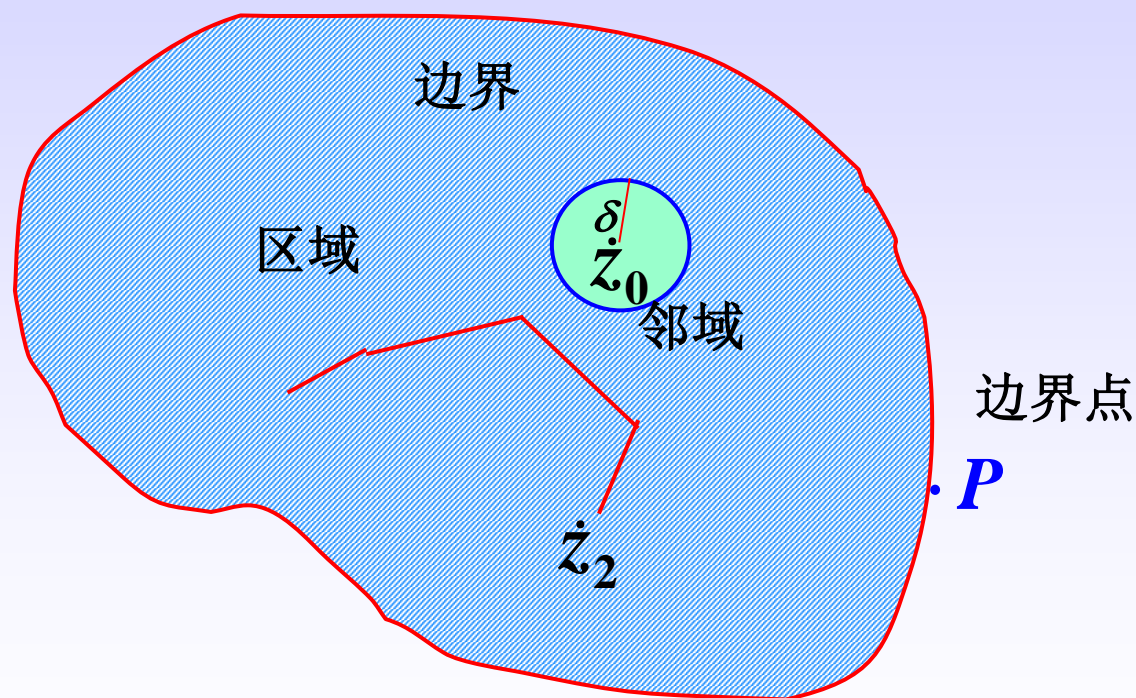


## 第二节 平面概念及复球面

- 一、复平面上的曲线和区域
- 二、复球面
- 三、小结与思考

# 一、复平面上的曲线与区域

## 1. 区域



邻域:

平面上以  $z_0$  为中心,  $\delta$  (任意的正数) 为半径的圆:  $|z - z_0| < \delta$  内部的点的集合称为  $z_0$  的邻域.

去心邻域:

称由不等式  $0 < |z - z_0| < \delta$  所确定的点的集合为  $z_0$  的去心邻域.

## 内点:

设  $G$  为一平面点集,  $z_0$  为  $G$  中任意一点. 如果存在  $z_0$  的一个邻域, 该邻域内的所有点都属于  $G$ , 那末  $z_0$  称为  $G$  的内点.

## 开集:

如果  $G$  内每一点都是它的内点, 那末  $G$  称为开集.

## 聚点:

若点  $z_0$  的任意邻域内都含有  $G$  的无穷多个点, 则称  $z_0$  为  $G$  的聚点.

## 闭集:

若  $G$  的聚点都属于  $G$ , 则称  $G$  为闭集.

## 有界点集和无界点集:

如果存在  $M > 0$ , 对于点集  $G$  的每一个点都满足  $|z| < M$ , 那末  $G$  称为有界的, 否则称为无界的

## 区域:

如果平面点集 $D$ 满足以下两个条件, 则称它为一个区域.

(1)  $D$ 是一个开集;

(2)  $D$ 是连通的, 就是说 $D$ 中任何两点都可以用完全属于 $D$ 的一条折线连结起来.

