一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$，且 $AC=B$，则 $C=$________.

2. 设 α_1,α_2 为两个线性无关的 3 维列向量，方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$，向量 $\beta=2\alpha_1+\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为________.

3. 设方阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 3 & -1 & -3\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值为 a,b 和 c，则 $\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}=$________.

4. 设 3 阶方阵 $A=\alpha\beta^T$，其中 $\alpha=(2,3,1)^T$，$\beta=(1,0,-1)^T$，则 $A^6=$________.

5. 设 2 阶方阵 A 的秩为 1，且满足 $A^2+2A=O$，则 A 的特征值为________.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范型为________.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，则方程组 $(AB)x=0$ 满足(　).

A. 当 $m>n$ 时，仅有零解　　B. 当 $m>n$ 时，有非零解

C. 当 $m<n$ 时，仅有零解　　D. 当 $m<n$ 时，有非零解

2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件为(　).

A. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 均不为零向量

B. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意两个向量的分量不成比例

C. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意一个向量都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示

D. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关中有一部分向量线性无关

3. n 阶非零矩阵 A,B 满足 $AB=O$，则 A 的秩 $r(A)$ 和 B 的秩 $r(B)$ 必有(　).

A．$r(A)=0$ 或 $r(B)=0$　　B．$r(A)=n$ 或 $r(B)=n$

C．$r(A)<n$ 或 $r(B)<n$　　D．$r(A)>0$ 或 $r(B)>0$

4. 设 A 为 3 阶方阵，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=-\alpha_2$，$A\alpha_3=-\alpha_3$，若要找 3 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则 P 可以取（　）.

A．$(\alpha_1,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_2-3\alpha_3)$　　B．$(\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_3)$

C．$(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$　　D．$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$

5. 设 A,B 为 3 阶方阵，P 为 3 阶正交矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 A 与 B 一定满足（　）.

A. 不相似也不合同　B. 合同但不相似　C. 相似但不合同　D. 相似且合同

6. 设 A,B 均为 $n(n\geq 3)$阶方阵，且秩$(A)=n$，秩$(B)=n-1$，则 AB 的伴随矩阵 $(AB)^*$ 的秩为（　）.

A．0　　B．1　　C．$n-1$　　D．n

三、计算题(共 3 题，每题 10 分，共 30 分)

1. 设向量组 $\alpha_1=(1,3,1,2)^T$，$\alpha_2=(-1,-2,1,-3)^T$，$\alpha_3=(-1,-1,3,-4)^T$，$\alpha_4=(1,3,3,4)^T$，$\alpha_5=(1,5,9,4)^T$；求向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

2. 已知 R^3的两组基为 $\mathbf{B}_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$\mathbf{B}_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,-3,2)^T$；

$\beta_1=(0,1,1)^T$，$\beta_2=(1,1,0)^T$，$\beta_3=(1,0,2)^T$.

(1) 求基 $\mathbf{B}_1$ 到基 $\mathbf{B}_2$ 的过渡矩阵；

(2) 若向量 γ 在基 $\mathbf{B}_2$ 下的坐标为 $(1,1,2)^T$，求 γ 在基 $\mathbf{B}_1$ 下的坐标.

3. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

四、证明题(共 1 题， 8 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，

证明：存在 $m\le n$，使得第 m 个向量 α_m可由前 $m-1$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

讨论 a,b 取何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=5 \\ x_2+(a+3)x_3+bx_4=b-3 \\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+3 \end{cases}$

无解、有无穷多解、有唯一解，并在有无穷多解时写出方程组的通解.

六、二次型（共 1 题，12 分）

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的规范型为 z_1^2.

(1) 求 a 的值；

(2) 利用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准型，并写出相应的正交矩阵.