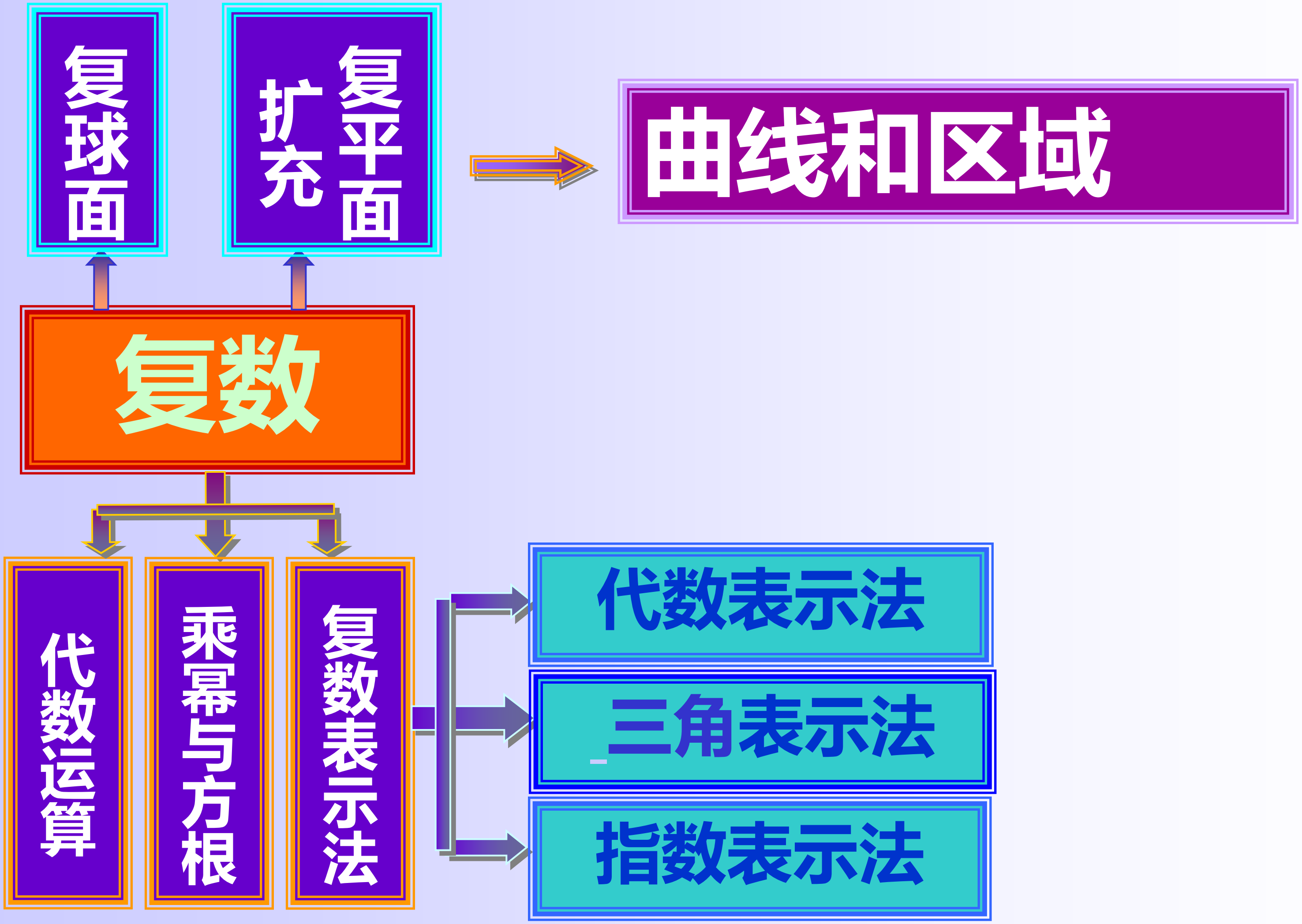
第一章 复数复习

一、复数的计算

二、几何问题


复球面
扩充复平面
曲线和区域
复数
代数运算
乘幂与方根
复数表示法
代数表示法
三角表示法
指数表示法

一、复数的计算

1. i 的特点　$(i^{4n}=1)$

$$3i^{11}+6i^{3}+\frac{8}{i^{20}}-9i^{-1}+8i^{78}$$　　0

几何上的 i： 模为1辐角主值为$\frac{\pi}{2}$向量

乘i，除i？

2. 复数的运算（代数）

分子分母同乘分母共轭或三角形式

$$\frac{2i}{-1+i}=1-i \qquad \frac{2i}{-1+i}=\frac{2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})}$$

