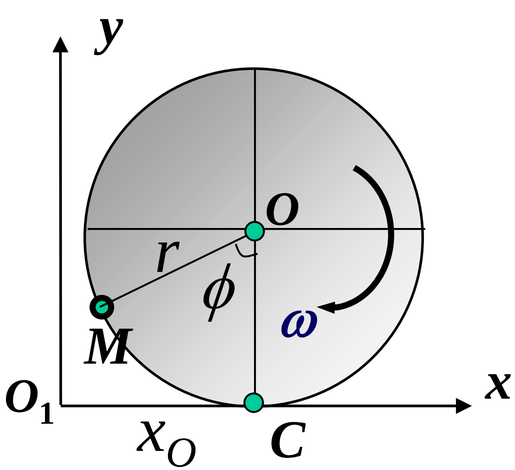


解：车轮作平面运动

O点为基点，C点为动点

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{CO}$$

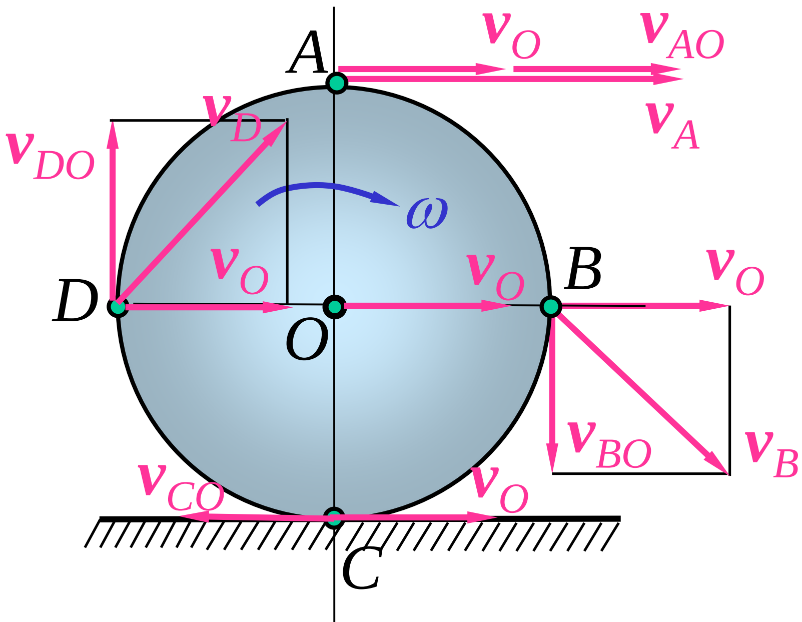
$$v_{CO} = R\omega$$

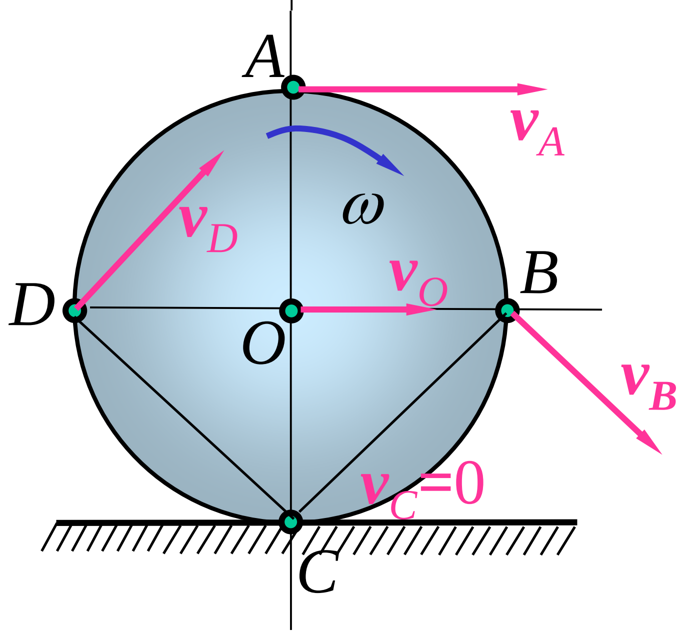


纯滚动的条件 $x_O = O_1C = \overset{\frown}{CM} = R\phi$

$$\boxed{\begin{gathered}\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}_O}{R} = \frac{v_O}{R} \\ \alpha = \dot{\omega} = \frac{a_O}{R}\end{gathered}}$$

$$v_C = 0$$





O为基点，各点的速度求得如下：

A点： $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{AO}$

$$v_{AO} = R\omega = v_O$$

$$v_A = 2v_O$$

B点： $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{BO}$

$$v_{BO} = R\omega = v_O$$

$$v_B = \sqrt{2}v_O$$

D点： $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{DO}$

$$v_{DO} = R\omega = v_O$$

$$v_D = \sqrt{2}v_O$$

思考 如果以C点为基点，求A、B、D各点速度时的特点？

3. 速度瞬心法

(1) 速度瞬心的定义

——某瞬时平面运动刚体上速度为零的点称为**瞬时速度中心**，简称为**速度瞬心**。

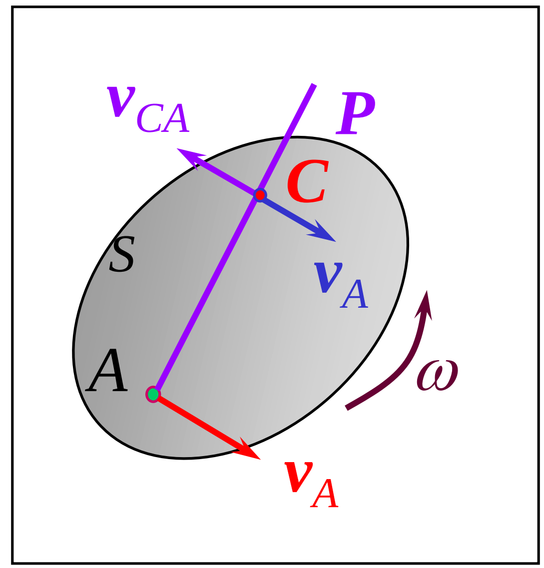
(2) 瞬心的存在

已知平面图形S上某点A的速度$\boldsymbol{v}_A$，平面图形的角速度ω。

速度为零的点可能在哪出现？

答：速度为零的点可能出现在$\boldsymbol{v}_A$的垂直线AP上。

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA}$$



$$v_c = v_A - AC \cdot \omega = 0$$

$$AC = \frac{v_A}{\omega}$$

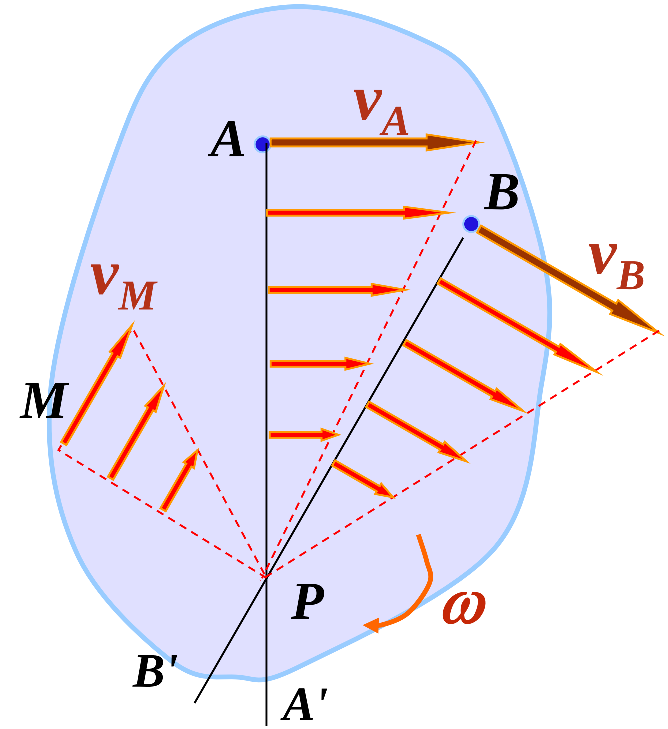
有结论:

1、速度瞬心客观存在

2、瞬时性—不同的瞬时有不同的速度瞬心;

3、唯一性—某一瞬时只有一个速度瞬心;

4、瞬时转动特性—平面图形在某一瞬时的运动都可以视为绕这一瞬时的速度瞬心作瞬时转动.



$$v_M = v_{MP} = MP \cdot \omega$$

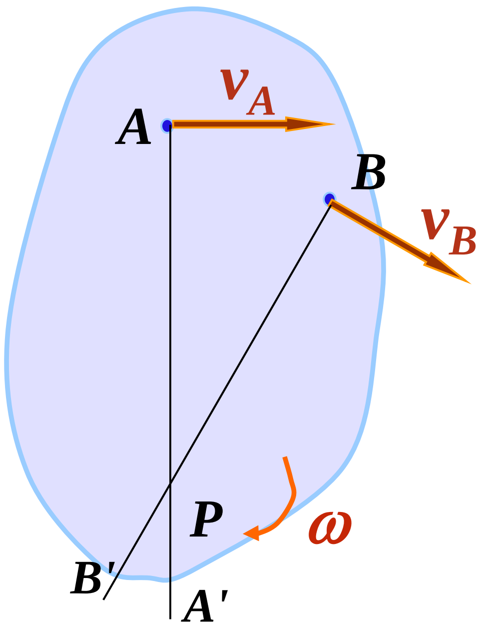
方向$\perp MP$，指向与ω转向一致。

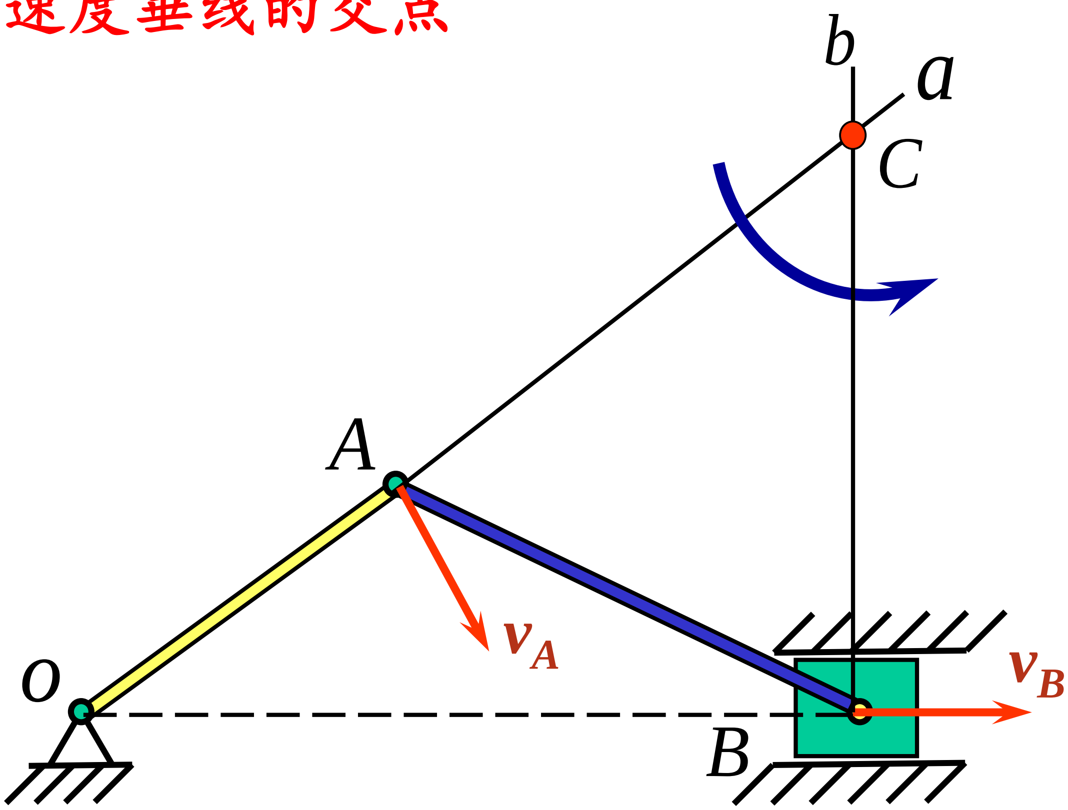
思考：与定轴转动的异同?

