一、填空题(共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

1. 已知 A 为 3 阶方阵，$|A|=3$，则 $\left|\left(\frac{1}{6}A\right)^{-1}-3A^*\right|=(\quad)$.

2. 设 A 为 4 阶方阵，第一行的元素依次为 $1,2,a,-1$，第二行各元素的余子式依次为 $3,1,2,1$，则 $a=(\quad)$.

3. 设 A 为 3 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量；$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$；则 $|A|=(\quad)$.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}=(\quad)$.

5. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1-4x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=(\quad)$.

二、选择题(共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

1. 设向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组(II)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则(　).

(A) 当 $r<s$ 时，向量组(II)必线性相关

(B) 当 $r>s$ 时，向量组(II)必线性相关

(C) 当 $r<s$ 时，向量组(I)必线性相关

(D) 当 $r>s$ 时，向量组(I)必线性相关

2. 设 A,B,C 为 n 阶方阵，且 $ABC=\boldsymbol{I}$，则必有(　).

(A) $CAB=\boldsymbol{I}$　(B) $BAC=\boldsymbol{I}$　(C) $CBA=\boldsymbol{I}$　(D) $ACB=\boldsymbol{I}$

3. 设 A, B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是(　).

(A) A^T 与 B^T 相似；　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似；

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似；　(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似；

4. 设 A, B 是 n 阶矩阵，$r(X)$ 表示矩阵 X 的秩，(X,Y)表示分块矩阵，则下列正确的是(　).

(A) $r(\mathrm{A},\mathrm{BA})=r(\mathrm{A})$；　　(B) $r(\mathrm{A},\mathrm{AB})=r(\mathrm{A})$；

(C) $r(\mathrm{A},\mathrm{B})=\max\{r(\mathrm{A}),r(\mathrm{B})\}$；　　(D) $r(\mathrm{A},\mathrm{B})=r(\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}^{\mathrm{T}})$.

5. 设 A 为 n 阶矩阵，则 A 为正定矩阵的充分必要条件是(　).

(A)对任意 n 维非零向量 x，均有 $x^{T}\mathrm{A}x\geq 0$；　(B) A 没有负特征值；

(C)存在 n 阶矩阵 C，使得 $\mathrm{A}=\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}$；　　(D) A 与单位矩阵合同.

三、计算和证明(共 36 分，每题 6 分)

1. 计算行列式的值 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2^2&2^3\\1&3&3^2&3^3\\1&4&4^2&4^3\end{vmatrix}$.

2. 已知 A 为 n 阶矩阵，且 $\mathrm{A}^2-2\mathrm{A}+4\boldsymbol{I}=O$，证明 $\mathrm{A}+\boldsymbol{I}$ 可逆，并求 $(\mathrm{A}+\boldsymbol{I})^{-1}$.

3. 已知 R^3的两组基 $\mathrm{B}_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$和 $\mathrm{B}_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$.

(1)求基 B_1到基 B_2的过渡矩阵 A；

(2)已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1下的坐标向量为 $(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2下的坐标向量.

4. 求向量组 $\alpha_1=(1,0,1,0,1)$，$\alpha_2=(0,1,1,0,1)$，$\alpha_3=(1,1,0,1,0)$，

$\alpha_4=(-3,-2,3,0,1)$，$\alpha_5=(-2,-1,3,-3,3)$ 的秩，及其一个极大线性无关组，

并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

5. 设 A 为 n 阶方阵，且 $\mathrm{A}^2=\mathrm{A}$，证明：$r(\mathrm{A})+r(\mathrm{A}-\boldsymbol{I})=n$.

6. 设 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&0\\1&3&5\end{pmatrix}$，判断 A 是否可对角化并说明理由.

四、证明题（8 分）

设向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性相关，$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 线性无关. 回答下列问题并证明.

(1) α_1 能否由 $\{\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示？

(2) α_4 能否由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示？

五、（13 分）讨论 a,b 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多解，并求出有无穷多解时的通解.

六、（13 分）

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$

在正交变换 $x = \mathrm{Q}y$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$，求 a 的值和相应的正交矩阵 Q.