2119116s 佐野　海徳 HW19

まず、各元の位数は、$e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)=1,2,2,2$ である。なぜなら、単位元以外は同じ数を含まない置換であり、なおかつそれぞれの元を構成する置換の位数が 2 であることから、それらを合成した置換の位数は 2 と 2 の最小公倍数である 2 であるといえる。更に、単位元以外の元の位数が 2 である群はアーベル群である。a,b を群 G の元とすると $(ab)(ab)=e,aa=e,bb=e$ がいえる。すなわち $(ab)=(ab)^{-1},a=a^{-1},b=b^{-1}$ であるからである。また一般に $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ であり、$ab=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=ab$ だから、ab = ba が成り立つため G はアーベル群である。また、また位数 4 で直積で表されるアーベル群は $C_2\times C_2$ のみであるからこの群はこの S_4 の部分群は $C_2\times C_2$ と同型である。

HW20

e の位数が 1 であるのは自明。まず、σ は $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 回転する操作であるので σ^2 は π だけ回転する操作。σ^3 は $\frac{3\pi}{2}$ 回転する操作、σ^4 は 2π だけ回転する操作であり、結果的に e と等しい。また、この操作で 1 と番号を振った頂点がもう一度 1 に戻るのは $2n\pi$ 回転 (n は任意の整数) したとき、言い換えればべきが 4 の倍数になるときである。よって、σ の位数は 4,σ^2 の位数は 2,σ^3 の位数は 4。次に τ について考える。τ はもう一度自身と同じ操作をすれば e になるので位数は 2。$\tau\sigma$ の位数を考える。τ の位数は 2,σ の位数は 4 であることから最小公倍数を取って $\tau\sigma$ の位数は 4。同様にして $\tau\sigma^2$ の位数は 2、$\tau\sigma^3$ の位数は 6 である。