ABC237-E の問題設定で「楽しさが変化しない、または減少する n 頂点の閉路は存在するが、上昇する n 頂点の閉路は存在しない」ことを示す。

i)$n=2$ のときは明らか。

ii)$n=k,(k>2)$ まで成り立つとして、k 頂点のときの楽しさの総和を S とする。$n=k+1$ のとき、k 頂点の閉路から適当な辺を 1 本抜き、その抜いた辺の両端の頂点を a,b とする。常に b から a に向かうとしても一般性は失わない。その a,b の間に新たに頂点 c を追加し、a と c,b と c をそれぞれつなげる。 これから先のケースでは全て $b\to c\to a$ の順番で回るとする。

$k+1$ 頂点で「楽しさが上昇する閉路が存在する」と仮定する。

A)$H_a\le H_c\ge H_b$ の場合

A.α)$H_a>H_b$ のとき、楽しさが 0 を超える条件は $X-2(H_b-H_a)+2(H_b-H_c)+(H_c-H_a)>0$ を満たすこと。

左辺を整理すると $X-(H_c-H_a)>0$ となるが、$X\le 0$ かつ $H_c-H_a\ge 0$ よりこれを満たすことはない。

A.β)$H_a\le H_b$ のとき、楽しさが 0 を超える条件は $X-(H_b-H_a)+2(H_b-H_c)+(H_c-H_a)>0$ を満たすこと。

先ほどと同様にして変形すると、$X-(H_c-H_b)>0$ となり、これも条件を満たさない。

B)$H_a\le H_c\le H_b$ の場合

$X-(H_b-H_a)+(H_b-H_c)+(H_c-H_a)>0$ を満たせばよいが変形すると $X>0$ となるから不可能。

C)$H_a\ge H_c\le H_b$ の場合

C.α)$H_a>H_b$ のとき、整理した条件式は $X-2(H_a-H_b)-(H_a-H_c)>0$ となるが、$X\le 0$ かつ $H_a\ge H_c$ かつ $H_a>H_b$ より条件が満たされることはない。

C.β)$H_a\le H_b$ のとき、整理した条件式は $X-(H_a-H_c)>0$ となるが成立しない。

D)$H_a\le H_c\le H_b$ のとき、整理した条件式は $X>0$ となるが、成立しない。

以上から命題は示された。