## 有界区域和无界区域:

如果存在 $M > 0$ , 对于区域 $D$ 的每一个点都满足 $|z| < M$ , 那末 $D$ 称为有界的, 否则称为无界的

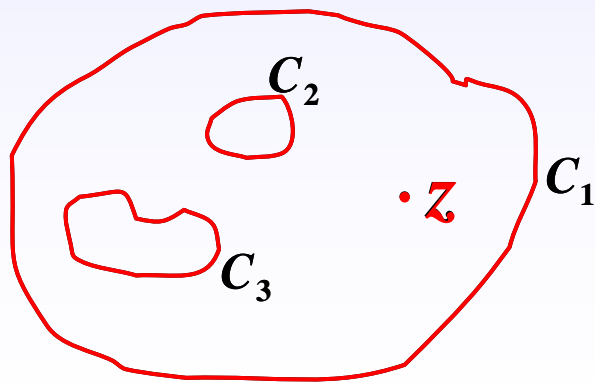
## 边界点、边界:

设 $D$ 是复平面内的一个区域,如果点 $P$  的任意小的邻域内总有 $D$ 中的点,也有不属于 $D$ 的点,这样的点 $P$  我们称为 $D$ 的边界点.

$D$ 的所有边界点组成  $D$  的边界.

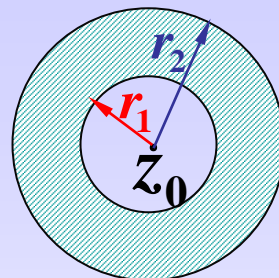
## 说明

区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的.



## 课堂练习 判断下列区域是否有界？

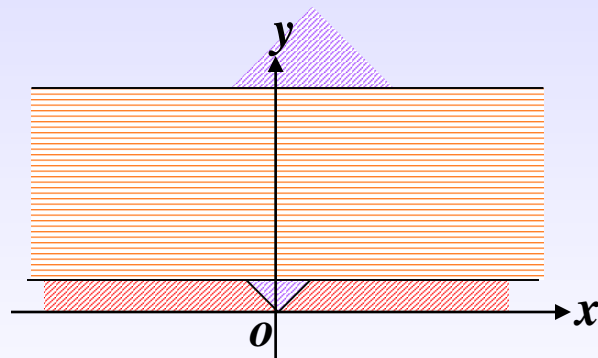
(1) 圆环域:  $r_1 < |z - z_0| < r_2$ ;



(2) 上半平面:  $\text{Im } z > 0$ ;

(3) 角形域:  $\alpha < \arg z < \beta$ ;

(4) 带形域:  $a < \text{Im } z < b$ .



**答案** (1)有界; (2) (3) (4)无界.



## 2、单连通域与多连通域

### 连续曲线:

如果  $x(t)$  和  $y(t)$  是两个连续的实变函数, 那么  
由复数方程:

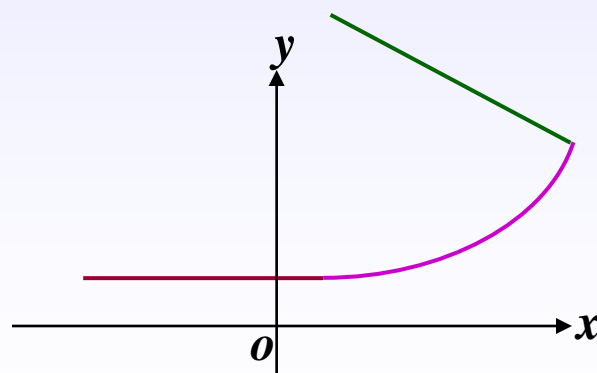
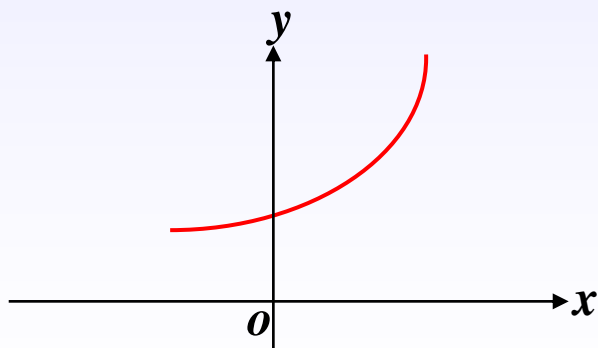
$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

所确定的平面点集称为复平面上的连续曲线.

