一、填空题(每空 3 分，共 18 分)

1. 已知 4 阶行列式的第 1 行元素以此为 $1,2,2,-1$；第 4 行元素的余子式依次为 $8,k,\ -6,10$；则 $k=(\quad)$.

2. 设 $\alpha=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(1,0,1)$，$\mathrm{A}=\alpha\beta$，则 $\mathrm{A}^3=(\quad)$.

3. 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$；矩阵 B 与 A 相似，则 $|\mathrm{B}^{-1}+2\boldsymbol{I}|=(\quad)$，$\left|(\frac{1}{2}\mathrm{A})^*-\boldsymbol{I}\right|=(\quad)$.

4. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $3\mathrm{A}^2+2\mathrm{A}-10\boldsymbol{I}=O$，则 $(\mathrm{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=(\quad)$.

5. 四元线性方程组 $\mathrm{A}x=b$，$r(\mathrm{A})=r(\mathrm{A},b)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $\mathrm{A}x=b$ 的 3 个解，$\alpha_1=(4,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2+2\alpha_3=(3,0,-3,6)^{\mathrm{T}}$，则 $\mathrm{A}x=b$ 的全部解为(　).

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m>2)$ 线性相关的充要条件是(　).

   A. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有两个向量成正比；

   B. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个零向量；

   C. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示；

   D. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的任一部分向量组线性相关.

2. 设 P,Q 均为 n 阶可逆矩阵，A 是 n 阶矩阵，且 $\mathrm{PAQ}=E$，则 $\mathrm{A}^{-1}=$(　).

   A. PQ　　B. $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Q}^{-1}$　　C. QP　　D. $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{P}^{-1}$

3. 对于非齐次线性方程组 $\mathrm{A}x=b$ 和对应的齐次线性方程组 $\mathrm{A}x=0$，下列结论正确的是(　).

   A. 若 $\mathrm{A}x=0$ 只有零解，则 $\mathrm{A}x=b$ 有唯一解；

   B. 若 $\mathrm{A}x=0$ 有非零解，则 $\mathrm{A}x=b$ 有无穷多解；

   C. 若 $\mathrm{A}x=b$ 有无穷多解，则 $\mathrm{A}x=0$ 只有零解；

   D. 若 $\mathrm{A}x=b$ 有无穷多解，则 $\mathrm{A}x=0$ 有非零解.

4. n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$ 的秩为 $n-1$，且 $n\geq 3$，则 $a=(\quad)$.

A. 1　　B. $\frac{1}{1-n}$　　C. -1　　D. $\frac{1}{n-1}$

5. 设 A 是 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=(\quad)$.

A. P_1P_2　　B. $P_1^{-1}P_2$　　C. P_2P_1　　D. $P_2P_1^{-1}$

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $E+2BA^*=ABA^*$，E 是 3 阶单位矩阵,

则 $|B|=(\quad)$.

A. $\frac{1}{9}$　　B. 9　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

三、计算题(每题 8 分，共 24 分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_1&1&1&\cdots&1\\1&a_2&0&\cdots&0\\1&0&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$ 的值，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均不为 0.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&1\\2&1&8\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\\9&1\end{pmatrix}$ 满足方程 $AX=B$，求矩阵 X.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基，求基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵.

四、证明题(共 1 题，共 12 分)

设 A, B 均为 n 阶非零矩阵，且满足 $A^2+A=O$，$B^2+B=O$；证明：

(1) -1 是 A, B 的特征值；

(2) 若 $AB=BA=O$，ξ_1 和 ξ_2 分别是 A, B 的属于特征值 -1 的特征向量，

则 ξ_1,ξ_2 线性无关.

五、解方程组（14 分）

讨论 p,q 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = p \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = q \end{cases}$

有解、无解；有解时求解.

六、二次型（14 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$，且 $b > 0$；二次型对应矩阵的特征值之和为 1，特征值的乘积为 -12；

(1)求 a，b 的值；

(2)用正交变换化二次型为标准形，写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.