第一大题：解：

我们先从一种较为简单的情形开始讨论：

假设：I.质点密度远大于空气密度；忽略空气阻力；

II.人从听到声音起到按下秒表为止的时间成为反应时间，为一定值，记作；

III.人在令球自由落体的过程中手到脚之间的竖直距离为一定值，记作。

IV.人耳到人手之间的竖直距离可略。

由此，构造下落过程的牛顿第二定律方程：

（1）

其通解为：

（2）

若依题设将人的脚所在的位置设为铅垂一维系的原点，竖直向下为正方向，则有：

（3）

构造时间等式并对其求解，得一合理解：

（4）

（5）

（6）

接下来我们将假设I调整为：“空气阻力与质点速度线性相关”。在这种情形下我们需要对模型进行修正：

下落过程的牛顿第二定律方程为：

（7）

其通解为：

（8）

考虑初值条件：

（9）

得特解：

（10）

构造时间等式，得：

（10）

这一方程组显然是一个典型的超越方程组。我们可以将其简化为：

（11）

通过计算来计算。或者我们也可以采取下式直接计算。

（12）

事实上，由于风阻系数为一小量，我们可以采用局部线性化和二阶展开的手段对（12）式进行近似并求解，最终可以解得一个近似值：（13）



（14）

（15）

值得注意的是，一方面超越方程（12）不能找出初等的解析解，其精确解只能靠代入具体数值后利用计算机程序进行模拟，而这种模拟必然会构成误差；另一方面在速度不断增大的情形下，空气阻力与速度的关系将不再是线性的，阻力表达式中速度因子的次数将会随速度的增大而增大，因此这个模型有可能会在高速情形下失效。但是值得庆幸的是，石子的阻尼系数范围经估算在范围内，因此即使石子是从喜马拉雅山上扔下去的，最终指数项上的速度因子仍然是一个小量，这种二阶的近似仍然是有效的。

证完。

第二大题：解：

（1）隐含的基本假设：

I.传染病在指定时间范围内不具有致命性也无法治愈。

II.传染病开始传播后岛内与岛外不再进行人员与物质的交流。

III.指定时间范围内岛内无自然出生人口和自然死亡人口。

（2）求解微分方程：

原方程为：

（1）

移项，得：

（2）

拆项，得：

（3）

两边作积分操作，得：

（4）

通解为：

（5）

其中，

（6）

（3）依据题设列出定解条件：

（7）

事实上这是一种过约束：因为依据题设我们依据可以明确地可知：

（8）

那么根据（4）式引用最小二乘法（考虑到题设已经给定的值，这一计算可以被极大的简化）计算参数：

（8）

（9）

引用（9）中的常值并综合（5）（8）式，预测第十二天的感染人数：

（10）

证完。