## 光滑曲线:

如果在  $a \leq t \leq b$  上,  $x'(t)$  和  $y'(t)$  都是连续的, 且对于  $t$  的每一个值, 有  $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ , 那末称这曲线为光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.



## 简单曲线:

设  $C : z = z(t) (a \leq t \leq b)$  为一条连续曲线,  $z(a)$  与  $z(b)$  分别称为  $C$  的起点和终点.

对于满足  $a < t_1 < b, a \leq t_2 \leq b$  的  $t_1$  与  $t_2$ , 当  $t_1 \neq t_2$  而有  $z(t_1) = z(t_2)$  时, 点  $z(t_1)$  称为曲线  $C$  的重点.

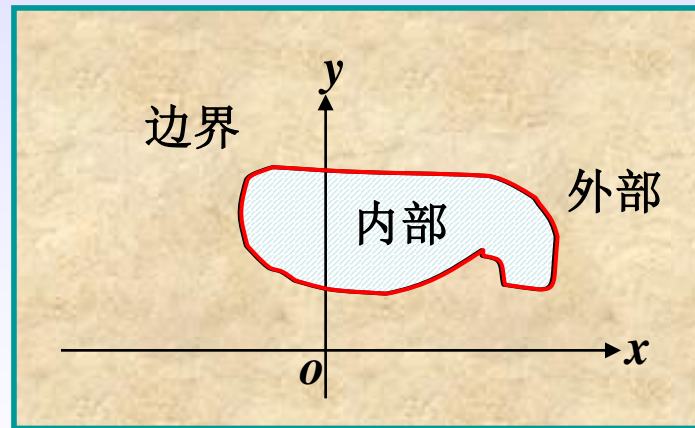
没有重点的曲线  $C$  称为简单曲线 (或若尔当曲线).

如果简单曲线  $C$  的起点和终点重合, 即  $z(a) = z(b)$ , 那末称  $C$  为简单闭曲线.

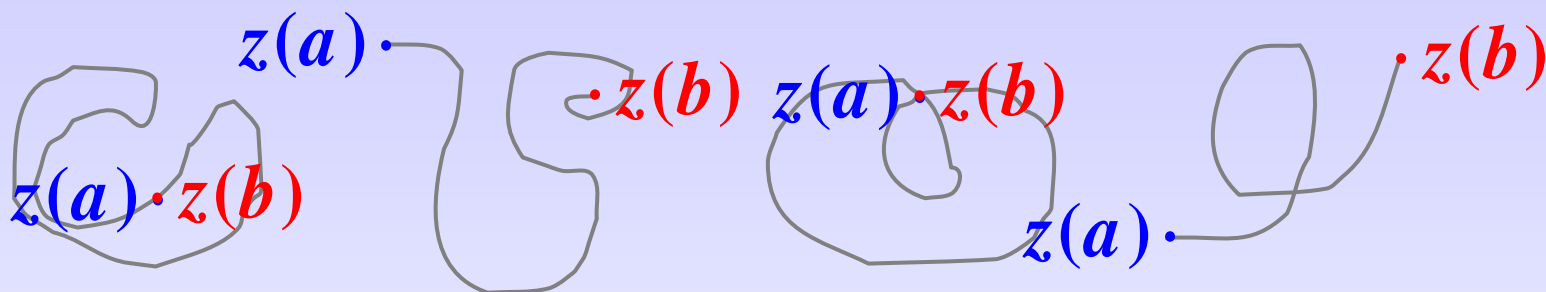
换句话说, **简单曲线自身不相交**.

简单闭曲线的性质:

任意一条简单闭曲线  $C$  将复平面唯一地分成三个互不相交的点集.



