2119116s 佐野海徳

$\boxed{1}$

(1) のベクトルを横に並べて $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ として簡約化すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから,$B = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ とおくと、$Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$ であるから、$a_1, ...a_5$ の一次関係と $b_1, ...b_5$ の一次関係は等しい。よって、B の列ベクトルから b_1, b_2, b_3 が 1 次独立であることがわかり、r = 3,a_1, a_2, a_3 が 1 次独立、$a_4 = 3a_1 - b_2 + b_3$,$a_5 = b_1 + 2b_2 - 2b_3$。

(2) 実際に計算すると $f_1 = f_3 + f_5, f_2 = f_4 + f_1, f_3 = f_1 - f_5, f_4 = f_2 - f_1, f_5 = f_1 - f_3$ となるので 1 次独立なベクトルは存在しない。つまり r = 0。

$\boxed{2}$ (1)A $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ とおく。

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ となる。したがって Ax = 0 の解は

$x_1 = c_1, x_5 = c_2$ とおくと $x_1 = -c_1 - 2c_2, c_2 = 0, x_4 = c_2$。ゆえに $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 - 2c_2 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$= c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、dim(W) = 2 で、1 組の基底として { $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

} がとれる。

(2)A $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ とする。簡約化すると、$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

$x_2 = c_1, x_3, c_2$ とすると、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$

$c_1 \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

となる。よって dim(W) $= 2$ で 1 組の基底として $\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ が取れる。

$\boxed{3}$ A $= (f_1, f_2, f_3)$ とし A を簡約化する。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって、この行列の rank$= 3$ であるから A を構成する 3 本のベクトルは一次独立である。ゆえに $\{f_1, f_2, f_3\}$ は $R[x]_2$ の 1 組の基底である。