第四、五章　级数与留数

一、收敛半径与敛散性.

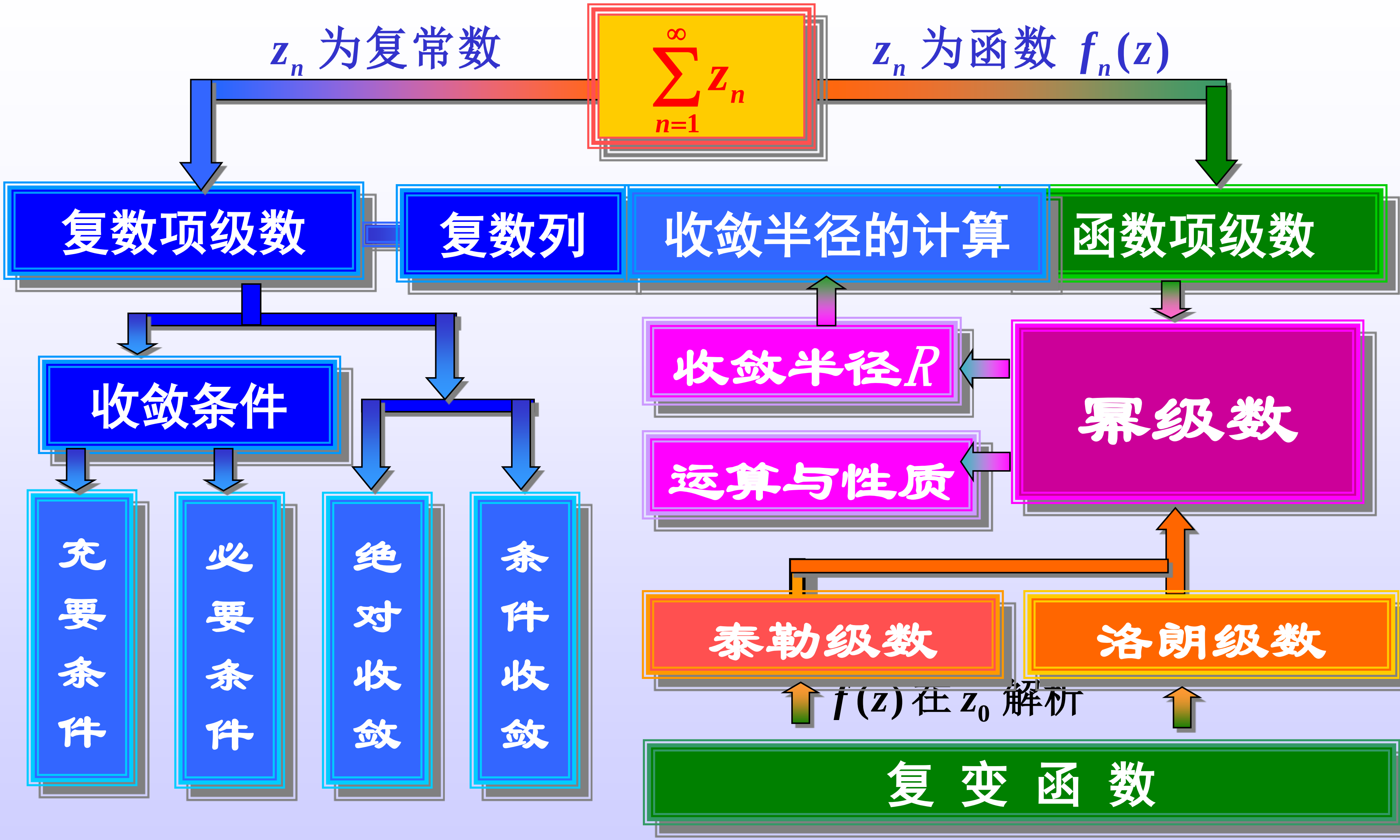
二、解析函数的泰勒展开

三、洛朗展式

四、判别奇点类型

五、求各奇点处留数

六、用留数定理计算沿封闭曲线的积分


$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$
z_n 为复常数
z_n 为函数 $f_n(z)$
复数项级数
复数列
收敛半径的计算
函数项级数
收敛条件
充要条件
必要条件
绝对收敛
条件收敛
收敛半径R
运算与性质
幂级数
泰勒级数
洛朗级数
$f(z)$ 在 z_0 解析
复 变 函 数