## 课堂练习 判断下列曲线是否为简单曲线?



答案

简单  
闭

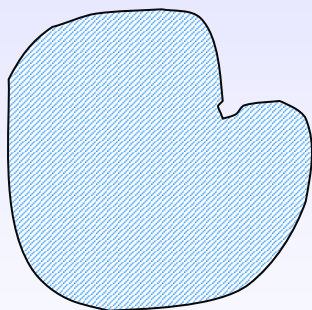
简单  
不闭

不简  
单闭

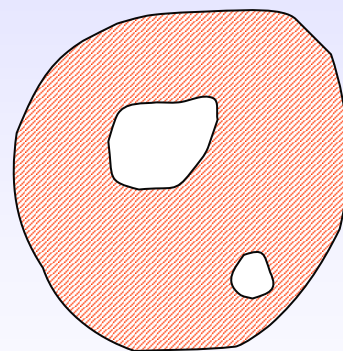
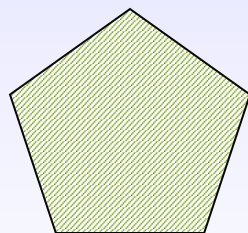
不简  
单不  
闭

## 单连通域与多连通域的定义:

复平面上的一个区域 $B$ , 如果在其中任作一条简单闭曲线, 而曲线的内部总属于 $B$ , 就称为单连通域. 一个区域如果不是单连通域, 就称为多连通域.



单连通域



多连通域

平面上曲线或区域可用复数形式的方程或不等式表示, 反之亦然.

**例1** 将通过两点  $z_1 = x_1 + iy_1$  与  $z_2 = x_2 + iy_2$  的直线用复数形式的方程来表示.

**解** 通过两点  $(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$  的直线的方程

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad \text{参数 } t \in (-\infty, +\infty),$$

所以它的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad \text{参数 } t \in (-\infty, +\infty),$$

故,由  $z_1$  到  $z_2$  的直线段的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

若取  $t = \frac{1}{2}$ ,

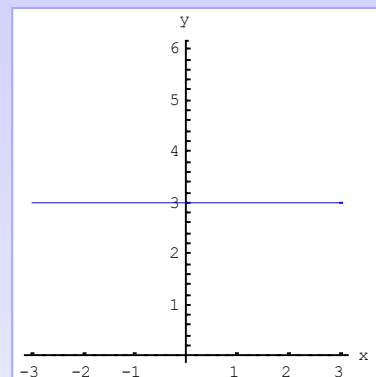
得线段  $\overline{z_1 z_2}$  的中点坐标为  $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ .



**例2** 满足下列条件的点集是什么, 如果是区域, 指出是单连通域还是多连通域?

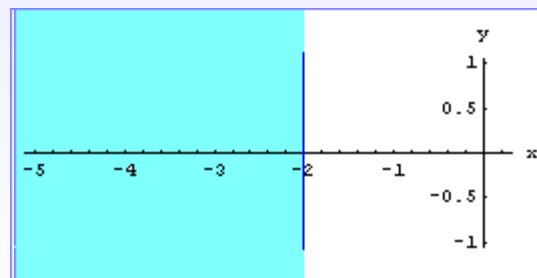
**解** (1)  $\text{Im} z = 3$ ,

是一条平行于实轴的直线,  
不是区域.



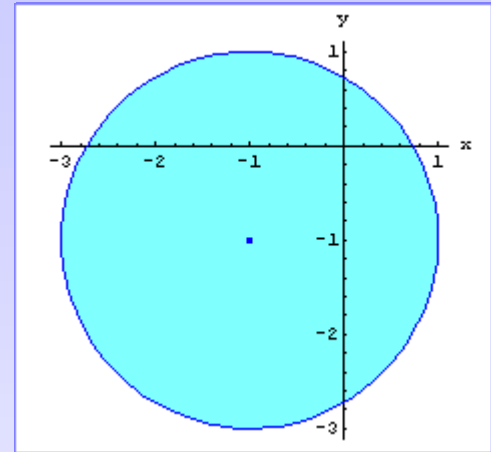
(2)  $\text{Re} z < -2$ ,

以  $\text{Re} z = -2$  为界的左半平面  
(不包括直线  $\text{Re} z = -2$  ),  
单连通域.



