一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&3&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&-3&2\end{pmatrix}$，则 $AB^{\mathrm{T}}=$______.

2. 设 A,B 为 3 阶方阵，I为 3 阶单位矩阵，$|A|=2$，$A^3+ABA+2I=0$，

则 $|A+B|$ 的值为______.

3. 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解，$\mathrm{r}(A)=3$，

$\alpha_1+2\alpha_2=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，则 $Ax=b$ 的通解为______.

4. 设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&1&b\\4&-2&1\end{pmatrix}$，已知 2 是 A 的二重特征值，则 $b=$______.

5. 3 阶矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&a&3\\2&-1&1\end{pmatrix}$，B 为非零矩阵，且 $\mathrm{AB}=\mathrm{O}$，则 $a=$ ______.

6. 设 A 为 3 阶方阵，$|\mathrm{A}|=3$，A^*为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第三行

得方阵 B，则 $|\mathrm{BA}^*|=$______.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 下列方阵中，属于初等矩阵的是(　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A+2I=O$，则 $(A-I)^{-1}$为(　).

(A) $\frac{1}{4}(A+2I)^{-1}$　(B) $\frac{1}{4}(A+2I)$　(C) $-\frac{1}{4}(A+2I)^{-1}$　(D) $-\frac{1}{4}(A+2I)$

3. 设 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是 4 阶方阵，若$(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$是齐次线性方程组 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系，则 $\mathrm{A}^*x=0$ 的基础解系可为(　).

(A) α_1,α_2　(B) α_1,α_3　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　(D) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

4. 下列说法正确的是(　).

(A) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m>2)$线性无关的充要条件是其中任意两个向量均线性无关.

(B) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m>2)$线性相关的充要条件是其中任意 $m-1$个向量线性相关.

(C) 若 α_1,α_2 线性相关，α_3,α_4 线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_4$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

5. 设 A, B, C 为 n 阶方阵，则下列结论成立的是(　).

(A) $\mathrm{ABC}\neq O$ 当且仅当 $\mathrm{AB}\neq O$ 且 $\mathrm{BC}\neq O$　　(B) $\begin{vmatrix}\mathrm{A} & O\\ \mathrm{C} & \mathrm{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathrm{B} & O\\ O & \mathrm{A}\end{vmatrix}$

(C) A 为单位矩阵当且仅当 $|\mathrm{A}|=1$　　(D) $|\mathrm{A}+\mathrm{B}|=|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|$

6. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，且 $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}=O$，若 $r(\mathrm{A})=2$，则 A 相似于(　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

三、计算题(共 4 题，共 28 分)

1. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

2. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,2,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-1,4,2,4)^{\mathrm{T}}$,

$\alpha_4=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_5=(2,0,1,2)^{\mathrm{T}}$. 求此向量组的秩及一个极大线性无关组，

并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

3. 设 α_1,α_2 是 R^2中的一组基，求从基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$ 到基 $3\alpha_1-\alpha_2,5\alpha_1-\alpha_2$ 的

过渡矩阵.

4. 设方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$，且 $A^*B=A^{-1}+B$，求 B.

四、证明题(共 1 题， 8 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方阵 A 对应于互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，

证明：$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 不是 A 的特征向量.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

$$\begin{cases} x_2+2x_3+2x_4=-1 \\ x_1+x_2+2x_3-x_4=-1 \\ ax_2+2x_3+bx_4=b-1 \\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+1 \end{cases}$$

(1) 讨论 a,b 取何值时，此方程组无解，有无穷多解，有唯一解；

(2) 当方程组有无穷解时，求其一般解.

六、二次型（共 1 题，14 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$.

(1) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的实对称阵的所有特征值；

(2) 若 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范型为 $z_1^2+z_2^2$，求 a 的值；

(3) 设 a 取(2)中的值，写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 通过正交变换法化成的标准型，

以及相应的正交矩阵.