中国海洋大学 2007-2013 年线性代数试卷合集

【1】中国海洋大学　2007-2008 学年 第 1 学期 期末考试试卷

数学科学学院《线性代数》课程试题(A 卷)

一、　填空 （每空 4 分，共 20 分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} =$ ________________

2.若 $R(A)=2, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $R(AB)=$______.

3. A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 A=__________

4.从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 ____________

5.若 $|A|=\dfrac{1}{2}$，A^* 是 4 阶方阵 A 的伴随矩阵，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ _______　.

二、　选择题　（每题 5 分，共 40 分）

1.已知 A,B 是 n 阶方阵，则下列结论中正确的是(　)

(A) $AB\neq 0 \Leftrightarrow A\neq 0$ 且 $B\neq 0$　　(B) $|A|=0 \Leftrightarrow A=0$

(C) $|AB|=0 \Leftrightarrow |A|=0$ 或 $|B|=0$　　(D) $A=I \Leftrightarrow |A|=1$

2.设 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有(　).

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

(C) $a\neq b$ 或 $a+2b=0$　　(D) $a\neq b$ 或 $a+2b\neq 0$

4.设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$，其中 E 为三阶单位矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则

3. λ是n阶可逆矩阵A的一个特征值，则A的伴随矩阵A^*的特征值之一是（　　）

（A）　$\lambda^{-1}|A|^n$　（B）$\lambda^{-1}|A|$　　（C）$\lambda|A|$　（D）$\lambda|A|^n$

$|B|=($　　$)$.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 2　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) 4

5. A是n阶方阵,且$A^2=2A$,则未必有(　　).

(A) A 可逆，　　(B) $A-E$ 可逆　(C) $A+E$ 可逆　　(D) $A-3E$ 可逆

6.设　A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，则线性方程组$(AB)X=0$　（　　）.

（A）当　$n>m$时，仅有零解　　（B）当　$n>m$时，必有非零解

（C）当　$m>n$时，仅有零解　　（D）当$m>n$时，必有非零解

7.若向量组　α,β,γ线性无关；α,β,δ线性相关，则（　　）

（A）α必可由β,γ,δ线性表示　　（B）β必不可由α,γ,δ线性表示

（C）δ必可由α,β,γ线性表示　　（D）δ必不可由α,β,γ线性表示

8.　二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+tx_3^2$，

若其对称矩阵的秩为 2，则t值应为（　　）

（A）　0　（B）$\frac{7}{8}$　（C）$\frac{8}{7}$　（D）　1.

三、若$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关.　(10 分)

四、设$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$求正交阵$T$，使$T^{-1}AT$ 为对角阵.（10 分）

五、（10 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2+2bx_1x_3-2x_3^2,(b>0)$， 其中

A的特征值之和为 1，特征值之积为-12.

（1）求 a,b 的值；

（2）利用正交变法将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵.

六、（10 分）设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

中国海洋大学　2007-2008 学年 第 1 学期 期末考试试卷答案

一、填空题

1、$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}k!$

2、$R(AB)=$ 2

3、$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4、$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

5、 32/81

二、选择题

CCBAA

DCB

三、证：反证法 假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性相关，存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4,k_5 使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+k_5\alpha_5=0$ 成立

不妨设 $k_1\neq 0$ 所以 α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示，

从而 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$ 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$

线性表示，且 $5>4$，所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$

线性相关与条件矛盾，因此，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关

四、解：$|\lambda I - A| = (\lambda-2)^2(\lambda+7)$，得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7.$

$\lambda_1=\lambda_2=2,$ 所对应的特征向量 $X_1=(2,-1,0)^T, X_2=(2,0,1)^T$

用施密特正交化法得 $\beta_1 = X_1, \beta_2 = \frac{1}{5}(2,4,5)^T$ 在单位化得

$$Y_1=(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{-\sqrt{5}}{5},0)^T, Y_2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T.$$

$\lambda_3=-7.$ 的特征向量是 $X_3=(1,2,-2)^T$，单位化得 $Y_3=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3})^T$

取正交阵

$$T=(Y_1,Y_2,Y_3)=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ 则 } T^{-1}AT = diag(2,2,-7)$$

五、解：（1）$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 设 A 的特征值为 $\lambda_i\,(i=1,2,3)$，有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = a+2+(-2)=1,$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| = -4a-2b^2=-12$$

得 $a=1, b=2$

所以，$|A-\lambda I| = (\lambda-2)^2(\lambda+3)$

从而，$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3.$

$\lambda_1=\lambda_2=2,$ 所对应的特征向量有 $X_1=(2,0,1)^T, X_2=(0,1,0)^T$

$\lambda_3=-3$ 所对应的特征向量 $X_3=(1,0,-2)^T$

因为，X_1,X_2,X_3俩俩正交，单位化得$Y_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})^T,Y_2=(0,1,0)^T$，

$Y_3=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}})^T$

因此，$Q=(Y_1,Y_2,Y_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$。

二次型的标准型为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$

六、**解**：因为求方程组和方程的公共解，联立方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$ 的解

有增广矩阵$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & a & 0\\ 1 & 4 & a^2 & 0\\ 1 & 2 & 1 & a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1-a\\ 0 & 1 & 0 & a-1\\ 0 & 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2)\end{pmatrix}=B$

当$(a-1)(a-2)=0$时，即$a=1$或$a=2$.

当$a=1$时$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，因此有公共解为$X=k(-1,0,1)^T$，可为任意常数

当$a=2$时

$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，有公共解为$X=k(0,1,-1)^T$。

【2】中国海洋大学　2007-2008 学年 第 1 学期 期末考试试卷

数学科学学院《线性代数》课程试题(B 卷)

.

一、 填空 （每空 4 分，共 20 分）

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,若矩阵 A 的秩为 $n-1$，则 a 必为________ .

2.设 n 阶矩阵 A 非奇异（$n\geq 2$），A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^*=$_____.

3. 有 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ 且 $|A|=2,|B|=\dfrac{1}{2}$,

则 $|A+B|=$_________ .

4.设 λ 是 n 阶矩阵 A 的特征值，则 $r(\lambda I-A)$ ____ .

5.若 $|A|=\dfrac{1}{2}$，A^* 是 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ ____ .

二、选择题 （每题 5 分，共 40 分）

1.已知 A,B,C 是 n 阶方阵，满足等式 $B=E+AB,C=A+CA$，则 $B-C$ 为( )

(A) E　　(B) $-E$　　(C) A　　(D) $-A$　　（E 为 n 阶单位阵）

2.设 $A=\begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有( ).

(A) $a=c$ 或 $a+2c=0$　　(B) $a=c$ 或 $a+2c\neq 0$
(C) $a\neq c$ 或 $a+2c=0$　　(D) $a\neq c$ 或 $a+2c\neq 0$

3.已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组 （ ）

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关

(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

4. 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$,若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系( ).

(A)不存在，　　(B)仅含一个非零解向量
(C)含有两个线性无关的解向量　(D) 含有三个线性无关的解向量

5.设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$, $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$

$\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$.如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$（　）

（A）3　（B）2　(C)　4　(D)　1

6.设三阶方阵 A,B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 E 为三阶单位矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵,

$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $|B|=$(　　).

(A) $\dfrac{1}{9}$　　(B)9　　(C)　$\dfrac{1}{3}$　　(D) 3

7.　A,B 都是 n 阶非零矩阵，且　$AB=0$，则 A,B 的秩（　）

（A）必有一个为零（B）都小于 n　（C）一个小于 n，一个等于 n（D）都等于 n

8.　A　是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是（　）

（A）　$P^{-1}\alpha$　（B）$P^T\alpha$　（C）　$P\alpha$　（D）$(P^{-1})^T\alpha$.

三、若 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$ 线性无关，

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关.　(10 分)

四、设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵，

并计算行列式 $|A-E|$ 的值.(10 分)

五、（10 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2(1+a)x_1x_2+2x_3^2$，

的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）利用正交变换法将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵 Q.

六、（10 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求a的值及所有公共解.

中国海洋大学　2007-2008 学年 第 1 学期 期末考试试卷答案

数学科学学院《线性代数》课程试题(B 卷)

一、填空 （每空 4 分，共 20 分）

1、$\dfrac{1}{n-1}$　2、$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$　3、10　4、$r(\lambda I-A)<n$　5、16/27

二、选择题 （每题 5 分，共 40 分）

1、(A) 2、(C) 3、（C ） 4、(B) 5、（ B ） 6、(A). 7、（ B ）8、（ B ）

三、证：反证法 假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性相关，存在不全为零的数$k_1,k_2,k_3,k_4,k_5$使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+k_5\alpha_5=0$成立

不妨设$k_1\neq 0$ 所以α_1可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性表示，

从而$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$

线性表示，且$5>4$，所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$

线性相关与条件矛盾，因此，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关

四、解：A 的特征多项式$|\lambda I-A|=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$

所以，$\lambda_1=\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2.$

当$\lambda_1=\lambda_2=a+1.$时可得特征向量，$X_1=(1,1,0)^T,X_2=(1,0,1)^T$

当$\lambda_3=a-2.$时可得特征向量为$X_3=(-1,1,1)^T$.

令$P=\left(X_1,X_2,X_3\right)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\0&a+1&0\\0&0&a-2\end{pmatrix}$

$|A-E| = a^2(a-3)$.