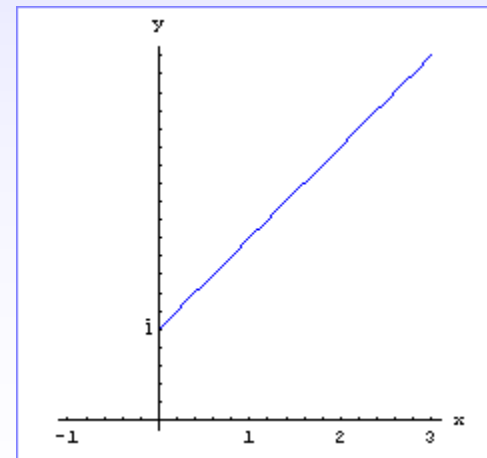
(3)  $0 < |z + 1 + i| < 2,$

以  $-(1+i)$  为圆心, 2 为半径  
的去心圆盘,  
是多连通域.



(4)  $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4},$

以  $i$  为端点, 斜率为 1 的半射线  
(不包括端点  $i$  ),  
不是区域.



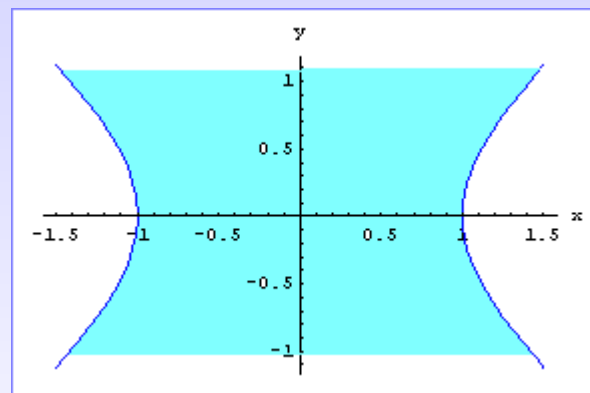
(5)  $\operatorname{Re}(z^2) < 1$

当  $z = x + iy$  时,

$$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2,$$

$$\operatorname{Re}(z^2) < 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 < 1,$$

无界的单连通域(如图).