(3) 瞬心位置的确定

(a)已知图形内任两点A和B的速度的方向

速度瞬心是两点速度垂线的交点

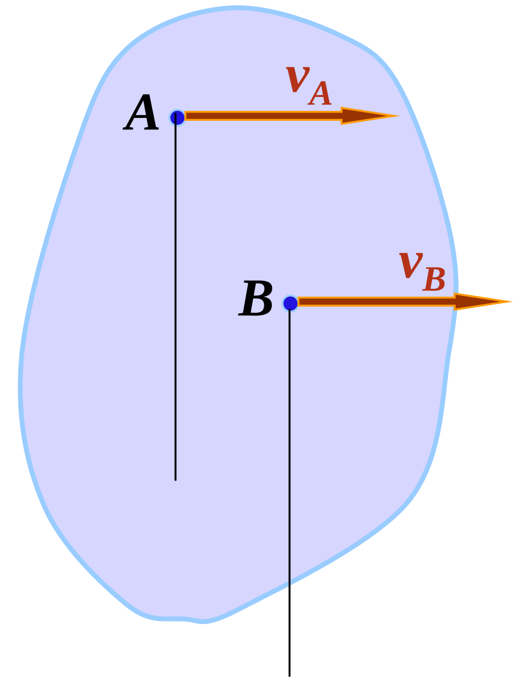




(b)某一瞬时，图形上A、B两点的速度相等，且二者都不垂直于两点的连线

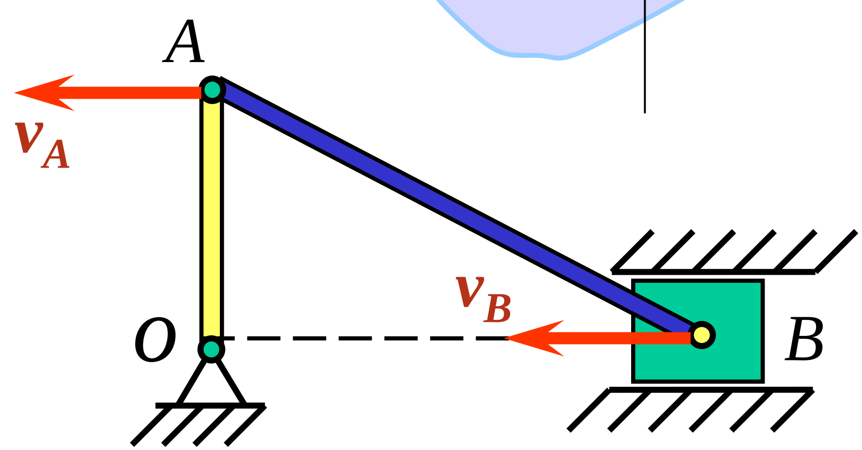
速度瞬心在无穷远处

此时平面运动刚体的角速度 $\omega = \dfrac{v_A}{\infty} = 0$

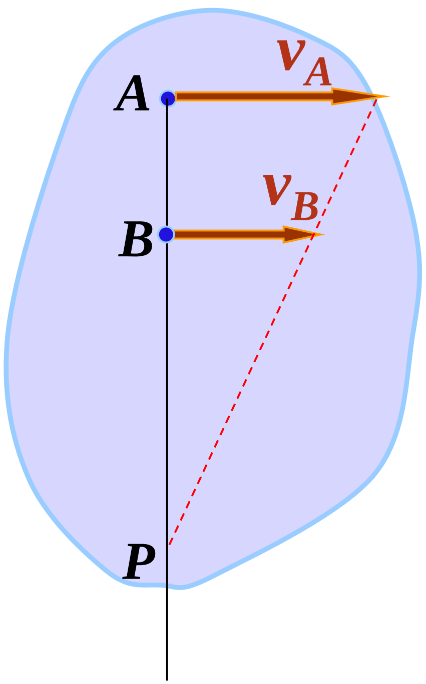


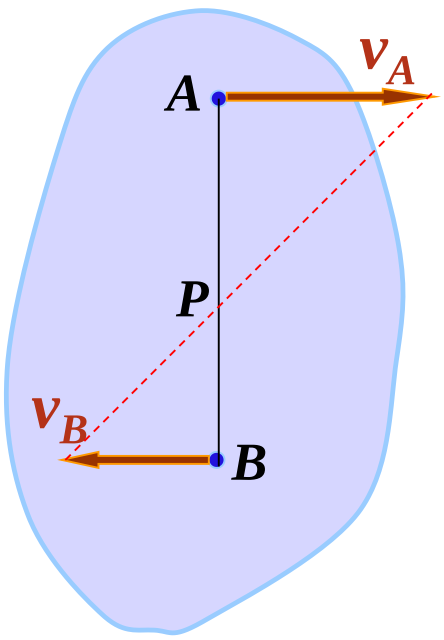
该瞬时各点速度均平行，且大小相等，其分布与刚体平动时速度一样，这种情形称为瞬时平动。

