## 一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 3 阶方阵 $A$ 的行列式 $|A|=3$，则 $|2A^{-1}A^T|=$__________.

2. 设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}$的伴随矩阵为 $A^*=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\-6&3&-1\\4&-2&2\end{pmatrix}$,

 则 $a=$______.

3. 设 $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $A^2+3A+2I=O$，则 $(A-I)^{-1}=$__________.

4. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为 3 阶方阵，若 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一般解为__________.

5. 设 3 阶方阵 $A$ 的秩 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\\3&-2\end{pmatrix}$,

 则 $A$ 的特征值为__________.

6. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3&-5\\0&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}$可对角化，则 $a=$______.

## 二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 已知 $A,B$ 均为 $n$ 阶可逆方阵，$k$ 为常数，则下列命题正确的是(　).

 A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $(A+B)^T=A^T+B^T$

 C. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　D. $|kAB|=k|A||B|$

2. 设 $A$ 是 3 阶方阵，将 $A$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $B$，再交换 $B$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$(　).

 A. $P_1P_2$　B. $P_1^{-1}P_2$　C. $P_2P_1$　D. $P_2P_1^{-1}$

3. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的，则下列向量组中相关的是(　).

A. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　B. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

C. $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3$　　D. $\alpha_1+2\alpha_3,3\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3$

4. 设 $A$ 为 $m\times n$ 型矩阵，$B$ 为 $n\times p$ 型矩阵，则下列条件中，不能推出线性方程组 $(AB)x=0$ 有非零解的是(　).

A. $m<p$　　B. 线性方程组 $Ay=0$ 有非零解

C. $n<p$　　D. 线性方程组 $Bx=0$ 有非零解

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $A$ 与 $B$(　).

A．合同且相似　　B．合同但不相似

C．不合同，但相似　D．既不合同，也不相似

6. 设 $A$ 是 3 阶实对称矩阵，$E$ 是 3 阶单位矩阵，$O$ 是 3 阶零矩阵；

若 $A^2+A-2E=O$，且 $|A|=4$，则二次型 $x^TAx$ 的规范型是(　).

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$；B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$；C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$；D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

**三、计算题(共 5 题，每题 6 分，共 30 分)**

1. 计算 $n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}$

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-3\\0&0&2&0\end{pmatrix}$，$A_{ij}$表示元素 $a_{ij}$的代数余子式，

求 $A_{11}-A_{12}$.

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,1,2)^T$，$\alpha_2=(-1,2,0,0)^T$，$\alpha_3=(1,2,4,8)^T$，

$\alpha_4=(-1,1,1,1)^T$，$\alpha_5=(2,-1,1,3)^T$；求此向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

4. 已知 $R^2$的两组基为 $\mathbf{B_1}=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$\mathbf{B_2}=\{\beta_1,\beta_2\}$，其中

$\alpha_1=(1,-1)^T$，$\alpha_2=(1,0)^T$；$\beta_1=(1,2)^T$，$\beta_2=(3,5)^T$；

(1) 求从基 $\mathbf{B_1}$到基 $\mathbf{B_2}$的过渡矩阵；

(2) 若向量 $\gamma$在基 $\mathbf{B_1}$下的坐标为 $(-1,1)^T$，求 $\gamma$ 在基 $\mathbf{B_2}$下的坐标.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&1\\4&0&5\end{pmatrix}$，$B$ 与 $A$ 相似，

求 $|B|$，$|B^{-1}+E|$，其中 $B^{-1}$是 $B$ 的逆矩阵，$E$ 是 3 阶单位矩阵.

**四、证明题(共 1 题， 8 分)**

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $n$ 阶方阵 $A$ 的 3 个特征向量，且它们对应的特征值互不相等，若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

**五、解方程组（共 1 题，14 分）**

讨论 $a,b$ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_2+2x_3-2x_4=-1\\ x_1+x_2+2x_3-x_4=1\\ x_2+(a+1)x_3+bx_4=b-2\\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+3\end{cases}$$

无解、有无穷多解、有唯一解，并且在有无穷多解时写出方程组的一般解.

**六、二次型（共 1 题，12 分）**

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3-6x_2x_3$，

利用正交变换法，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并写出相应的正交矩阵.