**例3** 求满足不等式  $\left| \frac{z-2}{z+2} \right| < 3$  的点  $z$  所构成的点集，作出它的图形. 并指出它是有界还是无界区域，是单连通还是多连通的？

解 由  $\left| \frac{z-2}{z+2} \right| < 3$  得  $|z-2| < 3|z+2| (z \neq -2)$ , 即

$$(z-2)(\bar{z}-2) < 9(z+2)(\bar{z}+2),$$

整理得

$$z\bar{z} + \frac{5}{2}(z + \bar{z}) + 4 > 0,$$

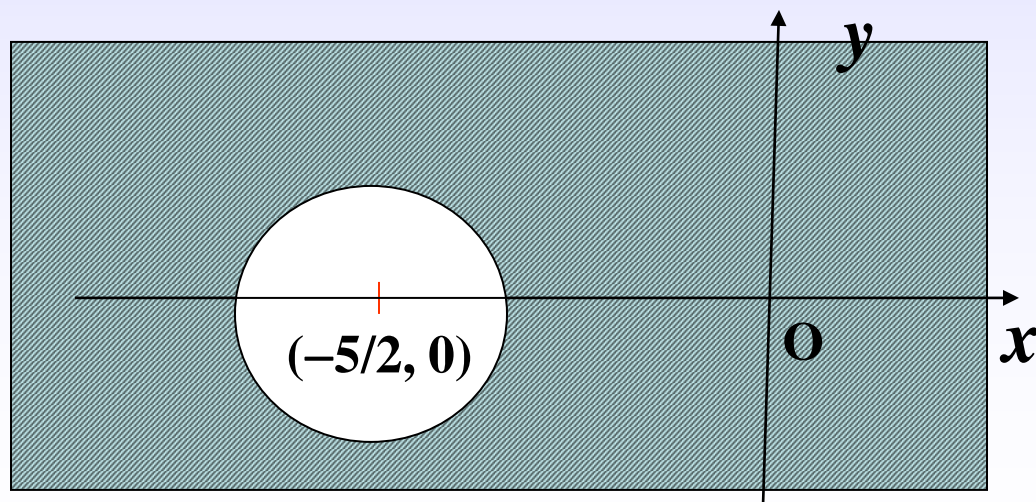
从而有

$$(z + \frac{5}{2})(\bar{z} + \frac{5}{2}) > \frac{9}{4},$$

即

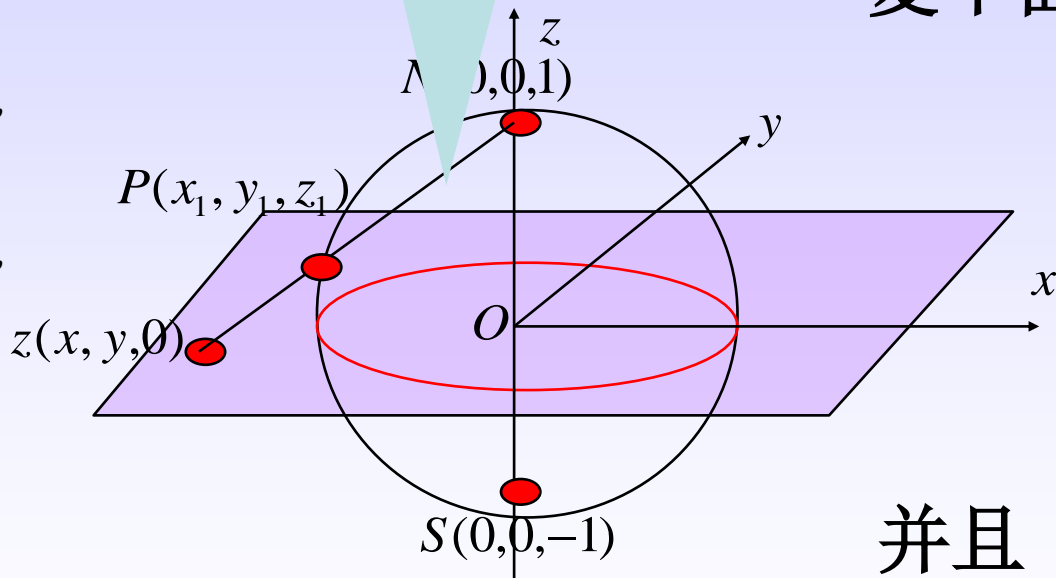
$$|z + \frac{5}{2}| > \frac{3}{2}.$$

它是以 $(-5/2, 0)$ 为圆心，以 $3/2$ 为半径的圆周的外部，  
是无界多连通区域.



### 三、复球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



球面上点  $N(0, 0, 1)$  称为北极.

复平面上点  $z$  对应球面上点  $P$ .

点  $P$  坐标为

$$((1-t)x, (1-t)y, t)$$

并且

$$(1-t)^2 x^2 + (1-t)^2 y^2 + t^2 = 1$$

解得  $t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$

点  $P$  坐标为

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \quad y_1 = \frac{z - \bar{z}}{(|z|^2 + 1)i} \quad z_1 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

反过来, 球面上点  $P(x_1, y_1, z_1)$  对应着平面上的点

$$z = x + iy = \frac{x_1 + iy_1}{1 - z_1}$$

## 复球面的定义

球面上的点, 除去北极  $N$  外, 与复平面内的点之间存在着——对应的关系. 我们可以用球面上的点来表示复数.

我们规定: 复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应, 记作  $\infty$ . 复平面上的无穷远点与球面上的北极  $N$  相对应. 因而球面上的北极  $N$  就是复数无穷大  $\infty$  的几何表示.

球面上的每一个点都有唯一的复数与之对应, 这样的球面称为**复球面**.



### 3. 扩充复平面的定义

**包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.**

**不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面, 或简称复平面.**

**对于复数 $\infty$ 来说, 实部, 虚部, 辐角等概念均无意义, 它的模规定为正无穷大.**

关于 $\infty$ 的四则运算规定如下:

(1) 加法:  $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty, (\alpha \neq \infty)$

(2) 减法:  $\alpha - \infty = \infty - \alpha = \infty, (\alpha \neq \infty)$

(3) 乘法:  $\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty, (\alpha \neq 0)$

(4) 除法:  $\frac{\alpha}{\infty} = 0, \frac{\infty}{\alpha} = \infty, (\alpha \neq \infty), \frac{\alpha}{0} = \infty, (\alpha \neq 0)$

