2119116s 佐野海徳

$\boxed{1}$

$u(x,t) = \phi(x)\varphi(t)$ が解である。$\phi(x)\varphi''(t) = \phi''(t)\phi(x)$ ここから $\frac{\phi''}{\phi(x)} = \frac{\varphi''(t)}{\phi(t)} = \alpha$(定数) となる。故に $\phi''(x) = \alpha\phi(x), \varphi''(t) = \alpha\varphi(t)$。$\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ から $\alpha < 0$, よって $\phi(x) = A\sin(nx)$. 同様に $\varphi(t) = C\cos(nt) + D\sin(nt)$。また初期値条件より $\sum_{n=1}^{\infty} E\sin(nx) = 0$ かつ $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} F\sin(nx) = \sin^3 x$ であり、これらの両辺をフーリエ変換すると $E = 0, F = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin^3 x\sin(nx)dx$。積分記号の中身を変形すると $\int_0^{\pi} \frac{\cos((n+3)x)-3\cos((n+1)x)-\cos((n-1)x)-\cos((n-3)x)}{8}dx$ それぞれ $(n+3)x = s, (n+1)x = t, (n-1)x = u, (n-3)x = v$ として $\frac{1}{8}\int_0^{\pi} \frac{1}{n+3}\cos s ds - 3\int_0^{\pi} \frac{1}{n+1}\cos t dt + 3\int_0^{\pi} \frac{1}{n-1}\cos u du - \int_0^{\pi} \frac{1}{n-3}\cos v dv$ これをそれぞれ計算して、$\frac{12\sin n\pi}{\pi(n^5-10n^3+9n)}$ であるから、求める答えは $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{12\sin n\pi}{\pi(n^5-10n^3+9n)\sin nt}\}\sin nx = \frac{3}{4}\sin t sinnx$。

$\boxed{2}$

(1) f_a をフーリエ変換すると、$\hat{f}_a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|a|x}e^{-i\xi x}dx$。積分範囲が 0 以上のものとそれ以外で分ける。$\int_0^{\infty} e^{-i\xi x-ax}dx$。$i\xi x - ax = u$ とすると $\frac{du}{dx} = -i\xi - a$ だから、先程の式は $\frac{1}{i\xi+a}\int_0^{\infty} e^u du = \frac{a}{\xi^2+a^2} - \frac{i\xi}{\xi^2+a^2} = \frac{-i\xi-a}{\xi^2+a^2}$。積分区間が 0 未満の方も同様にすると、最終的な計算結果は $\frac{1}{\pi}\frac{1}{a^2+\xi^2}$ であり、$g_a(\xi) = \frac{1}{\xi+a^2}$、$\hat{f}_a = \frac{1}{\pi}g_a(\xi)$。

$\boxed{3}$

上の方程式にフーリエ変換を施すと、$\tilde{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\xi x}dx$ であり初期条件をフーリエ変換すると $\frac{d\tilde{u}}{dt} = -\xi^2\tilde{u}, \tilde{u}(\xi,0) = 1$。よって、$\tilde{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}$。方程式にフーリエ逆変換を施すと、$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t(\xi-\frac{ix}{2t})^2}e^{(\frac{-x^2}{4t})}d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{(\frac{-x^2}{4t})}$。これがこの方程式の基本解。この基本解 K(x,t) を用いて初期値問題の解を構成すると、$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}_y} K(x-y,t)e^{-y^2}dy$。$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}$ を積分記号の外に出し、e について式変形を行う。$e^{-y^2-\frac{(x-y)^2}{4t}} = e^{(\sqrt{\frac{-1}{4t}-1}y+\frac{x}{4\sqrt{\frac{-1}{4(4t-1)}}t})-\frac{x^2}{4t}-\frac{x^2}{16t^2(\frac{-1}{4t}-1)}}$ ここで $u = \frac{(\frac{-1}{t}-4)ty+x}{2\sqrt{\frac{-1}{t}-4}t}$ とすると $\frac{du}{dy} = \frac{\sqrt{\frac{-1}{t}-4}}{2}$ であるから、もとの式は $\frac{1}{2\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^{u^2+\frac{x^2}{4t^2(\frac{1}{t}+4)}-\frac{x^2}{16t^2(\frac{-1}{4t}-1)}}}{\sqrt{\frac{-1}{t}-4}}du$ これを計算すると、$\frac{e^{\frac{-x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$ となり、これが求める初期値問題の解である。

参考 http://blog.livedoor.jp/plant_field/archives/9619101.html

https://www.sci.hokudai.ac.jp/~inaz/lecture/butsurisuugaku2/html/model/node24.html