$\omega = 0$ $\alpha \neq 0$



(c)已知图形上两点A和B的速度相互平行，且速度的方向垂直于两点的连线AB。

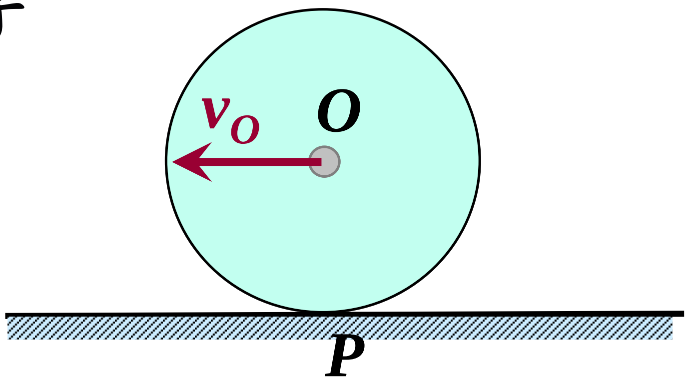




$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}$$

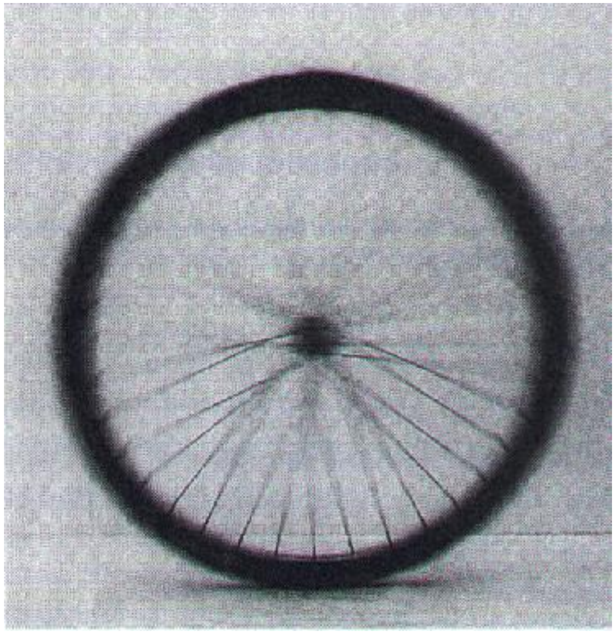
(d)沿一固定平面做纯滚动的轮子

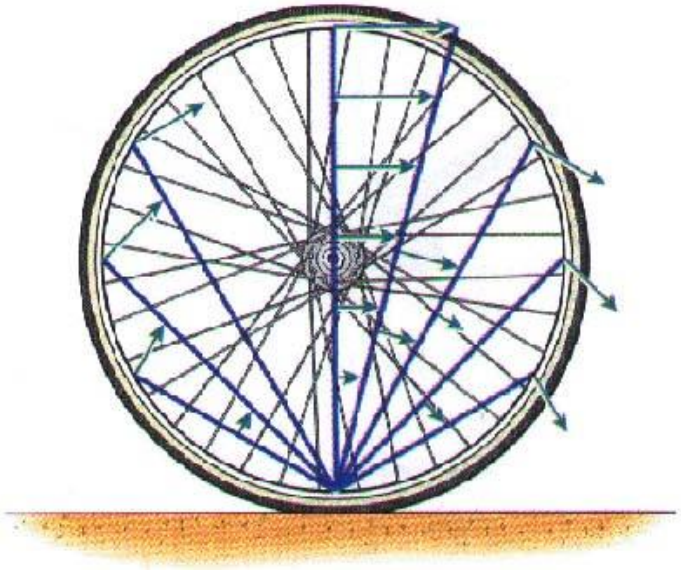
接触点即为速度瞬心



思考：

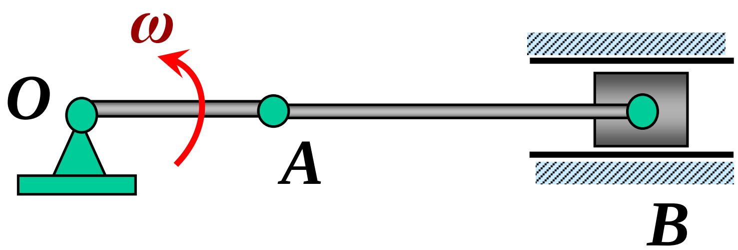
运动着的自行车轮子上面的辐条为什么比下面的模糊？

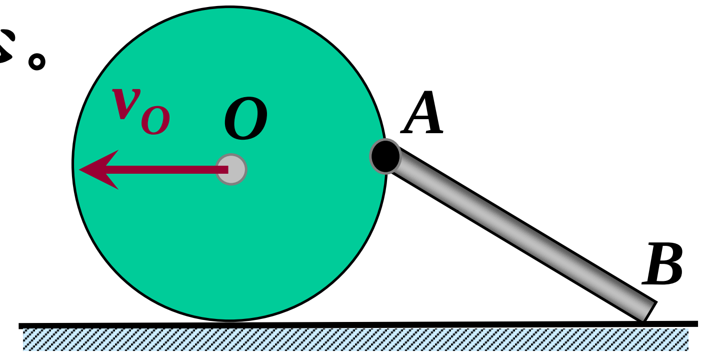


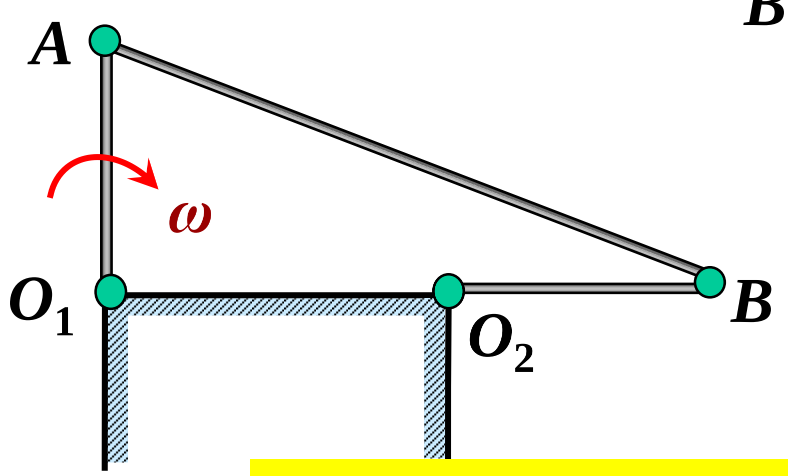


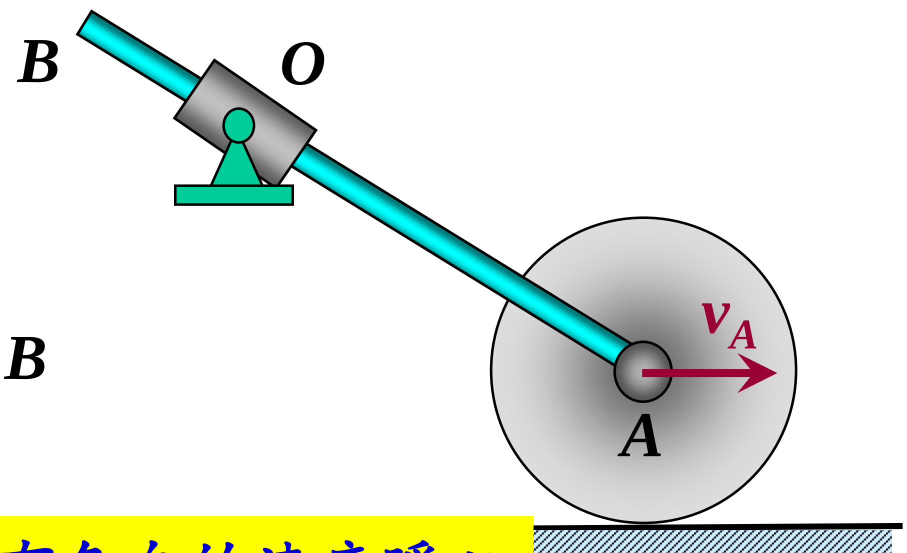
速度瞬心的确定：只滚不滑接触点
速度垂线找交点

找出下列平面运动刚体的速度瞬心。





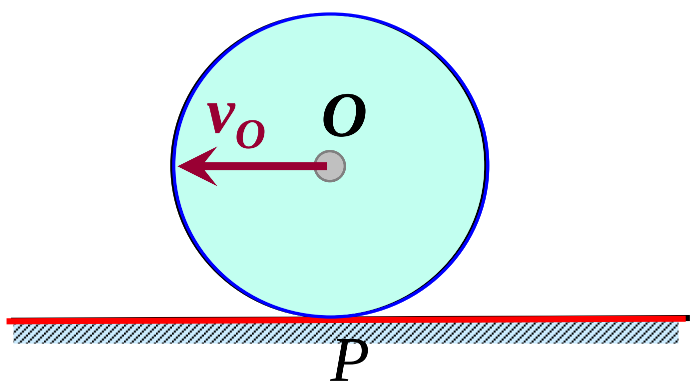


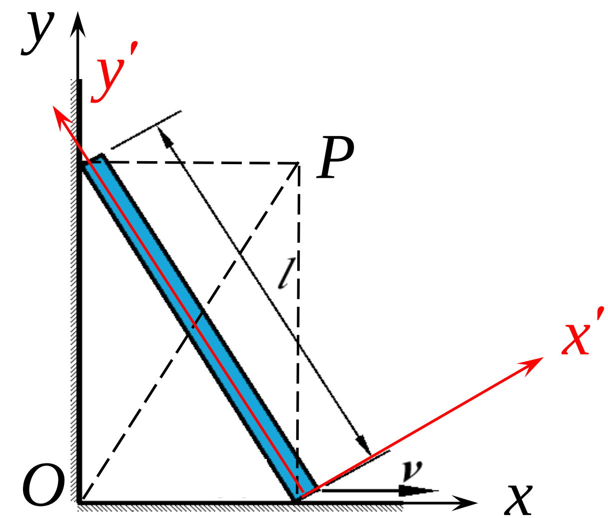


各平面运动刚体有各自的速度瞬心

注意

- 速度瞬心速度为零；但速度瞬心具有加速度。
- 瞬时平动与平动的区别：瞬时平动各点的速度相同，但是加速度不同。
- 速度瞬心的定轨迹与动轨迹。





定轨迹 $x^2 + y^2 = l^2$

动轨迹 $(x')^2 + (y' - \frac{l}{2})^2 = (\frac{l}{2})^2$

例 已知四连杆机构中，$O_1B=l,\ AB=\dfrac{3}{2}l,\ AD=DB$

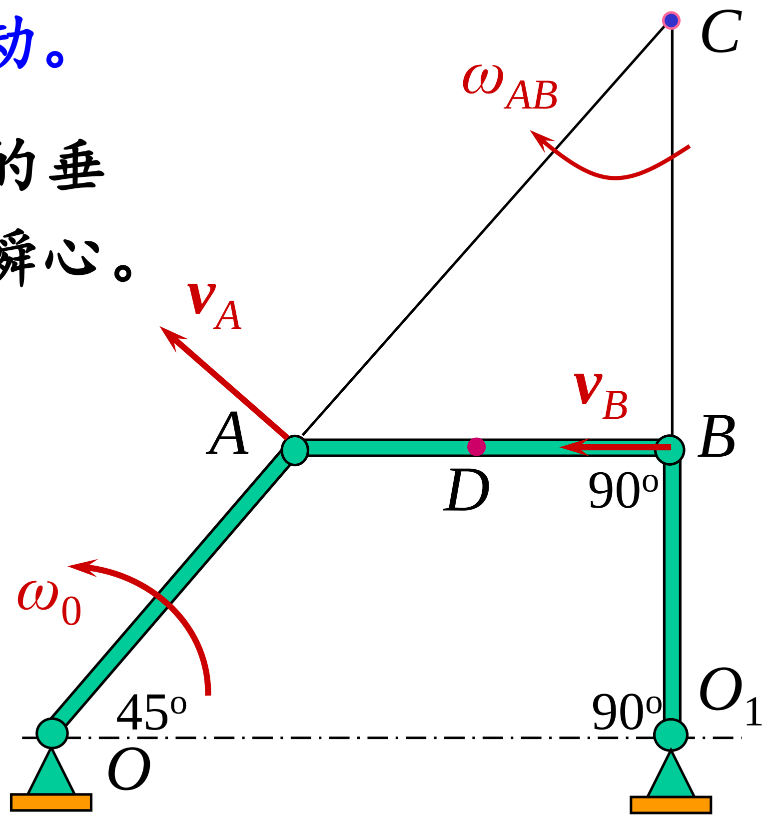
OA以角速度ω_0绕O轴转动。求（1）B和D点的速度；（2）AB杆的角速度。

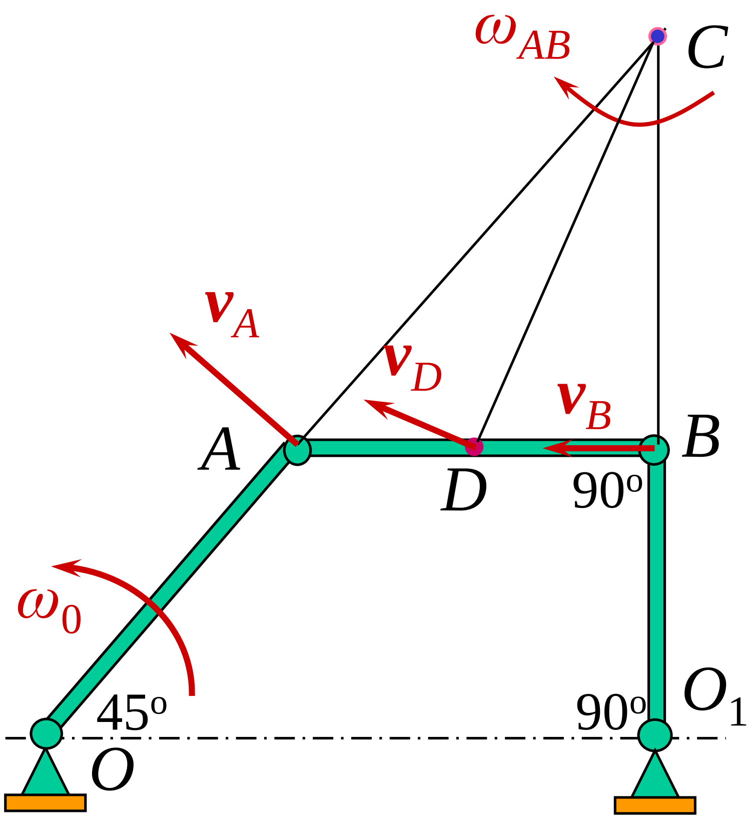
解：杆OA和O_1B都作定轴转动。

杆AB作平面运动，作$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$的垂线相交于C，即杆AB的速度瞬心。

$$OA=\sqrt{2}l\ ,\ AB=BC=\frac{3}{2}l$$

$$AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}l\ ,\ DC=\frac{3\sqrt{5}}{4}l$$





$$v_A = OA \cdot \omega_0 = \sqrt{2} l \omega_0$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC} = \frac{\sqrt{2} l \omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2} l} = \frac{2}{3} \omega_0$$