## 四、总结与思考

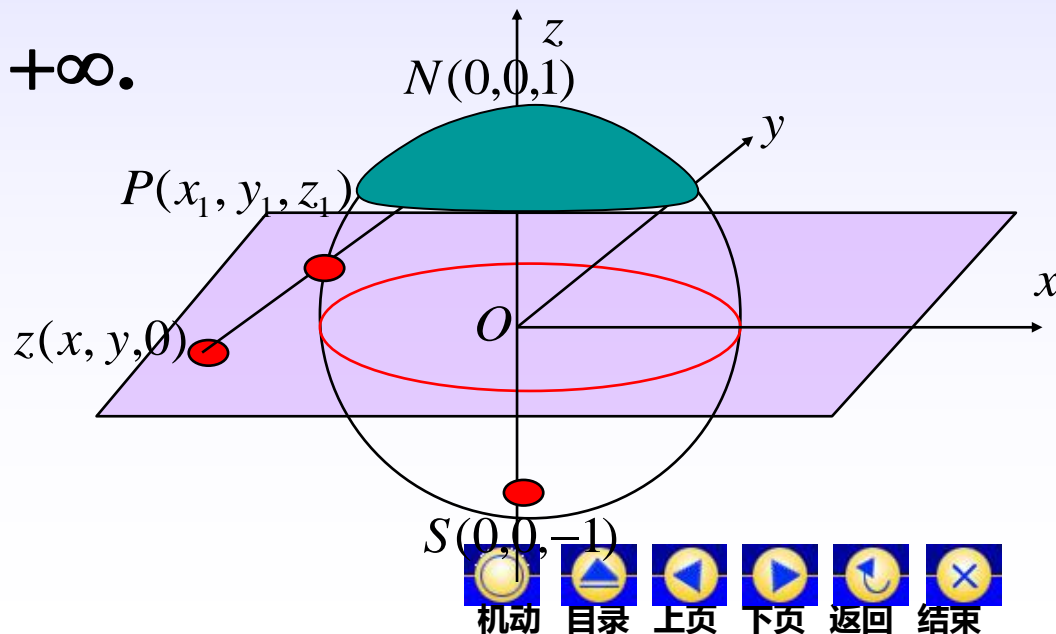
1. 掌握曲线和区域的概念，重点是判别不等式或方程代表的是否是区域、何种区域.
2. 重点掌握复平面上的点和复球面上的点如何对应.

**思考：** 无穷远点的邻域和去心邻域应如何定义？

包括无穷远点自身在内且满足  $|z| > M$  的所有点的集合, 其中实数  $M > 0$ , 称为无穷远点的邻域.

不包括无穷远点自身在内, 仅满足  $|z| > M$ , 的所有点的集合, 称为无穷远点的去心邻域.

可以表示为  $M < |z| < +\infty$ .



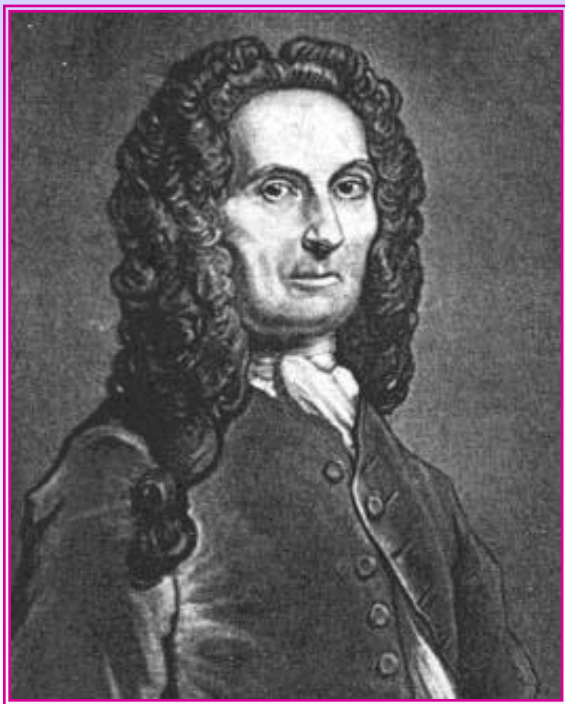
**作业: P13 4, 6, 10(3), (4)**

**放映结束, 按Esc退出.**



机动 目录 上页 下页 返回 结束

# 棣莫佛资料



**Abraham de Moivre**

**Born: 26 May 1667 in  
Vitry (near Paris), France**

**Died: 27 Nov 1754 in  
London, England**