习题一

1. $f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，$f'''(x)=-\cos x$，

$f''''(x)=\sin x$，$f'''''(x)=\cos x$

$$P_5(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f'''''(x_0)}{5!}(x-x_0)^5$$

$$\overset{x_0=0}{=\!=}\ x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{5}x^5$$

$$R^{(5)}(x)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-x_0)^6=-\frac{\sin\xi}{6!}x^6$$

$$-\frac{1}{6!}x^6\le R^{(5)}(x)\le 0$$

5. 当$f(x)$次数$\le n$时，$f^{(n+1)}(x)=0$，则$R_n(x)=0$，插值余项为0，故n次插值多项式对于次数$\le n$的多项式是精确的。

6. (1) $P_1(x)$过$(-1,-1)$ $(1,1)$

故$P_1(x)=x$

(2) 设$P_2(x)=ax^2+bx+c$，$P_2(x)$过点$(-1,-1)$ $(0,0)$ $(1,1)$

故$P_2(x)=x$

(3) $$P_3(x)=\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)}(-1)+\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)}\cdot 0+\frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)}\cdot 1+\frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 8$$

$$=\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-\frac{(x+1)x(x-2)}{2}+\frac{4}{3}(x+1)x(x-1)$$

$$=x^3$$

7. $P_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\cdot 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\cdot 2+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\cdot 3$

$=\frac{1}{2}(x^2-3x+2)-2x(x-2)+\frac{3}{2}x(x-1)$

$=\frac{1}{2}(x^2-3x+2)-2(x^2-2x)+\frac{3}{2}(x^2-x)$

$=x+1$

9. 取节点 x_0, x_1, x_2 对 $f(x)=1$ 进行插值.

$P_2(x)=l_0(x)+l_1(x)+l_2(x)$

又∵ $f(x)$ 次数为 0 $<n=2$

故 $P_2(x)=f(x)$

故 $l_0(x)+l_1(x)+l_2(x)=1$

$l_0(x)+l_1(x)+l_2(x)-1=0$

11. (1) 取 $i=0,1,2$ 进行二次插值

$$\begin{cases} a\times 0.46^2+b\times 0.46+c=0.4846555 \\ a\times 0.47^2+b\times 0.47+c=0.4937452 \\ a\times 0.48^2+b\times 0.48+c=0.5027498 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-0.4255 \\ b=1.304685 \\ c=-0.0254638 \end{cases}$

$P_2(x)=-0.4255x^2+1.304685x-0.0254638$

$P_2(0.472)=0.49552928$

(2) 解 $0.5 = -0.4255x^2 + 1.304685x - 0.0254638$

$x = 0.476936$

12. (1) $n=3$，$f(x)$ 为 3 次多项式，$f^{(4)}(x) = 0$

故 $R_3(x) = 0$

(2) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$，$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 12x$

$f^{(3)}(x) = 24x - 12$，$f^{(4)}(x) = 24$

$R_3(x) = \frac{24}{4!}(x+1)(x-1)(x-3)(x-4)$

$= x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12$

14. $f(x_0) = 1$，$f(x_1) = e^{-1}$

$P_1(x)$ 过点 $(0,1)$ $(1, e^{-1})$

故 $P_1(x) = (e^{-1}-1)x + 1$

$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1) = \frac{e^{-\xi}}{2}x(x-1) \le \frac{1}{2}(x^2-x)$

年 月 日 第 页