顺时针转向

$$v_B = BC \cdot \omega_{AB}$$

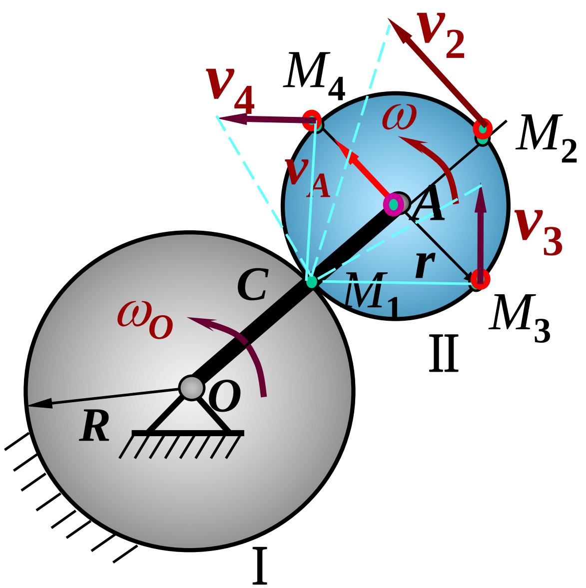
$$= \frac{3}{2} l \times \frac{2}{3} \omega_0 = l \omega_0$$

$$OA = \sqrt{2} l \text{ , } AB = BC = \frac{3}{2} l$$

$$AC = \frac{3\sqrt{2}}{2} l \text{ , } DC = \frac{3\sqrt{5}}{4} l$$

$$v_D = DC \cdot \omega_{AB} = \frac{3\sqrt{5}}{2} l \times \frac{2}{3} \omega_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} l \omega_0$$

例 如图所示，节圆半径为r的行星齿轮II由曲柄OA带动在节圆半径为R的固定齿轮I上作无滑动的滚动。已知曲柄OA以匀角速度ω_O转动。求在图示位置时，齿轮II节圆上M_1，M_2，M_3和M_4各点的速度。图中线段M_3M_4垂直于线段M_1M_2。



解：齿轮II作平面运动，其速度瞬心在二轮接触点C处。

$$v_A = OA \cdot \omega_O = (R+r)\cdot\omega_O = AC\cdot\omega = r\cdot\omega$$

轮II的角速度 $\omega = \dfrac{R+r}{r}\omega_O$

$$v_1 = v_C = 0\ ,$$

$$v_2 = CM_2\cdot\omega = 2(R+r)\omega_O$$

$$v_3 = v_4 = CM_3\cdot\omega = \sqrt{2}(R+r)\omega_O\ ,$$

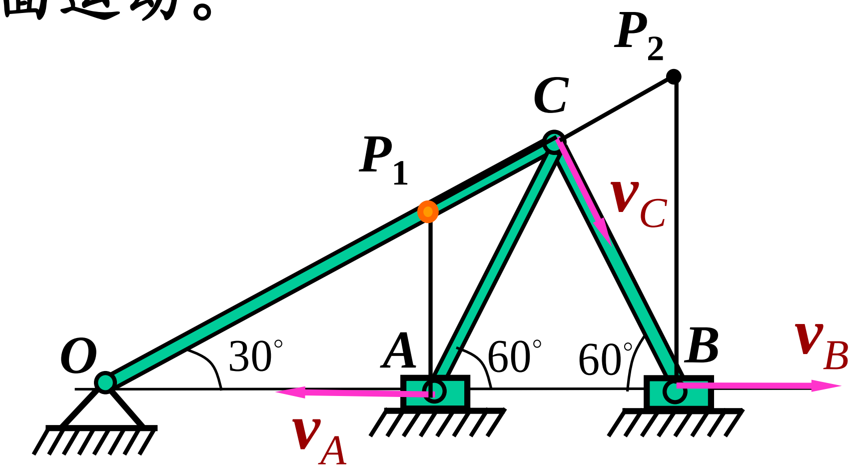
例 在双滑块摇杆机构中，滑块A和B可沿水平导槽滑动，摇杆OC可绕定轴O转动，连杆CA和CB可在图示平面内运动，且$CB=l$。当机构处于图所示位置时滑块A的速度$\boldsymbol{v}_A$，试求该瞬时滑块B的速度$\boldsymbol{v}_B$以及连杆CB的角速度ω_{CB}。

解：连杆AC 和BC 均作平面运动。

连杆AC速度瞬心在P_1

$$P_1A=P_1C \qquad v_C = v_A$$

连杆BC速度瞬心在P_2



$$P_2C = CB\cdot\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

$$\omega_{CB} = \frac{v_C}{P_2C} = \frac{\sqrt{3}}{l}v_A$$

（逆时针）

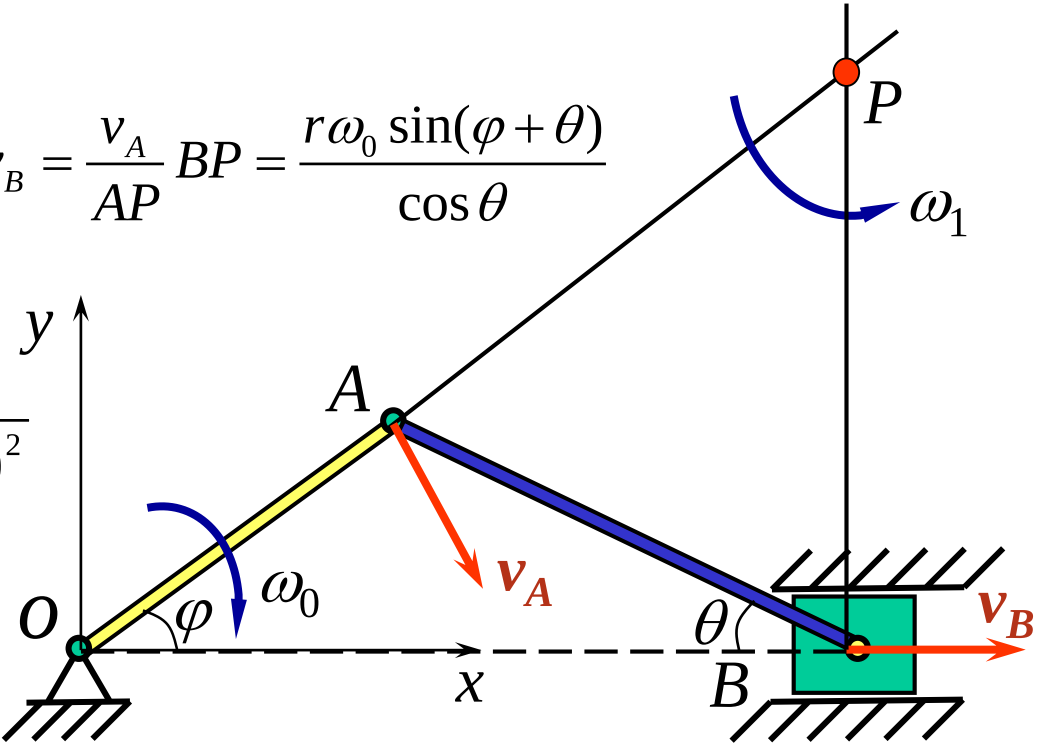
$$v_B = P_2B\cdot\omega_{CB} = \frac{2}{\sqrt{3}}l\times\frac{\sqrt{3}}{l}v_A = 2v_A$$

（水平向右）

与解析法比较 曲柄滑块机构，曲柄OA长r，以匀角速度ω_0转动；连杆AB长为l，试求曲柄与水平夹角为φ时滑块B的速度$\boldsymbol{v}_B$以及连杆的角速度ω_1。

速度瞬心法

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP} = \frac{r\omega_0\cos\varphi}{l\cos\theta} \qquad v_B = \frac{v_A}{AP}BP = \frac{r\omega_0\sin(\varphi+\theta)}{\cos\theta}$$



解析法

$$x_B = r\cos(\omega_0 t) + \sqrt{l^2 - (r\sin\omega_0 t)^2}$$

$$\theta = \arcsin(\frac{r}{l}\sin\omega_0 t)$$

比较：1. 物理概念， 数学推导。
2. 已知条件要求不同。
3. 瞬时分析，全过程描述。

§8-3 平面运动的加速度分析

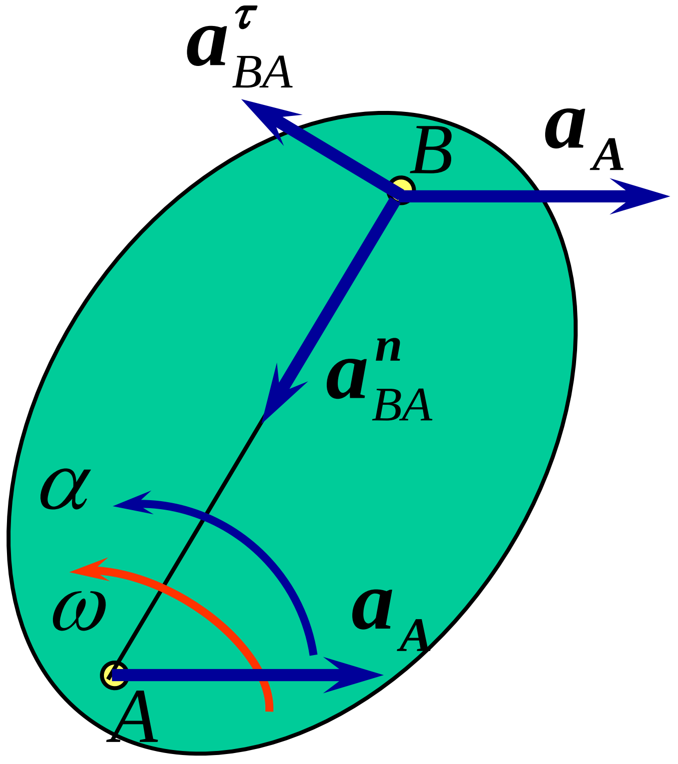
$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^\tau + \boldsymbol{a}_r^n$$

基点—A点　　　动点—B点

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^\tau + \boldsymbol{a}_{BA}^n$$

$$a_{BA}^\tau = AB \cdot \alpha$$

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega^2$$



基点法求点的加速度的基本公式

$$\boxed{\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^\tau + \boldsymbol{a}_{BA}^n}$$

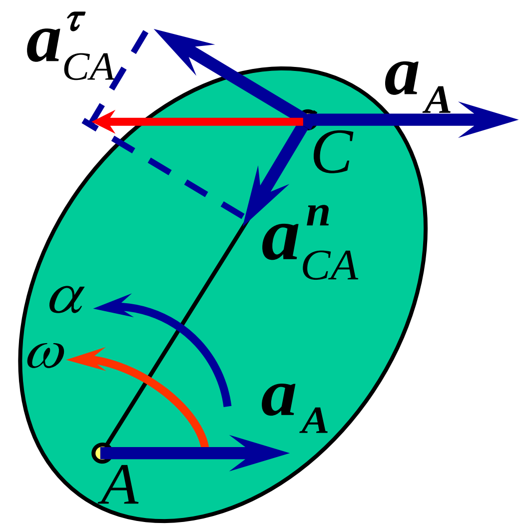
平面图形上任意一点的加速度，等于基点的加速度与这一点对于以基点为坐标原点的平移系的相对切向加速度和法向加速度的矢量和。