五、解：（1）因为二次型 f 秩为 2，对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 得秩为 2，所以有

$2\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix} = -8a = 0$ 得 $a=0$.（2）当 $a=0$ 时 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ ，

$|\lambda E - A| = (\lambda-2)^2\lambda$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=0.$ $\lambda_1=\lambda_2=2,$ 所对应的特征向量

$X_1=(1,1,0)^T, X_2=(0,0,1)^T$ $\lambda_3=0$ 的特征向量是 $X_3=(-1,1,0)^T$ 。有因为上面三个向量俩

俩正交，单位化得 $Y_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T, Y_2=(0,0,1)^T, Y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$ ，

$Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，标准型 $f=2y_1^2+2y_2^2$

六、**解**：因为求方程组和方程的公共解，联立方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$ 的解

有增广矩阵 $(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & a & 0\\ 1 & 4 & a^2 & 0\\ 1 & 2 & 1 & a-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1-a\\ 0 & 1 & 0 & a-1\\ 0 & 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2)\end{pmatrix}=B$

当 $(a-1)(a-2)=0$ 时，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，因此有公共解为 $X=k(-1,0,1)^T$ ，可为任意常数

当 $a=2$ 时 $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，有公共解为 $X=k(0,1,-1)^T$。

【3】中国海洋大学　2007-2008 学年 第 2 学期 期末考试试卷

数学科学学院《线性代数》课程试题(A 卷)

考试说明：本课程为闭卷考试，考试时间 100 分钟。 满分为：100 分

一．填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．设 R^3 的基为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的坐标为____________ 。

2．已知方阵 A，且满足方程 $A^2-A-2I=0$，则 A 的逆矩阵 $A^{-1}=$____________。

3. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，向量 $\xi_1=(1,2,5)^T,\xi_2=(k,2k,3)^T$ 分别对应于特征值 2 和 3 的特征向量，则 $k=$________。

4．若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&t&6\end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)=2$，则 $t=$_____________ 。

5．设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=2,|B|=3$，则 $|2AB^{-1}|=$____________ 。

二．单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m>2)$ 线性相关的充要条件是(　　)。

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有两个向量成正比；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个零向量；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余的向量线性表示；

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任一部分组线性相关。

2．已知 n 阶行列式 $|A|=0$，则下列表述正确的是（　　）。

（A）行列式 $|A|$ 主对角线上的元素全为零；

（B）A 的行向量组线性相关；

（C）方程 $AX=0$ 仅有零解；

（D）A^* 的秩为 n。

3．设 A,B,C 为同阶方阵，下列结论成立的有（　　）。

(A）$AB=BA$；　　　　　　　　（B）$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$；

（C）若 $AC=BC$，则 $B=C$；　　　（D）$(A+B)^T=A^T+B^T$。

4．已知 n 元非齐次线性方程 $AX=b$，$AX=0$ 为方程 $AX=b$ 对应的齐次线性方程组，则有（　　）。

（A）若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 有惟一解；

（B）$AX=b$ 有惟一解的充要条件是 $r(A)=n$；

（C）$AX=b$ 有两个不同的解，则 $AX=0$ 有无穷多解；

（D）$AX=b$ 有两个不同的解，则 $AX=0$ 的基础解系中含有两个以上向量。

5．行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充要条件是（　　）。

（A）$k\neq -1$；　（B）$k\neq 3$；（C）$k\neq -1$ 或 $k\neq 3$；（D）$k\neq -1$ 且 $k\neq 3$。

三．计算下列各题（32 分）

1. 求 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

2．设矩阵 B 满足方程 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，求矩阵 B。

3．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，求 $A+B$，$3A-2B$ 及 AB^T。

4．求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

四．求向量组 $\alpha_1=(-1,-1,0,0)^T,\alpha_2=(1,2,1,-1)^T,\alpha_3=(0,1,1,-1)^T,\alpha_4=(1,3,2,1)^T$，$\alpha_5=(2,6,4,-1)^T$ 的一个极大无关组，并将其余向量用这个极大无关组线性表示。（10 分）

五. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$，利用正交变换法将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵。（10 分）

六．设线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=0 \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1+x_2-2x_3-x_4=a \end{cases}$ 试确定a的值，使方程组有解，并求出其全部的解。（10 分）

七．（8 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\ (n\ge 3)$中，前$n-1$个向量线性相关，后$n-1$个向量线性无关，试证明：

（1）α_1可表示为$\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合；

（2）α_n **不能**表示为$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合。

2007-2008 学年 第 2 学期《线性代数》A 卷答案

一.填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．$(-1,-1,3)^T$；2． $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I)$；3． $k=-3$；4． $t=3$；5． $\left|2AB^{-1}\right|=\frac{16}{3}$。

二.选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．C; 2．B； 3．D； 4．C； 5．D。

三．计算下列各题（解法不唯一，答案仅供参考，下同。）

1．$(-1)^{n-1}(n-1)$。2． $B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$。

3．$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, 3A-2B=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, $AB^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$。

4．$|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$，得 $\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=$ 。-1 所对应的特征向量 $(-1,2,0)^T,(-1,0,1)^T$，$\lambda_3=8$所对应的特征向量$(2,1,2)^T$。

四．解：作矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，对其进行初等行变换化为阶梯形矩阵，

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

极大无关组为$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$，且$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4$。

五．解：二次型对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，特征多项式为$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)^2$，

从而，$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$. $\lambda_1=\lambda_2=2$所对应的特征向量有$(0,1,0)^T$及$(1,0,1)^T$。$\lambda_3=0$所对应的特征向量$(-1,0,1)^T$。正交单位化后得

$$Y_1=X_1, Y_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T, Y_3=(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T,$$

因此， $Q=(Y_1,Y_2,Y_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 。二次型的标准型为$f=2y_1^2+2y_2^2$。

六．解：$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\0&-5&1&5&1\\0&0&0&0&a-1\end{pmatrix}$，因此，当$a=1$时，方程组有解。

一般解为：$X=\left(\frac{2}{5}, \quad -\frac{1}{5}, \quad 0, \quad 0\right)^T+k_1\left(\frac{3}{5}, \quad \frac{1}{5}, \quad 1, \quad 0\right)^T+k_2\left(0, \quad 1, \quad 0, \quad 1\right)^T$。

七．证明：（1）由题设知$\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，又$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，所以α_1可表示为$\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合。

（2）反证法。若α_n 能表示为$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的线性组合，由（1），α_n 能表示为$\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$的线性组合，所以$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，矛盾。

【4】中国海洋大学　2007-2008 学年 第 2 学期 期末考试试卷

数学科学学院《线性代数》课程试题(B 卷)

考试说明：本课程为闭卷考试，考试时间 100 分钟。 满分为：100 分

一、填空题（每题 3 分，共 12 分）

1．若方程$\begin{cases}3x-y-z=0\\ \quad 4y+z=0\\ kx-5y-z=0\end{cases}$有非零解，则$k=$____________ 。

2．向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\5\\t\end{pmatrix}$线性相关，则$t=$____________。

3. 从R^3的自然基：$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$到基：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$的过渡矩阵为____________。

4．已知$\lambda=0$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&6\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$的一个特征值，则$a=$__________。

二、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1． 设A为$m\times n$矩阵，$r(A)=m<n$，则（　　　）。

（A）A的任意一个m阶子式都不为0；
（B）A的任意m个列向量线性无关；
（C）非齐次线性方程$AX=b$有无穷多解；
（D）A通过初等行变换可化为$(I_m,0)$的形式，其中I_m为m阶单位矩阵。

2．已知n阶方阵A,B，满足$AB=0$，则有（　　　）。

（A）$A=0$或$B=0$；　　（B）$A+B=0$；

（C）$|A|=0$或$|B|=0$；　　（D）$|A|+|B|=0$。

3．设A,B,C为n阶方阵，且$ABC=I$，下列结论成立的有（　　）。

(A）$BAC=I$；　　（B）$BCA=I$；
（C）$ACB=I$；　　（D）$CBA=I$。

4. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$, 初等矩阵$P_1,P_2$为，

$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，　$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则有（　　）。

（A）$AP_1P_2=B$；　（B）$AP_2P_1=B$；　（C）$P_1P_2A=B$；　（D）$P_2P_1A=B$。

5．已知矩阵A与B相似，下列结论**不正确**的是（　　）。

（A）$|A|=|B|$；　（B）$r(A)=r(B)$；

（C）A与B有相同的特征值与特征向量；

（D）若A可逆，则B可逆，且A^{-1}与B^{-1}相似。

三．计算下列各题（32 分）

1．求 4 阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值。

2．设A,B为 3 阶矩阵，且$|A|=2, |B|=3$，求$|2A|, |A^{-1}|, |(A^TB)^2|, |3A^{-1}-2A^*|$。

3．设A,B为 3 阶矩阵，满足$A^{-1}BA=2A+BA$，已知$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$B$。

4．求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$的特征值与特征向量。

四．求向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T, \alpha_2=(0,3,1,2)^T, \alpha_3=(3,0,7,14)^T, \alpha_4=(2,1,5,6)^T$，$\alpha_5=(1,-1,2,0)^T$的一个极大无关组，并将其余向量用这个极大无关组线性表示.（10 分）

五．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$，

利用正交变换法将二次型f化为标准型，并写出正交矩阵. （12 分）

六．设线性方程组为$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3-x_4-2x_5=1 \\ 2x_1+2x_2-x_4-2x_5=1 \\ 5x_1+5x_2-3x_3-4x_4-8x_5=4 \end{cases}$，试求出其一般解。（11 分）

七．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，试证明向量组$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$也是方程组$AX=0$的基础解系。（8 分）

中国海洋大学　2007-2008 学年 第 2 学期 期末考试试卷

《线性代数》B 卷答案

一、填空题（每题 3 分，共 12 分）

1. $k=-1$。2. $t=2$。3. $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&1\\1&2&1\end{pmatrix}$。 4. $a=3$。

二、单项选择题

CCBCC

三．计算下列各题（32 分）

1. $(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$。2. $16,\frac{1}{2},36,-\frac{1}{2}$。3. $B=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$。

4．解：$|\lambda I-A|=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$，得 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$。$-2$ 所对应的特征向量

$X_1=(1,1,0)^T,X_2=(-1,0,1)^T,\lambda_3=4$ 所对应的特征向量 $X_3=(1,1,2)^T$。

四．秩为 3，无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2$。

五. 解: 二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$, 特征多项式为 $|\lambda I-A|=(\lambda+7)(\lambda-2)^2$,

从而，$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$. 2, 所对应的特征向量有 $(2,-1,0)^T$ 及 $(2,0,1)^T$。$\lambda_3=-7$ 所对应的特征向量 $(1,2,-2)^T$。正交单位化后得

$$Q=(Y_1,Y_2,Y_3)=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{-\sqrt{5}}{5}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$ 。二次型的标准型为 $f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$。

六．解：$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&1&0&-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，一般解为：

$$X=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,0\right)^T+k_1\left(-1,1,0,0,0\right)^T+k_2\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1,0\right)^T+k_3\left(1,0,-1,0,1\right)^T$$ 。

七．证明：显然$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 为齐次线性方程组$AX=0$的解。

若$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots k_n(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=0$ ，则

$$(k_1+k_2+\cdots+k_n)\alpha_1+(k_2+\cdots+k_n)\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$$ 。

由已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，所以，

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_n=0\\ k_2+\cdots+k_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ k_n=0\end{cases}$$ ，解得$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，

从而向量组$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 也线性无关。得证。

【5】中国海洋大学　2008-2009 学年 第 1 学期 期末考试试卷

数学科学　学院《线性代数》课程试题(B 卷)　　**共 4 页　第 1 页**

一.选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，则 (　　)

A. 当$m>n$，必有行列式$|AB|\neq 0$.

B. 当$m>n$，必有行列式$|AB|=0$.

C. 当$n>m$，必有行列式$|AB|\neq 0$.

D. 当$n>m$，必有行列式$|AB|=0$.

2. 设 n 阶矩阵A 与 B 等价，则必有 (　　)

A. 当$|A|=a$ ($a\neq 0$) 时，$|B|=a$.

B. 当$|A|=a$ ($a\neq 0$) 时，$|B|=-a$.

C. 当$|A|\neq 0$ 时，$|B|=0$.

D. 当$|A|=0$ 时，$|B|=0$.

3. 已知A,B均为 n 阶矩阵，$AB=0$，且 $B\neq 0$，则必有 (　　)

A. $(A+B)^2=A^2+B^2$　　B. $|A^*|=0$

C. $\left|B^*\right| \neq 0$　　　　　　D. $\left|B\right| \neq 0$.　(A^*是A的伴随矩阵)

4. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则线性无关的向量组是　(　　)

A. $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_3-\alpha_1$，$\alpha_2-\alpha_3$　　B. $\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

C. $\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_2+3\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_3$　D. $\alpha_1+\alpha_2$，$2\alpha_1+3\alpha_2$，$5\alpha_1+8\alpha_2$.

