一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =(　).

2. 设 3 阶方阵 $A=\alpha\beta^T$, 其中 $\alpha=(1,2,3)^T$，$\beta=(0,1,-1)^T$，则 A^{2019} =(　).

3. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，$\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$；如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则 $Ax=\beta$ 的一般解为(　).

4. 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第二行与第三行得 B，则 $|BA^*|$ =(　).

5. 设 2 阶实对称矩阵 A 有对应不同特征值的特征向量 α_1 和 α_2，满足 $A^3(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+8\alpha_2$，则 $|A|$ =(　).

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$，其规范型为(　).

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 4×3 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & s+t \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$，向量 $b=\begin{pmatrix} 4 \\ t-5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$，则方程组 $Ax=b$ 有唯一解的充要条件是(　).

A. $s=4,t=-2$；B. $s\neq 4,t=-2$；C. $s=4,t\neq -2$；　D. $s\neq 4,t\neq -2$

2. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则下列向量组线性无关的是(　).

A. $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$

B. $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$

C. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$

D. $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4,-\alpha_1+\alpha_3-\alpha_4,-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，则(　).

A. $x=0$，$y=1$；　　C. $x=0$，$y=0$；

B. $x=-1$，$y=0$；　　D. $x=1$，$y=1$；

4. 设 A 为 3 阶方阵，A 的第三行加到第一行得 B，再将 B 的第三列的 (-1)倍加到第一列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A=$（　）.

A. $P^{-1}CP^T$；B. $PC(P^{-1})^T$；　C. $(P^{-1})^TCP$；　D. $(P^{-1})^TCP^{-1}$

5. 设 A,B 均为 n 阶方阵，$n\geq 3$，且 A 的秩 $r(A)=n$，B 的秩 $r(B)=n-1$，则 AB 的伴随矩阵的秩为(　).

A. 0　　B. 1　　C. $n-1$　　D. n

6. 设 A 为 3 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量组，P 是 3 阶可逆阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=-\alpha_2$，$A\alpha_3=-\alpha_3$，则 P 可取为(　).

A. $(\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2-\alpha_3)$　　B. $(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3)$

C. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$　　D. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$

三、计算题(共 3 题，每题 8 分，共 24 分)

1. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(1,4,3,7)^T$，$\alpha_4=(-1,-2,1,-1)^T$，$\alpha_5=(1,3,6,9)^T$；求向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

2. 已知 R^3 的两组基为 $\mathbf{B_1}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$\mathbf{B_2}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,-3,2)^T$；

$\beta_1=(0,1,1)^T$，$\beta_2=(1,1,0)^T$，$\beta_3=(1,0,2)^T$；

(1) 求基 $\mathbf{B_1}$ 到基 $\mathbf{B_2}$ 的过渡矩阵；

(2) 若 3 维向量 γ 在基 $\mathbf{B_2}$ 下的坐标为 $(1,1,2)^T$，求 γ 在基 $\mathbf{B_1}$ 下的坐标.

3. 已知 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & 4 & b\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 是可对角化的，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，求 a,b.

4. 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a_1+\lambda_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_2 & a_2+\lambda_2 & a_2 & \cdots & a_2\\ a_3 & a_3 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n+\lambda_n\end{pmatrix}$，求 $|A|$.

四、证明题(共 2 题，每题 6 分，共 12 分)

1. 设 P 是一个 m 阶可逆矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 m 维向量，$n\le m$.

证明：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 $P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n$ 也线性无关.

2. 设向量组 α_1,α_2 是线性无关的，且都与非零向量 β 正交；

证明：向量组 α_1,α_2,β 是线性无关的.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

讨论 a,b 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=1\\ x_1-x_2-2x_3-5x_4=3\\ x_2+(a-1)x_3+bx_4=b-3\\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+3\end{cases}$

无解，有无穷多解，有唯一解；并在有无穷多解时求其通解.

六、化二次型为标准型（共 1 题，14 分）

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+cx_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 1，

(1)求 c 的值；

(2)用正交变换法，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型，并写出相应的正交矩阵.