偏心轮系统的动力学分析

杨逢诜

[摘 要]本文是基于动静法对于偏心轮系统的动力学分析，依次涵盖以下几部分内容：偏心轮系统的结构、键传动和轴配合的力学特性、偏心轮系统的运动学和动力学分析、偏心轮的几种特殊动力学情形（如：常角速度、常角加速度、常力矩）和失效分析（断裂和键失效）。本文对于二自由度系统的动力学分析亦有所涉及，但并非主要内容。

[关 键 词]运动分析；动力分析；偏心轮系统；常微分方程；

[中图分类号]O31

偏心轮系统——一个在工程实际中常用的机械结构，是实现将刚体定轴转动转化为质点或者刚体的往复运动尤其是往复平动的一种可行机构，常用于柱塞泵等机械系统中。基于偏心轮系统本质特征的运动学和动力学分析对于这一类工程问题具有相当的工程学意义尤其是这种动力学分析中对特定结构的受力分析和应力分析，对于解决相关结构的形态设计原则、尺寸设计方法、材料选择问题等一系列工程实际问题具有相当的意义。本文将基于动力学普遍定理、动力学普遍方程和动静法（d’Alembert原理）对于这一类系统进行分析，并将对这种偏心轮系统作出一定的扩展性分析——一般工程实际中的偏心轮机构往往是单自由度的，在本文中我们将对二自由度的偏心轮机构作出分析。

一、偏心轮系统的简要描述：

**（一）常见的单自由度偏心轮系统分析：**

一般的偏心轮系统——我们以一般的卧式柱塞泵为例进行阐述——它的核心机构是与一个对称主轴通过平键实现配合的偏心轴，以及一个与指定偏心轴密接的刚体。在卧式柱塞泵中，这一与偏心轴密接的刚体的运动被限制在一条直线上，或者说它的运动是一维的；刚体与偏心轴之间的密切接触是通过一个被压缩的弹簧实现的，这一弹簧在机械系统中总是处于被压缩的状态，因此总是对该刚体施以张力，使之总是与偏心轴保持贴合；刚体的运动轨道是一个水平空心柱，这一空心柱的轴线恰好通过中心对称主轴。

偏心轴是有两个具有不同对称轴的圆柱贴合而成，同时其中挖有一个通孔（以及与通孔相组合的键槽），这一通孔与构成偏心轴的两个圆柱中半径较小的一个圆柱同轴，用于与对称主轴配合。而偏心机构则是负责使指定刚体发生往复运动。对称主轴则通过两个轴承以及限制轴承运动的刚性件确定其位置，以保证其只发生定轴转动；对称主轴上具有两个键槽，其中一个键槽位于两个与轴承配合的位置连线之中点，用于将运动传递至偏心轴；另一个键槽位于两个轴承配合点的同侧，一般是与电机相连，从而使得电机能够为该轴提供动力使之转动。

卧式柱塞泵的装配图将附于本论文后。值得注意的是，由于时间仓促，此装配图并不完整——一是机构中的弹簧并未在其中体现出来，二是轴承的标注和各构建的标注并不完整，因此仅供参考。

**（二）二自由度偏心轮系统分析：**

二自由度的偏心轮系统与单自由度的偏心轮系统极其相似——其传动结构完全一致。二者的区别在于，单自由度的偏心轮系统中，运动构件只有一个，而且与运动构件相连的弹簧只有一个。而在二自由度系统中，该弹簧同时与两个运动构件相连，不存在一个确定的固定端；但是两个运动构件仍然只能沿一维的轨道进行运动。在本论文中，方便起见，我们使得二自由度的偏心轮系统中的两个构件的运动轨道与地面垂直，而使得偏心轮和转动主轴的轴心平行于地面——这样可以大大减小分析难度。