$$=\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})]$$

$$(\frac{1-i}{1+i})^5=-i \qquad (\frac{1-i}{1+i})^5=\left(\frac{\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})}\right)^5$$

$$=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})$$

已知$|z|=1$, 则 $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)=$

3. 模相关问题

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad |z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2|\cdots|z_n|$$

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| ?$$

遇见关于模的证明时，常考虑平方

例1 若复数z_1, z_2满足$|z_1|<1, |z_2|<1$，试证 $\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|<1.$

证明 要证 $\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|<1$， 即证 $|z_1-z_2|<|1-\bar{z}_1 z_2|$.

即证$|z_1-z_2|^2<|1-\bar{z}_1 z_2|^2$. 即证$|z_1|^2+|z_2|^2<1+|z_1|^2|z_2|^2$.

而 $|z_1|^2-|z_1|^2|z_2|^2=|z_1|^2(1-|z_2|^2)<1-|z_2|^2$， 因此

$$\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|<1.$$

4. 辐角及主值

注意二者区别 $\mathrm{Arg}z = \theta_1 + 2k\pi$

(k为任意整数).

$z \neq 0$ 辐角的主值

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > (<) 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + (-)\pi, & x < 0, y > (<) 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

(其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$)

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

设复数 z 满足 $\arg(z+2)=\frac{\pi}{3}$，$\arg(z-2)=\frac{5\pi}{6}$，

那么 $z=$ （ A ）

（A）$-1+\sqrt{3}i$ （B）$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

（C）$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ （D）$-\sqrt{3}+i$

5. 几种形式的转化

例2　将复数 $z=\left(\dfrac{2i}{-1+i}\right)\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5$ 化为三角形式.

(辐角用主值)

解　　则 $z=-1-i$.

三角形式为　$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right)$.

$|z|=1, \dfrac{1}{z}, \bar{z}$?

三角形式乘积和商

两复数相乘等于模相乘，辐角相加。

两复数相除等于模相除，辐角相减。

几何意义

6. 幂和方根的计算：

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

例3 将复数 $z=(\dfrac{2i}{-1+i})(\dfrac{1-i}{1+i})^5$ 化为三角形式，

并求 $z^6,\sqrt[3]{z}$.

解 因为 $z=\sqrt{2}(\cos(-\frac{3}{4}\pi)+i\sin(-\frac{3}{4}\pi))$，所以

$$z^6=(\sqrt{2})^6(\cos(-\frac{3}{4}\pi\times 6)+i\sin(-\frac{3}{4}\pi\times 6))$$

$$=-8i.$$

$$\sqrt[3]{z}=(\sqrt{2})^{1/3}[\cos(\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3})+i\sin\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}]$$

$k=0,1,2$

以方程 $z^6 = 7 - \sqrt{15}i$ 的根的对应点为顶点的多边形的面积为 ________

答案： $3\sqrt{3}$

例4

(a) 证明：二次方程 $az^2+bz+c=0\ (a\neq 0)$当 a, b, c 为复常数时的求根公式为

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\neq 0).$$

(b) 用(a)的结果求方程 $z^2+2z+(1-i)=0$ 的根.

(a)证明：$\because az^2+bz+c=0,$

$$\therefore 4a^2z^2+4abz+4ac=0,$$

$$\therefore (2az+b)^2=b^2-4ac,$$

$$\therefore z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\neq 0).$$

(b) 方程 $z^2+2z+(1-i)=0$ 的根是

$$z=\frac{-2+\sqrt{4-4(1-i)}}{2}=-1+\sqrt{i}=-1+e^{(k+\frac{1}{4})\pi i}\ (k=0,1).$$

