一、填空题(共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

1. 设 n 阶方阵 A、 B、C 满足 $\mathrm{ABC}=\boldsymbol{I}$，则 $\mathrm{B}^{-1}=($　$)$.

2. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\3&0&4&1&2\\1&1&1&1&1\\1&1&0&2&3\\5&4&3&2&1\end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}+A_{45}=($　$)$.

3. 设 3 阶方阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\alpha\\2\gamma_1\\3\gamma_2\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}\beta\\\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}$，且 $|\mathrm{A}|=6$，$|\mathrm{B}|=2$，则 $|\mathrm{A}-\mathrm{B}|=($　$)$.

4. 若 3 阶方阵 A 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，

   则 $|\mathrm{A}^{-1}+2\boldsymbol{I}|=($　$)$.

5. 设 3 阶矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&a&3\\2&-1&1\end{pmatrix}$，B 为非零矩阵，且 $\mathrm{AB}=\mathrm{O}$，则 $a=$(　).

二、选择题(共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

1. 设 A、 B 为 n 阶方阵，则下列选项中正确的是(　).

   (A)若 A、 B 都可逆，则 $\mathrm{A}^*+\mathrm{B}^*$ 一定可逆；

   (B)若 A、 B 都不可逆，则 $\mathrm{A}^*+\mathrm{B}^*$ 一定不可逆；

   (C)若 A 可逆，但 B 不可逆，则 $\mathrm{A}^*+\mathrm{B}^*$ 一定不可逆；

   (D)以上三选项都不对.

2. 设 β_1,β_2 是方程组 $\mathrm{A}x=b$ 的两个不同解，α_1,α_2 是方程组 $\mathrm{A}x=0$ 的基础解系，则 $\mathrm{A}x=b$ 的一般解为(　).

   (A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$；　　(B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_2-\alpha_1)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$；

   (C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$；　　(D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

3. A、B 为 n 阶矩阵，且 $\mathrm{A}\sim\mathrm{B}$，则(　).

   (A) $\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}=\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{B}$；　(B)A 和 B 有相同的特征值和特征向量；

   (C) $\mathrm{AB}\sim\mathrm{B}^2$；　　(D)对任意常数 t，均有 $tE-\mathrm{A}\sim tE-\mathrm{B}$.

4. 若 n 阶矩阵 A 经过若干次初等变换化为 B，则必有(　)

(A) $r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{B})$；　　(B) 存在可逆阵 Q，使得 $\mathrm{B} = \mathrm{AQ}$；

(C) 方程 $\mathrm{A}X = 0$ 与 $\mathrm{B}X = 0$ 同解；　(D) $|\mathrm{A}| = |\mathrm{B}|$；

5. 矩阵 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1，则 $a = (\quad)$.

(A) 1　(B) -1　(C) $-\frac{1}{3}$　(D) 3

三、计算和证明(共 36 分，每题 6 分)

1. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

2. 矩阵 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $\mathrm{AX} = \mathrm{A} + 2\mathrm{X}$，求矩阵 X.

3. 设 A 是 $n \times m$ 矩阵，B 是 $m \times n$ 矩阵（$n < m$），又 $\mathrm{AB} = \boldsymbol{I}$（$n$ 阶单位矩阵），

证明：B 的列向量组线性无关.

4. 求向量组 $\alpha_1 = (1,3,2,0)$，$\alpha_2 = (7,0,14,3)$，$\alpha_3 = (2,-1,0,1)$，$\alpha_4 = (5,1,6,2)$

的秩，及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

5. 设 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，分析 A 是否可对角化；

若能，求出相应的可逆矩阵 P 与对角阵 Λ，使得 $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \Lambda$；

若不能，说明理由.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 R^3 的一组基，求基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

的过渡矩阵.

四、证明题（8 分）

设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 $k(k \geq 2)$，使得 $\mathrm{A}^k\alpha = 0$, 但 $\mathrm{A}^{k-1}\alpha \neq 0$，这里 α 为 n 维非零列向量，证明：$\alpha, \mathrm{A}\alpha, \cdots, \mathrm{A}^{k-1}\alpha$ 线性无关.

五、（13 分）

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$，已知方程组 $Ax = b$ 无解，

(1) 求 a 的值；

(2) 求方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}\beta$ 的一般解.

六、（13 分）

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$的规范形为 $z_1^2 + z_2^2$，

(1) 求 a 的值；

(2) 用正交变换法将二次型化为标准形，并写出对应的正交矩阵.