二、有关偏心轴系统力学模型的假设以及键传动的简化：

**（一）偏心轴系统的力学假设：**

基于实际问题的需要，我们对这一类问题做出下列假设：

1.本文中一切约束结构均应当视作理想约束，而不考虑摩擦和其他效应；

2.将轴承以及与轴承配合的支持构建视作一个整体；这一约束整体能够提供三个方向（横向、纵向、竖向）的约束反力，而不能够提供约束反力偶；

3.除非特殊说明，忽略一切接触面的摩擦；

4.作一维运动的刚体与偏心轮的接触是线接触，而且这一条线是贯穿整个刚体的对应表面的；

5.本文中的偏心轮结构和平动刚体的运动被限制在同一平面内，也就是说在分析这两个物体的运动学和动力学关系时，我们将采用平面运动的方法分析；

6.本文中的弹簧总是处于弹性限度内，且总是提供线性回复力。

**（二）键传动的约束力系简化：**

依据键传动本身的性质，我们指出：键本身具有两个受力的平面，而两个受力平面对应的施力物体又是不同的；同时键结构本身具有质量小、几何尺寸小的特点。因而在动静法的理论中，在忽略质量和几何尺寸的前提下，这两个力则应当可以视为是等大反向的。由此，我们指出：键结构对相应物体的力系可以简化为：一个与键槽所在圆周相切的力。这一力的具体方向则应当依据实际的工程情形加以确定。

**（三）轴配合的约束力系简化：**

注意到，本论文中所出现了轴与轴之间的间隙配合，这种配合必然会带来轴-轴之间接触点位置处的约束反力。这种约束反力具有类似光滑接触面约束的性质，因此我们在此指出，轴-轴配合位置处的约束反力应当是过指定轴的几何中心轴的，且仅具有两个互相垂直分量——它不具有平行于几何轴方向的约束反力（此处的分析历程与光滑柱铰约束的约束力系简化分析方法类似）。此处我们仅作原理性的基础解释，而不作深入探讨。

三、论文中出现的字母的相应解释以及初状态的规定：

**（一）字母解释：**

本论文中的下列字母有如表的物理意义对应关系：

|  |  |
| --- | --- |
|  | 转动惯量（下标C的对应质心轴） |
|  | 位移，角速度 |
|  | 速度，角速度 |
|  | 加速度，角加速度 |
|  | 偏心轴的偏心距 |
|  | 振动刚体-偏心轮的作用力，三个方向的约束反力 |
|  | 键的约束反力 |
|  | 长度参量：下标为0的为两个轴承复合体与偏心轮传动件之间的距离 |
|  | 弹簧的约束反力 |
|  | 弹簧在质点转动一周时的平均压缩量 |
|  | 弹簧的弹性系数 |

注：无特殊说明的情形下，下标为0的参量是中心主轴的参量，下标为1的参量是偏心轴的参量，下标为2和3的参量分别是两个与弹簧相连的刚体的参量，下标为4和5的参量是限位体-轴承复合系统的参量。

**（二）初状态和符号的规定：**

本论文中规定，本文所采用的用于计算的坐标系为空间/平面的正交参考系，其中的x轴与一维运动之刚体的运动轴线重合，xy两轴所构成的平面与偏心轴的上表面平行；并且以远离偏心轴的方向为正方向。

本文中的角量以逆时针为正方向。

二、单自由度偏心轴系统的基础运动学分析和动力学分析：

**（一）单自由度偏心轴系统的运动学分析：**

1.对于两根轴，包括中心主轴和偏心轴，我们可以用唯一一个广义坐标（也是角量坐标）θ及其一阶导数（角速度ω）、二阶导数（角加速度α）对这个轴的运动性质进行描述，三者的关系我们在下文中列出，我们在此不再进行过分的复述。

（1）

根据几何关系，我们指出，偏心轴和中心主轴应当具有相同的角位置、角速度、角加速度：

（2）

依据刚体平面运动的原理，本文指出，刚体质心具有这样的加速度：

（3）

其在水平方向上的投影满足：

（4）

2.对于做往复运动的刚体：

在本节的讨论之前，我们依据这一实体的运动特性指出，由于该刚体在做一维平动，因此这一刚体上各点具有相同的速度和加速度。基于此，本节的讨论将针对该刚体与偏心轮的切点进行分析，这一点的速度和加速度即可代表整体特征。

