2119116s 佐野海徳

1

(1)

$$(\text{与式}) = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 3 & 3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

(2)

1×3 行列と 3×3 では型が異なるので引き算は計算不可能である。

(3)

1×4 行列と 3×3 行列では左の行列の列数と、右の行列の行数が異なるので掛け算は定義されておらず計算不可能

2

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

よって $x = 4, y = 4$。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 9 \end{pmatrix}$

よって解は $x = 0, y = -1, z = -3, w = 9$。

3

(1)(左辺) $= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}$。

(右辺) $=$

$$\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4 & x_1-x_2+x_3-x_4 & x_1+x_2-x_3-x_4 & x_1-x_2-x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & (x_1-x_2+x_3-x_4) & -(x_1+x_2-x_3-x_4) & -(x_1-x_2-x_3+x_4) \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & x_1-x_2+x_3-x_4 & -(x_1+x_2-x_3-x_4) & -(x_1-x_2-x_3+x_4) \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & -(x_1-x_2+x_3-x_4) & -(x_1+x_2-x_3-x_4) & x_1-x_2-x_3+x_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4 & x_1-x_2+x_3-x_4 & x_1+x_2-x_3-x_4 & x_1-x_2-x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & -x_1+x_2-x_3+x_4 & x_1+x_2-x_3-x_4 & -x_1+x_2+x_3-x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & x_1-x_2+x_3-x_4 & -x_1-x_2+x_3+x_4 & -x_1+x_2+x_3-x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & -x_1+x_2-x_3+x_4 & -x_1-x_2+x_3+x_4 & x_1-x_2-x_3+x_4 \end{pmatrix}$$ と

なり、確かにこの等式は成り立つ。

(2)(与式) $= x_1^4+{x_2}^2x_4+x_3^4+{x_2}^2{x_4}^2-x_4^4-{x_1}^2{x_3}^2-x_2^4-{x_1}^2{x_3}^2=(x_1^2-x_3^2)^2-(x_2^2-x_4^2)^2$。

4

n = 2 のとき $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} = x_2 - x_1$ となって成立。

n = k のとき成立するとする。n = k + 1 のとき k + 1 行から $x_1\times$ 第 k 行を引き、第 k 行から $x_1\times$ 第 k - 1 行を引く ... という操作を繰り返すと、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_{k+1}-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_{k+1}(x_{k+1}-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{k-1}(x_2-x_1) & x_3^{k-1}(x_3-x_1) \vdots & x_{k+1}^{k-1}(x_{k+1}-x_1) & \end{bmatrix}$$ 。

これを第一列に関して余因子展開すると $\begin{bmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_{k+1}-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_{k+1}(x_{k+1}-x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{k-1}(x_2-x_1) & x_3^{k-1}(x_3-x_1) & \cdots & x\{k+1^{k-1}(xk+1-x_1) \end{bmatrix}$

$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_{k+1}-x_1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^{k-1} \end{bmatrix}$

$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_{k+1}-x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)$。帰納法の仮定より、1 から k までのすべての組で成り立つことがわかっているので $\prod_{1\le i<j\le n}$ が成り立つ。

5

n 個の内のある一点の座標を代入した式を $y_i = a_0 + a_1x_i + \cdots a_{n-2}x_i^{n-2} + a_{n-1}x_i^{n-1}$ とおく。これをすべての点に行って、n 本の式をまとめて行列にして書くと、x についてまとめた行列は問 4 のヴァンデルモンド行列の転置である。ゆえに x についてまとめた行列の行列式が 0 でないと

き、逆行列が存在して各項の係数が一意に定まる。また、条件より、各 x_i は異なり、また転置の行列式はもとの行列式と値が等しい。ヴァンデルモンド行列の行列式は問 4 でみたように各 x_i のうちお互いに等しいものが存在するとき、またその時に限って行列式の値が 0 になるので今回は 0 以外の値を取り、このとき係数 $a_j(j = 0, 1, \cdots n-1)$ はそれぞれ一意に定まる。よって題意は証明された。