一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 若向量 $\alpha=(3,2,1)^T$，$\beta=(4,1,2)^T$，$\gamma=(-1,-2,1)^T$，则 $2\alpha-\beta+\gamma=(\quad)$.

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2+2A+3\boldsymbol{I}=O$，则 $(A+3\boldsymbol{I})^{-1}=(\quad)$.

3. 已知 $\alpha_1=(1,2,1,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,3,3)^T$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解，且系数矩阵的秩为 3，则方程组 $Ax=b$ 的一般解为(　).

4. 设 A, B 均为 n 阶方阵，$|A|=3, |B|=2, |A^{-1}+B|=1$，则 $|B^{-1}+A|=$(　).

5. 矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^T=A^*$，若 $2a_{11}=a_{12}=a_{13}>0$，则 $a_{11}=(\quad)$.

6. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&2&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$，与矩阵 B 相似，则 $|B-3\boldsymbol{I}|=(\quad)$.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-3\\3&4&a\end{pmatrix}$，齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，则 $a=(\quad)$.

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

2. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，向量 β_2 不能由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对任意常数 k 必有(　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关；(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关；(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关；

3. 设 A 为 3 阶方阵，B 为 2 阶方阵，C 为 3×2 矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，则 $\begin{vmatrix}O&B\\A&C\end{vmatrix}=(\quad)$.

(A) 3　(B) 2　(C) 6　(D) -6

4. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 1 列加到第 3 列得 B，再将 B 的第 3 行的 -1 倍加到第 1 行得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则一定有(　).

(A) $A=PCP^T$　(B) $A=PCP^{-1}$　(C) $A=PCP$　(D) $A=P^{-1}CP$

5. 记 $r(\mathrm{X})$ 表示矩阵 X 的秩，$r(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ 表示分块矩阵 (X,Y) 的秩；则对 n 阶矩阵 A, B, 下列一定成立的是(　).

(A) $r(\mathrm{A},\mathrm{AB})=r(\mathrm{A})$；　　(B) $r(\mathrm{A},\mathrm{BA})=r(\mathrm{A})$；

(C) $r(\mathrm{A},\mathrm{B})=\max\{r(\mathrm{A}),r(\mathrm{B})\}$；　　(D) $r(\mathrm{A},\mathrm{B})=r(\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}^{\mathrm{T}})$.

6. 设 A 为 3 阶方阵，已知存在可逆矩阵 P，使得 $\mathrm{PAP}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则下列对角阵中与 A 相似的是(　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

三、计算题(共 4 题，每题 8 分，共 32 分)

1. 计算如下 $n+1$ 阶行列式的值，其中a_0, a_1, $a_2,\cdots$, a_n 均不为 0；

$$\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}.$$

2. 已知 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $2\mathrm{BA}^2=\mathrm{A}^*\mathrm{BA}^2+3\mathrm{A}$，$\mathrm{A}^*$ 为 A 的伴随矩阵, 求矩阵 B.

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,2,4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出.

4. 已知 R^2的两组基为 $\mathbf{B_1}=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$\mathbf{B_2}=\{\beta_1,\beta_2\}$，其中

$\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(1,-1)^T$；$\beta_1=(3,-1)^T$，$\beta_2=(5,-1)^T$；

(1) 求从基 $\mathbf{B_1}$到基 $\mathbf{B_2}$的过渡矩阵；

(2) 若向量 γ 在基 $\mathbf{B_1}$ 下的坐标为 $(3,4)^T$，求 γ 在基 $\mathbf{B_2}$ 下的坐标.

四、证明题（共 1 题，8 分）

设 α_1,α_2 是 3 阶方阵 A 分别对应于特征值 $-2,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $\mathrm{A}\alpha_3=2\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

五、解方程组（共 1 题，12 分）

$$\begin{cases} x_1+x_2-4x_3+x_4=6 \\ x_1+4x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+(a-1)x_3+(b-3)x_4=b+6 \\ -2x_1-x_2+(b-2)x_4=b-2 \end{cases}$$

(1) 讨论 a,b 取何值时，方程组无解，有无穷多解，有唯一解；

(2) 当方程组有无穷多解时求其一般解.

六、二次型（共 1 题，12 分）

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$的秩为 1，

(1) 求 c 的值；

(2) 利用正交变换法将二次型化为标准形，并写出对应的正交矩阵；

(3) 写出规范形.