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

瞬时加速度中心

$$\boldsymbol{a}_C = 0 \qquad -\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{CA}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{CA}^{n}$$

$$AC = \frac{a_A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}}$$

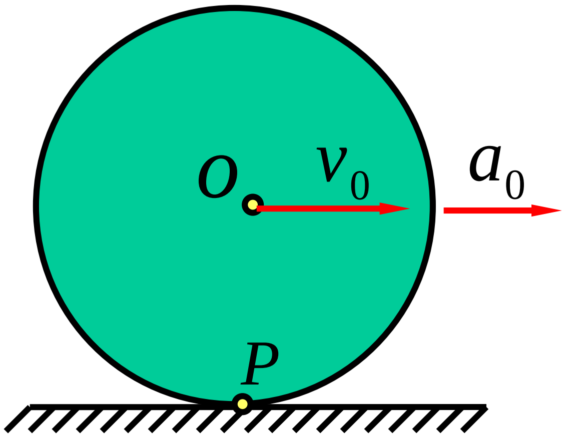


例 车轮沿直线纯滚动。已知半径为R，轮心O的速度为$\boldsymbol{v}_0$，加速度为$\boldsymbol{a}_0$，求图示瞬间车轮上速度瞬心P点的加速度。

解：

$$\omega = \frac{v_0}{R}$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{a_0}{R}$$



轮心O为基点，P为动点

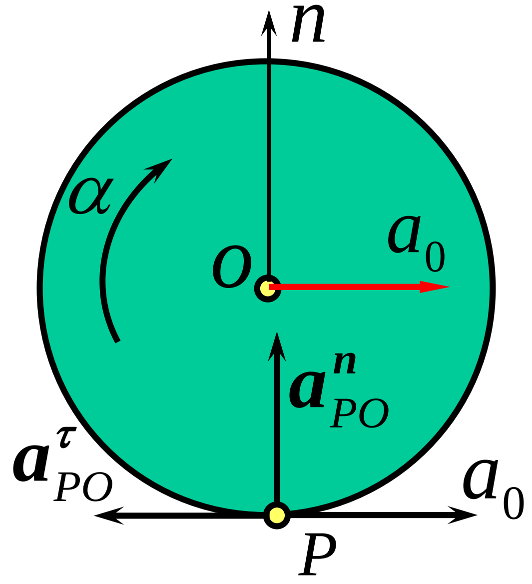
$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{PO}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{PO}^{n}$$

$$a_O = a_0$$

$$a_{PO}^{\tau} = R\cdot\alpha = a_0$$

$$a_{PO}^{n} = R\cdot\omega^2 = \frac{v_0^2}{R}$$

$$a_P = \frac{v_0^2}{R}$$

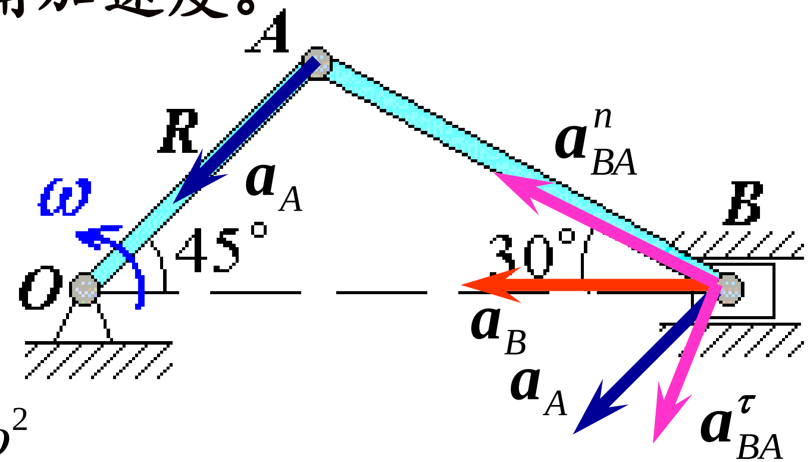


说明：1. 速度瞬心与加速度瞬心一般不重合，其加速度不为零。

2. 圆轮沿直线或圆弧轨道纯滚动时，各点轨迹复杂，只有圆心轨迹确定。

3. 运动关系恒成立时才可求导。

例 曲柄滑块机构。已知：曲柄长R, ω=const。求图示位置时的滑块加速度$\boldsymbol{a}_B$及AB杆的角加速度。



解：A为基点，B为动点

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^\tau + \boldsymbol{a}_{BA}^n$$

$$a_A = R\omega^2$$

$$a_{BA}^n = AB\omega_{AB}{}^2 = \sqrt{2}R(\frac{1}{\sqrt{3}}\omega)^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}R\omega^2$$

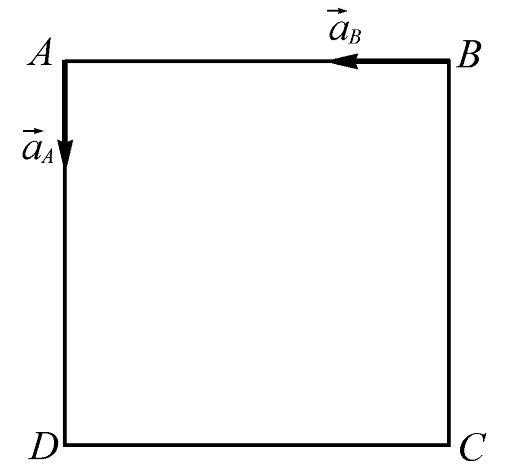
向BA方向投影

$$a_B\cos 30^o = a_A\cos 75^o + a_{BA}^n \Rightarrow a_B = 0.84R\omega^2$$

向与AB垂直的方向投影 $a_B\sin 30^o = a_A\sin 75^o + a_{BA}^\tau$

$$a_{BA}^\tau = -0.54R\omega^2 \qquad \alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = -0.38\omega^2 \quad \text{逆时针}$$

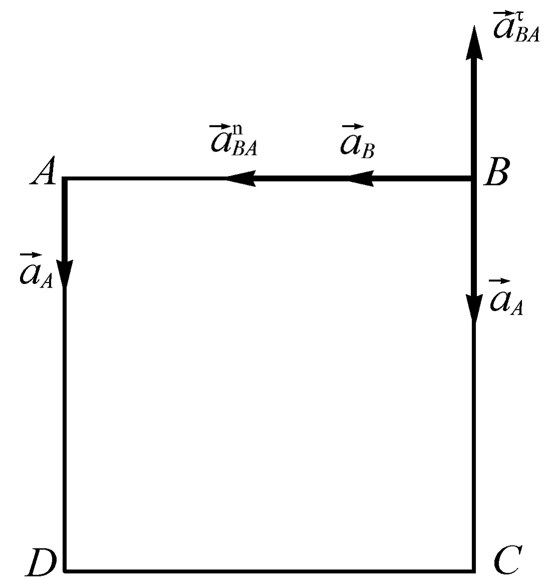
例 正方形板的边长L=10cm，在图示平面内运动。已知某瞬时两顶点的加速度a_A=a_B=10 cm/s^2，指向如图。试求此瞬时板的角速度与角加速度的大小。



解：A为基点，B为动点

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

将上式分别投影于BA、BC轴



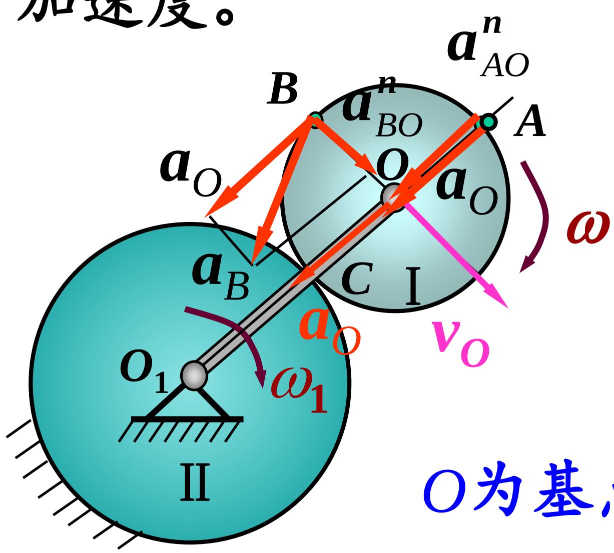
$$a_B = a_{BA}^{\mathrm{n}} = AB\omega^2$$

$$0 = a_A - a_{BA}^{\mathrm{t}} \qquad a_A = a_{BA}^{\mathrm{t}} = AB\alpha$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_B}{AB}} = 1\mathrm{rad/s}$$

$$\alpha = \frac{a_{BA}^{\mathrm{t}}}{AB} = \frac{a_A}{AB} = 1\mathrm{rad/s}^2$$ 逆时针

例 如图所示，在外啮合行星齿轮机构中，杆$O_1O=l$，以匀角速度ω_1绕O_1轴转动。大齿轮Ⅱ固定，行星轮Ⅰ半径为r，在轮Ⅱ上只滚不滑。A和B是轮缘上的两点，A点在O_1O的延长线上，B点在垂直于O_1O的半径上。试求点A和B的加速度。



解：O点的速度、加速度为

$$v_O = l\cdot\omega_1 \qquad a_O = l\cdot\omega_1^2$$

轮Ⅰ的速度瞬心在C点

$$\therefore \omega = \frac{v_O}{r} = \frac{l}{r}\omega_1 \qquad \alpha = \dot{\omega} = 0$$

O为基点，A为动点

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{AO}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{AO}^{n}$$

$$a_{AO}^{\tau} = r\alpha = 0$$

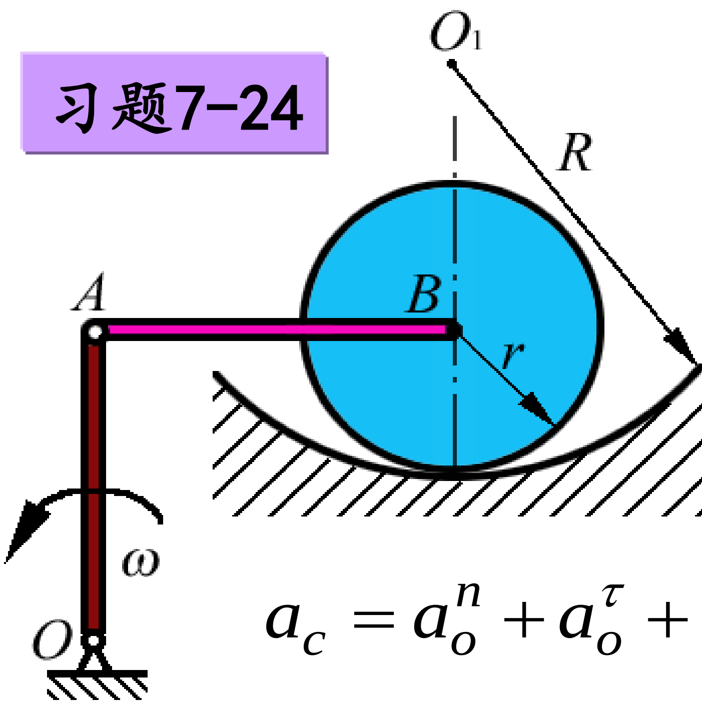
$$a_{AO}^{n} = r\omega^2 = \frac{l^2}{r}\omega_1^2$$

