**中国海洋大学全日制本科课程期中考试试卷参考答案**

**2020年春季学期《离散数学II》**

**一、计算题（36分）**

1. d=(3，3，2，2，2), 判断d是否可简单图化？并解释原因。如果可以简单图化，画出其中一种简单图。(5分)

答：(3，3，2，2，2) 的度数和为偶数，(3，3，2，2，2)可简单图化⇔（2，1，1，2）可简单图化⇔（2，2，1，1）可简单图化⇔（1，0，1）可简单图化。【2分】

因为（1，0，1）可简单图化，故(3，3，2，2，2)可简单图化。【1分】

对应的一种简单图如下：【2分】

*v*12

*v*11

*v*10

*v*9

*v*8

*v*7

*v*6

*v*5

*v*4

*v*3

*v*2

*v*1

G1

*v*5

*v*4

*v*3

*v*2

*v*1

G3

e6

e5

e4

e3

e2

e1

*v*5

*v*4

*v*3

*v*2

*v*1

G2

1. 根据G1作答， (7分)
2. 求G1的点连通度，给出一个最小点割集; (2分)
3. 求G1 的边连通度，给出一个最小边割集; (2分)
4. 求G1的周长c(G1), 围长g(G1)，直径d(G1) (3分)

答：（1）G1的点连通度为2，最小点割集是{v2,v5}.

（2）G1 的边连通度为2，最小边割集是{(v2,v3), (v3,v5)}.

（3）G1的周长c(G1)=5，围长g(G1)=3，直径d(G1)=2.

1. 根据G2作答， (12分)
2. 画出G2的一棵生成树；(2分)
3. G2有多少棵不同的生成树？(2分) (直接写答案，不需要列计算过程)
4. 根据(1)中画出的生成树，求G2基本回路系统，及环路空间；(4分)
5. 根据(1)中画出的生成树，求G2基本割集系统，及断集空间。 (4分)

答：（1）G2的一棵生成树如下：（2分）

e6

e5

e4

e3

e2

e1

*v*5

*v*4

*v*3

*v*2

*v*1

G2

e5

e3

e2

e1

*v*5

*v*4

*v*3

*v*2

*v*1

G2

（2）G2有9棵不同的生成树。2分

（3）Ce4=e3e4e5; Ce6=e1e2e6; G2基本回路系统为{ Ce4, Ce6}, 【2分】

Ce4⊕ Ce6= Ce4∪ Ce6. 环路空间为{∅, Ce4, Ce6, Ce4∪ Ce6}. 【2分】

（4）Se1={e1,e6}, Se2={e2,e6}, Se3={e3,e4}, Se5={e4,e5}.