这一刚体作一维的往复运动，并且根据机构内部的几何约束关系，依据运动学中的解析法我们可以得到如下的一系列关系式（在平面内分析，以中心主轴与该平面的交点作为坐标原点）：

（5）

（6）

（7）

依据点的复合运动可以得到完全一致的结论，在此不再赘述。

**（二）单自由度偏心轴系统的动力学分析：**

本部分将基于d`Alembert原理对该系统的三个单元进行相关分析。

1.对于做往复运动的刚体：

我们指出，由于该刚体在做一维方向的平动，因此我们完全可以将这一刚体视作一个单独的质点进行分析。依据此刚体的受力图（在附件2中），我们则可以写出这样的平衡方程：

（8）

指出：根据物体本身的受力特性与几何约束关系，此实体中诸力具有如下的数学表达形式：

（9）

由（8）（9），我们则可以计算得到支持力的表达式：

（10）

这一约束反力的表达式是接下来的一系列推导的基础。

2.对于偏心轮：

单独的偏心轮可以视作在一个质量对称平面内做定轴转动的刚体，但仍可以采取刚体平面运动的技术方法对这一刚体进行分析。根据这一刚体的手里情形（附于附件2中），我们可以得到这样的平衡方程：

（11）

注意，这一方程组中的第三个方程是对这一偏心轮的转动轴的力矩平衡方程。以上诸力中已知的惯性力具有这样的表达形式（注意：这里没有体现出负号是由于此处的负号已经体现在受力分析图中了）：

（12）

综合（10）、（11）和（12），我们则可以解出三个未知的约束反力：

（13）

这三个力的表达式相当繁杂——一般地用于从运动参量推导出力的参量而非由力参量计算得到运动参量。若需要有力参量计算运动参量，一般需要通过动力学普遍定理计算得到，毕竟通过这一途径计算的难度相对较易。

4.对于中心主轴：

在对中心主轴进行动力学分析时，我们注意到中心主轴的空间结构已经不能被忽略——也就是说这一机械结构的分析必然涉及到三维力系的分析。基于三维下的d`Alembert原理，我们可以得到如下的六个平衡方程（三个矩方程均以下部的轴承位置为中心点进行分析）：

（14）

其中的惯性力力矩可被描述为：

（15）

（负号的消失依然是由于系统的惯性力实际方向已经在图中标注。）

注意到：即使使得惯性力力矩为已知参量，该方程中依然有七个未知的参量，那么我们可以指出这是一个的静不定问题——需要材料力学的相关知识来补充一个方程，使得这个方程的解唯一。但是由此我们可以指出若干参量的线性组合仍然是有可能被解出来的——这种线性组合对于接下来对柱塞泵壳体的静力学分析可能具有相当重要的意义。由于此方程组暂时不可解，以及时间的限制（作者作业较多而不能够进行一个相对完善的分析），因此我们对于中心主轴的描述以及对柱塞泵壳体的进一步动力学分析暂时按下不表，而仅用其中的若干个方程辅助下一步的一系列分析。

5.系统整体的能量分析：

根据系统整体的运动特性，我们则可以得到系统的动能和势能的表达式：

（16）

（17）

根据（2）（7）（9）（16）（17）式，我们可以进一步得到：

（18）

（19）

此处我们并没有对角量继续区分——这是基于（2）式中恒等式的原理进行的一种简化操作。后续分析中我们将不再对这一角参量进行区分。

三、单自由度偏心轴系统的特殊情形分析：

本节中我们将针对一系列特殊情况——包括特定的运动学情形，以及一些失效情形的分析，对于偏心轴系统的动力学特性进行进一步分析。

我们将在分析之前先对这几类特殊情形的分析意义进行阐释：对于特殊情形下的系统动力学特性的分析，有助于我们对系统中部分核心机构的受力情形作出更为清晰明确的把控，以及有助于我们依据受力情形对于更为复杂的失效情形进行分析。