练习：解下列方程：

$$1.\ 2z^2+z+3=0$$

$$2.\ z^2-(3-2i)z+1-3i=0$$

$$3.\ z^2-2z+i=0$$

答案：$1.\ -\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{23}}{4}$ $\quad 2.\ 2-i, 1-i,$

$$3.\ 1\pm\sqrt[4]{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$$

二、几何问题

1. 曲线之方程

直线方程:　$z - z_1 = t(z_2 - z_1)$

$$a\bar{z} + \bar{a}z = c$$

圆方程:　$|z - z_1| = r$　　$\dfrac{|z-a|}{|z+a|} = b \quad b \neq 1$

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0. \quad |\alpha|^2 - c > 0,$$

2. 常见平面点集概念

区域、单连通域、多连通域、有界、无界

例5 证明复平面上的圆周方程可以写为

$$z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$$

其中 α 为复常数，c 为实常数.

证明 设 $z=x+iy$ 是圆上任意一点，点 $z_0=x_0+iy_0$ 为圆心，半径为 a，则圆的直角坐标方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$$

将 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}, y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ 代入上式并整理，可得

$$z\bar{z}+(iy_0-x_0)z+(-x_0-iy_0)\bar{z}+2(x_0^2+y_0^2-a^2)=0$$

令 $-iy_0-x_0=\alpha, 2x_0^2+y_0^2-a^2=c,$ 则

$$z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$$

由于 x_0, y_0 及 a 均为实常数，所以 $\alpha, \bar{\alpha}$ 均为复常数，c 为实常数.

5. 证明

例7 设 z_1, z_2, z_3 三点适合条件

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

证明: z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆 $|z| = 1$ 的一个正三角形的顶点.

证明：证法一

因为 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 所以 z_1, z_2, z_3 位于以原点为圆心的单位圆上. 下面证明 $\Delta z_1 z_2 z_3$为一个正三角形.

令 $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1, z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2,$

$z_3 = \cos\theta_3 + i\sin\theta_3, -\pi < \theta_1 \le \theta_2 \le \theta_3 \le \pi,$

由于$z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 所以 $z_1 + z_2 = -z_3$.

因此
$$\begin{cases} \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = -\cos\theta_3, (1) \\ \sin\theta_1 + \sin\theta_2 = -\sin\theta_3, \ (2) \end{cases}$$

$(1)^2 + (2)^2$ 可得 $\cos(\theta_2 - \theta_1) = -\dfrac{1}{2}$, 所以

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{2}{3}\pi, \quad \text{或} \quad \theta_2 - \theta_1 = \frac{4}{3}\pi,$$

同理可得

$$\theta_3 - \theta_2 = \frac{2}{3}\pi, \quad \text{或} \ \theta_3 - \theta_2 = \frac{4}{3}\pi.$$

若 $\theta_2 - \theta_1 = \dfrac{4}{3}\pi$ 且 $\theta_3 - \theta_2 = \dfrac{2}{3}\pi$, 则 $\theta_3 - \theta_1 = 2\pi$;

若 $\theta_2-\theta_1=\frac{4}{3}\pi$ 且 $\theta_3-\theta_2=\frac{4}{3}\pi$, 则 $\theta_3-\theta_1=\frac{8\pi}{3}$,

这与 $0\le\theta_3-\theta_1<2\pi$ 矛盾. 因此 $\theta_2-\theta_1\ne\frac{4}{3}\pi$,

只能 $\theta_2-\theta_1=\frac{2}{3}\pi$.

同理 $\theta_3-\theta_2=\frac{2}{3}\pi$. $\Delta z_1z_2z_3$为一个正三角形.

证法二

因为 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 所以 z_1, z_2, z_3 位于以原点为圆心的单位圆上. 下面证明 $\Delta z_1z_2z_3$为一个正三角形.

即只需证明 $|z_2-z_1|=|z_3-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{3}$.

因为 $z_1+z_2+z_3=0$，所以 $z_1+z_2=-z_3$.