5. 线性方程组$Ax=b$的系数矩阵是4×5矩阵，且A的行向量组线性无关，则错误的命题是　(　　　)

A. 齐次方程组$A^Tx=0$只有零解.

B. 齐次方程组$A^TAx=0$必有非零解.

C. 任意b，方程组$Ax=b$必有无穷多解.

D. 任意b，方程组$A^Tx=b$必有唯一解.

6. 设A是$m\times n$矩阵，非齐次线性方程组$Ax=b$有解的充分条件是(　　　)

A. 秩$r(A)=m$　　　　　B. A的行向量组线性相关.

C. 秩$r(A)=n$　　　　　D. A的列向量组线性相关.

二．填空题：（每空 3 分,共 18 分）

1. 已知$|A|=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\4&0&0&0\end{vmatrix}$，那么行列式$|A|$所有元素的代数余子式之和为 ________________.

2. 已知$A=\begin{pmatrix}2&4&6\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，则$A^n=$________________.

3.若 3 阶矩阵A相似于B，矩阵A的特征值是 1，2，3，那么$|2B-E|=$______.

4. 满足$A^2+A-4E=0$, 则$(A-E)^{-1}=$________________.

5. 设n阶矩阵A的各行元素之和均为零，且$R(A)=n-1$, 则$Ax=0$的通解为 ____________.

6. 已知$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$可经正交变换$x=Py$化为标准形$f=6y_1^2$, 则$a=$________.

三．(10 分)设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，试讨论向量组

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 的线性关系.

四．(14 分) 计算 4 阶行列式

1. $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}$，　　2. $D=\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$.

五．(15 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3+3x_4&=&0\\x_1-3x_2-5x_3+2x_4&=&-1\\x_1+x_2+ax_3+4x_4&=&1\\x_1+7x_2+10x_3+7x_4&=&b\end{cases}$$

讨论参数a,b取何值时，方程组有解、无解？当有解时，试用其导出组的基础解系表示通解.

六．(13 分) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&x&6\\6&3&9\end{pmatrix}$的特征值$\lambda_1=0$（二重），$\lambda_2=13$，求$x$的值，并求其特征向量.

七．(12 分)已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3$$

利用正交变换把f化为标准形，写出相应的正交矩阵.

中国海洋大学　2008-2009 学年 第 1 学期 期末答案

数学科学　学院 《线性代数》 课程试题(B 卷)

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. B　2. D　3. B　4. C　5. D　6. A

二、填空题：（每空 3 分,共 18 分）

1. -4!*(1+1/2+1/3+1/4)=50

2. $7^{n-1}A$

4. _15_

4. (A+2E)/2

5. $k(1,1,\cdots,1)^T$，k任意常数

6. <u>2</u>

三． (10 分)

解：$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1 & & & 1\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1\end{pmatrix}=AB$$ ----------------------（5 分）

$\det(B)=1+(-1)^{1+n}$. -----------------------（8 分）

当 n 为奇数，$\det(B)\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关。

当 n 为偶数，$\det(B)=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关。---------（10 分）

四．(14 分)

解：1.

$$D=2*3*4\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1/2 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 1 & 0\\ 1/4 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=24\begin{vmatrix}1-1/2-1/3-1/4 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 1 & 0\\ 1/4 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$=24*(1-1/2-1/3-1/4)=-2$. ---------------------（7 分）

2.按第一行展开，即得

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

----------------------（14 分）

五．(15 分)

解：对增广矩阵作初等行变换，有

$$B=(A,b)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 3 & 0\\ 1 & -3 & -5 & 2 & -1\\ 1 & 1 & a & 4 & 1\\ 1 & 7 & 10 & 7 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -3 & -1 & -1\\ 0 & 2 & a+2 & 1 & 1\\ 0 & 8 & 12 & 4 & b\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4\end{pmatrix}$$ --------（6 分）

当$b\neq 4$时，$r(A)\neq r(B)$，方程组无解.

当$b=4$时，$\forall a$恒有$r(A)=r(B)$，方程组有解.

当$a\neq 1$时，$r(A)=r(B)=3$，方程组有无穷多解. ---------（9 分）

通解为

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)^T+k(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2},0,1)^T,$$ k为任意常数. ---------（12 分）

当$a=1$时，$r(A)=r(B)=2$，方程组有无穷多解，通解为

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)^T+k_1(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1,0)^T+k_2(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2},0,1)^T,$$ k_1,k_2为任意常数.---（15 分）

六. (13 分)

解：由矩阵的对角元之和等于特征值之和得$x=2$. ---------（3 分）

对$\lambda=0$，由$(0E-A)x=0$，即

$$-A\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ 得基础解系为$X_1=(-1,2,0)^T,X_2=(-3,0,2)^T$.

因此属于$\lambda=0$的特征向量是$k_1X_1+k_2X_2$，k_1,k_2不全为零. ------（8 分）

对$\lambda=13$，由$(13E-A)x=0$，即

$$13E-A=\begin{pmatrix}11 & -1 & -3\\ -4 & 11 & -6\\ -6 & -3 & 4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}11 & 1 & 3\\ -26 & 13 & 0\\ 26 & -13 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}11 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系为$X_3=(1,2,3)^T$，因此属于$\lambda=13$的特征向量是k_3X_3，$k_3\neq 0$.

---------（13 分）

七．(12 分)

解：二次型矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0,$$

解得特征值为 2，2，-3.　　　　　　　　　　　　-------------------（4 分）

【6】中国海洋大学　2008-2009 学年　第 1 学期　期末考试试卷

数学科学　学院　《线性代数》　课程试题(A 卷)

一.选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$均为 4 维列向量，已知$|A|=|\alpha\quad\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3|=5$，

$|B|=|\beta\quad\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3|=-1$，则$|A+B|=$(　　)

A. 4　　B. 6　　C. 32　　D. 48

2.已知 A,B 均为 3 阶矩阵，矩阵 X 满足

$$AXA=BXB+BXA-AXB+E$$

其中 E 是 3 阶单位矩阵，则 $X=$ (　　)

A. $(A^2-B^2)^{-1}$　　　B. $(A-B)^{-1}(A+B)^{-1}$

C. $(A+B)^{-1}(A-B)^{-1}$　　D.条件不足，不能确定.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1，则 $a=$(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 3　　D. -1/3

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且其列向量组线性无关，B 是 n 阶方阵，满足 $AB=A$，

则秩 $r(B)$　(　　)

A. 等于 n　B. 小于 n　C. 等于 1　D. 不能确定.

5. 设 A 是秩为 2 的 4×5 矩阵，已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解，则解集合中线性无关的解向量个数为　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ 不相似的矩阵是(　　　)

A. $\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}3&5\\0&1\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$

二．填空题：（每空 3 分,共 18 分）

1. 设 $A=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$，则 $A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=$____________(A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式).

2.已知 $a=(1\quad 2\quad 1)^T$，$\beta=(1\quad 0\quad 1)^T$，$A=\alpha\beta^T$，则 $A^3=$

____________________.

3. 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为

__________________.

4. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，秩 $r(A)=2$，若 $A^2=A$，则 A 的特征值是______.

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&a\\1&5\end{pmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量，则 $a=$______________.

6. 二次型 $f=x_1^2-x_2x_3$ 的规范型是　______________________.

三． (12 分)对于 n 元线性方程组

$$\begin{pmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

7. 证明：n 阶系数矩阵的行列式 $|A_n|=(n+1)a^n$.

8. 当 a 取何值时，线性方程组有唯一解，并利用(1)的结果求解的第一个分量 x_1.

9. 当 a 取何值时，线性方程组有无穷多解，并求解.

四．(12 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，β 不是 $Ax=0$ 的解，证明：向量组 $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

五．(15 分) 当 a 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} -x_1-4x_2+x_3 & = & 1 \\ ax_2-3x_3 & = & 3 \\ x_1+3x_2+(a+1)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在有解时求其所有解.

六．(13 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值有重根，判断矩阵 A 能否相似对角化，并说明理由.

七．(12 分) 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$$

的秩为 2，求 c 并用正交变换把 f 化为标准形，写出相应的正交矩阵.

中国海洋大学 2008-2009 学年 第 1 学期 期末考试试卷答案

数学科学 学院 《线性代数》 课程试题(A 卷)

一、选择题

1. C 2. B 3. D 4. A 5. C 6. D

二、填空题：（每空 3 分,共 18 分）

1. 0

2. $6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　3. 由 $(\beta_1\quad\beta_2)=(\alpha_1\quad\alpha_2)C$，得 $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

4. 1, 1, 0　　5. -1

6. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

7. (12 分)

解：(1). 利用数学归纳法，得

七．$n=1$，$|A_1|=2a.$

$(0,1,0,\cdots,0)^T+k(1,0,\cdots,0)^T$， k 为任意常数.-----------（12 分）

八．假设 $n=k$ 时成立，证明 $n=k+1$ 时成立.

行列式按第一行展开，再按第一列展开得

$$\left|A_{k+1}\right|=2a\left|A_k\right|-a^2\left|A_{k-1}\right|=2a((k+1)a^k)-a^2(ka^{k-1})=(k+2)a^{k+1}.$$

由 1.,2.得结论成立. ------------------------------（4 分）

(2). $a\neq 0$ 时，有唯一解.

