第二节　幂级数

- 一、幂级数的概念
- 二、幂级数的敛散性
- 三、幂级数的运算和性质
- 四、小结与思考

一、幂级数的概念

当 $f_n(z)=c_{n-1}(z-a)^{n-1}$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$$

这种级数称为以a为心的**幂级数**.

特殊情形

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots.$$

二、幂级数的敛散性

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

的收敛范围与和函数.

解 级数的部分和为

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}, (z \neq 1)$$

$|z|<1 \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-z} \longrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 收敛,

$|z|\geq 1 \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z^n \neq 0 \longrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 发散.

收敛范围为一单位圆域 $|z|<1$,

在此圆域内, 级数绝对收敛,

且有 $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots.$$

1.收敛定理 (阿贝尔Abel定理)

阿贝尔介绍

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛, 那末对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z, 级数必绝对收敛, 如果在 $z = z_0$ 级数发散, 那末对满足 $|z| > |z_0|$ 的 z, 级数必发散.

证 因为级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$收敛,

由收敛的必要条件, 有 $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$

因而存在正数M, 使对所有的n, 有$\left|c_n z_0{}^n\right| < M$,

如果$|z| < |z_0|$, 那末$\dfrac{|z|}{|z_0|} = q < 1$,

而 $\quad \left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0{}^n\right| \cdot \dfrac{|z|^n}{|z_0|^n} < Mq^n.$

由正项级数的比较判别法知:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n z^n\right| = |c_0| + |c_1 z| + \left|c_2 z^2\right| + \cdots + \left|c_n z^n\right| + \cdots$$ 收敛.

故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 是绝对收敛的.

另一部分的证明请课后完成.

[证毕]

2. 收敛圆与收敛半径

幂级数的收敛范围是一个圆域，级数在圆内绝对收敛，在圆外发散。 该圆称为幂级数的收敛圆，该圆的半径称为幂级数的收敛半径。

对于一个幂级数, 其收敛半径的情况有三种:

(1) 对所有的正实数都收敛.

由阿贝尔定理知:

级数在复平面内处处绝对收敛.

例如，级数 $1+z+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{n^n}+\cdots$

对任意固定的z，从某个n开始，总有 $\frac{|z|}{n}<\frac{1}{2}$，

于是有 $\left|\frac{z^n}{n^n}\right|<\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

故该级数对任意的z均收敛.

(2) 对所有的正实数除 $z=0$ 外都发散.

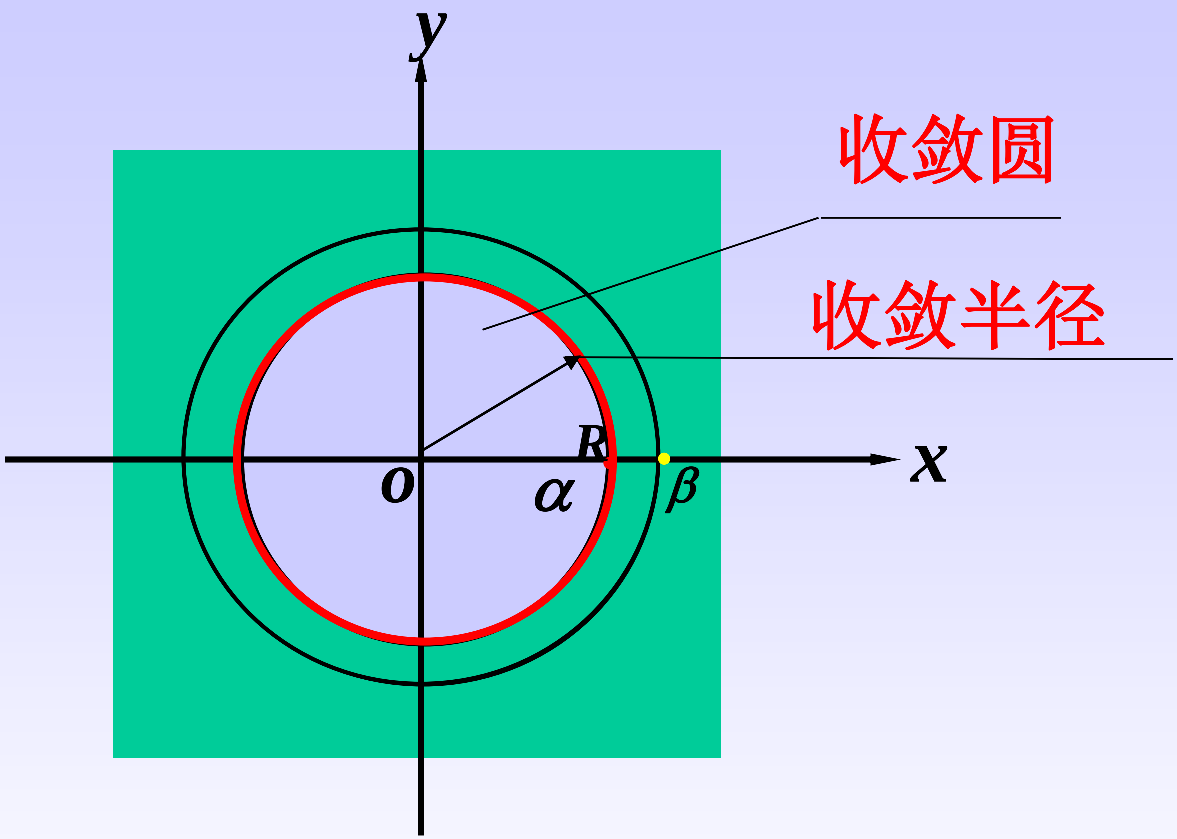
此时, **级数在复平面内除原点外处处发散**.

