2119116s 佐野　海徳

HW45

$[\mathbb{Q}(\sin 72):\mathbb{Q}]$ の次数が 2 べきであると示せば良い。$\sin(72\times 5)=\sin(72\times 3+72\times 2)=\sin(3\times 72)\cos(2\times 72)+\cos(3\times 72)\sin(2\times 72)$

$=\sin 72(3-4\sin^2 72)(1-2\sin^2 72)+\cos 72(1-4\sin^2 72)2\sin 72\cos 72$。

整理して $\sin 72=x$, 左辺は 0 となり、右辺を $f(x)$ と置くと $f(x)=16x^5-20x^3+5x=x(16x^4-20x^2+5)$。よって $f(x)$ は 4 次以下。ここで 5 は 5 以下の素数のうち 5 のみの倍数である。しかし、16 も 20 も 5 の倍数でない。よってこの $f(x)$ は既約多項式。つまり 4 次である。ゆえに $[\mathbb{Q}(\sin 72):\mathbb{Q}]$ の次数は 4 であり、確かに作図可能であると示された。

HW46

まず条件を満たす 2 冪は $1,2,4,8,16$。また、20 以下のフェルマー素数は $2^{2^0}+1, 2^{2^1}+1, 2^{2^2}+1$, つまり $3,5,17$ も作図可能。$(1/timesx(x/in\{3,5,17\}))$ だから。ここで、フェルマー素数と 2 冪の積で表せる数を並べると、$2\times 3, 2\times 5, 2\times 8, 4\times 3, 4\times 5, 3\times 5$。つまり $6,10,16,12,20,15$。つまり、n $=3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20$。