2 年 2119116s 佐野海徳

問 1 (1) e

(2) $\log 2 + i\frac{n\pi}{3}(n \in \mathbb{Z})$

(3) 1

(4) $e^{\frac{-(4n+1)\pi}{2}}(n \in \mathbb{Z})$

問 2

問題文より $z = re^{it}(0 \leq t \leq 2\pi)$ であり、r が十分に小さいことから $0 < r < 1$ として考える。

(1)$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$ と部分分数分解できる。中心 0 かつ $0 < r < 1$ となる円のうち一つを C として、C 内部と周で被積分関数の 2 項目、3 項目は正則であるからコーシーの積分定理が適用できて、求める積分値 $f(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}ire^{it}}dt + 0 + 0$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} idt$

$= \frac{1}{2\pi i}\left[(it)\right]_0^{2\pi}$

$= 1$ であり、f(1) = 1 が確かに成り立つ。

(2)$\frac{1}{z^2(1-z)^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$ と部分分数分解できる。(1) と同様にしてこの被積分関数の 3 項目以降は中心 0 かつ $0 < r < 1$ となる円のうち一つを C としてその周と内部で正則であるからコーシーの積分定理が適用できる。よって $f(2) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{2}{re^{2it}}re^{it}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi}^{0} 2idt$

$= \frac{1}{2\pi}\left[(ie^{-2\pi i})\right]_0^{2\pi} + 2$

$= \frac{1}{2\pi}(i - i) + 2$

$= 0 + 2 = 2$ となり、確かに f(2) = 2。

(3) 一般の n に対して部分分数分解を行うと、$\Sigma_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{z^n} - \frac{n}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$ となる。ここで $\frac{1}{re^{nit}} \times rie^{it} = i \times e^{(i-n)it}$ であるから、$2 \leq n$ のときは分母に $e^{(n-1)it}(2 \leq n)$ が残る。また、$\frac{1}{e^{nit}}(n \in \mathbb{N})$ に対して $\frac{1}{e^{-nit}} = \cos(-nt) + \imath\sin(nt)$ であり、条件の範囲内で正則だからコーシーの積分定理から積分値は 0。よって $\frac{1}{z}$ の積分値だけを考えれば f(n) となる。ゆえに求める値は $f(n) = n\int_{|z|=r}\frac{1}{z}dz = n$ となる。

問 3

$f(z) = \frac{e^z}{z^{n+1}}dz$ とすると、$f(z)$ は $z = 0$ で n + 1 位の極を持ち、これが唯一の孤立特異点なので、留数を求めると、

$\underset{z=0}{Res} f(z)dz = \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}z^{n+1}\frac{e^z}{z^{n+1}}$
$= \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}e^z$
$= \frac{1}{n!}$
となり、求める値は
$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}f(z)dz = \frac{1}{n!}$。