又因为

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,$$

所以

$$|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)-|z_1+z_2|^2$$

$$=2(1+1)-|-z_3|^2 \quad =3$$

即

$$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$$

同理 $|z_3-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{3}.$

3. 由方程(不等式)判断对应图形的性质

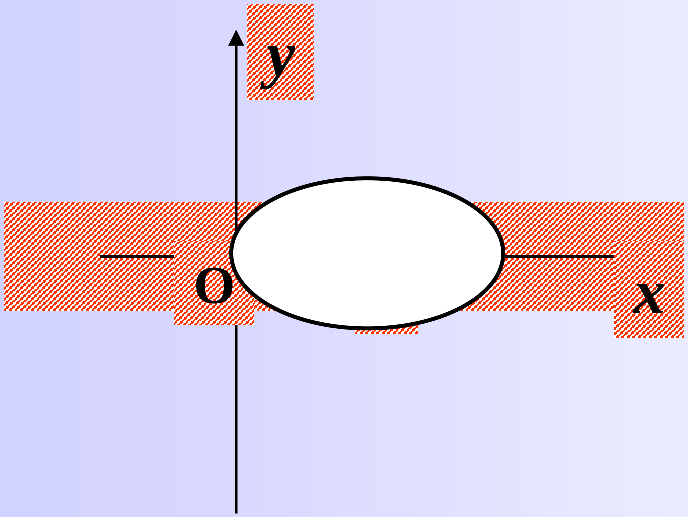
(令$z = x + iy$, 复—实—复)

例4 满足下列条件的点集是什么, 如果是区域, 指出是单连通域还是多连通域?

$(a)\ \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}$; $\quad (b)\ |z-1| < 1 + \mathrm{Re}\,z$;

$(c)\ z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0.$

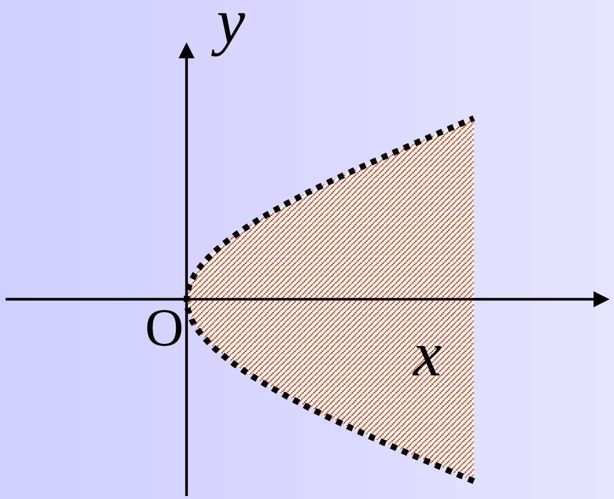
解 (a)



$$(x-1)^2 + y^2 > 1$$

无界多连通域.

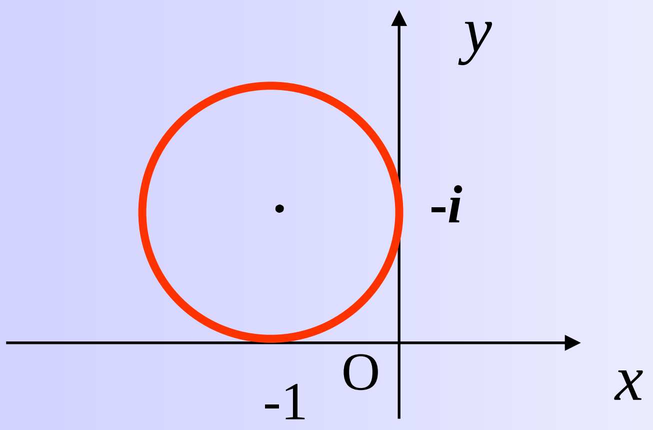
(b)



$$y^2 < 4x$$

无界单连通域.

(c)



$$|z+(1-i)|=1$$

例5 指明下列不等式所确定的区域, 是有界的还是无界的,单连通的还是多连通的.

$$(1)\ \mathrm{Re}(z^2)\le 1; \qquad (2)\ |\arg z|<\frac{\pi}{3};$$

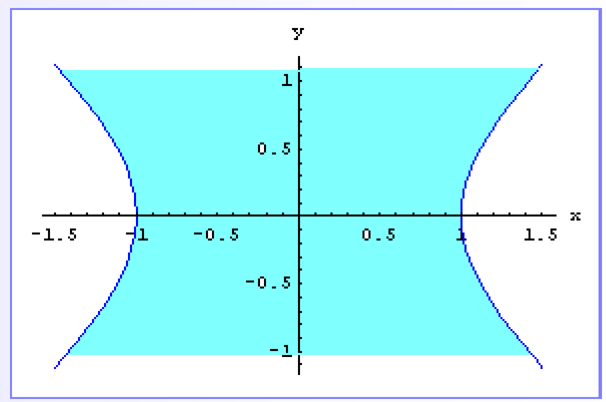
$$(3)\ \left|\frac{1}{z}\right|<3; \qquad (4)\ |z-1|+|z+1|<4.$$

