一、填空题(共 18 分)

1. 设 A 是 3 阶方阵，$|A|=3$，A^*为 A 的伴随矩阵，则 $|3A^{-1}|=(\quad)$，

$|A^*|=(\quad)$，$|3A^*-7A^{-1}|=(\quad)$.

解：$|3A^{-1}|=3^3|A^{-1}|=3^3\dfrac{1}{|A|}=9$；$|A^*|=|A|^{3-1}=9$；

$$|3A^*-7A^{-1}|=|3|A|A^{-1}-7A^{-1}|=|2A^{-1}|=2^3|A^{-1}|=\frac{8}{3}.$$

2. 设 $\alpha=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(-1,\frac{1}{2},0)$，$A=\alpha\beta$，则 $|A^{100}|=(\quad)$.

解：$A=\alpha\beta=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&1&0\\4&-2&0\\-6&3&0\end{pmatrix}\Longrightarrow|A|=0$

$$|A^{100}|=|A|^{100}=0.$$

3. 设向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则 $k=(\quad)$.

解：设向量 α 是 A 的特征值 λ 对应的特征向量，则 $A\alpha=\lambda\alpha$，

即 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}2+k+1=\lambda\\1+2k+1=\lambda k\end{cases}$

$$\Longrightarrow(k-1)=\lambda(k-1)\Longrightarrow\begin{cases}k-1=0\Longrightarrow k=1,\ \lambda=4;\\k-1\neq0\Longrightarrow\lambda=1,\ k=-2\end{cases}.$$

4. A 为 3 阶实对称矩阵，向量 $\xi_1=(1,2,5)^{\mathrm{T}}$，$\xi_1=(k,2k,3)^{\mathrm{T}}$ 是分别对应于特征值 2 和 3 的特征向量，则 $k=(\quad)$.

解：由题意知：ξ_1,ξ_2 正交，即 $(\xi_1,\xi_2)=0\Longrightarrow1\cdot k+2\cdot2k+5\cdot3=0$

从而 $k=-3$.

5. 设 η_1,η_2,η_3 为 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解，$r(A)=3$，已知 $\eta_1+\eta_2=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}},\eta_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，则 $Ax=b$ 的一般解为(　　).

解：$r(A)=3\Longrightarrow Ax=0$ 的基础解系含有 $4-r(A)=1$ 个向量.

$Ax=b$ 的一般解为 $x=x_0+k\xi$；

(1) x_0 可取 η_3；

(2) 取 $\xi=(\eta_1-\eta_3)+(\eta_2-\eta_3)=\eta_1+\eta_2-2\eta_3=(1,0,-1,-2)^{\mathrm{T}}$；

于是，$\mathrm{A}x=b$ 的一般解 $x=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(1,0,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，$k$ 任意.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 M、P 为 n 阶矩阵，且 P 可逆，则下列运算不正确的是（ D ）.

A. $|\mathrm{M}|=|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}|$；　　B. $|2E-\mathrm{M}|=|2E-\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}|$；

C. $|2E-\mathrm{M}|=|2E-(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})^{\mathrm{T}}|$；　　D. $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}=\mathrm{M}$.

解：A. $|\mathrm{M}|=|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}|=|\mathrm{P}^{-1}|\cdot|\mathrm{M}|\cdot|\mathrm{P}|=|\mathrm{M}|$；

B. $|2E-\mathrm{M}|=|\mathrm{P}^{-1}|\cdot|2E-\mathrm{M}|\cdot|\mathrm{P}|=|\mathrm{P}^{-1}(2E-\mathrm{M})\mathrm{P}|=|2E-\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}|$；

C. $|2E-(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})^{\mathrm{T}}|=|(2E-\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})^{\mathrm{T}}|=|2E-\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}|=|2E-\mathrm{M}|$；

D. $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}=\mathrm{M}$ 结论不一定成立； MP不一定等于PM.

2. 设 M、N、P 为同阶矩阵，下列结论成立的有（ D ）.

A. $\mathrm{MN}=\mathrm{NM}$；　　B. $(\mathrm{M}+\mathrm{N})^{-1}=\mathrm{M}^{-1}+\mathrm{N}^{-1}$；

C. 若 $\mathrm{MP}=\mathrm{NP}$，则 $\mathrm{M}=\mathrm{N}$；　　D. $(\mathrm{M}+\mathrm{N})^{\mathrm{T}}=\mathrm{M}^{\mathrm{T}}+\mathrm{N}^{\mathrm{T}}$.

3. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，线性方程组 $\mathrm{A}x=b$ 有解的充分条件为（ A ）.