由克莱默法则，得

$$x_1=\frac{D_1}{\left|A_n\right|}=\frac{\left|A_{n-1}\right|}{\left|A_n\right|}=\frac{n}{(n+1)a}.$$ ---------------（8 分）

四．. $a=0$ 时，有无穷多解，解为

(12 分)

证明：设 $$k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+k_t(\beta+\alpha_t)=0 \quad （1）$$

因为 $A\alpha_i=0$，$(i=1,2,\cdots,t)$，$A\beta\neq 0$，用 A 左乘（1）式两端，得

$$(k_1+k_2+\cdots+k_t)A\beta=0，$$

从而 $$k_1+k_2+\cdots+k_t=0. \quad （2）$$

--------------（6 分）

由（1）式又有

$$(k_1+k_2+\cdots+k_t)\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0. \quad （3）$$

将（2）式代入（3）式，得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0.$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是基础解系，它们线性无关，故必有

$$k_1=k_2=\cdots=k_t=0，$$

因此，向量组 $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关. -----------（12 分）

五．(15 分)

解：对增广矩阵作初等行变换，有

$$B=(A,b)=\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\1&3&a+1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\0&-1&a+2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a+2 & 1\\ 0 & 0 & a^2+2a-3 & a+3\end{pmatrix}$$ ----------（6 分）

若 $a=1$，则 $r(A)=2$，$r(B)=3$，方程组无解.

若 $a=-3$，则 $r(A)=r(B)=2<3$，方程组有无穷多解.

若 $a\neq 1$ 且 $a\neq -3$，则 $r(A)=r(B)=3$，方程组有唯一解. ----------（9 分）

当 $a=-3$ 时，

$$B=\left(A,b\right)\to\begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

方程组通解是：$(3,-1,0)^T+k(5,-1,1)^T$，　k 为任意常数.----------（12 分）

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -3$ 时，

$$B=\left(A,b\right)\to\begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -(a+2) & -1\\ 0 & 0 & a-1 & 1\end{pmatrix}$$

得 $x_3=\dfrac{1}{a-1},x_2=\dfrac{3}{a-1},x_1=-\dfrac{a+10}{a-1}$

方程组的唯一解为：$(-\dfrac{a+10}{a-1},\dfrac{3}{a-1},\dfrac{1}{a-1})^T$.　　　----------（15 分）

六．(13 分)

解：由矩阵 A 的特征多项式

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+10+a)=0$$

----------（6 分）

如果 $\lambda=2$ 是重根，则 $\lambda^2-8\lambda+10+a$ 中含有 $\lambda-2$ 的因子，于是 $2^2-16+10+a=0$，

得 $a=2$.此时 $\lambda^2-8\lambda+12=(\lambda-2)(\lambda-6)$，矩阵的三个特征值为 2，2，6.

对于 $\lambda=2$，由于

$$r(2E-A)=1$$

故 $\lambda=2$ 有两个线性无关的特征向量，A 可相似对角化.----------（9 分）

若 $a=1$，则 $r(A)=2$，$r(B)=3$，方程组无解.

若$\lambda=2$不是重根，则$\lambda^2-8\lambda+10+a$是完全平方，于是Δ=0，即

$$8^2-4(10+a)=0,$$

解出$a=6$．矩阵的特征值为 2，4，4.

对于$\lambda=4$，由于$r(4E-A)=2$，说明$\lambda=4$只有一个线性无关的特征向量，

故A不能相似对角化.　　　　　　　　　---------------------（13 分）

七．(12 分)

解：二次型矩阵

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & c\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$．A中有 2 阶子式非零，故$r(A)=2\Leftrightarrow |A|=24(c-2)=0$，得$c=2$．

----------------------（4 分）

由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -1 & -2\\ -1 & \lambda-5 & 2\\ -2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-6)^2=0,$$

当$\lambda=6$时，特征向量为$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(2,0,1)^T$.

当$\lambda=0$时，特征向量为$\alpha_3=(-1,1,2)^T$.　　---------------------（8 分）

对α_1,α_2 Schmidt 正交化，α_3单位化，得

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}，经\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

有$x^TAx=y^TBy=6y_1^2+6y_2^2$.　　　　　---------------------（12 分）

【7】中国海洋大学　2008-2009 学年 第 2 学期 期末考试试卷

数学科学 学院 《线性代数》 课程试题(A 卷)

符号说明：$r(A)$ 表示矩阵A 的秩，A^* 表示矩阵A 的伴随矩阵，I_n 表示n 阶单位矩阵，

A^T 表示矩阵A的转置矩阵，A_{ij}表示a_{ij}的代数余子式。

一、单项选择题（每题 3 分，共 18 分）

1．设 A, B, O 都是 n 阶方阵，则(　　)。

A. $|A+B|=|A|+|B|$；　　B. $(A+B)^T=A^T+B^T$；

C. 若 $AB=O$，则 $A=O$ 或 $B=O$；　D. $AB=BA$.

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则下列命题**不正确**的是(　　)。

A. 向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关；

B. 向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关；

C. 若存在常数 k_1,k_2,k_3,k_4，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$ 成立，

则 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$；

D. α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

3. 设 A, B 均为 $n(n>3)$ 阶非零方阵，且 $AB=O$,则下列结论**错误**的是(　　)。

A. $r(A), r(B)$ 都小于 n；　　B.若 $r(B)=2$，则 $r(A^*)=0$；

C. 若 $A+B=I_n$，则 $r(A)+r(B)=n$；　　D. $r(A^*)>1$.

4．设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$ 成立.

现有四个命题：

① A 与 B 合同 ；　② $|A|=|B|$；　③若 A 为正定矩阵，则 B 也是正定矩阵；

④ A 与 B 有相同的特征值和特征向量.

以上命题正确的是（　　）。

A. ②；　B.①②；　C.①②③；　D.②③④.

5. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若非齐次线性方程组 $AX=b$ 有多个解，则（　　）。

A. $r(A)<m$；　　B. A 的列向量组线性无关；

C. $AX=0$ 有非零解；　　D. A 有可能为零矩阵.

6. 设 A 为 n 阶实对称的正定矩阵，则下列描述**不正确**的是（　　）。

A. $AX=0$ 可以有非零解；　B. A^2 是正定矩阵；

C. $A+I_n$ 是正定矩阵；　　D. A 的特征值全大于 0.

二、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1．设 A, B 均为 3 阶方阵，且 $|A| = -1$，$|B| = 3$，则 $\left|2A^*B^{-1}\right| =$ ________。

2. 已知 3 阶非零实方阵 A 满足 $A^* = A^T$，则 $|A| =$ __________。

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{2009} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2008} =$ __________。

4. 已知 4 元非齐次线性方程组 $AX = b$，$r(A) = r(A, b) = 3$，又知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $AX = b$ 的 3 个解，且 $\alpha_1 = (4, -1, 0, 3)^T$，$\alpha_2 + 2\alpha_3 = (3, 0, -3, 6)^T$，则 $AX = b$ 的全部解为__________ 。

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3$，则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的秩为__________ 。

6. 设行列式为 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$，则第四行各元素的代数余子式之和为_______.

7. 若 $\lambda = 2$ 为 3 阶矩阵 A 的一个特征值，$x_1 = (1, 0, 1)^T$，$x_2 = (2, 1, 0)^T$ 为矩阵 A 的对应于 $\lambda = 2$ 的特征向量，向量 $\alpha = (0, -1, 2)^T$，则 $A\alpha =$ __________ 。

三．计算下列各题（28 分）

1.计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$；

2. 求 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 的值，其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$ 。

3．设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ 满足方程 $AX = B$，求矩阵 X 。

4. 已知 R^3 的两组基为 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (1, -1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 与

$\beta_1=(1,2,1)^T,\beta_2=(2,3,3)^T,\beta_3=(3,7,1)^T$，求：

（1）基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$到基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的过渡矩阵；

（2）向量$\alpha=(5,2,1)^T$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下的坐标。

四．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$，利用正交变换法将二次型$f$化为标准型，并写出正交矩阵。（13 分）

五．设齐次线性方程组为$\begin{cases}3x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1+2x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$，

（1）求方程组的基础解系，（2）将基础解系正交化、单位化。（10 分）

六．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，试证明：

（1）若非零向量β与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中的每个向量都正交，则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$线性无关；

（2）若β_1可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 表出，而β_2不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 表出，

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1+\beta_2$ 线性无关。（10 分）

中国海洋大学　2008-2009 学年 第 2 学期 期末考试

《线性代数》课程试题(A 卷)答案

一．　1．B；2. A ； 3. D；4．C；5.　C. 6 A

二．　1．$\dfrac{8}{3}$；2. 1；3.$\begin{pmatrix}7&1&2\\0&1&3\\2&-1&0\end{pmatrix}$；4.$(4,-1,0,3)^T+k(3,-1,1,1)^T$；5. 3.；6. 0；　2α

三．　1．57；2. $a_2a_3\cdots a_n(a_1-\sum_{i=2}^{n}\dfrac{1}{a_i})$；　3. $X=\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-5\\2&1\end{pmatrix}$；

4.（1）过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&8\\-1&0&-6\\1&3&1\end{pmatrix}$；（2）坐标为$(5,-1,1)^T$.

四．$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$，特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=-3$.

正交矩阵为$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，标准型为$f=3y_1^2+y_2^2-3y_3^2$

五. $\frac{\sqrt{6}}{6}(1,0,2,-1)^T,\frac{\sqrt{498}}{498}(1,12,8,17)^T$。

六. 利用内积与线性相关，线性无关的有关结论即可得证。

【8】中国海洋大学 2008-2009 学年 第 2 学期 期末考试试卷

<u>数学科学</u>学院<u>《线性代数》</u>课程试题(B 卷)

以下是符号说明： $r(A)$ 表示矩阵A的秩，A^* 表示矩阵A的伴随矩阵，

I_n 表示n阶单位矩阵，A^T 表示矩阵A的转置矩阵。

一. 单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设A都是$n(n>3)$阶方阵，且$A^2=O$,则下列结论**错误**的是(　　)。

A. 若A为实对称矩阵，则$A=O$；　　B. I_n-A可逆；

C. A的特征值只能为 0；　　D. $r(A^*)=1$.

2. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，则(　　)。

A. 向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关；

B. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$必线性相关；

C. 若存在常数k_1,k_2,k_3,k_4，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$成立，

则必有k_1,k_2,k_3,k_4不全为零；

D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$中任意一个向量都可以由其余 3 个向量线性表示.