解 (1) 当 $z=x+iy$ 时,

$$\mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2,$$

$$\mathrm{Re}(z^2)\le 1 \Leftrightarrow x^2-y^2\le 1,$$

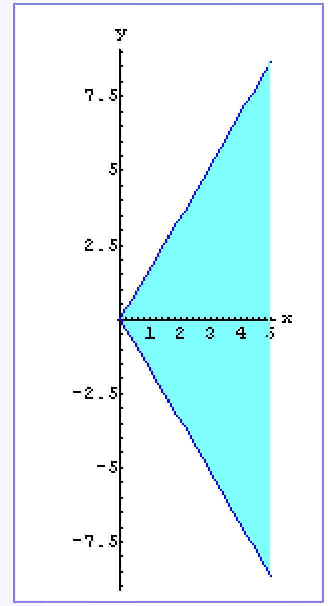
无界的单连通域(如图).



(2) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$

$$|\arg z| < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3},$$

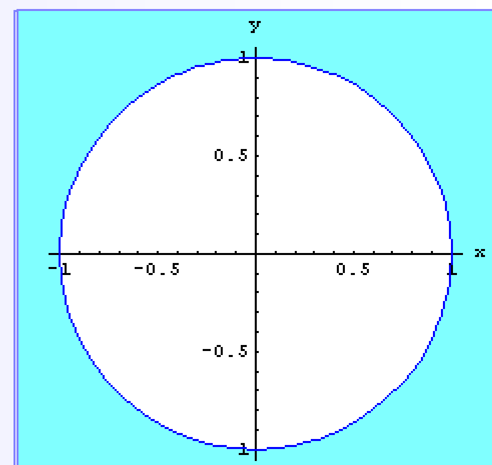
是角形域, 无界的单连通域(如图).



(3) $\left|\frac{1}{z}\right| < 3$　　$\left|\frac{1}{z}\right| < 3 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{3},$

是以原点为中心,半径为$\frac{1}{3}$

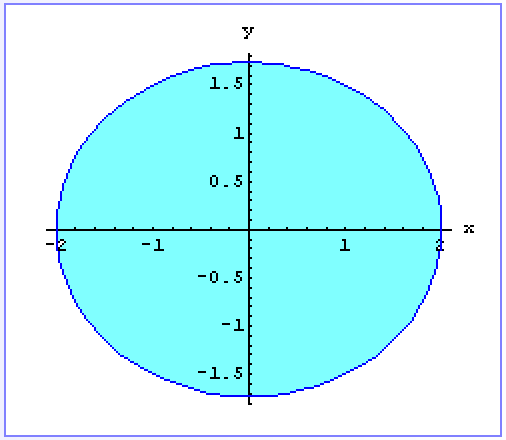
的圆的外部,无界的多连通域.



(4) $|z-1|+|z+1|<4$

$$|z-1|+|z+1|=4$$

表示到1, –1的距离之和为定值4的点的轨迹,



是椭圆,

$|z-1|+|z+1|<4$表示该椭圆内部,

有界的单连通域.

自测:

1. 利用 $i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$ 构造一道计算题.

2. 已知 $|z|=1$, 求 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-\bar{z}}\right)$

3. 求复数(1)$i^3(i+1)^2$, (2) $(1-i)(-\sqrt{3}+i)$的辐角，三角表示式，指数表示式

4. 解方程 (1)$z^3=-8$, (2) $z^2-(3-2i)z+(1-3i)=0$

5. 求下列不等式表示的平面点集是什么？是否区域，有界无界，单连通多连通？

$$(1)\ |z-i|<1-\mathrm{Im}\,z;\quad (2)\ z\bar{z}+iz-i\bar{z}<0$$

放映结束，按Esc退出.