3. A L U

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 & \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ & \frac{5}{2} & -2 & 0 \\ & & \frac{6}{5} & -1 \\ & & & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

记为$A=LU$，化$Ax=b$为 $\begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$

解 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 & \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 得 $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ \frac{8}{5} \\ 5 \end{bmatrix}$

解 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ & \frac{5}{2} & -2 & 0 \\ & & \frac{6}{5} & -1 \\ & & & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ \frac{8}{5} \\ 5 \end{bmatrix}$ 得 $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ \sqrt{3} & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{6} \\ & & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} d_1 & & \\ l_{21}d_1 & d_2 & \\ l_{31}d_1 & l_{32}d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$a_{11} = d_1 \Rightarrow d_1 = 4$

$a_{21} = l_{21} d_1 \Rightarrow l_{21} d_1 = -2 \Rightarrow l_{21} = -\frac{1}{2}$

$a_{22} = l_{21}^2 d_1 + d_2 \Rightarrow \frac{1}{4} \times 4 + d_2 = 17 \Rightarrow d_2 = 16$

$a_{31} = l_{31} d_1 = -4 \Rightarrow l_{31} = -1$

$a_{32} = l_{31} l_{21} d_1 + l_{32} d_2 \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{2}$

$a_{33} = l_{31}^2 d_1 + l_{32}^2 d_2 + d_3 \Rightarrow 4 + \frac{1}{4} \times 16 + d_3 = 9 \Rightarrow d_3 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & & \\ -2 & 16 & \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

解 $\begin{bmatrix} 4 & & \\ -2 & 16 & \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ 解得 $y = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \cancel{\ } \end{bmatrix} -1$

解 $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ 得 $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. $\mathrm{cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \geq \|A^{-1} \cdot A\| = \|I\| = 1$

故 $\mathrm{cond}(A) \geq 1$