**（一）恒定角速度下的动力学分析：**

在恒定角速度条件下，我们注意到：

（20）

基于此，我们指出，做往复运动的质点的运动学方程以及对它作用的约束反力可以简化为：

（21）

（22）

进而地，根据这一关系，偏心轮刚体的一系列力的表达式则可以被简化为：

（23）

根据方程组（14）知：

（24）

这一结论仍然是相当复杂的，但是相对于本已较为复杂的系统而言此系统已相对较为简单。

**（二）恒定角加速度下的动力学分析：**

在恒定角加速度条件下，我们注意到存在下列运动学关系：

（25）

基于此，我们指出，做往复运动的质点的运动学方程以及对它作用的约束反力应当具有这样的形式：

（26）

（27）

我们可见，在这一系统下，即使系统本身的运动学特性已经足够简洁并且可预测，力作用的表达式仍然已经显得相当复杂——我们由此指出，此时已经不建议继续通过达朗贝尔原理的方法继续进行计算（因为其显著的复杂性）。但是目前似乎并没有更好的用于描述这一系统的功能的数学或者力学工具。

我们将依据（25）（26）（27）三式继续对偏心轮机构所受到的三个约束反力进行分析：



（28）

依据关系（14）得：

（29）

这一表达式仍然具有相当繁杂的数学形式。

**（三）特殊动力学情形——恒定驱动力下的运动分析：**

在本节中我们将依据动力学普遍定理进行进一步的原理性阐发。

基于机械能守恒定律以及（18）（19）两式，我们则可以得出以下的表达式：

（30）

（31）

（32）

如果考虑到与电动机等动力设备连接的位置处所提供的动力可以由一个常力偶进行描述，那么就有：

（33）

其中M为常力偶（在此处，常力偶与恒定驱动力具有相同的意义——原因可以追溯到上文中对于键传动特性的描述）。

那么，依据（32）（33），即有：

（34）

这是一个较为复杂的高阶非线性动力系统，在常微分方程领域中经常使用相图和相轨线的方法进行求解——注意到此处这一非线性动力系统并非一阶，我们对于这一类情形的相图不作过于深入的探讨。但是在此我们应当指出——如果动力设备提供的常力矩的大小并不充分，很有可能导致这一系统在实际上做振动而非完整的转动。振动-转动的临界态分析自然应当依赖于对于相轨线的进一步分析——如果在常力偶数值确定的情形下，这一图形的相轨线呈现出封闭的特征，那么这一系统将做振动；如果相轨线呈现开放的特征，那么这一系统将做完整的转动。当然这也可能要取决于系统初始条件对于系统动力学特性的影响——我们姑且对此按下不表，待时间充分之时则可以做进一步的完整讨论。

**（四）失效分析——键失效：**

在本节中我们将讨论键失效所带来的系统动力学特征的改变。

我们将在本节的开头指出：本节中所讨论的键的失效，无论是配合偏心轴和主轴的键失效，还是配合转动主轴和动力设备的键失效，其本质均是动力的消失以及系统机械能的暂时守恒。基于此，并依据（18）（19）两式，我们可以给出如下的几个方程：

（35）

（36）

守恒方程（36）依然是一个非线性的动力系统而需要通过相图对其进行求解。但是这一守恒方程则是一阶的动力系统因而可以通过一定的数值计算方法绘制其相图。相图的意义与（三）节中描述的相类似，封闭的相轨线意味着振动，开放的相轨线意味着转动。但是值得注意的是，无论是振动还是转动，只要在这一守恒定律的控制之下，这一运动必然是具有一定周期性的。而一旦引入了摩擦力，那么这一运动的周期性将遭到破坏，同时也会使得本文中的计算变得繁杂——这也是假设之中忽略摩擦力的原因之一。

基于本模型对应的动力系统，我们对此模型进行了一定的数值仿真并绘制了相应的相轨线。此图的绘制源代码以及对应的相轨线图像将在后面作出相应的补充（附件3）。在绘图的过程中，我们基于绘图原理给出了判定偏心轴机构作振动-完整转动之间的分界条件：