3. 设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，则下列结论**不正确**的是(　　)。

A. 当$m>n$时，$|AB|=0$；　　B. 当$m>n$时，$(AB)X=0$有非零解；

C. 若$m<n$且$AB=I_m$，则A的行向量组线性无关；

D. 当$m<n$时，$(AB)X=0$仅有零解.

4．设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 P ，使 $P^T AP = B$ 成立.

现有四个命题：

①A 与 B 相似 ；　　②$r(A) = r(B)$ ；

③若 A 为正定矩阵，则 B 也是正定矩阵；

④A 与 B 有相同的特征值和特征向量.

以上命题正确的是（　　　）。

A. ②；　　B.①②；　　C.①②③；　　D.②③④.

5. n 阶矩阵 A 相似于对角阵的充要条件是（　　　）。

A. A 有 n 个不同的特征值；　　B. A 有 n 个线性无关的的特征向量；

C. A 的特征方程没有重根；　　D. A 的行列式不为零.

二．填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．设 A, B 均为 3 阶方阵，且 $|A| = 3$ ，$|B| = -\dfrac{1}{2}$ ，则 $|3A^T B^{-1}| =$ ________。

2. 已知 $\alpha = (2, 0, -1)^T$ ， $A = I_3 - \alpha\alpha^T$ ， $B = I_3 + \alpha\alpha^T$,则 $AB =$ __________。

3. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则 A 为正定矩阵的等价条件为_____________。

4．设 $\alpha = (1,1,1)^T, \beta = (1,0,k)^T$ ，若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $k =$ _____。

5. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ 可经正交线性变换 $x = Py$ 化

为标准型 $2y_1^2 + 3y_2^2$ ，则 $a =$ __________ 。

三．计算下列各题（40 分）

1.求方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ 的所有根；

2. 求 $2n$ 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$ 。

3．设 A, B 均为 3 阶方阵，$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,且 $BA=A-I_3$，求矩阵 B 。

4．设向量组 $\alpha_1=(1,3,0,2)^T, \alpha_2=(1,-2,5,-3)^T, \alpha_3=(-2,-1,7,-5)^T$，

$\alpha_4=(-1,2,3,-1)^T, \alpha_5=(2,1,1,1)^T$，求向量组的一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表出。

5. 将 $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -5 & 4\end{pmatrix}$ 对角化，并求 A^{10} 。

四．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$，利用正交变换法将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵。（10 分）

五．求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\ x_1-x_2+x_3-x_4=1\\ 2x_1-2x_2-4x_3+4x_4=-1\end{cases}$ 的全部解。（10 分）

六．证明：n 维向量空间中，向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一表示的充要条件是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。（10 分）

中国海洋大学 2008-2009 学年 第 2 学期 期末考试

《线性代数》课程试题(B 卷)答案

一．1．D；2. A ； 3. D；4．C；5. B.

二．1．-162；2. $\begin{pmatrix}-19 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 0\\ 10 & 0 & -4\end{pmatrix}$； 3.正惯性指数为 n，或者 n 个特征值全大于零。(答案不唯一)；4．$k=2$；5. $a=3$.

三．1．$x=3$ 为 3 重根，$x=-9$ 为单根；2. $(a^2-b^2)^n$； 3. $B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$；

4．极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3$, $\alpha_5=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3$；

5. （1）特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2$，矩阵 $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}, P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$；

（2）$A^{10}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5-2^{11} & 2^{11}-2 \\ 5-5\cdot 2^{10} & 5\cdot 2^{10}-2 \end{pmatrix}$.

四．$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，特征值为$\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-4$.

正交矩阵为$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，标准型为 $f=5y_1^2-4y_2^2+5y_3^2$ 。

五. 全部解为$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)^T+k_1(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},0)^T+k_2(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2},1)^T$ 。

六．略。

【9】中国海洋大学　2009-2010 学年春季学期 期末考试试卷

___数学科学___学院__线性代数__课程试题(A 卷)

符号说明：$r(A)$ 表示矩阵A 的秩，A^* 表示矩阵A 的伴随矩阵，I_n 表示n 阶单位矩阵，

A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，M_{ij} 是$|A|$的余子式.

一、填空（18 分）

1. 设 A,B 为 3 阶矩阵，且$|A|=2,|B|=3$，则$|2AB^{-1}|=$ ________.

2.如果 3 阶方阵 A 的特征值分别为 2，4，6，则$|5I-A|=$ ______.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{2009}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2008}=$ __________.

4.设 A 是 3 阶实对称矩阵，秩$r(A)=2$，若$A^2=A$，则A 的特征值是______.

5. $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 均为 4 维列向量，已知$|A|=|\alpha\quad\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3|=5$，

$|B|=|\beta\quad\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3|=-1$，则$|A+B|=$ __________.

6.设 $A=\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1，则 $a=$ ______.

二、选择题 （24 分）

1. 设 A 是秩为 3 的 5×6 矩阵，已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解，则解集合中线性无关的解向量个数最多为 （ ）

（A） 3 （B） 4 （C） 5 (D) 6

2.设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若非齐次线性方程组 $AX=b$ 有多个解，则（ ）。

（A） $r(A)<m$； （B） A 的列向量组线性无关；

（C） $AX=0$ 有非零解； （D）A 有可能为零矩阵.

3.设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是（ ）

（A） $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$， （B）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$，

（C）$\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$， （D）$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.

4.已知 n 元非齐次线性方程 $AX=b$， $AX=0$ 为方程 $AX=b$ 对应的齐次线性方程组，则有（ ）。

（A）若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 有惟一解；

（B） $AX=b$ 有惟一解的充要条件是 $r(A)=n$；

（C） $AX=b$ 有两个不同的解，则 $AX=0$ 有无穷多解；

（D） $AX=b$ 有两个不同的解，则 $AX=0$ 的基础解系中含有两个以上向量.

5.设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为

（A） $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$，（B） $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，（C） $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，（D） $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$；

6.与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ 不相似的矩阵是( )

A. $\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}3&5\\0&1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$

7.4 阶矩阵 A,B 的行列式 $|A|=2,|B|=3,$ 则分块矩阵 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

（A）$\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$，　　　　（B）$\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$，　　　　（D）$\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

8．设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B$ 成立.

现有四个命题：

①A 与 B 合同 ；　②$|A| = |B|$；　③若 A 为正定矩阵，则 B 也是正定矩阵；

④A 与 B 有相同的特征值和特征向量.

以上命题正确的是（　　）.

A. ②；　　B.①②；　　C.①②③；　　D.②③④.

三、（18 分）

1. 设 $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$，$M_{ij}$ 为行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，

求：$M_{41} + M_{42} - M_{43} + 2M_{44}$.（4 分）

2.（6）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ 满足方程 $AX = B$，求矩阵 X .

3.（8 分）求向量组

$\alpha_1 = (1,2,3,4)^T, \alpha_2 = (2,3,1,1)^T, \alpha_3 = (1,6,4,2)^T, \alpha_4 = (2,-1,0,3)^T$ 的

秩及其一个极大线性无关组，并用它们表示其余向量.

四、（14）设 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基，

（1）证明：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基，（8）

（2）求由基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.（6 分）

五、（13 分）设线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+ \quad x_3+\ x_4=0 \\ \quad x_2+ \quad 2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+ \quad x_3+ax_4=-1 \end{cases},$$

（1）a 、b 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

（2）在有无穷多解时求出其通解.

六、(13 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$

用正交变换把 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

【10】中国海洋大学　2009-2010 学年春季学期 期末考试试卷

___数学科学___学院__线性代数__课程试题(B 卷)

符号说明：$r(A)$ 表示矩阵A 的秩，A^* 表示矩阵A 的伴随矩阵，I_n 表示n 阶单位矩阵，A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，A_{ij} 是$|A|$的代数余子式.

一、填空（18 分）

1. 设 $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$，则 $A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=$__________.

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量，则 $a=$_________.

3. 如果 3 阶方阵 A 的特征值分别为 1，2，5，则$|A|=$ ____.

4.已知 A,B 均为 3 阶矩阵，矩阵 X 满足

$$AXA=BXB+BXA-AXB+E$$

其中E 是 3 阶单位矩阵，则 $X=$ _____________.

5.已知 4 元非齐次线性方程组$AX=b$，$r(A)=r(A,b)=3$，又知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $AX=b$ 的 3 个解，且$\alpha_1=(4,-1,0,3)^T$，$\alpha_2+2\alpha_3=(3,0,-3,6)^T$，则$AX=b$ 的全部解为__________ .

6. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_3$ 可经正交线性变换 $x=Py$ 化为标准型 $2y_1^2+3y_2^2$，则 $a=$__________.

二、选择题　（24 分）

1. 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$ 成立.

现有四个命题：

① A 与 B 合同 ； ② $|A|=|B|$ ； ③若 A 为正定矩阵，则 B 也是正定矩阵；

④ A 与 B 有相同的特征值和特征向量.以上命题正确的是（ ）。

A. ②； B.①②； C.①②③； D.②③④.

2.设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且其列向量组线性无关，B 是 n 阶方阵，满足 $AB=A$，

则秩 $r(B)$ ( )

A. 等于 n B. 小于 n C. 等于 1 D. 不能确定.

3.与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ 不相似的矩阵是( )

A. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

4.设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$AX=0$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是（ ）.

(A) 若 $AX=0$ 仅有零解，则 $AX=b$ 有唯一解；

(B) 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多解；

(C) 若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 仅有零解；

(D) 若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 有非零解。

5.已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ 相似，则（ ）.

(A) $x=0, y=1$，(B) $x=-1, y=0$，(C) $x=y=0$，(D) $x=y=1$；

6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则（ ）.

(A) α_1 能由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示； (B) α_4 能由 α_2,α_3 线性表示；

(C) α_4 未必能由 α_2,α_3 线性表示； (D) 以上都不对。

7. 已知 β_1,β_2 是方程组 $AX=b$ 的两个不同解，α_1,α_2 是对应齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系，则 $AX=b$ 的一般解是（ ）.

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$； (B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_2-\alpha_1)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$；

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$； (D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

8. A,B 是两个不同的n 阶方阵，且A 与B 相似，则A,B 之间可能不同的是（　　）

(A) 特征值； (B) 行列式值； (C) 秩； (D) 特征向量.

三、计算 （24 分）

1. 设A可逆，且$A^*B=A^{-1}+B$，当$A=\begin{bmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{bmatrix}$时，求$B$.（8 分）

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维向量空间$R^3$ 的一组基，求由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵.（8 分）

3. 求向量组$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,3,1,1)^T,\alpha_3=(1,6,4,2)^T,\alpha_4=(2,-1,0,3)^T$ 的

秩及其一个极大线性无关组，并用它们表示其余向量.（8 分）

四、证明题 （10 分）

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性无关.