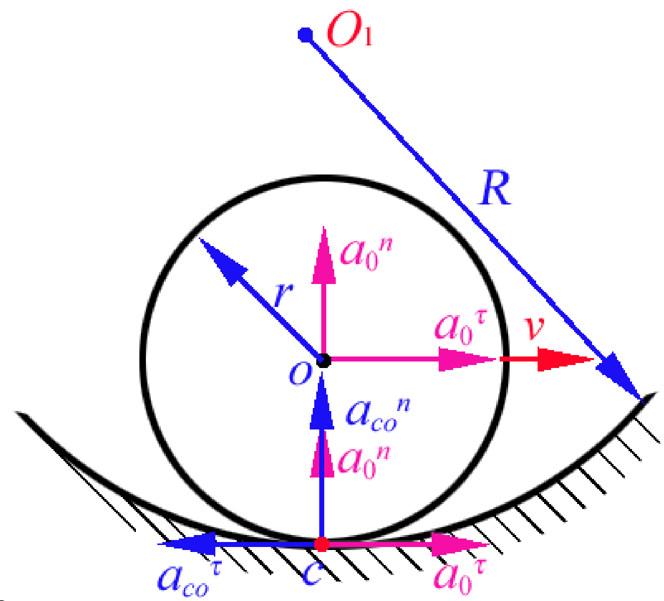
$$a_A = a_O + a_{AO}^n = l\omega_1^2 + \frac{l^2}{r}\omega_1^2 = l\omega_1^2(1+\frac{l}{r})$$

$$a_B = \sqrt{a_O^2 + (a_{BO}^n)^2} = l\omega_1^2\cdot\sqrt{1+(\frac{l}{r})^2}$$

分析例：已知如图平面机构：R, r, ω，$OA=AB=l$。求在图示瞬时B点加速度。该瞬时AB水平，OA垂直。

习题7-24





$$a_c = a_o^n + a_o^\tau + a_{co}^\tau + a_{co}^n$$

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad \alpha = \frac{a_o^\tau}{r}$$

$$a_{co}^\tau = r\alpha = a_o^\tau$$

$$a_{co}^n = r\omega^2$$

$$a_o^n \neq (R-r)\omega^2$$

$$a_o^n = \frac{v^2}{R-r} = \frac{r^2\omega^2}{R-r}$$

$$a_c = a_{co}^n + a_o^n$$

见书P126

运动学综合应用

平面机构运动分析：机构中各构件的整体运动

各构件连接点与重合点的运动

◆点的一般运动——已知条件适用于全过程，得到的是物理量与时间的函数关系，直接建立运动方程.

◆点的复合运动——某瞬时位置的瞬时运动量关系，已知条件是某个位置的瞬时量. 刚体平面运动同样.

● 点的复合运动—— 一般为两个构件的接触点的运动量之间的关系. 同一点相对不同参考系的运动量之间的关系.

● 刚体平面运动——同一刚体上不同点的运动量之间的关系.

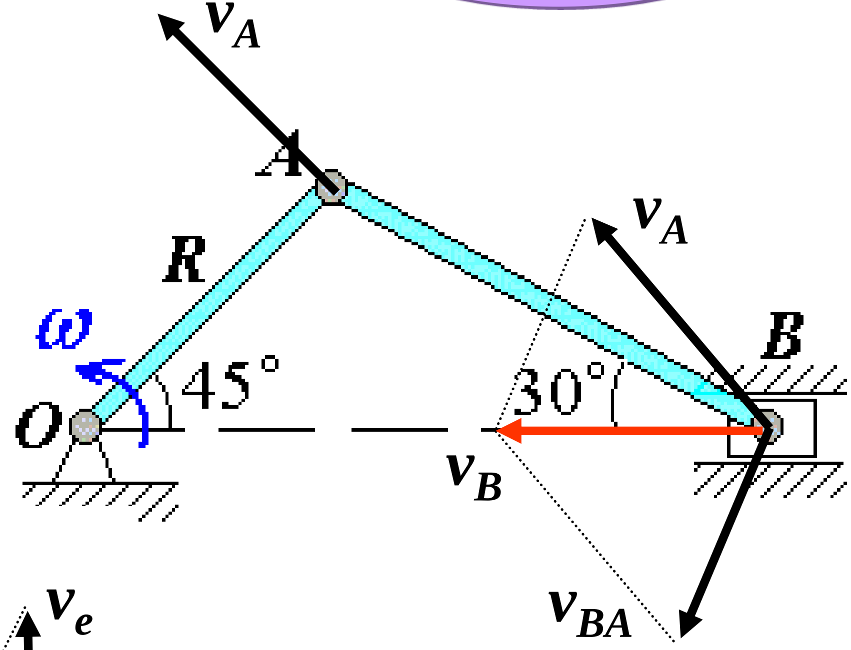
同一问题可以有不同解法，或需要各种方法的综合应用

例 已知：R, ω。求图示瞬时(位置)的v_B

方法的比较

解1：以A为基点, B为动点

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

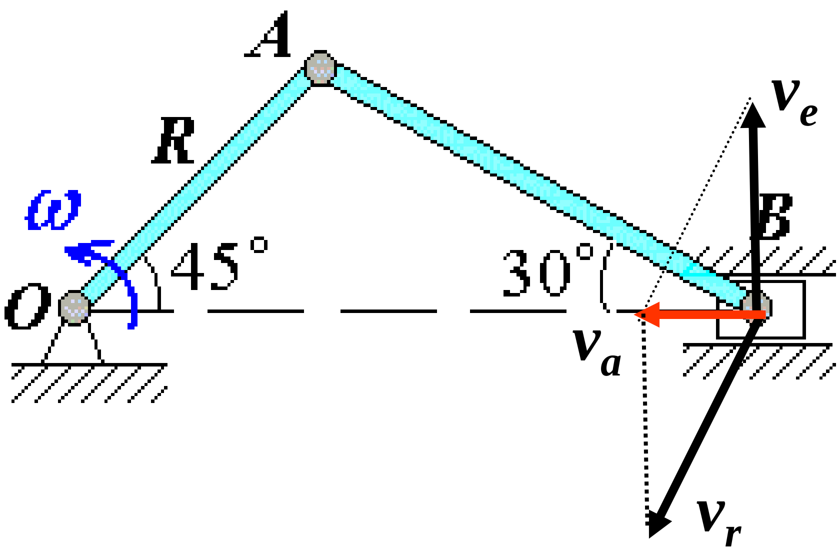


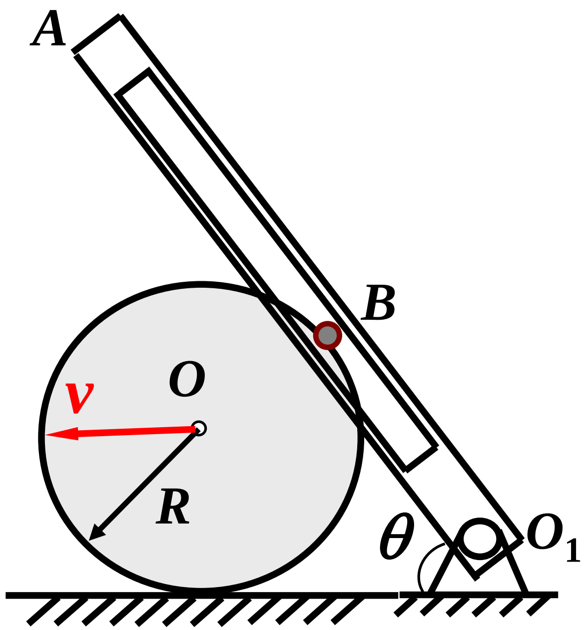
解2： 动点：B　动系：OA杆

绝对：直线　相对：圆周

牵连：转动

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

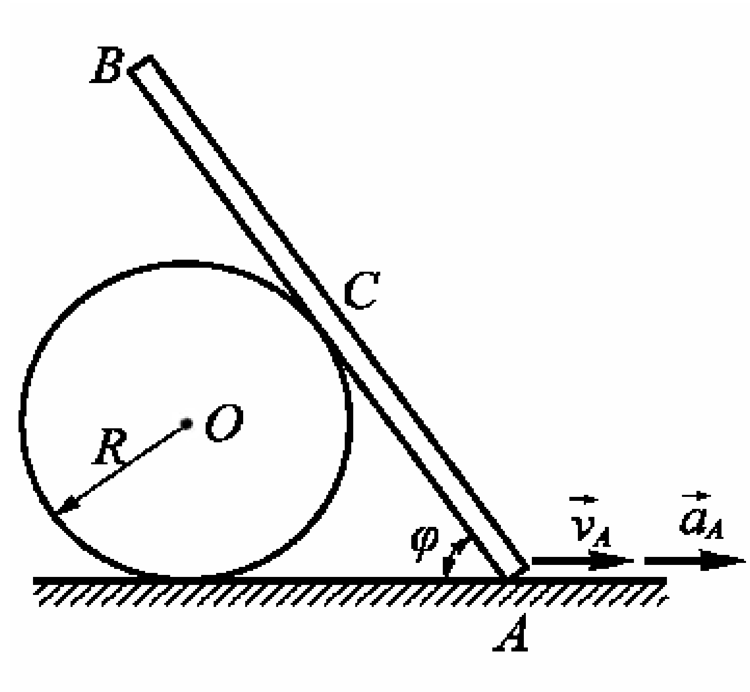




P132习7-32

思路: 从轮做平面运动可得销钉的B点速度和加速度, 再对销钉B利用复合运动方法分析, 求出摇杆上和B重合点的速度和加速度, 从而得到结果.