依据（36）式知：

（36-1）

即：

（36-2）

根据36-2式，我们可以依据相图所描述的力学性质指出这一分界条件：

（36-3）

分界条件即为方程组36-3具有非平凡解。

**（五）失效分析——断裂：**

由于断裂具有多种相当不同的情形，因此我们并不能在此作出过多的阐释，我们只能够在这里进行一定的原理性阐发。

我们注意到：断裂所带来的一个必然结果是摩擦力的骤然增大，这样则会为系统带来一个不可忽略的摩擦力。这一摩擦力——根据经典的库仑摩擦力公式计算得到的结果，应当是一个常数（但是由于表面性质未知而常常无法进行具体计算）；同时在垂直于断裂面处又会引入垂直于断裂面的约束反力。这是在发生断裂的轴系统中不可忽略的两个力。

垂直于断裂面的约束反力往往是较好计算的——在整个运动过程中它的方向虽然在时刻变化但是它与竖直线的夹角为一定值，同时这一约束反力在一些情况下又是定常的，这使得它的数学表达形式依然相当简洁；但是对于摩擦力而言，摩擦力的描述则较为繁杂——它需要考虑两个刚体之间相对运动的关系，这引入了一个难以捉摸的符号变化。为了描述这一符号变化，可以在数学上引入一个符号函数：

（37）

如果令已知的摩擦力（或者摩擦力矩）大小与此函数相乘然后再代入与摩擦系统相关的动力学方程中，则可以完全地描述摩擦力的大小和方向。但是注意：在引入符号函数之后系统的微分方程将难以通过传统方法获得结论。作者在此提出两种建议方法：一是可以利用Fourier变换或者Laplace变换对此方程进行求解，二是可以通过Simulink模块对这一动力系统进行仿真模拟，通过仿真模拟计算这一系统的特征。限于时间作者无法对这两种方法进行完全的实现，但这仍然是值得一试的发展方向。

四、二自由度偏心轴系统的简单动力学分析：

本节将主要关注二自由度系统的动力学分析。对于二自由度系统的运动学特性，我们指出：偏心轴系统本身以及同时与偏心轴、弹簧接触的刚体，其运动学特征与单自由度系统中对应实体几乎没有差异，而只与弹簧接触的刚体，其运动学特征在未知动力学特性前又无从下手，因此在此处我们将略过这一部分。本节依然是基于d’Alembert原理进行的分析。

**（一）二自由度系统的动力学特征：**

1.对于两个做一维往复运动的刚体，我们可以直接将其视为质点并直接列出（含有虚加惯性力的）受力平衡方程：

（38）

（39）

其中，注意到：弹簧弹力和虚加的惯性力应当具有这样的形式：

（40）

2.对于偏心轮机构，其（含有虚加惯性力的）受力平衡方程则需要改写为：

（41）

3.对于中心主轴，其受力平衡方程则应当改写为：

（42）

**（二）二自由度系统的静力学特征：**

我们指出，该二自由度偏心轴系统具有两个静力学平衡的位置，其中一个是不稳定平衡的位置——即偏心轴的质心恰好位于主轴正上方的位置时；另一个则是稳定平衡的位置，此时偏心轴的质心恰好位于主轴正下方的位置。这两个平衡位置的分析既可以基于势能最低/最高原理得到，也可以基于虚功原理得出。由于时间受限，作者在此暂时按下不表。

五、结语

作者再次强调——偏心轴系统在工程实际中具有一定的应用，对于偏心轴系统的动力学分析具有强烈的现实意义。因此，我们有必要继续深入地对这一系统进行分析。本文的分析依然是不完全的，很多内容——比如断裂失效分析——有待于进一步的模拟仿真和理论补充。在此论文基础上继续进行研究是十分必要的。