孤立奇点

- 可去奇点
- 极点
- 本性奇点

函数的零点与极点的关系

留数

- 计算方法
- 留数定理

围线积分

一、收敛半径与敛散性.

1. 敛散性

看通项 转化为两个实级数 转化为实正项级数

例1 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 的敛散性.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=i-\frac{1}{2}-\frac{i}{3}+\frac{1}{4}+\frac{i}{5}+\cdots$

$$=\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots\right)}_{\longrightarrow\ \text{收敛}}+i\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)}_{\longrightarrow\ \text{收敛}},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 收敛.

例2 判别级数的敛散性.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+3i)^n}.$$

解 设 $\alpha_n=\dfrac{1}{(2+3i)^n}$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|2+3i|}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}<1$,

由正项级数的比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2+3i)^n}$ 绝对收敛.

2.收敛半径

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \neq 0,$ 那末收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}.$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lambda \neq 0,$ 那末收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}.$

如果 $f(z)$ 在 D 内有奇点,则 R 等于 z_0 到最近一个奇点 α 之间的距离,即 $R = |\alpha - z_0|$;(定理4.11)

练习

1. 设函数 $\dfrac{e^z}{\cos z}$ 的泰勒展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，

那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径 $R =$ （ C ）

（A）$+\infty$ （B） 1 （C） $\dfrac{\pi}{2}$ （D） π

2 设函数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)(z+4)}$ 在以原点为中心的

圆环内的洛朗展开式有 m 个， 那么 $m =$ (C)

（A） 1 （B） 2 （C） 3 （D） 4

例3

若 $c_n=\begin{cases}3^n+(-1)^n, & n=0,1,2,\cdots\\ 4^n, & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$ 则双边幂级数

$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛域为(A)

（A） $\dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{3}$ （B） $3<|z|<4$

（C） $\dfrac{1}{4}<|z|<+\infty$ （D） $\dfrac{1}{3}<|z|<+\infty$

二、解析函数的泰勒展开

定理　设$f(z)$在圆K: $|z-z_0|< R$内解析, 则 $f(z)$ 在 K内可以展成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

泰勒展开式　　泰勒级数

其中　$c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\ n=0,1,2,\cdots\cdots$

并且展式是唯一的.

常见函数的泰勒展开式

$$(1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$(3)\ \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$(4)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad (|z| < \infty)$$

$$(5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad (|z| < \infty)$$

展开常用方法:

直接法 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$, $n = 0,1,2,\cdots$

间接法: (1) $\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a-(b-a)}$

$$= -\frac{1}{(b-a)} \frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}$$

(2) 级数相乘

(3) 逐项积分、求导法

例6 求 $f(z)=e^{z}\cos z$ 在$z=0$的泰勒展式.

解 因为 $e^{z}\cos z=\dfrac{1}{2}e^{z}(e^{iz}+e^{-iz})$

$$=\frac{1}{2}[e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}]=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^{n}z^{n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^{n}z^{n}}{n!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)^{n}+(1-i)^{n}]z^{n}\qquad(|z|<\infty)$$

由于 $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$, $1-i=\sqrt{2}e^{\frac{-\pi i}{4}}$;

所以 $e^{z}\cos z=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n}}{n!}\left(e^{\frac{n\pi i}{4}}+e^{\frac{-n\pi i}{4}}\right)z^{n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n}}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}z^{n}.\qquad(|z|<\infty)$$

例7 求函数 $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ 在 $|z|<1$ 内的泰勒展开式.

