第一大题：解：

我们先从一种较为简单的情形开始讨论：

假设：I.质点密度远大于空气密度；忽略空气阻力；

II.人从听到声音起到按下秒表为止的时间成为反应时间，为一定值，记作t_0；

III.人在令球自由落体的过程中手到脚之间的竖直距离为一定值，记作h_0。

IV.人耳到人手之间的竖直距离可略。

由此，构造下落过程的牛顿第二定律方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg \quad (1)$$

其通解为：

$$x=\frac{1}{2}gt^2+C \quad (2)$$

若依题设将人的脚所在的位置设为铅垂一维系的原点，竖直向下为正方向，则有：

$$x=\frac{1}{2}gt^2-h_0 \quad (3)$$

构造时间等式并对其求解，得一合理解：

$$\sqrt{\frac{2(H+h_0)}{g}}+\frac{(H+h_0)}{v_s}+t_0=T \quad (4)$$

$$\sqrt{H+h_0}=\frac{v_s}{2}(-\sqrt{\frac{2}{g}}+\sqrt{\frac{2}{g}+\frac{4(T-t_0)}{v_s}}) \quad (5)$$

$$H=\frac{{v_s}^2}{g}+v_s(T-t_0)-{v_s}^2\sqrt{\frac{1}{g^2}+\frac{2(T-t_0)}{v_s g}}-h_0 \quad (6)$$

接下来我们将假设I调整为：“空气阻力与质点速度线性相关”。在这种情形下我们需要对模型进行修正：

下落过程的牛顿第二定律方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\frac{dx}{dt} \quad (7)$$

其通解为：

$$x=\frac{mg}{k}t+C_1e^{-\frac{k}{m}t}+C_2 \quad (8)$$

考虑初值条件：

$$\begin{cases}x(0)=-h_0\\x'(0)=0\end{cases} \quad (9)$$

得特解：

$$x=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m^2g}{k^2}-h_0 \quad (10)$$

构造时间等式，得：

$$\begin{cases} t_d+\dfrac{H+h_0}{v_s}+t_0=T \\ H+\dfrac{m^2g}{k^2}+h_0=\dfrac{mg}{k}t_d+\dfrac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t_d} \end{cases} \quad (10)$$

这一方程组显然是一个典型的超越方程组。我们可以将其简化为：

$$v_s(T-t_0-t_d)+\frac{m^2g}{k^2}=\frac{mg}{k}t_d+\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t_d} \quad (11)$$

通过计算t_d来计算H。或者我们也可以采取下式直接计算H。

$$H+\frac{m^2g}{k^2}+h_0=\frac{mg}{k}(T-t_0-\frac{H+h_0}{v_s})+\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}(T-t_0-\frac{H+h_0}{v_s})} \quad (12)$$

事实上，由于风阻系数k为一小量，我们可以采用局部线性化和$Taylor$二阶展开的手段对（12）式进行近似并求解，最终可以解得一个近似值：(13)

$$H+\frac{m^2g}{k^2}+h_0=\frac{mg}{k}(T-t_0-\frac{H+h_0}{v_s})+\frac{m^2g}{k^2}[1-\frac{k}{m}(T-t_0-\frac{H+h_0}{v_s})+\frac{k^2}{2m^2}(T-t_0-\frac{H+h_0}{v_s})^2]$$

$$H+h_0=\frac{1}{2}g(T-t_0-\frac{H+h_0}{v_s})^2 \quad (14)$$

$$H=v_s(T-t_0)-\frac{{v_s}^2}{g}+\frac{v_s}{g}\sqrt{[g(T-t_0)-v_s]^2-g^2(T-t_0)^2}-h_0 \quad (15)$$

值得注意的是，一方面超越方程（12）不能找出初等的解析解，其精确解只能靠代入具体数值后利用计算机程序进行模拟，而这种模拟必然会构成误差；另一方面在速度不断增大的情形下，空气阻力与速度的关系将不再是线性的，阻力表达式中速度因子的次数将会随速度的增大而增大，因此这个模型有可能会在高速情形下失效。但是值得庆幸的是，石子的阻尼系数范围经估算在$10^{-7}\sim10^{-9}$范围内，因此即使石子是从喜马拉雅山上扔下去的，最终指数项上的速度因子仍然是一个小量，这种二阶的近似仍然是有效的。

证完。

第二大题：解：

（1）隐含的基本假设：

I. 传染病在指定时间范围内不具有致命性也无法治愈。

II. 传染病开始传播后岛内与岛外不再进行人员与物质的交流。

III. 指定时间范围内岛内无自然出生人口和自然死亡人口。

（2）求解微分方程：

原方程为：

$$\frac{dX}{X(N-X)}=kdt \quad （1）$$

移项，得：

$$\frac{dX}{X(X-N)}=-kdt \quad （2）$$

拆项，得：

$$\frac{dX}{N}(\frac{1}{X-N}-\frac{1}{X})=-kdt \quad （3）$$

两边作积分操作，得：

$$\ln(N-X)-\ln X=-kNt+C \quad （4）$$

通解为：

$$X(t)=\frac{N}{C_1e^{-kNt}+1} \quad （5）$$

其中，

$$C_1=e^C \quad （6）$$

（3）依据题设列出定解条件：

$$\begin{cases}[X(2)]=1887\\ [X(6)]=4087\\ [X(10)]=4853\end{cases} \quad （7）$$

事实上这是一种过约束：因为依据题设我们依据可以明确地可知：

$$N=5000 \quad （8）$$

那么根据（4）式引用最小二乘法（考虑到题设已经给定的值，这一计算可以被极大的简化）计算参数 k,C：

$$\begin{cases}\ln(\frac{N-X}{X})=-0.5t+1.5\\ R^2=1\end{cases} \quad （8）$$

$$\begin{cases}k=0.0001\\ C=1.5\end{cases} \quad （9）$$

引用（9）中的常值并综合（5）（8）式，预测第十二天的感染人数：

$$X(12)=\frac{5000}{e^{-4.5}+1}=4945 \quad (10)$$

证完。