证明:1. α_1可以由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示；

2. α_5不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示.

五、（12 分）用正交变换法把二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$化成标准形，并求$A$的特征值和特征向量、写出正交矩阵$Q$和对角矩阵$Q^TAQ$.

六、（12 分）

对于 n 元线性方程组

$$\begin{pmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

1. 证明：n 阶系数矩阵的行列式$|A_n|=(n+1)a^n$.

2. 当a取何值时，线性方程组有唯一解，并利用(1)的结果求解的第一个分量x_1.

3. 当a取何值时，线性方程组有无穷多解，并求解.

【11】中国海洋大学　2010-2011 学年 第 2 学期 期末考试试卷

<u>　数学科学　</u>学院<u>《线性代数》</u>课程试题(A 卷)

符号说明：$r(A)$ 表示矩阵A的秩，A^* 表示矩阵A的伴随矩阵，I 表示单位矩阵，A^T 表示矩阵A的转置矩阵，M_{ij} 是$|A|$中元素a_{ij} 的余子式。

一. 填空（18 分）

1. 已知 4 阶行列式的第一行元素依次为 1,2,2，-1，第四行元素的余子式依次为：8，k，-6,10，则$k=$ __________.

2. 设A为 3 阶方阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$,则$\left|(2A)^{-1}-(2A)^*\right|=$ ___________.

3. 若n阶方阵A满足$A^2-3A+2I=O$，则$(A-4I)^{-1}=$ _________.

4. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&-1&0&-2\\0&-3&-1&1\\0&2&4&4\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组$A^*x=0$的解集合中线性无关的解向量个数最多为_______个.

5. 从R^2的基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$到基$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$的过渡矩阵为________.

若向量α在基α_1,α_2下的坐标为$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，则$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2$下的坐标为________.

6. 设A为 3 阶方阵，已知$|A|=9$且A有 2 重特征值 3，则A 的另一个特征值为_____，$|I-2A|=$_______.

二. 选择（18 分）

1. 设 A 为 3 阶方阵且$|A|=1$，若 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，令$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，则$|B|=$（　　）

(A) -2　　(B) 2　(C) 6　(D) -6

2. 设A为 3 阶方阵, 将A的第 2 列加到第 1 列得矩阵B，再交换B的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则$A=$（　　）

$(A)\ \ P_1P_2 \qquad (B)\ \ P_1^{-1}P_2 \qquad (C)\ \ P_2P_1 \qquad (D)\ \ P_2P_1^{-1}$

3. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是（　　）

$(A)\ \ \alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1 \qquad (B)\ \ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1$

$(C)\ \ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3 \qquad (D)\ \ \alpha_2,\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3$

4. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是 4 阶方阵，若$(1,0,1,0)^T$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，则$A^*x=0$的基础解系可为（　　）

$(A)\ \alpha_1,\alpha_2 \quad (B)\ \alpha_1,\alpha_3 \quad (C)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \quad (D)\ \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

5. 设A是 4 阶实对称矩阵且$A^2+A=O$，若$r(A)=3$，则A相似于（　　）

$$(A)\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix} \qquad (B)\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$$

$$(C)\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix} \qquad (D)\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$$

6. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+4x_2{}^2+3x_3{}^2-4x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$的秩为（　　）

(A) 0 　　(B) 1 　　(C) 2 　　(D) 3

三. 计算（22 分）

1.（6 分） 计算行列式D_{n+1}，其中

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a^n&(a-1)^n&\cdots&(a-n)^n\\a^{n-1}&(a-1)^{n-1}&\cdots&(a-n)^{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}$$

2.(8 分) 已知矩阵 X 满足 $AX-B=X$,其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$,求 X .

3.（8 分）求向量组 $\alpha_1=(1,0,1,0)^T, \alpha_2=(2,1,-3,7)^T, \alpha_3=(4,1,-1,7)^T$,

$\alpha_4=(3,1,0,3)^T, \alpha_5=(4,1,3,-1)^T$ 的秩及其一个极大线性无关组，并用它们表示其余向量。

四. 证明 （18 分）

1.（8 分）若 A 为一个 n 阶方阵，且 $4A^2+4A-3I=O$ ，

证明：（1） A 的特征值只能为 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$ ；

（2） $r(2A+3I)+r(2A-I)=n$.

2.（10 分）设 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，向量 β 满足 $A\beta\neq 0$ ，

证明：向量组 $\beta,\xi_1+\beta,\xi_2+\beta,\ldots,\xi_p+\beta$ 线性无关。

五.（12 分）设 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解

求：（1） λ, a ；

（2） $Ax=b$ 的一般解.

六.(12 分)已知三元实二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^{\ 2}+(1-a)x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}+2(1+a)x_1x_2=x^TAx$ 的规范型为

$f(z_1,z_2,z_3)=z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}$,

求：（1） a 的值；

（2）利用正交变换法，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型，并写出相应的正交矩阵。

中国海洋大学 2010-2011 学年 第 2 学期 期末答案

数学科学 学院 《线性代数》 课程试题(A 卷)

一. 填空题：（18 分）

1. 3; 2. $-\frac{27}{4}$; 3. $-\frac{1}{6}(A+I)$; 4. 3; 5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

6. 1, -25

二. 选择题（18 分）

1. B　2. D　3.B　4. D　5. C　6. D

8. (22 分)

1. （6 分）换行

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a-1 & \cdots & a-n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n\end{vmatrix}$$

（范德蒙行列式）

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\le j<i\le n}(a-i-(a-j))$$

$$=\prod_{k=1}^{n}k!$$

2.（8 分） $(A-I)X=B$

初等变换法解矩阵方程

$$(A-I,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}-1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 5 & -3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}-1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 4 & -2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|cc}-1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

所以 $X=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

3.（8 分）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 7 & 7 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -5 & -3 & -1\\ 0 & 7 & 7 & 3 & -1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以，向量组的秩为 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为其一个极大线性无关组；$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，

$\alpha_5=-\alpha_2+2\alpha_4$

四.（18 分）

1. (3 分)（1）设λ 是A 的一个特征值，则$4\lambda^2+4\lambda-3$是方阵$4A^2+4A-3I$ 的一个特征值

$$\because 4A^2+4A-3I=O$$

$$\therefore 4A^2+4A-3I \text{ 的特征值只有}0$$

$$\therefore 4\lambda^2+4\lambda-3=0$$

$$\therefore \lambda=\frac{1}{2}\text{或}-\frac{3}{2}$$

（5 分）（2）$\because 4A^2+4A-3I=O$

$\therefore (2A+3I)(2A-I)=O$

$\therefore 2A-I$ 的每一列均是齐次线性方程组$(2A+3I)x=0$ 的解

因此$r(2A-I)\le n-r(2A+3I)$ 即$r(2A+3I)+r(2A-I)\le n$

另一方面，因为

$r(2A+3I)+r(2A-I)=r(2A+3I)+r(I-2A)$

$\ge r((2A+3I)+(I-2A))=r(4I)=n$

所以结论可证。

2.（10 分）若有$k_0\beta+k_1(\xi_1+\beta)+k_2(\xi_2+\beta)+\cdots+k_p(\xi_p+\beta)=0$

则$(k_0+k_1+\cdots+k_p)\beta+k_1\xi_1+\cdots+k_p\xi_p=0$ （1）

若$k_0+k_1+\cdots+k_p\ne 0$，则β 可由$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p$ 线性表出。

$\because$ $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p$ 是齐次线性方程组$Ax=0$ 的一个基础解系

$\therefore A\beta=0$ 与已知矛盾

从而只能$k_0+k_1+\cdots+k_p=0$，（2）

代入（1）式有$k_1\xi_1+\cdots+k_p\xi_p=0$

$\because \xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p$ 线性无关

$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_p=0$，代入（2）式得$k_0=0$

从而结论可证。

五. （12 分）$\because Ax=b$ 有无穷多个解

$\therefore r(A)=r(A,b)<3$

$\because r(A)<3 \qquad \therefore |A|=0$ 　即$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0$

解得$\lambda=1$或$\lambda=-1$

$\lambda=1$时，$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\0&0&0&1-a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

方程组无解，与已知矛盾。

$\lambda=-1$时，$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&a\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&2&0&1+a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&a\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&2+a\end{array}\right)$

因为方程组有无穷多个解，所以$2+a=0$即$a=-2$

综上，$\lambda=-1$，$a=-2$

（2）$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$

取自由变量x_3

令$x_3=0$得$Ax=b$一个特解$\xi_0=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

令$x_3=1$得$Ax=0$一个基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

所以，$Ax=b$ 的一般解为：$\xi=\xi_0+k\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数。

六.（12 分）$\because$ 规范型为 $f(z_1,y_2,y_3)=y_1{}^2+y_2{}^2$，

$\therefore$ 0 是二次型对应的矩阵的一个特征值

$\because$ 特征值之积为二次型对应方阵的行列式

$$\therefore |A|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\1+a & 1-a & 0\\0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$$

$\therefore a=0$

由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\-1 & \lambda-1 & 0\\0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$

解得 $\lambda_1=2$（2 重根）$\lambda_2=0$（单根）

$$\lambda_1 I-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $(\lambda_1 I-A)x=0$ 的一个基础解系为：$\xi_{11}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_{12}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

对 ξ_{11},ξ_{12} 用施密特正交化得：$\eta_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_{12}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\lambda_2 I-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\-1 & -1 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $(\lambda_2 I-A)x=0$ 的一个基础解系为：$\xi_{21}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

单位化得：$\eta_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

取正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，令 $x=Qy$ 得标准型 $f(y_1,y_2,y_3)=2{y_1}^2+2{y_2}^2$

【12】中国海洋大学　2010-2011 学年 第 2 学期 期末考试试卷

数学科学 学院《线性代数》课程试题(B 卷)

符号说明： $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩，A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，I 表示单位矩阵，A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，M_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的余子式。

一. 填空（18 分）

1. 设 A 为 3 阶方阵且 $|A|=1$，若 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，令 $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，则 $|B|=$_________.

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $3A^2+2A-10I=O$，则 $(A-2I)^{-1}=$_________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$，则齐次线性方程组 $A^*x=b$ 的解集合中线性无关的解向量个数最多为________个.

4. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则 $|I-2A^*|=$__________.

5. 若 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 6 \\ t \\ -3 \end{pmatrix}$ 分别是实对称矩阵 A 属于特征值 1,2 的特征向量，则 $t=$__________.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)={x_1}^2-2{x_2}^2-2{x_3}^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 的标准型为__________________，规范型为_______________.