A. 矩阵 A 行满秩；　　B. 矩阵 A 列满秩；

C. 矩阵 A 的秩小于其行数；　　D. 矩阵 A 的秩小于其列数.

解：A 行满秩 $\Longrightarrow r(\mathrm{A},b)=r(\mathrm{A})\Longleftrightarrow \mathrm{A}x=b$ 有解.

4. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵；若 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})^{\mathrm{T}}$的属于特征值 λ 的特征向量是（ B ）.

A. $\mathrm{P}^{-1}\alpha$；　B. $\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\alpha$；　C. $\mathrm{P}\alpha$；　D. $(\mathrm{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$.

解：已知 $\mathrm{A}\alpha=\lambda\alpha$，且 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}$；记 $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\mathrm{Q}$，则 $(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})^{\mathrm{T}}=\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}$；

则 $\mathrm{PQ}=\mathrm{AP}\Longrightarrow \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}^{\mathrm{T}}=\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$，A 对称

$\Longrightarrow \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}^{\mathrm{T}}=\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\Longrightarrow \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\alpha=\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\alpha=\lambda\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\alpha$.

5. 设向量 α,β,γ 线性无关，α,β,δ 线性相关，下列哪个成立（ C ）.

A. α 必可由 β,γ,δ 线性表示；　B. β 必不可由 α,γ,δ 线性表示；

C. δ 必可由 α,β,γ 线性表示；　D. δ 必不可由 α,β,γ 线性表示.

解：α,β,γ 线性无关，则 α,β 线性无关；又 α,β,δ 线性相关，

则 δ 可由 α,β 线性表示，即 $\delta=k_1\alpha+k_2\beta=k_1\alpha+k_2\beta+0\gamma$.

6. 设 A 是 $n\ (n\geq 2)$阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B；A^*、B^*分别为 A、B 的伴随矩阵，则（ C ）.

A. 交换 A^*的第一列与第二列得 B^*；　B. 交换 A^*的第一行与第二行得 B^*；

C. 交换 A^*的第一列与第二列得 $-B^*$；　D. 交换 A^*的第一行与第二行得 $-B^*$.

解：$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}B$，则 $B=E_{12}A\Longrightarrow\begin{cases}|B|=|E_{12}A|=-|A|\\ B^{-1}=(E_{12}A)^{-1}=A^{-1}E_{12}^{-1}=A^{-1}E_{12}\end{cases}$

于是 $B^*=|B|B^{-1}=-|A|A^{-1}E_{12}=-A^*E_{12}$；

得 $-B^*=A^*E_{12}\Leftrightarrow$ 交换 A^*的第 1 列和第 2 列得到 $-B^*$.

三、计算题(共 4 题，共 28 分)

1. 计算行列式的值：$\begin{vmatrix}-a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$.

解：行列式 D $\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_{n+1}}\begin{vmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n\\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$

$$=(n+1)\cdot(-1)^{n+1+1}\begin{vmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n.$$

2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^*是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.

解：$A^*X=A^{-1}+2X\Longrightarrow(A^*-2I)X=A^{-1}$

$\Longrightarrow A(A^*-2I)X=AA^{-1}=I\Longrightarrow(|A|I-2A)X=I$

$\Longrightarrow X=(|A|I-2A)^{-1}$；又 $|A|=4$，

则 $|A|I-2A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}=2B$，

这里 $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$；从而 $X=(2B)^{-1}=\dfrac{1}{2}B^{-1}$

由 $(B,I)=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1/2&1/2&0\\0&1&0&0&1/2&1/2\\0&0&1&1/2&0&1/2\end{pmatrix}=(I,B^{-1})$，

得 $B^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，于是 $X=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

3. 已知 R^3的两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T$，　$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T$；

$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^T$.

(1) 求基 B_1到基 B_2的过渡矩阵 A；

(2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1下的坐标向量为 $(1,-2,-1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2下的坐标向量.

解：仍记 $B_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$B_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.

(1) 由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A$，即得 $B_2=B_1A$，

于是，$(B_1,B_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&2\\1&1&1&1&-1&0\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-2&-2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{I},A)$

则基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$.

(2) 两种方法：已知 $\boldsymbol{\alpha}_{B_1}=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$

方法 1：$\boldsymbol{\alpha}=B_1\boldsymbol{\alpha}_{B_1}=(1,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，又有 $\boldsymbol{\alpha}=B_2\boldsymbol{\alpha}_{B_2}$，则求解该方程组

$$(B_2,\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&2&-1\\1&-1&0&-2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&7\\0&0&1&-4\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{B_2}=(5,7,-4)^{\mathrm{T}}$.

