2119116s 佐野海徳

HW37

2 が既約でないなら a,b,c,d$\in \mathbb{Z}$ を用い、共役をとると $2=(a+\sqrt{-5}b)(c+\sqrt{-5}d), 2=(a-\sqrt{-5}b)(c-\sqrt{-5}d)$ と書ける。辺々掛けると $4=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ となるが、この等式を満たす整数の組は (a,b,c,d) = (2,0,2,0) 以外に存在しない。つまり、どう書き表しても 2 = 2 + 0i, つまり 2 であるから、2 は既約元。同様の条件で 3 について議論すると、3 が既約でないなら $3=(a+\sqrt{-5}b)(c+\sqrt{-5}d), 3=(a-\sqrt{-5}b)(c-\sqrt{-5}d)$ と表されるはずであるが、辺々掛けると $9=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ となるが、これを満たす整数の組は (a,b,c,d) = (3,0,3,0) 以外は存在しない、つまり 3 としか表せないのでこれも既約。$1+\sqrt{-5}=(a+\sqrt{-5}b)(c-\sqrt{-5}d), 1-\sqrt{-5}=(a-\sqrt{-5}b)(c-\sqrt{-5}d)$ と表せるとするなら、辺々掛けて $6=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ となるが、これを満たすのは (a,b,c,d) = $(\pm1,\pm1,\pm1\ \pm1)$ であり、この中に $1\pm\sqrt{-5}$ となる組み合わせが含まれている。よって $1\pm\sqrt{-5}$ も既約元である。

HW38

4 次正方行列の異なる固有値をそれぞれ $\alpha,\beta,\gamma,\sigma$ とおく。4 を自然数の組み合わせで分割すると、$4=1+1+2=1+3=1+1+1+1=2+2$ となる。よって 4 次正方行列におけるジョルダン標準形は

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$ の 5 種類である。