一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 向量 $\alpha=(3,1,4)^{\mathrm{T}},\beta=(2,-1,0)^{\mathrm{T}},\gamma=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\alpha-2\beta+3\gamma=$(　).

2. 设 A 为 m 阶方阵，B 是 n 阶方阵，且 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=a\neq 0$，$\begin{vmatrix} O & B \\ A & O \end{vmatrix}=b$，

则 $\dfrac{b}{a}=($　$)$.

3. 设 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|A|=($　$)$.

4. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，$\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$；如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则 $Ax=\beta$ 的一般解为(　).

5. 设 3 阶实对称方阵 A 满足 $A^2=A$，且 $\mathrm{r}(A)=2$，则 $|A+I|=($　$)$.

6. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4{x_1}^2+2{x_2}^2+b{x_3}^2+4x_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，

则 b 的取值范围是(　).

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，则下列条件中，不能推出线性方程组 $(AB)x=0$ 有非零解的是(　).

(A) $m<p$　　(B) $m<n$　　(C) $n<p$　　(D) $\mathrm{r}(B)<p$

2. 设 $A=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A^{2019}=($　$)$.

(A) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;　　(B) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2019}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(C) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2019}$;　　(D) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2019}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2019}$

3. 设 α 为 n 维列向量，$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$，$B=I-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，则下列说法错误的是(　).

(A) B 是对称阵　(B) B 是可逆阵　(C) B 是正交阵　(D) B 是对角阵

4. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(\alpha_i\in \mathrm{R}^n, i=1,\cdots,m, m>2)$ 线性相关，下列说法正确的是(　).

(A) 对任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，均有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$.

(B) 任意 k 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$ 线性相关.

(C) 对任意 $\beta\in \mathrm{R}^n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关.

(D) 任意 k 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$ 线性无关.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B (　).

(A) 合同且相似；(B) 合同但不相似；(C) 不合同但相似；(D) 既不合同也不相似

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准型为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$；若 $Q=(\alpha_1,-\alpha_3,\alpha_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为(　).

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

三、计算题(共 4 题，第 1, 2 题每题 8 分，第 3, 4 题每题 6 分，共 28 分)

1. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&0&\cdots&0&2\\-1&2&0&\cdots&0&2\\0&-1&2&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0&2\\0&0&\cdots&-1&2&2\\0&0&\cdots&0&-1&2\end{vmatrix}$.

2. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,4,3,7)^{\mathrm{T}}$，

$\alpha_4=(-1,-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_5=(1,4,5,9)^{\mathrm{T}}$；求向量组的秩及一个极大线性无关组,

并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

3. 已知 R^3 的两组基为 $\mathbf{B_1}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$\mathbf{B_2}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,1,-1)^T$；

$\beta_1=(0,1,1)^T$，$\beta_2=(1,1,0)^T$，$\beta_3=(1,0,2)^T$；

(1) 求基 $\mathbf{B_1}$ 到基 $\mathbf{B_2}$ 的过渡矩阵；

(2) 若 3 维向量 γ 在基 $\mathbf{B_2}$ 下的坐标为 $(1,3,1)^{\mathrm{T}}$，求 γ 在基 $\mathbf{B_1}$ 下的坐标.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & 4 & -2\\ -3 & -3 & b\end{pmatrix}$ 是可对角化的，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，求 a,b.

四、证明题(共 1 题，共 8 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，并且

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$；

证明：当 m 为偶数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关；

当 m 为奇数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

讨论 a,b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1\\ x_1-x_2-2x_3-5x_4=3\\ (a-1)x_2+2x_3+bx_4=b-3\\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+3\end{cases}$

无解、有无穷多解、有唯一解，并且在有无穷多解时写出方程组的通解.

六、二次型（共 1 题，14 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax$，利用正交变换法可化为标准型 $y_1^2+y_2^2$，

相应的正交矩阵 Q 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$；

(1) 写出 A 的全部特征值；

(2) 求出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$.