二. 选择（18 分）

1. 设 A 为 n（$n\geq 2$）阶可逆矩阵，交换 A 的第一行与第二行得矩阵 B，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，则（　）

(A) 交换 A^* 的第一列与第二列得 B^*　　(B) 交换 A^* 的第一行与第二行得 B^*

(C) 交换 A^* 的第一列与第二列得 $-B^*$　(D) 交换 A^* 的第一行与第二行得 $-B^*$

2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵且 $AB=I$，其中 I 为 m 阶单位矩阵，则（　　）。

(A) $r(A)=r(B)=m$　　　　　(B) $r(A)=m, r(B)=n$

(C) $r(A)=n, r(B)=m$　　　　(D) $r(A)=r(B)=n$

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量，A 为 $m\times n$ 矩阵，则下列选项正确的是（　　）。

(A) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_s$ 线性相关

(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_s$ 线性无关

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_s$ 线性相关

(D) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_s$ 线性无关

4.设 A 是 4 阶实对称矩阵且 $A^2+A=O$，若 $r(A)=3$，则 A 相似于（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　　　(D) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

5. 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

①若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\ge r(B)$

②若 $r(A)\ge r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解

③若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$

④若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②④　　(D) ③④

6. 设 A,B 均为 n 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 P 使得 $P^TAP=B$ 成立，现有 4 个命题：

① A 与 B 相似　②若 A 为正定矩阵，则 B 也是正定矩阵

③ A与B有相同的特征值与特征向量　　④ A与B合同且$r(A)=r(B)$

(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ①②③④　　(D) ①②④

三. 计算（30 分）

1. （6 分）设$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\1&0&3&8\\1&3&0&-5\\2&2&-10&-1\end{vmatrix}$, M_{ij} 是行列式$|A|$中元素a_{ij} 的余子式，

求：$M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}$

2. （6 分）求n 阶行列式$\begin{vmatrix}a_1+\lambda&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+\lambda&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+\lambda\end{vmatrix}$的值。

3. （8 分）已知$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$,求矩阵X 使之满足$AX=X+B$.

4. （10 分）已知向量组$\alpha_1=(1,0,1,0)^T, \alpha_2=(2,1,-3,7)^T, \alpha_3=(4,1,-1,7)^T$,

$\alpha_4=(3,1,0,3)^T, \alpha_5=(4,1,t,-1)^T$ 的秩为 3，求t 及其一个极大线性无关组，并用它们表示其余向量。

四.（10 分）若A为一个n 阶方阵，且$A^2-3A+2I=O$，证明：$r(A-2I)+r(A-I)=n$.

五.（12 分）已知非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$系数矩阵的秩为 2

求（1）a,b

（2）方程组的一般解。

六.（12 分）已知三元实二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1{}^2+(1-a)x_2{}^2+2x_3{}^2+2(1+a)x_1x_2=x^TAx$ 的秩为 2，

求：（1）a 的值；

（2）利用正交变换法，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并写出相应的正交矩阵。

中国海洋大学 2010-2011 学年 第 2 学期 期末答案

数学科学 学院 《线性代数》 课程试题(B 卷)

一、填空题：（18 分）

1. 2; 2. $-\dfrac{1}{6}(3A+8I)$; 3. 4; 4. $\dfrac{5}{12}$; 5. 5;

6. $2y_1^{\ 2}+2y_2^{\ 2}-7y_3^{\ 2};z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}-z_3^{\ 2}$

二、选择题（18 分）

1. C 2. A 3.A 4. C 5. B 6. D

三、(30 分)

1. (6 分)$M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}=A_{31}-A_{32}+A_{33}-A_{34}$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 8\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -10 & -1\end{vmatrix}=110$$

2.（6 分） $\begin{vmatrix}a_1+\lambda & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+\lambda & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1+\lambda & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & a_2+\lambda & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$（按照第一行展开）$=(\lambda+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)\lambda^{n-1}$

3.（8 分）$(A-I)X=B$

初等变换法解矩阵方程

$$(A-I,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&0&1&0\\0&1&0&1&-1\\0&0&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&-1\\0&0&1&-1&1\end{array}\right)$$

所以 $X=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

4.（10 分）

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&1&1&1&1\\1&-3&-1&0&t\\0&7&7&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&1&1&1&1\\0&-5&-5&-3&t-4\\0&7&7&3&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&1&1&1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&t-3\end{pmatrix}$$

因为向量组的秩为 3，所以 $t-3=0$ 即 $t=3$；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为其一个极大线性无关组。

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\to\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&1&1&1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=-\alpha_2+2\alpha_4$

四.（10 分） $\because A^2-3A+2I=O$

$\therefore (A-2I)(A-I)=O$

$\therefore A-I$ 的每一列均是齐次线性方程组 $(A-2I)x=0$ 的解

因此 $r(A-I)\le n-r(A-2I)$ 即 $r(A-I)+r(A-2I)\le n$

另一方面，因为

$r(A-2I)+r(A-I)=r(A-2I)+r(I-A)$

$\ge r((A-2I)+(I-A))=r(-I)=n$

所以结论可证。

五.（12 分）（1）$\because r(A)=2$

$\therefore A$ 中所有 3 阶子式全为 0

由$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ 得$a = 2$

由$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & b \end{vmatrix} = 0$ 得$b = -3$

（2）$(A,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

取自由变量x_3, x_4

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$得非齐次线性方程组的一个特解$\xi_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$得导出组的一个基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以非齐次线性方程组的一般解 $\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k_1, k_2为任意常数。

六.（12 分）（1）易知二次型对应的矩阵$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\because r(A) = 2$

$\therefore |A| = 0$

从而$a = 0$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

解得 $\lambda_1 = 2$（2 重根）$\lambda_2 = 0$（单根）

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 的一个基础解系为：$\xi_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对 ξ_{11}, ξ_{12} 用施密特正交化得：$\eta_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ 的一个基础解系为：$\xi_{21} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

单位化得：$\eta_{21} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

取正交矩阵 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，令 $x = Qy$ 得标准型 $f(y_1, y_2, y_3) = 2{y_1}^2 + 2{y_2}^2$

【13】中国海洋大学全日制本科课程期末考试试卷
2012秋季学期期末试题 A 卷

符号说明：$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩，A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，I 表示单位矩阵。

一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. $\begin{vmatrix} & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n-1 \\ n & & & & \end{vmatrix} =$______________.（空白处元素皆为0）

2.设 A 为3阶方阵，且 $|A| = 2$，则 $\left|(-\frac{1}{3}A)^{-1} + A^*\right| =$______________.

3.已知 η_1, η_2, η_3 是四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解，其中 A 的秩 $r(A) = 3$，

$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$，则方程组 $Ax = b$ 的一般解为______________.

4.设 A, B 皆为4阶方阵，且秩 $r(A) = 4, r(B) = 3$，则矩阵 A^*B^* 的秩 $r(A^*B^*) =$

______________.

5. 已知3阶方阵 A 的特征值为 $1,-2,3$，且矩阵 A 与 B 相似，则 $|I + B| =$________.

6. 二次型 $f = x_1^2 - x_2x_3$ 的规范型是______________________.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1.设 A 为3阶方阵，B 为2阶方阵，且 $|A| = 2, |B| = 3$，则 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} =$（　　）

$A.$ 2　　　$B.$ 6　　　$C.$ -6　　　$D.$ -3

2.设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2 + 3A = O$，则下列命题不正确的是（　　）

$A.$ $A + I$ 是可逆矩阵　　$B.$ $A - I$ 是可逆矩阵

$C.$ $A - 3I$ 是可逆矩阵　　$D.$ $3A$ 是可逆矩阵

3.设 α, β, γ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，但（　　）不是它的基础解系。

$A.$ $\alpha, 2\beta, 3\gamma$　　　　$B.$ $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$

$C.$ $\alpha - \beta + \gamma, \gamma - \alpha + \beta, 3\gamma$　　　　$D.$ $\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma$

4.齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是（　　）

$A.$ A 的列向量组线性相关　　　$B.$ A 的行向量组线性相关

$C.$ A 的行向量中有一个为零向量　　$D.$ A 为方阵且其行列式为零

5. 以下说法错误的是（　　）

$A.$若n阶矩阵A的行列式等于0，则0是A的一个特征值

$B.$若λ是n阶矩阵A的特征值，则秩$r(\lambda I - A) < n$

$C.$若λ是n阶矩阵A的特征值，则$\lambda^2 - 1$是矩阵$A^2 - I$的特征值

$D.$若n阶矩阵A有n个互不相同的特征向量，则A可对角化

6.矩阵$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$合同于（　　）

$A.\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$　$B.\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$　$C.\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$　$D.\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$

三、计算题(共 3 题，共 28 分)

1.（8 分）已知$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，计算$M_{31} + 5M_{32} + M_{33} - 3M_{34}$，其中$M_{ij}$是$|A|$中元素$a_{ij}$的余子式。

2.（10 分）设$AB = A + 2B$，且$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$B$

3.（10 分）求向量组$\alpha_1 = (1,2,0,1)^T, \alpha_2 = (1,0,2,1)^T, \alpha_3 = (2,1,3,0)^T, \alpha_4 = (2,5,-1,4)^T$，$\alpha_5 = (1,-1,3,-1)^T$的秩及其一个极大线性无关组，并用它们表示其余向量。

四、证明题(共 1 题，共 12 分)

设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$n$阶矩阵$A$分别对应于特征值$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$的$3$个特征向量，且$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$互不相等，已知$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，证明：$\beta, A\beta, A^2\beta$线性无关。

五．（12 分）设$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & c & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，如果$\eta$是方程组$Ax = b$的一个解，

求 $Ax=b$ 的解。

六.（**12 分**）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$ 的秩为 2，求：（1） c 的值；

（2）利用正交变换法，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型，并写出相应的正交矩阵。

2012 年秋季学期线性代数 A 卷答案

一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. $(-1)^{n-1}n!$　2. $-\dfrac{1}{2}$　3. $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-2\\5\\-8\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数　4. 1

5. -8　6. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1-6. $BDCADC$

三、计算题(共 3 题，共 28 分)

1. （8 分）

$$M_{31}+5M_{32}+M_{33}-3M_{34}=A_{31}-5A_{32}+A_{33}+3A_{34}=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&-5&1&3\\2&2&3&4\end{vmatrix}=0$$

2.（10 分）易知：$(A-2I)B=A$

$$(A-2I,A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&1&1&2&-1&1\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)$$