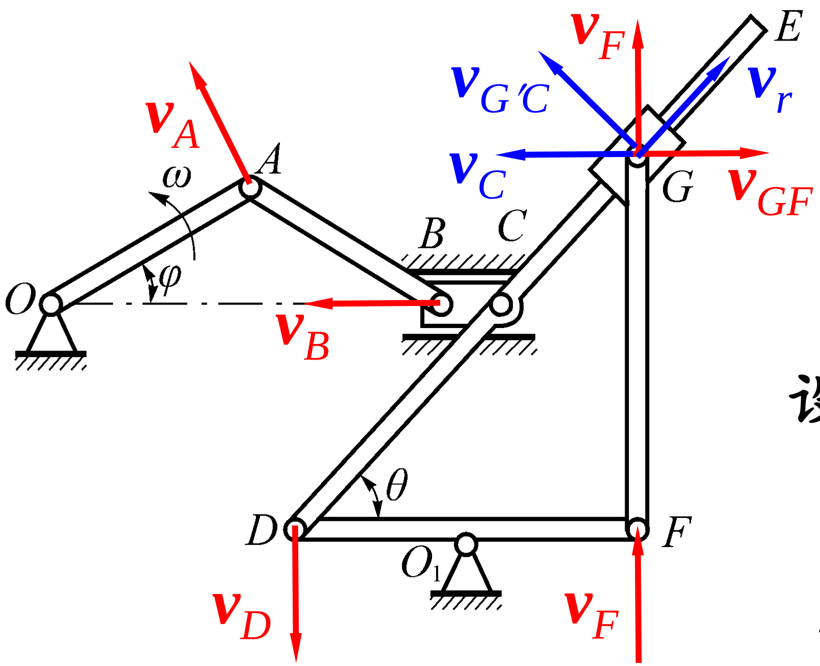
方法的选用



P128习7-11

例 平面机构如图所示。已知：$OA=AB=r$，$DC=\sqrt{2}r$，杆DE穿过套筒G, $DF=FG=2r$，O_1为DF的中点。在图示位置时，$\varphi=30°$，$\theta=45°$，DF水平，杆FG铅垂，杆OA的角速度为ω。试求该瞬时套筒G的速度。

分析思路：



$$v_A = r\omega \qquad v_B = v_A = v_C$$

$$\omega_{DE} = \frac{v_C}{O_1C} = \omega \qquad v_D = v_F = r\omega$$

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_F + \boldsymbol{v}_{GF} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

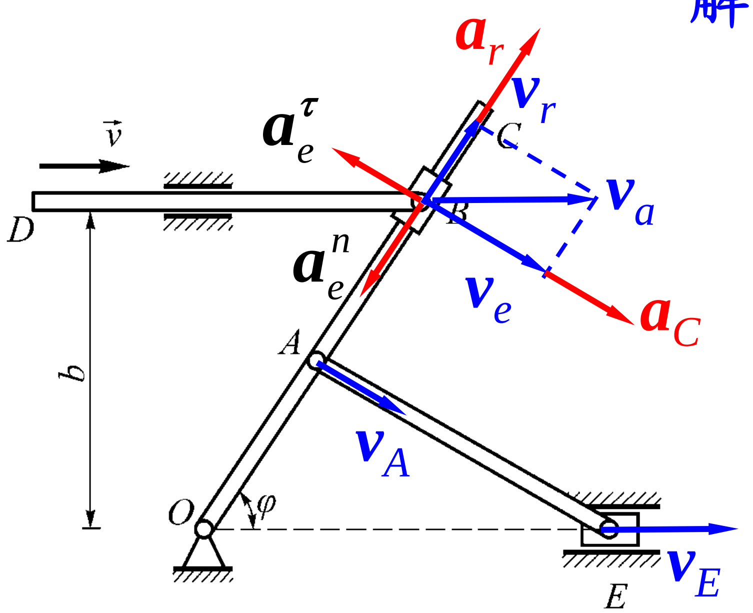
设杆DE上与G重合之点为G'

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_{G'} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{G'C}$$

$$\boldsymbol{v}_F + \boldsymbol{v}_{GF} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{G'C} + \boldsymbol{v}_r$$

例 机构如图所示，已知：b，$OA=e$。当 $\varphi=60°$ 时，$AE\perp OC$，杆DB的速度为v，加速度$a_{DB}=0$。试求图示瞬时滑块E的速度和杆OC的角加速度。

解：动点：滑块B，动系：固连于OC



$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

$$v_e=v_a\sin\varphi \qquad v_r=v_a\cos\varphi$$

$$\omega_{OC}=\frac{v_e}{OB}=\frac{3v}{4b} \quad (顺钟向)$$

AE作平面运动

$$v_A=OA\cdot\omega_{OC}=v_E\cos(90°-\varphi)$$

$$v_E=\frac{v_A}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{3}ev}{2b}$$

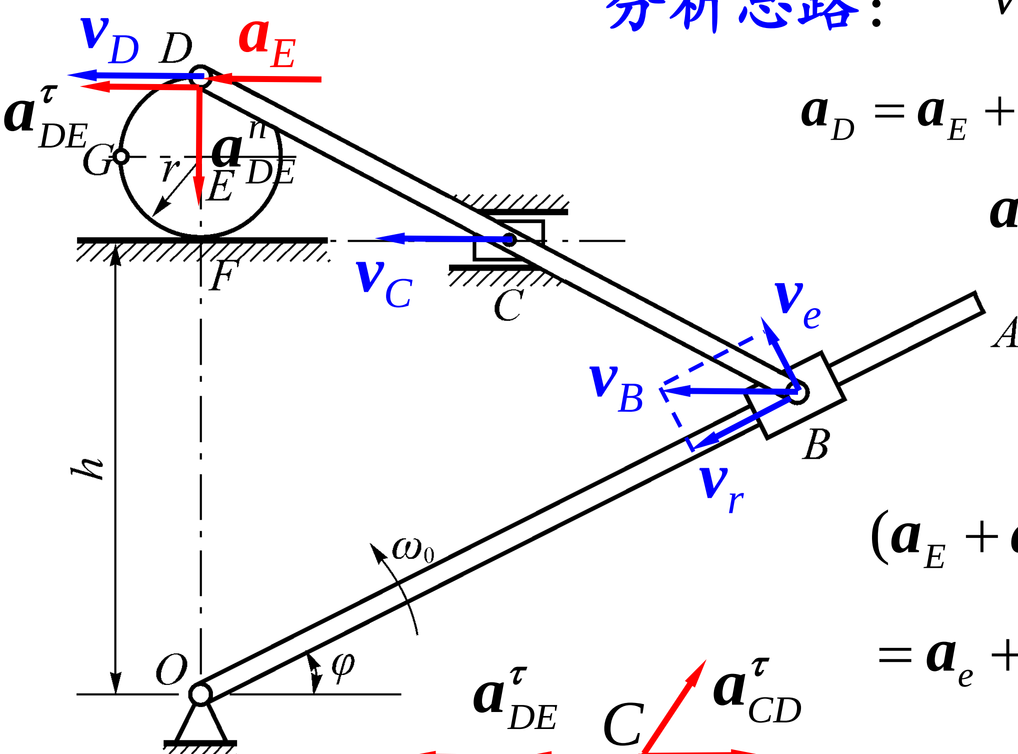
$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e^\tau+\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C$$

$$a_C=2\omega_{OC}v_r=\frac{3v^2}{4b} \qquad a_e^\tau-a_C=0$$

$$\alpha_{OC}=\frac{a_e^\tau}{OB}=\frac{3\sqrt{3}v^2}{8b^2} \quad (逆钟向)$$

习题7-34

例 平面机构如图所示。已知：半径$r=10$ cm，$h=60$cm，$BD=80$ cm，C为BD杆中点，滚子沿水平面作纯滚动。在图示位置时，$\varphi=30°$，杆OA的角速度$\omega_0=2$rad/s，角加速度$\alpha_0=0$。试求该瞬时：点G的速度；滚子的角加速度。



分析思路：

$$v_B=v_C=v_D \qquad \boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{a}_D=\boldsymbol{a}_E+\boldsymbol{a}_{DE}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{DE}^{n} \qquad a_E=a_{DE}^{\tau}=r\alpha$$

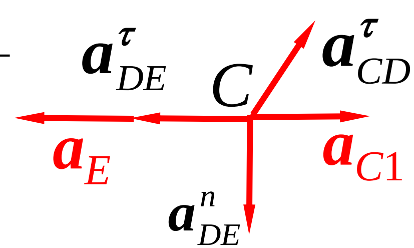
$$\boldsymbol{a}_{C1}=(\boldsymbol{a}_E+\boldsymbol{a}_{DE}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{DE}^{n})+\boldsymbol{a}_{CD}^{\tau}$$

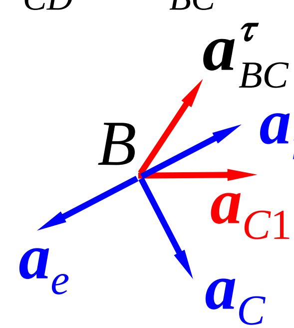
$$a_{CD}^{\tau}\cos 30^{\circ}-a_{DE}^{n}=0$$

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_{C1}+\boldsymbol{a}_{BC}^{\tau}$$

$$(\boldsymbol{a}_E+\boldsymbol{a}_{DE}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{DE}^{n})+\boldsymbol{a}_{CD}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{BC}^{\tau}$$

$$=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C$$





小结

三种求速度方法的比较：

基点法—基本方法，某一速度方位未知时

速度投影定理—求速度与尺寸无关

速度瞬心法—求速度和角速度

机构运动分析：动点有3个自由度；刚体有6个自由度。

平面机构：平动刚体2个自由度；转动刚体1个自由度；

平面运动刚体3个自由度。

复合运动-----一种运动分析的方法。

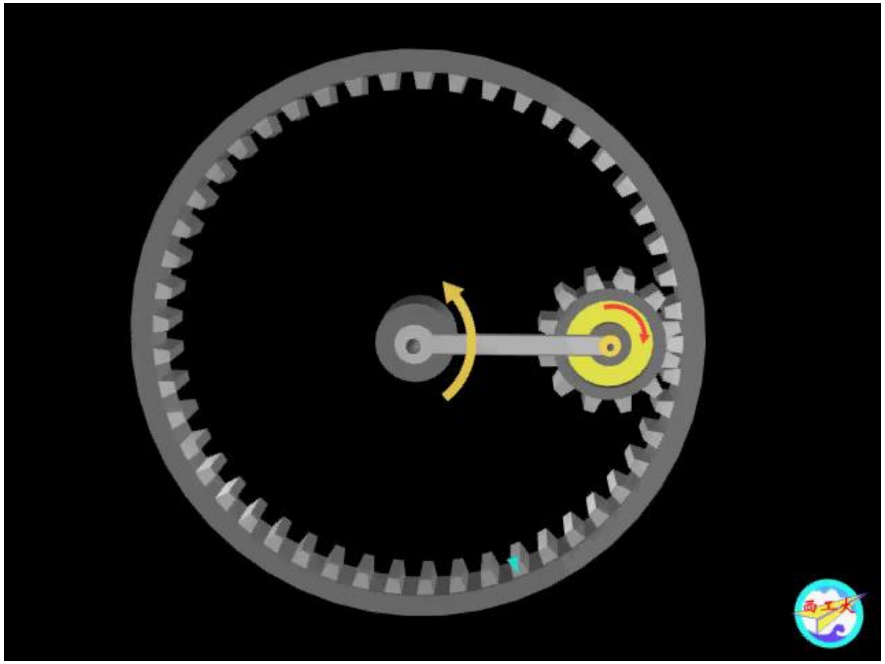
点的复合运动　　绝对运动 $\Longleftrightarrow$ 相对运动+牵连运动