G2基本割集系统为{ Se1, Se2, Se3, Se5}，【2分】

Se1⊕Se2={e1,e2}, Se1⊕Se3={e1,e6, e3,e4}, Se1⊕Se5={e1,e6, e4,e5},

Se2⊕Se3={e2,e3, e4,e6}, Se2⊕Se5={e2,e4, e5,e6}, Se3⊕Se5={e3,e5 },

Se1⊕Se2⊕Se3={e1,e2, e3,e4}, Se1⊕Se2⊕Se5={e1,e2, e4,e5},

Se1⊕Se3⊕Se5={e1,e3, e5,e6}, Se2⊕Se3⊕Se5={ e2,e3, e5,e6},

Se1⊕Se2⊕Se3⊕Se5={e1,e2, e3,e5}

断集空间为{∅, Se1, Se2, Se3, Se5, {e1,e2},{e1,e6, e3,e4}, {e1,e6, e4,e5},

{e2,e3, e4,e6}, {e2,e4, e5,e6},{e3,e5 },{e1,e2, e3,e4},{e1,e2, e4,e5},

{e1,e3, e5,e6},{e2,e3, e5,e6},{e1,e2, e3,e5}} 【2分】

*v*12

*v*11

*v*10

*v*9

*v*8

*v*7

*v*6

*v*5

*v*4

*v*3

*v*2

*v*1

G1

*v*5

*v*4

*v*3

*v*2

*v*1

G3

e6

e5

e4

e3

e2

e1

*v*5

*v*4

*v*3

*v*2

*v*1

G2

1. G3为根树， (5分)
2. 求G3的最大度，点*v*3的出度，*v*3的邻域；(3分)
3. 求G3的前序遍历结果 (2分)

答：（1）G3的最大度是3，点*v*3的出度是2，*v*3的邻域是{*v*1, *v*6, *v*7}【3分】

G3的前序遍历是*v*1*v*2*v*4*v*8*v*9*v*5*v*10*v*3*v*6*v*7*v*11*v*12. 【2分】

1. 已知字符*a*-*f*的传送频率为 *a* :20%, *b*: 20%, *c*: 20%, *d*: 15%, *e*: 15%, *f*: 10%,

求其Huffman编码，及平均码字长度。(6分)

答：根据Huffman算法构造二叉树：【2分】

*b*

*a*

*c*

*d*

*f*

*e*

编码如下：a：10，b：11，c：011，d：010，e：000，f：001 【2分】

平均码字长度：2\*20%+2\*20%+3\*20%+3\*15%+3\*15%+3\*10%=2.6 【2分】

1. G 为n阶竞赛图， (4分)
2. 求G的边数m； (1分)
3. 画出4阶竞赛图；(1分)
4. 画出4阶竞赛图中合并任意两个顶点后的结果； (1分)
5. 画出4阶竞赛图的一个生成子图。 (1分)

答：（1）G的边数m=;

（2）4阶竞赛图如图1所示，其中边的方向可任意改变。

图1 图2 图3

（3）4阶竞赛图中合并任意两个顶点后的结果如图2所示。

（4）4阶竞赛图的一个生成子图如图3所示。

7. 请分别画出满足下列条件的无向图 (6分)

(1) 偶数个顶点偶数条边的欧拉图;

(2) 奇数个顶点奇数条边的哈密顿图;

(3) 偶数个顶点奇数条边的非哈密顿图的二部图。

答：

（1） （2） （3）

**二、论述题 (33分)**

1. 若E为连通图G的边集，E的子集E1是边割集，子集E2是断集，(4分)

判断是否*p*(G-E1)=*p*(G-E2)？说明原因。

答：不一定，原因：边割集一定是断集，但断集不一定是边割集，*p*(G-E1)=2，而*p*(G-E2)≥2,反例：如下图所示，E1={e1,e6},E2={e1,e2,e3,e4}, *p*(G-E1)=2, *p*(G-E2)=3， *p*(G-E1) ≠ *p*(G-E2).

e6

e5

e4

e3

e2

e1

*v*5

*v*4

*v*3

*v*2

*v*1

2. 答：（1）(6分)问题1是要求经过图G4中所有边的最短回路，图G4不是欧拉图，因此我们可以在图G4中增加若干平行边，使得新图成为欧拉图，由于每条边的权重相同，因此问题就变为：增加最少的边使图G4变为欧拉图。方案如下：

找出G4中的所有奇数度顶点{图书馆，行远楼，西操场，食堂，教学楼，信院南楼}，以相邻的两个奇数度顶点为一组，共可分为3组，分别为{行远楼，西操场}、{食堂，教学楼}、{图书馆，信院南楼},在每组中的两个顶点增加一条平行边，得到新图G’,如下图所示, G’连通且每个顶点都为偶数,可得到欧拉回路e1e2e3e5e4e2e7e6e5e11e10e8e8e9

手机截图图社交软件的信息

描述已自动生成

（2）(4分)问题2是求G4中的哈密顿回路，G4是哈密顿图，存在哈密顿回路， 其中一条如下：e1e7e6e4e3e11e10e9.