所以，$B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$

3. （10 分）$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\2&0&1&5&-1\\0&2&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&-2&-3&1&-3\\0&2&3&-1&3\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&-2&-3&1&-3\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&-2&0&-2&0\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\because$初等行变换不改变矩阵列向量之间的线性关系

$\therefore$向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为$3$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为其一个极大线性无关组，

$\alpha_4=3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_5=-\alpha_1+\alpha_3$

四、证明题(共 1 题，共 12 分)

证明：$\because\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$n$阶矩阵$A$分别对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的$3$个特征向量

$\therefore\ A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,A\alpha_3=\lambda_3\alpha_3$且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

$\therefore\ A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$

$A^2\beta=A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3$

若有$k_1\beta+k_2A\beta+k_3A^2\beta=0$，

即$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)+k_3(\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3)=0$

整理得：$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\alpha_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\alpha_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\alpha_3=0$

$\because\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

$$\therefore\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0\end{cases}$$

$\because$ 系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) \neq 0$（因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相等）

$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0 \qquad \therefore \beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关。

五．（12 分）$\because A\eta = b \quad \therefore a = c$

增广矩阵 $(A,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & a-\frac{1}{2} & a-\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$

（1）$a = \dfrac{1}{2}$ 时，$(A,b) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

取出自由变量 x_3, x_4，令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 得 $Ax = b$ 的一个特解 $\xi_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

此时，方程组的一般解为：$\xi = \xi_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k_1, k_2 为任意常数。

（2）$a \neq \dfrac{1}{2}$ 时，$(A,b) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

取出自由变量 x_4，令 $x_4=0$ 得 $Ax=b$ 的一个特解 $\eta_0=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

令 $x_4=1$ 得导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

此时，方程组的一般解为：$\eta=\eta_0+k_1\eta_1=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数。

六.（12 分）

（1）二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&1&2\\1&5&-2\\2&-2&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-2\\5&1&2\\2&-2&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-2\\0&-24&12\\0&-12&c+4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&5&-2\\0&2&-1\\0&0&c-2\end{pmatrix}$

$\because$ 二次型的秩为 2　　$\therefore c-2=0$　$\therefore c=2$

（2）

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&-1&-2\\-1&\lambda-5&2\\-2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-6)\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&\lambda-5&2\\-2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-6)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&\lambda-4&2\\-2&4&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$=\lambda(\lambda-6)^2$　　$\therefore \lambda_1=0$(单根)，$\lambda_2=6$（二重根）

$\lambda_1=0$ 时，$0I-A=\begin{pmatrix}-5&-1&-2\\-1&-5&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

取自由变量x_3，令$x_3=1$得$(0I-A)x=0$的一个基础解系：$\xi_{11}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

单位化得：$\eta_{11}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\lambda_2=6$时，$6I-A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\-2&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

取自由变量x_2,x_3，令$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$得$(6I-A)x=0$的一个基础解系：

$\xi_{21}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_{22}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，对$\xi_{21},\xi_{22}$施密特正交化：令$\beta_{21}=\xi_{21}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\beta_{22}=\xi_{22}-\frac{(\xi_{22},\beta_{21})}{(\beta_{21},\beta_{21})}\beta_{21}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\eta_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_{22}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

取正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,则$Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&&\\&6&\\&&6\end{pmatrix}$,做正交变换$x=Qy$，得标准型：$g(y_1,y_2,y_3)=6y_2^2+6y_3^2$。

【14】中国海洋大学全日制本科课程期末考试试卷

2013 线性代数试题 A 卷

符号说明：$r(A)$表示矩阵A的秩，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，$I_n=E$表示n阶单位矩阵，A^T表示矩阵A的转置矩阵，A_{ij}是$|A|$的元素a_{ij}的代数余子式.

一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设A为m阶方阵，B为n阶方阵，且$|A|=3$，$|B|=2$，$C=\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$，则$|C|$=______.

2.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维列向量，记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且$|A|=1$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，则$|B|=$ _______;

3.设向量组（I）α_1,α_2；（II）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；（III）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$；（IV）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4$

若（I）、（II）的秩为 2，(III)的秩为 3，则(IV)的秩为__________；

4.设 3 阶方阵 A 的一个特征值为 $\frac{1}{9}$，与其对应的特征向量 $\alpha=(1,1,1)^T$，

则方阵 A 的 9 个元素之和为_____；

5.若 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$, 则 $\left|2A^{-1}+I\right|=$_____；

6.设 P,Q 均为 n 阶可逆矩阵，A 是 n 阶矩阵, 且 $PAQ=E$，则 $A^{-1}=$______.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 A 为 3 阶矩阵,将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B ,再将 B 的第 2 列的加到第 1 列得 C，

记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　　）

（A）$C=PAP^{-1}$　(B) $C=P^{-1}AP$　(C) $C=P^{\mathrm{T}}AP$　（D）$C=PAP^{\mathrm{T}}$.

2. 设 A,B 均为 n 阶矩阵, 且 $A(B-E)=O$，则必有（　　）;

（A）$A=O$ 或 $B=E$　（B）两矩阵 A 与 $B-E$ 中，至少有一个为奇异矩阵

（C）$|A|=0$ 或 $|B|=1$　（D）$A=BA$

3. n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ $(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为（　　）

(A) 矩阵 $A=$（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$）与矩阵 $B=$（$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$）等价

(B)向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

(C)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价

(D) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示

4. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组为 $Ax=b$ 有解的充分条件是（　）

(A) A 的秩小于 A 的行数　(B) A 是列满秩的

(C) A 是行满秩的　(D) A 的秩小于 A 的列数

5. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ 不相似的矩阵是(　　)

（A） $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ （B） $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ （C） $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ （D） $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

6.设 A 是 $m\times n$ 矩阵,$r(A)=m(m<n)$,B 是 n 阶矩阵,下列哪个成立?

(A) A 中任一 m 阶子式 $\neq 0$; (B) A 中任意 m 列线性无关;

(C) $\left|A^T A\right|\neq 0$; (D) 若 $r(B)=n$，则 $r(AB)=m$.

三、计算和证明题(共 4 题 共 28 分)

1. 设 3 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 为非零矩阵，A_{ij} 是 $|A|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式，

若 $a_{ij}+A_{ij}=0 \quad (i,j=1,2,3)$ 则求 $|A|$.（6 分）

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基，求 $\alpha_1,\dfrac{1}{2}\alpha_2,\dfrac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵. （8 分）

3. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，若 $AB=O$，求证：$r(A)+r(B)\leq n$.（6 分）

4. 求向量组 $\alpha_1=(1,3,-2,1)^T,\alpha_2=(5,6,2,0)^T,\alpha_3=(-2,3,1,-1)^T,\alpha_4=(-5,3,-5,1)^T$

的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用这个极大线性无关组线性表示.（8 分）

四、证明题(共 1 题 共 10 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，试讨论向量组

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 的线性关系.（给以证明）

五、计算题(共 1 题 共 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得

$AC-CA=B,$ 并求所有矩阵 C .

六、计算题(共 1 题 共 15 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$

（I）求二次型 f 的矩阵的所有特征值.

(II）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

(III) 求正交变换 $X = QY$，且利用正交变换法将 f 化为标准型.

2013 年春季学期线性代数试题 A 答案

一、1. $\underline{(-1)^{mn}6}$； 2. 、$\underline{\quad 2 \quad}$； 3. $\underline{\quad 3 \quad}$； 4. $\underline{\quad 1/3 \quad}$； 5. $\underline{\ 105\ }$；6. $\underline{QP}$.

二、1、D； 2、B； 3、A； 4、C ； 5、D； 6、D.

三、1、因为 $a_{ij} + A_{ij} = 0 \quad (i, j = 1,2,3)$，所以 $A_{ij} = -a_{ij}$，

故 $A^* = -A^T$, 有 $-|A|^2 = |A|^3$, 有 $|A| = 0$, 或 $|A| = -1$，当 $|A| = 0$, 有 $A = 0$，矛盾

所以 $|A| = -1$

2、2. 设 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 A，即

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\right) = \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3\right)A$$

因为

$$\left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\right) = \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3\right)A = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}A$$

这说明

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. 设 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_s)$，因此 $0 = AB = A(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (A\beta_1, \cdots, A\beta_s)$，这说明

$A\beta_1 = \cdots = A\beta_s = 0$，即 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 是 $Ax = 0$ 的解，因此可以被 $Ax = 0$ 的基础解系线性表出，

因此 $r(B) = 秩\{\beta_1, \cdots, \beta_s\} \le n - r(A)$，即 $r(A) + r(B) \le n$

4. 因为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -5 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \\ 0 & 12 & -3 & -15 \\ 0 & -5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $秩\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$，一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，化为行简化形式为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $\alpha_4 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

四、证明：因为$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix} = AB$$

因为 det(B)=1+$(-1)^{1+n}$，所以，当n为奇数，det(B)$\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关。

当n为偶数，det(B)= 0，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关。

五、解：设 $C=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$,则 $AC=\begin{pmatrix} x_1+ax_3 & x_2+ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$，$CA=\begin{pmatrix} x_1+x_2 & ax_1 \\ x_3+x_4 & ax_3 \end{pmatrix}$.

因为 $AC-CA=B$，则由 $AC-CA=B$，得 $\begin{cases} -x_2+ax_3=0 \\ -ax_1+x_2+ax_4=0 \\ x_1-x_3-x_4=1 \\ x_2-ax_3=b \end{cases}$,

解非齐次线性方程组，增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

当 $a=-1,b=0$ 时该非齐次线性方程组有解，即存在C使得 $AC-CA=B$，

解方程组得，

$$X=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}，\quad c_1,c_2 \text{为任意常数}$$

所以 $C=\begin{pmatrix} 1+c_1+c_2 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, c_1,c_2$ 为任意常数.

五． 六、解：(I) 二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

则

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 2\\ 0 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)\big((\lambda-a)(\lambda-a+1)-2\big)$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$$

即二次型的矩阵的所有特征值为$a,a-2,a+1$

(II) 因为二次型的规范形为$y_1^2+y_2^2$，说明 A 的特征值有 2 个为正，1 个为零，因此 a 只能为 2，A 的特征值为 0，2，3

(III) 由

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

将 A 的特征值 0，2，3 分别代入$(\lambda I-A)x=0$ 计算得到 3 个彼此正交的特征向量为

$$\alpha_1=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,-1,1)^T$$

正交化后得

$$\beta_1=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^T,\beta_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)^T,\beta_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$$

因此正交矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

标准型为 $f=2y_2^2+3y_3^2$