一、填空题(共 18 分)

1. 设 A 是 3 阶方阵，$|A| = 3$，A^*为 A 的伴随矩阵，则 $|3A^{-1}| = (\quad)$，

$|A^*| = (\quad)$，$|3A^* - 7A^{-1}| = (\quad)$.

2. 设 $\alpha = (1,-2,3)^T$，$\beta = (-1,\frac{1}{2},0)$，$A = \alpha\beta$，则 $|A^{100}| = (\quad)$.

3. 设向量 $\alpha = \begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$是矩阵 $A = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$的一个特征向量，则 $k = (\quad)$.

4. A 为 3 阶实对称矩阵，向量 $\xi_1 = (1,2,5)^T$，$\xi_1 = (k,2k,3)^T$ 是分别对应于特征值 2 和 3 的特征向量，则 $k = (\quad)$.

5. 设 η_1,η_2,η_3 为 4 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解，$r(A) = 3$，已知 $\eta_1 + \eta_2 = (3,4,5,6)^T, \eta_3 = (1,2,3,4)^T$，则 $Ax = b$ 的一般解为(　　).

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 M、P 为 n 阶矩阵，且 P 可逆，则下列运算不正确的是(　).

A. $|M| = |P^{-1}MP|$；　　B. $|2E - M| = |2E - P^{-1}MP|$；

C. $|2E - M| = |2E - (P^{-1}MP)^T|$；　D. $P^{-1}MP = M$.

2. 设 M、N、P 为同阶矩阵，下列结论成立的有(　).

A. $MN = NM$；　　B. $(M+N)^{-1} = M^{-1} + N^{-1}$；

C. 若 $MP = NP$，则 $M = N$；　D. $(M+N)^T = M^T + N^T$.

3. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分条件为(　).

A. 矩阵 A 行满秩；　　B. 矩阵 A 列满秩；

C. 矩阵 A 的秩小于其行数；　D. 矩阵 A 的秩小于其列数.

4. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵；若 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$的属于特征值 λ 的特征向量是(　).

A. $P^{-1}\alpha$；　B. $P^T\alpha$；　C. $P\alpha$；　D. $(P^{-1})^T\alpha$.

5. 设向量 α,β,γ 线性无关，α,β,δ 线性相关，下列哪个成立(　).

A. α 必可由 β,γ,δ 线性表示； B. β 必不可由 α,γ,δ 线性表示；

C. δ 必可由 α,β,γ 线性表示； D. δ 必不可由 α,β,γ 线性表示.

6. 设 A 是 $n\ (n\geq 2)$阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B；A^*、B^*分别为 A、B 的伴随矩阵，则（ ）.

A. 交换 A^*的第一列与第二列得 B^*； B. 交换 A^*的第一行与第二行得 B^*；

C. 交换 A^*的第一列与第二列得 $-B^*$； D. 交换 A^*的第一行与第二行得 $-B^*$.

三、计算题(共 4 题，共 28 分)

1. 计算行列式的值：$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^*是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.

3. 已知 R^3的两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求基 B_1到基 B_2的过渡矩阵 A；

(2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1下的坐标向量为 $(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2下的坐标向量.

4. 求向量组 $\alpha_1=(1,0,1,0)$，$\alpha_2=(2,1,-3,7)$，$\alpha_3=(4,1,-1,7)$，$\alpha_4=(3,1,0,3)$，$\alpha_5=(4,1,3,-1)$ 的秩，及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

四、证明题(共 1 题，共 8 分)

设 A 为 n 阶方阵，且 $4A^2-\boldsymbol{I}=O$，证明：

(1) A 的特征值只能为 $-\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{1}{2}$；(2) $r(2A+\boldsymbol{I})+r(2A-\boldsymbol{I})=n$.

五、解方程组（共 1 题，13 分）

当 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

六、二次型（共 1 题，12 分）

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$ 的秩为 2，

(1)求 c；

(2)用正交变换法将二次型化为标准形，并写出对应的正交矩阵.