3. 圈在图论中有广泛的应用，请分别描述在二部图，欧拉图，哈密顿图，无向树中一个与圈有关的结论。(8分)

答：二部图：无向图G是二部图当且仅当图G中不存在奇圈。【2分】

欧拉图：连通无向图G是欧拉图当且仅当G是由若干个边不重的圈的并。

【2分】

哈密顿图：若连通无向图中存在一个包含所有顶点的圈，则G是哈密顿图。【2分】

无向树中添加任何一条新边，则有一个且仅有一个圈。【2分】

4. 描述无向树、有向树和根树的特点。(6分)

答：无向树是连通无回路的无向图，其特点有：连通且m=n-1;无圈且m=n-1;任意两顶点之间存在唯一路径；连通的且每一条边都是桥；没有圈，但在任意两不同顶点之间增加一条边，所得的图含唯一的一个圈。【2分】

有向树：基图是无向树的有向图。【2分】

根树：是有向树，有唯一一个入度为0的顶点，其余的顶点的入度都为1，只有树叶的出度为0，其余顶点的出度大于等1.【2分】

5. 请判断G5和G6是否是同构的，至少给出2个理由。（5分）

答：不同构，

原因：（1）G5中唯一的5度顶点是u2，G6中唯一的5度顶点是v3，如果G5与G6同构，则u2与v3对应，即d+(u2) =d+(v3)，但d+(u2) =3, d+(v3) =1,因此G5与G6不同构。

（2）G5与G6出度序列不同，G5出度序列是（3，3，1，0），G6出度序列是（2，2，2，1）。

**三、证明题 (16分)**

1. 如果图G没有孤立点，且所有点都是偶数度，证明G中一定含有圈。(6分)

证明：因为G中没有孤立点，且所有点的度都是偶数，不妨假设G是连通的，否则可对每一个连通分支讨论。显然G是欧拉图，存在欧拉回路，欧拉回路是若干个边不重的圈的并（通过删除欧拉回路中重复点之间的部分，定会得到一个圈），因此G中一定会存在一个圈。

（根据任意顶点v,d(v)≥2，利用扩大路径法，可证明存在长度大于等于3的圈）

2. 对于简单无向图G，如果G中任意顶点之间都有哈密顿通路，则称G是哈密顿连通的。如果G是哈密顿连通图，证明 m⩾3n/2, 其中*m ,n*分别是G的顶点个数和边数(n≥4)。(5分) (提示：可证明G中每个顶点的度至少为3)

证明：先证明n≥4时,G是哈密顿连通的,则G中不存在度为1的顶点。假设d(w)=1,则在G中除w之外，任取两个顶点u,v，则u和v之间的任何路径都 不会经过w，这与G是哈密顿连通的矛盾。因此G中的任何顶点的度都大于等于2.

假设G中存在一个顶点v, d(v)=2，令v的两个邻接点是x,y, 则x与y之间存在两种路径，一种是xvy，另一种是不经过v的路径，因此除了路径xvy外，x与y之间不存在经过v的路径，x与y之间不存在哈密顿通路，因此G不是哈密顿连通的，与已知矛盾。综上所述，G中任意顶点的度大于等3，由握手定理可知.

3. 证明在n(n⩾2)阶简单连通图中至少两个顶点不是割点。(5分)

证明：因为G是连通图，则G中存在生成树T，T中至少有两片树叶u和v。树叶不是T的割点，也就不是G的割点，得证。

另一种方法：

设u，v是G中两顶点，且d(u,v)最大, 下面证明u和v都不是割点。假设u是割点，则在G-u的连通分支中，选择不包含v的连通分支，设为G1，在G1中任取一顶点w，则w与v之间的任何路径都要经过u,那么d(w,v)=d(w,u)+d(u,v)，显然d(w,v)>d(u,v),与d(u,v)最大,矛盾。同理可证v也不是割点。

**四、应用题 (6分)**

答：**产生网络堵塞的原因**是由于错误链接产生环路，数据帧在环路中重复转发，造成网络风暴，因此解决此问题的关键是消除环路，消除数据帧在网络中的重复转发。

**解决方法**是：以交换机为结点，以交换机之间的链路为边，构造一个有向图，确定该图的一个生成树，并据此确定图的环路。依次将环路断开，直到网络中没有环路存在，消除网络风暴。再次计算图的生成树，并据此建立网络的路由链接。此方法实际上是动态求解网络的生成树。