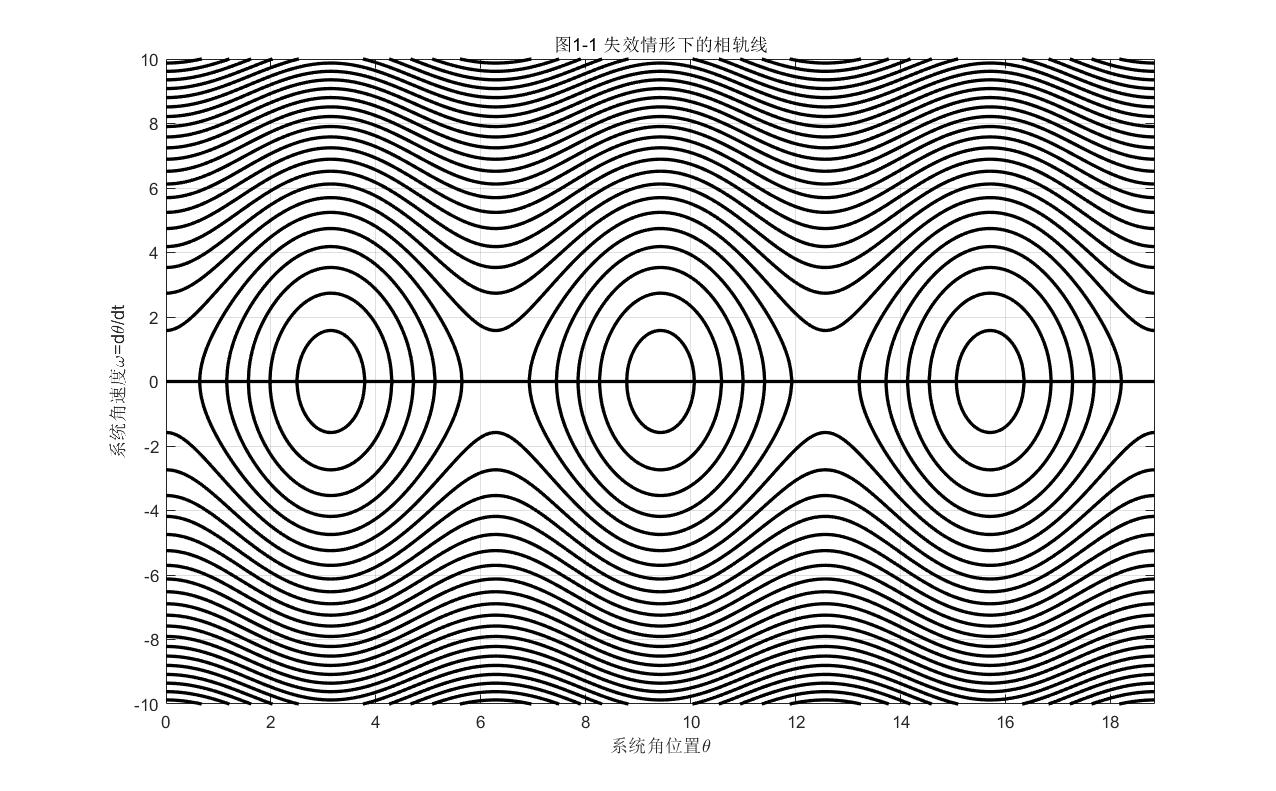
参考文献：

本文没有对应的参考文献。

附件1：一份标注不完整的柱塞泵装配图（另附纸）

附件2：二、三节涉及到的受力分析示意图（另附纸）

附件3：三（四）节的相轨线及其对应的源代码：



源代码示例（PhaseTrajetory.m）：

%m2=10kg,转动惯量总和J=4kgm2，弹性系数k=1000N/m，x0=10cm,偏心距e=5cm

clear;clc;

E=10:10:300;

dcita=0;fdcita=0;

for i=1:30

cita=0:0.01:6\*pi;

for j=1:6\*pi/0.01+1

if E(i)-1000\*(0.05\*cos(cita(j))+0.1)/2>0

dcita(j)=sqrt((E(i)-1000\*(0.05\*cos(cita(j))+0.1)/2)/(4/2+10\*(0.05^2)\*(sin(cita(j))^2)/2));

else

dcita(j)=0;

end

fdcita(j)=-dcita(j);

end

plot(cita,dcita,'k-','linewidth',2);

hold on

axis on

grid on

plot(cita,fdcita,'k-','linewidth',2);

end

title('图1-1 失效情形下的相轨线')

xlabel('系统角位置\theta')

ylabel('系统角速度\omega=d\theta/dt')

axis([0 6\*pi -10 10])