方法 2：因为 $A\boldsymbol{\alpha}_{B_2}=\boldsymbol{\alpha}_{B_1}$，求解该方程组

$$(A,\boldsymbol{\alpha}_{B_1})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\-1&1&1&-2\\1&-2&-2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&7\\0&0&1&-4\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{B_2}=(5,7,-4)^{\mathrm{T}}$.

4. 求向量组 $\alpha_1=(1,0,1,0)$，$\alpha_2=(2,1,-3,7)$，$\alpha_3=(4,1,-1,7)$，$\alpha_4=(3,1,0,3)$，$\alpha_5=(4,1,3,-1)$ 的秩，及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解：记矩阵 $A=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}},\alpha_4^{\mathrm{T}},\alpha_5^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&1&1&1&1\\1&-3&-1&0&3\\0&7&7&3&-1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}，则$$

(1) 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$；

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

(3) $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，

$\alpha_5=-\alpha_2+2\alpha_4$.

四、证明题(共 1 题，共 8 分)

设 A 为 n 阶方阵，且 $4A^2-\boldsymbol{I}=O$，证明：

(1) A 的特征值只能为 $-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$；(2) $r(2A+\boldsymbol{I})+r(2A-\boldsymbol{I})=n$.

证：

(1) 设 A 的特征值为 λ，则 $4A^2-\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $4\lambda^2-1$，

因为 $4A^2-\boldsymbol{I}=O$，而零矩阵 O 的特征值均为 0，

于是有 $4\lambda^2-1=0 \Longrightarrow \lambda=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$；

(2) $4A^2-\boldsymbol{I}=O \Longrightarrow (2A+\boldsymbol{I})(2A-\boldsymbol{I})=O$，则

① $r(2A+\boldsymbol{I})+r(2A-\boldsymbol{I})\le n$；

② $r(2A+\boldsymbol{I})+r(2A-\boldsymbol{I})=r(2A+\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{I}-2A)$

$\ge r\big(2A+\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{I}-2A)\big)=r(2\boldsymbol{I})=n$；

于是，$r(2A+\boldsymbol{I})+r(2A-\boldsymbol{I})=n$.

五、解方程组（共 1 题，13 分）

当 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

解：系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}0\\3\\\lambda\end{pmatrix}$.

又 $|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)$

①当 $|A|\ne 0$，即当 $\lambda\ne 0$ 且 $\lambda\ne -3$ 时，方程组有唯一解；

②当 $\lambda=0$ 时，增广矩阵

$$(\mathrm{A},b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

方程组出现矛盾方程，则原方程组无解；

③当 $\lambda=-3$ 时，增广矩阵

$$(\mathrm{A},b)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)=(\mathrm{U},d)$$

取 x_3 为自由未知量，

1) 令 $x_3=0$，代入 $\mathrm{U}x=d$，得原方程组的一个特解 $x_0=(-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$；

2) 令 $x_3=1$，代入 $\mathrm{U}x=0$，得 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系 $\xi=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

则原方程组的通解为 $x=x_0+k\xi=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 任意；

综上，$\begin{cases}\text{当 }\lambda\neq0\text{ 且 }\lambda\neq-3\text{ 时，方程组有唯一解；}\\\text{当 }\lambda=0\text{ 时，方程组无解；}\\\text{当 }\lambda=-3\text{ 时，方程组有无穷多解.}\end{cases}$

六、二次型（共 1 题，12 分）

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$ 的秩为 2，

(1) 求 c；

(2) 用正交变换法将二次型化为标准形，并写出对应的正交矩阵.

解：二次型对应的矩阵为 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5&1&2\\1&5&-2\\2&-2&c\end{pmatrix}$，

(1) 已知 $r(\mathrm{A})=2\Longrightarrow|\mathrm{A}|=0$，得 $c=2$；

(2) A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&-1&-2\\-1&\lambda-5&2\\-2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-6)^2$，

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6$，$\lambda_3=0$；

①对于 $\lambda_1=\lambda_2=6$，由 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$，得基础解系 $\begin{cases} \xi_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}} \\ \xi_2 = (2,0,1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$，

1) 正交化：取 $\beta_1 = \xi_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$$令\ \beta_2 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$

2)单位化：令 $\eta_1 = \dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}};$$

②对于特征值 $\lambda_3 = 0$，由 $(\lambda_3 \boldsymbol{I} - \mathrm{A})x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}x = 0$，

即 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$，得基础解系为 $\xi_3 = (-1,1,2)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3 = \dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3 = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $\mathrm{Q} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，则 Q 为正交阵，

且使得 $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ} = \Lambda = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

④令 $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$y = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，做正交变换 $x = \mathrm{Q}y$，

原二次型就化成标准形 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x = y^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ})y = 6y_1^2 + 6y_2^2$.