第三章 习题 4

乐宇轩 19020011038

中国海洋大学 OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

一、1、$\frac{1}{18}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{1}{9}$ 2、$\frac{5}{9}$ $\frac{2}{9}$ 3、$\rho=0$ 4、是 5、$\frac{1}{2}$ 6、$\frac{17}{25}$

二、1.D 2.C 3.A

三、1. $f_X(x)=\int_0^1 6x^2y\,dy=6x^2\cdot\frac{1}{2}=3x^2$ $(0<x<1)$, $f_Y(y)=\int_0^1 6x^2y\,dx=y\int_0^1 6x^2dx=2y$ $(0<y<1)$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\Rightarrow$ X和Y独立

2、$g(X)=\sqrt{\tan X}$ 与 $f(Y)=1-2e^{Y}$ 均为连续函数 $\therefore$ $\sqrt{\tan X}$ 与 $1-2e^{Y}$ 相互独立

四、1、$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^x c(x+y)\,dy\right]dx=\int_0^1\left[\frac{1}{c}\int_0^x c(x+y)\,d(c(x+y))\right]dx$

$=\int_0^1\frac{3}{2}cx^2dx=\frac{1}{2}c=1\Rightarrow c=2$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_0^x 2(x+y)\,dy=3x^2$ $(0\le x\le 1)$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_y^1 2(x+y)\,dx=-3y^2+2y+1$ $(0\le y\le 1)$

2、$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ $\therefore$ 不相互独立

五、1. $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

2. $P\{X\le 1|Y>0\}=\frac{P\{X\le 1,Y>0\}}{1-P\{Y\le 0\}}=\frac{P\{X\le 1\}\{1-P\{Y\le 0\}\}}{1-P\{Y\le 0\}}=P\{X\le 1\}$

$=\int_{-\infty}^{1}f_X(x)dx=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$

六、$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^2(x^2+cxy)\,dy\right]dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}cx\right)(x^2+cxy)\Big|_0^2\,dx$

$=\int_0^1\frac{1}{2}cx\,4(cx^2+(x+c))\,dx=\int_0^1 2x(x+c)\,dx=\frac{2}{3}+c\Rightarrow c=\frac{1}{3}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_0^2(x^2+\frac{1}{3}xy)\,dy=x^2\int_0^2dy+\frac{1}{3}x\int_0^2y\,dy=2x^2+\frac{2}{3}x$ $(0\le x\le 1)$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_0^1(x^2+\frac{1}{3}xy)\,dx=\int_0^1x^2dx+\frac{1}{3}y\int_0^1x\,dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y$ $(0\le y\le 2)$

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{3x+y}{6x+2}\\ 0\end{cases}$ $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$. 其它

$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ $\therefore$ X与Y不独立

中国海洋大学
OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

七、

X \ Y	-1	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

否. $P\{X=-1, Y=0\} \neq P\{X=-1\} \cdot P\{Y=0\}$

地址：青岛市松岭路238号 邮编：266100 电话：0532-66782730 传真：0532-66782799 网址：http://www.ouc.edu

第三章 习题五

岳宇轩 19020011038

中国海洋大学 OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

一、

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

二、

X	-2	-1	0
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$

Y	-1	$\frac{1}{2}$	3
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$

1.

X+Y	-3	$-\frac{3}{2}$	1	-2	$-\frac{1}{2}$	2	-1	$\frac{1}{2}$	3
P	$\frac{25}{144}$	$\frac{15}{144}$	$\frac{20}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{6}{144}$	$\frac{8}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{15}{144}$	$\frac{20}{144}$

2.

X-Y	-1	$-\frac{5}{2}$	-5	0	$-\frac{3}{2}$	-4	1	$-\frac{1}{2}$	-3
P	$\frac{25}{144}$	$\frac{15}{144}$	$\frac{20}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{6}{144}$	$\frac{8}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{15}{144}$	$\frac{20}{144}$

3.

X^2+Y-2	1	$\frac{5}{2}$	5	-2	$-\frac{1}{2}$	2	-3	$-\frac{3}{2}$
P	$\frac{45}{144}$	$\frac{15}{144}$	$\frac{20}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{6}{144}$	$\frac{8}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{15}{144}$

4.

max{X,Y}	-1	$\frac{1}{2}$	3	0
P	$\frac{35}{144}$	$\frac{36}{144}$	$\frac{48}{144}$	$\frac{25}{144}$

三、

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Z	-1	0	
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

YZ	-1	0	1
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

Z\Y	0	1	
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

地址：青岛市松岭路238号 邮编：266100 电话：0532-66782730 传真：0532-66782799 网址：http://www.ouc

一、$N(0,25)$.

二、B

三、1、$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{z-1}^{z+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}[\Phi(z+1)-\Phi(z-1)]$

2、$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{z-1}^{z}e^{-y}dy=e^{1-z}-e^{-z}$

3、1、令 $Z=X_1+X_2$

$x>0$：$f_Z=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)f_{X_2}(z-x)dx$

$=\int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}dx$

$=e^{-z}[z\int_0^z xdx-\int_0^z x^2dx]$

$=\frac{1}{6}e^{-z}z^3$

$\therefore f_Z=\begin{cases}\frac{1}{6}z^3e^{-z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

2、令 $W=Z+Y$

$w>0$：$f_W=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)f_X(w-z)dz$

$=\int_0^w \frac{1}{6}z^3e^{-z}(w-z)e^{z-w}dz$

$=\frac{1}{120}w^5e^{-w}$

$\therefore f_W=\begin{cases}\frac{1}{120}w^5e^{-w}, & w>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

四、1. $P\{Z\le z\}=P\{\frac{X+Y}{2}\le z\}=\iint_{\frac{x+y}{2}\le z} f(x,y)\,dxdy$

$x>0, y>0$ $\Rightarrow z>0$：上式 $=\iint_{\substack{\frac{x+y}{2}\le z\\ x>0\\ y>0}} e^{-(x+y)}\,dxdy=\int_0^{2z}\left(\int_0^{-x+2z} e^{-y}dy\right)e^{-x}dx$

$=\int_0^{2z} e^{-x}dx-\int_0^{2z}e^{-2z}dx=1-e^{-1}-e^{-2z}$

$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-2z}-2ze^{-2z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}4ze^{-2z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

2、$P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}=\iint_{x+2y\le z} f(x,y)\,dxdy$

$x>0, y>0\Rightarrow z>0$：上式 $=\iint_{\substack{x+2y\le z\\ x>0\\ y>0}} 2e^{-x-2y}\,dxdy=2\int_0^z\left(\int_0^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z} e^{-2y}dy\right)e^{-x}dx$

$=\int_0^z\left(1-e^{x-z}\right)e^{-x}dx=1-e^{-z}-ze^{-z}$

$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

五、$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=P(X=1, X+Y\le z)+P(X=2, X+Y\le z)$

$=P(X=1)P(X+Y\le z\,|\,X=1)+P(X=2)P(X+Y\le z\,|\,X=2)=P(X=1)P(Y\le z-1)+P(X=2)P(Y\le z-2)$

$=\frac{3}{10}\int_{-\infty}^{z-1}f(y)dy+\frac{7}{10}\int_{-\infty}^{z-2}f(y)dy$