

第四章

2. 令 $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos x$, 则 $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x > 0$, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上递增
 $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有且仅有一实根
 又有: $x = \frac{1}{2} \cos x \Rightarrow$ 令 $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cos x$, 则 $\varphi'(x) = -\frac{1}{2} \sin x$
 $\Rightarrow |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$, 又: 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上 $\varphi(x)$ 值域为 $[0, \frac{1}{2}]$, 为 $[0, \frac{\pi}{2}]$
 的子区间, 故该迭代对一切 $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 均收敛,
 故取 $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$

5. (1). 令 $\varphi(x) = 4 + \frac{2}{3} \cos x$, 在 \mathbb{R} 上, $\varphi(x)$ 值域为 \mathbb{R} 子区间.

$\varphi'(x) = -\frac{2}{3} \sin x \Rightarrow |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3} < 1$, 故它对任意 x_0 均收敛

(2) 令 $\varphi'(x) = 0$ 得 $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$, 代入 $f(x) = 12 - 3x + 2 \cos x$
 发现 $f(x)$ 均不为 0, 故 $\varphi'(x^*) \neq 0$. 则 $e_{k+1} = x_{k+1} - x^*$
 $= \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \varphi'(x^*) e_k$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = |\varphi'(x^*)| \neq 0 \Rightarrow$ 线性收敛

(3) $k \quad x_i$

0 0.4

1 4.61404066266859

2 3.934540099689069

3 3.532167644401583

4 3.3835397985801494

5 3.35271138457165

6 3.348140826108377

年 月 日

第 页

7. (1) $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $\varphi'(x) = -2\frac{1}{x^3}$, $\varphi''(x) = 6\frac{1}{x^4} > 0$, $\varphi'(x) \uparrow$

$\varphi'(x) \leq \varphi'(1.6) = -0.488$, $\varphi'(x) > \varphi'(1.3) = -0.91$

故 $|\varphi'(x)| \leq -0.92 < 1$

在 $[1.3, 1.6]$ 上, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x) \downarrow$, 故 $\varphi(x) \leq \varphi(1.3) = 1.59 < 1.6$

$\varphi(x) > \varphi(1.6) = 1.39 > 1.3$, 故迭代收敛

(2) $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$, $\varphi'(x) = \frac{2}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot x \xrightarrow{t=x} \varphi'(t) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{1+t^2}} \cdot t$

$t \in [\frac{1}{16}, \frac{1}{3}]$, 对 $g(t) = t^3 + 2t + \frac{1}{t}$, ~~$g'(t) = 3t^2 - \frac{1}{t^2} + 2$~~

在 $[\frac{1}{16}, \frac{1}{3}]$ 上 ~~$g'(t) > 0$~~ , $g(t) > 1$, 故 $|\varphi'(t)| < \frac{2}{3} < 1$

$\varphi(x)$ 易知为增函数, 故 $\varphi_{\max}(x) = \varphi(1.6) = 1.52 < 1.6$

$\varphi_{\min}(x) = \varphi(1.3) = 1.39 > 1.3$, 故该迭代收敛

(3) 用第(1)种迭代求得 1.466, 用第(2)种求得 1.467

9. 假设存在 $x' \in [a, b]$ 作为初值时, 迭代过程 ^{收敛} 收敛, 则

此时 $\forall x \in [a, b]$, $|\varphi'(x)| \leq 1$, 与条件相反。故任意 $x_0 \in [a, b]$,

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 均发散。

10. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$, 当 $x \in [1.3, 1.6]$ 时,

$x-1 \in [0.3, 0.6]$, $(x-1)^{-\frac{3}{2}} \in [1.9, 2.15] \subset [2.15, 6.085]$

故 $|\varphi'(x)| > 1$, 由题 9 知该迭代公式对于 $\forall x_0 \in (1.3, 1.6)$ 均发散。

一个根: 1.46557

年 月 日

第 页

13. $\varphi(x) = x + c(x^2 - 3)$, $\varphi'(x) = 1 + 2cx$, 令 $|\varphi'(x)| < 1$

得 $-1 < cx < 0$. 故选 c 时只需在 x^* 的 δ 邻域 $[x^* - \delta, x^* + \delta]$

内满足上式即可