第四章 习题一

岳宇轩 19020011038

一、1. √ 2. √

二、1. $\underline{4}$ 2. $\underline{2}$ $\underline{2e^{-2}}$ $\underline{1-3e^{-2}}$ 3. $\underline{\frac{7}{4}}$ 4. $\underline{3}$ $\underline{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-10}}$

5. λ^{-1} 6. $\underline{\frac{1}{3}}$ 7. $\underline{3}$ $\underline{2}$

三、1.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$E(X)=1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{9+18+1}{20}=\frac{7}{5}$$

2. $$P=\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{9+18+3}{120}=\frac{1}{4}$$

二、8. $\underline{\frac{4}{5}}$ $\underline{\frac{1}{2}}$ 9. $\underline{e^{\frac{1}{2}}}$ 10. $\underline{\frac{4}{3}}$ 11. $\underline{\frac{3}{4}}$

四、$$F_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{\theta}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad F_M(x)=\begin{cases}\left(\frac{x}{\theta}\right)^n, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_M(x)=\begin{cases}n\theta^{-n}x^{n-1}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(M)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_M(x)dx=\int_0^\theta x\,n\theta^{-n}x^{n-1}dx=\int_0^\theta \theta^{-n}x^n dx$$

$$=\frac{\theta^{-n}}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^\theta=\frac{\theta^{-n}\theta^{n+1}}{n+1}=\frac{\theta}{n+1}$$

五、$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda(x-a)}, & x>a\\ 0, & x\le a\end{cases}$$

$$F_N(x)=\begin{cases}1-\left[e^{-\lambda(x-a)}\right]^n, & x>a\\ 0, & x\le a\end{cases}\qquad f_N(x)=\begin{cases}n\lambda e^{-n\lambda(x-a)}, & x>a\\ 0, & x\le a\end{cases}$$

地址：青岛市松岭路238号 邮编：266100 电话：0532-66782730 传真：0532-66782799 网址：http://www.ouc.edu.cn

$E(N)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_N(x)\,dx=\int_a^{+\infty} x\, n\lambda\left[e^{-n\lambda(x-a)}\right]dx$

$\underline{\underline{t=x-a}}\ \int_0^{+\infty}(a+t)\,n\lambda e^{-n\lambda t}\,dt=a\int_0^{+\infty} n\lambda e^{-n\lambda t}\,dt+\int_0^{+\infty} t\,n\lambda e^{-n\lambda t}\,dt$

$=a-\left[te^{-n\lambda t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-n\lambda t}\,dt\right]=a-\frac{1}{n\lambda}e^{-n\lambda t}\Big|_0^{+\infty}=a+\frac{1}{n\lambda}$

六.1.

X	1	2	3
P	0.4	0.2	0.4

Y	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

$E(X)=0.4+0.2\times2+0.4\times3=2$

$E(Y)=(-1)\times0.3+1\times0.3=0$

2. $E(Z)=E\left(\frac{Y}{X}\right)=\frac{E(Y)}{E(X)}=0$

七.1. $\cancel{E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)}$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\int_0^{+\infty}2xe^{-2x}\,dx=-\int_0^{+\infty}x\,de^{-2x}=-\left[xe^{-2x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,dx\right]$

$=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,d(-2x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$

$E(Y)=\frac{1}{4}$, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{3}{4}$,

$E(2X-3Y)^2=2E(X)-3E^2(Y)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

2. $E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{8}$

八、$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2}, & 1<x<3\\ 0, & 其它\end{cases}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=\frac{a-1}{2}+\frac{3-a}{2}-\frac{(a-1)(3-a)}{4}$ # $a=\frac{5}{3}$或$\frac{7}{3}$

$E\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{1}{E(X)}=\frac{1}{\frac{1+3}{2}}=\frac{1}{2}$

九、$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{20}, & 20<x<40\\ 0, & 其他\end{cases}$ 设总收益为Q

$Q=\begin{cases}3a, & X\geq a\\ 3X-(a-X), & X<a\end{cases}=g(X,a)$

$$E(Q)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,a)f(x)\,dx=\int_{20}^{a}[3x-(a-x)]\frac{1}{20}\,dx+\int_{a}^{40}3a\frac{1}{20}\,dx$$

$$=\frac{1}{20}\left[\int_{20}^{a}(4x-a)\,dx+\int_{a}^{40}3a\,dx\right]=\frac{1}{20}\left[\frac{1}{4}\int_{20}^{a}(4x-a)\,d(4x-a)+3a(40-a)\right]$$

$$=\frac{1}{20}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(4x-a)^2\Big|_{20}^{a}+120a-3a^2\right]=\frac{1}{20}\left[\frac{1}{8}[9a^2-(80-a)^2]+120a-3a^2\right]$$

$$=\frac{1}{20}\left[\frac{1}{8}(9a^2-6400-a^2+160a)+120a-3a^2\right]$$

$$=\frac{1}{20}[a^2-800+20a+120a-3a^2]$$

$$=\frac{1}{20}[-2a^2+140a-800]$$

$$=-\frac{1}{10}a^2+7a-40$$

(2) 为使收益最大， $a=-\frac{7}{2\times(-\frac{1}{10})}=\frac{7}{\frac{1}{5}}=35$

答：收益最大时生产35吨。