例如,级数 $1+z+2^2z^2+\cdots+n^nz^n+\cdots$

当 $z\neq 0$ 时, 通项不趋于零, 故级数发散.

(3) 既存在使级数发散的正实数, 也存在使级数收敛的正实数.

设 $z=\alpha$ 时,级数收敛; $z=\beta$ 时,级数发散. 如图:



幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛范围是以原点为中心的圆域.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的收敛范围?

问题: 幂级数在收敛圆周上的敛散性如何?

例如, 级数:

R 均为1, 收敛圆周 $|z| = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \longrightarrow$$ 收敛圆周上无收敛点;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \longrightarrow$$ 在点 $z = 1$ 发散, 在 $z = -1$ 收敛;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \longrightarrow$$ 在收敛圆周上处处绝对收敛.

注意 在收敛圆周上是收敛还是发散, 不能作出一般的结论, 要对具体级数进行具体分析.

练习：

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为2，那么该级数在 $z=1+\sqrt{3}i$ 处的敛散性为(D)

（A）绝对收敛 （B）条件收敛

（C）发散 （D）不能确定

3. 收敛半径的求法

方法1: 比值法:

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \neq 0$, 那末收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

1. $\lambda = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面内处处收敛,

即 $R = \infty$.

2. $\lambda = \infty$(极限不存在), 即 $R = 0$.

方法2: **根值法**

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda\neq 0$, 那末收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

说明:

$$\text{如果}\quad \lambda=\begin{cases}0 & \longrightarrow\ R=\infty\\ \infty & \longrightarrow\ R=0\end{cases}$$

(与比值法相同)

例1 试求幂级数

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}(p\text{为正整数}) \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{n^\alpha}(\alpha>0)$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n. \qquad (4)\sum_{n=0}^{\infty}(\cos in)z^n.$$

的收敛半径及收敛圆.

解 (1) 因为 $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p=1.$

所以 $R=\dfrac{1}{\lambda}=1.$ 收敛圆为$|z|<1.$

(2) 因为

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}=1.$$

所以 $R=\dfrac{1}{\lambda}=1.$ 收敛圆为$|z-2|<1.$

(3) 因为

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0.$$

所以 $R=\infty.$ 幂级数在整个复平面都解析.

(4) 因为 $c_n = \cos in = \cosh n = \dfrac{1}{2}(e^n + e^{-n}),$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}} = e,$

故收敛半径 $R = \dfrac{1}{e}$. 收敛圆为 $|z| < 1/e.$

三、幂级数的运算和性质

1. 幂级数的有理运算

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ R=r_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n,\ R=r_2.$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,$$

$$|z|<R$$

$$f(z)\cdot g(z)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n),$$

$$|z|<\min(r_1,r_2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0 b_n)z^n,\qquad |z|<R$$

例2 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的幂级数，其中 a与b是不相等的复常数 .

解 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 写成如下的形式:

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = -\frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

凑出 $\dfrac{1}{1-g(z)}$

代数变形，使其分母中出现 $(z-a)$

当 $\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|<1$时,

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}=1+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n+\cdots,$$

故 $$\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}(z-a)-\frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2$$

$$-\cdots-\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots$$

设 $|b-a|=R$, 那末当 $|z-a|<R$时, 级数收敛,

且其和为$\dfrac{1}{z-b}$.

例3 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解 $$\frac{1}{3z-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{3z}{2}+\left(\frac{3z}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3z}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\cdots-\frac{3^nz^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nz^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{3z}{2}\right|<1,\text{即}|z|<\frac{2}{3}.$$

例4 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}=2$, 所以 $R=\frac{1}{2}$.

当 $|z|<\frac{1}{2}$ 时, $|2z|<1$, $\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^{n-1}=\frac{2}{1-2z}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}=\frac{2}{1-2z}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-2z)(1-z)}$.

3. 复变幂级数在收敛圆内的性质

定理四 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R,

那末

(1) 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是收敛圆

$|z-a|<R$ 内的解析函数 .

(2) $f(z)$ 在收敛圆 $|z-a|<R$ 内的导数可将其幂

级数逐项求导得到, 即 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$.

(3) $f(z)$在收敛圆内可以逐项积分,

即 $$\int_c f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_c (z-a)^n \mathrm{d}z, \quad c \in |z-a| < R.$$

或 $$\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

简言之: 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析;

幂级数可逐项求导, 逐项积分.

(常用于求和函数)

例5 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1,$ 所以 $R=1.$

利用逐项积分,得:

$$\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(n+1)z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\frac{z}{1-z}.$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}.\quad |z|<1$

五、小结与思考

这节课我们学习了幂级数的概念和阿贝尔定理等内容，应掌握幂级数收敛半径的求法和幂级数的运算性质.

思考题

幂级数在收敛圆周上的敛散性如何断定?

思考题答案

由于在收敛圆周上 $|z|$ 确定, 可以依复数项级数敛散性讨论.

作业：P74 1(3)(4), 2(1)(3)(5),

放映结束，按Esc退出.