

HW23

$\{1, -1, i, -i\}$ を $\{i, -i\}$ でコセット分解すると $\{1, -1\} \cup \{i, -i\}$ となる。ここで、 $\{i, -i\}$ には生成元 i が含まれており、 $\{1, -1\}$ には単位元 1 が含まれている。このことから、 C_2 に対応する全単射は $0 \mapsto \{1, -1\}, 1 \mapsto \{i, -i\}$ となるから同型となる群が与えられた。

HW24

元がどのように互換の積で表されるかを考える。例えば (1234) なら $(14)(13)(12)$ 、 $(14)(23)$ はそのまま、 (123) なら $(13)(12)$ である。ここで (123) と $(13)(24)$ は同じ文字をすべての置換に含む互換かそうでないかで異なる。よって e を含む共役類の元は e のみの 1 個、 (12) を含む共役類の元は $(12), (13), (14), (23), (24), (34)$ の 6 つ、 (123) と同じ共役類の元は $(123), (124), (132), (142), (134), (143), (234), (243)$ の 8 つ、 $(12)(34)$ と同じ共役類の元は $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$ の 3 つ、 (1234) と同じ共役類の元は $(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)$ の 6 つ。よって類等式は $24 = 1 + 6 + 8 + 3 + 6$ となり、確かに右辺に出現する数は 24 の約数である。