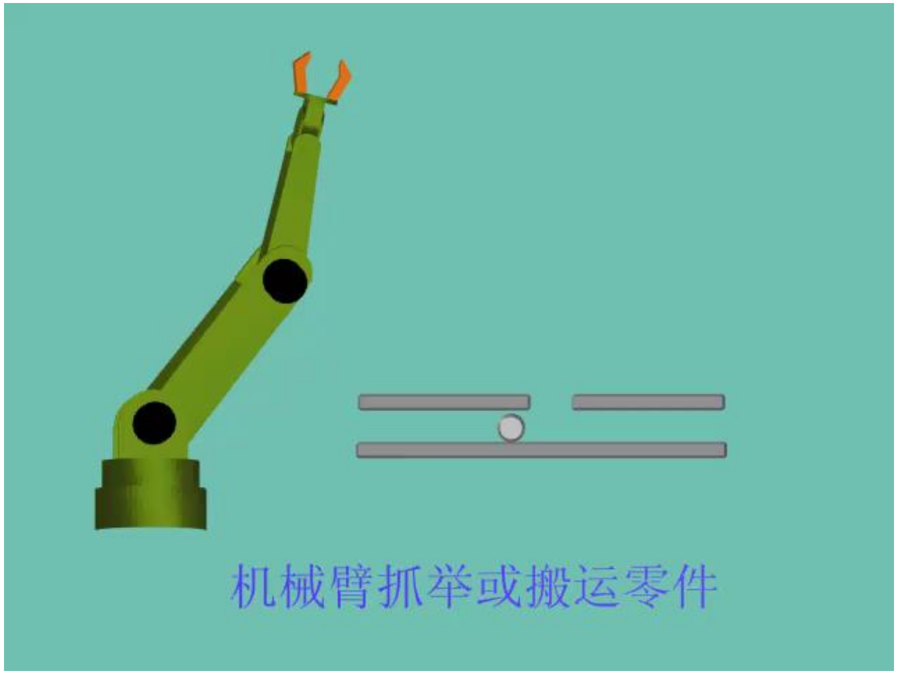
刚体的复合运动　　平面运动 $\Longleftrightarrow$ 随基点平动+绕基点转动

§8-4　刚体绕平行轴转动的合成

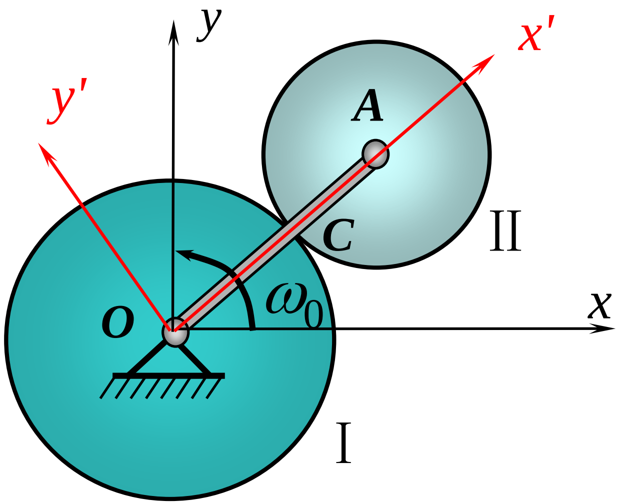
刚体平面运动 ⟷ 转动+转动？

需要引入什么样的动系？





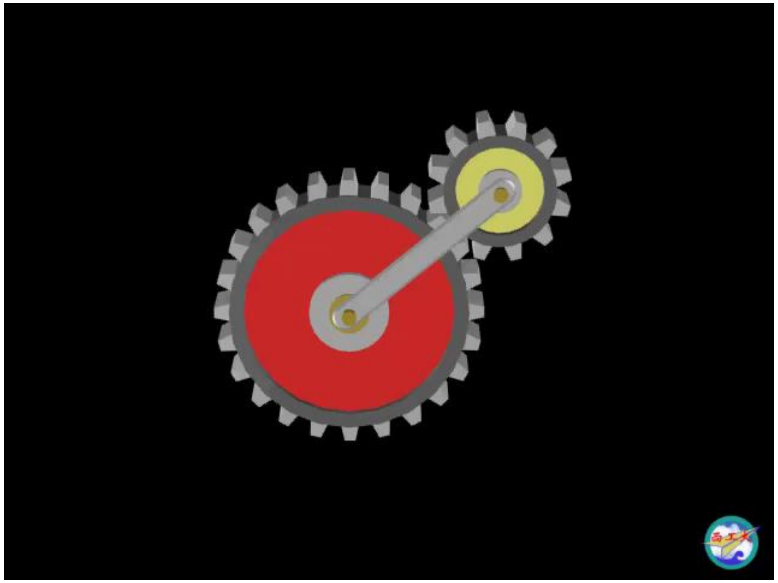
1. 刚体绕平行轴转动的合成



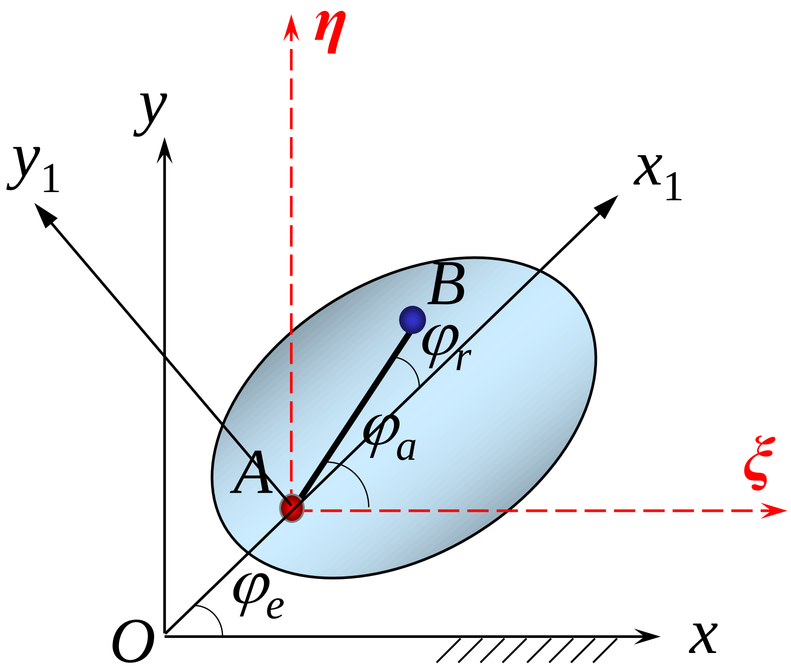
齿轮Ⅱ上的点A作圆周运动，此时将动系$Ox'y'$固连于曲柄OA，则齿轮Ⅱ的平面运动可以分解为绕两个平行轴的转动：

（1）随曲柄OA一起绕垂直于轮面的固定轴O的转动---牵连运动；

（2）相对于曲柄绕自身中心轴A的转动---相对运动。



2. 角速度与角加速度合成定理



$$\omega_e = \frac{\mathrm{d}\varphi_e}{\mathrm{d}t} \qquad \alpha_e = \frac{\mathrm{d}\omega_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi_e}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\omega_r = \frac{\mathrm{d}\varphi_r}{\mathrm{d}t} \qquad \alpha_r = \frac{\mathrm{d}\omega_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi_r}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\varphi_a = \varphi_e + \varphi_r$$

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r \qquad \alpha_a = \alpha_e + \alpha_r$$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

$v_A = OA \cdot \omega_e$ $\qquad v_A \perp OA$

$v_{BA} = AB \cdot \omega_a$ $\qquad v_{BA} \perp BA$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_{Be} + \boldsymbol{v}_{Br}$$

$v_{Be} = OB \cdot \omega_e$ $\qquad v_{Be} \perp OB$

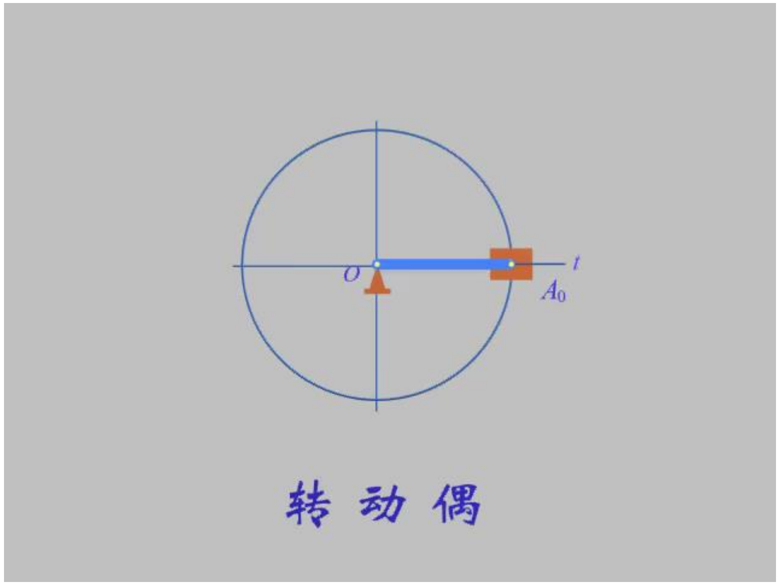
$v_{Br} = AB \cdot \omega_r$ $\qquad v_{Br} \perp BA$

3. 转动偶

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r$$

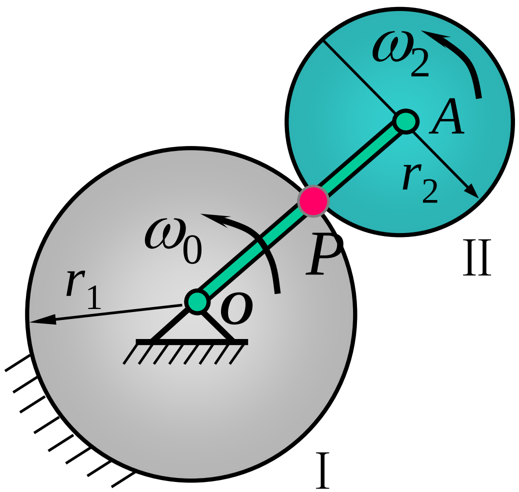
- 当刚体绕平行轴作同向转动时，合成运动是绕另一平行瞬轴的转动。绝对角速度的大小等于牵连与相对角速度之和；反向转动时，绝对角速度的大小等于二者之差。

- 当刚体以大小相等的角速度同时绕两平行轴作反向转动时，合成运动是平移。这种情况称为转动偶（ω_e，ω_r）。



例 外啮合行星齿轮机构。曲柄OA绕轴O作定轴转动，带动齿轮Ⅱ沿固定齿轮Ⅰ纯滚动。已知定齿轮和动齿轮的节圆半径分别是r_1和r_2，曲柄OA在某瞬时的角速度是ω_0，试求齿轮Ⅱ对于曲轴OA的相对角速度ω_{2r}以及绝对角速度ω_2。

解： P点是齿轮Ⅱ的速度瞬心



$$\boxed{\omega_a = \omega_e + \omega_r}$$

$$v_A = (r_1 + r_2)\omega_0 = r_2\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{(r_1 + r_2)}{r_2}\omega_0 \quad \text{(逆钟向)}$$

$$\omega_e = \omega_0$$

$$\omega_{2r} = \omega_a - \omega_e = \frac{r_1}{r_2}\omega_0 \quad \text{(逆钟向)}$$