分析： 利用逐项求导、逐项积分法.

解 因为 $\dfrac{1}{(1-z)^3}=\dfrac{1}{2}[(1-z)^{-1}]''\qquad(|z|<1)$

所以 $$\frac{1}{(1-z)^3}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)''=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)z^m.\qquad(|z|<1)$$

例8 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，泰勒展式为 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

令 $M(r)=\max\limits_{0\le\theta\le 2\pi}|f(re^{i\theta})|\ \ 0<r<R.$

证明 $|a_n|\le \dfrac{M(r)}{r^n}(n=0,1,2,\cdots)$

证明 由泰勒级数系数计算公式

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^n}e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n}\mathrm{d}\theta$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M(r)}{r^n}\mathrm{d}\theta=\frac{M(r)}{r^n}$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例10 设$f(z)$在复平面上处处解析，且存在一个正整数 n 及两个正数R和M， 使当$|z|>R$时，$|f(z)|\le M|z|^n$，试证明 $f(z)$ 是一个至多n次的多项式或是一个常数.

证明 由泰勒级数系数计算公式，任取 $R_1>R$，

$$|a_k|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R_1}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R_1}\frac{|f(z)|}{|z|^{k+1}}ds$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R_1}\frac{M|z|^n}{|z|^{k+1}}ds\le\frac{1}{2\pi}MR_1^{n-k-1}\,2\pi R_1=MR_1^{n-k}$$

当$k>n$时，令 $R_1\to+\infty$， $R_1^{n-k}\to 0$. 从而 $f(z)$是一个至多n次的多项式或一个常数.

例10 是否存在在 $z=0$ 解析的函数 $f(z)$，在 $z_n=\dfrac{1}{n}$ 处取下列函数值

(1) $0, 1, 0, 1, 0, 1\cdots;$

若存在，注意到 $f(\dfrac{1}{2k-1})=0, k=1,2\cdots,\ \dfrac{1}{2k-1}\to 0,$

$f(z)$ 在 $z=0$ 解析，由唯一性定理，$f(z)\equiv 0.$ 矛盾

(2) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{6}\ \cdots;\qquad f(z)=\dfrac{z}{z+1}$

(3) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6}\cdots.$

$$f(\frac{1}{2k-1})=\frac{1}{2k},k=1,2\cdots,\quad f(\frac{1}{2k})=\frac{1}{2k},k=1,2\cdots,$$

三、洛朗展式

常见情况:

1. 利用已知函数展开式;

2.分式：注意|$g(z)$|是否小于1)

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{z-a-(b-a)}$$

$$=\frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\dfrac{b-a}{z-a}} \qquad |z-a|>|b-a|$$

例11 求 $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 的去心邻域的洛朗级数.

解 在 $0<|z|<\infty$ 内,

因为 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$,

所以 $z^2 e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\right)$

$$=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\cdots+\frac{1}{n!z^{n-2}}+\cdots.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例12 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}$ 在适当圆环域内展开成以0为心的洛朗级数

$(1)\ |z|<1,\qquad (2)\ 1<|z|<2,\qquad (3)\ 2<|z|<\infty.$

解 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}=-\dfrac{1}{2+i}\cdot\left(\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{2-z}\right)$

(1) 在 $|z|<1$ 内, 有 $\left|\dfrac{z}{i}\right|<1,\quad \left|\dfrac{z}{2}\right|<1.$

$$f(z)=\frac{-1}{2+i}\cdot\left[\frac{1}{i\left(1+\frac{z}{i}\right)}+\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}\right]=-\frac{1}{2+i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{i^{n+1}}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{i^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]z^n$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

(2) 在$1<|z|<2$内, 有 $\left|\dfrac{i}{z}\right|<1,\quad \left|\dfrac{z}{2}\right|<1.$

$$=\frac{-1}{2+i}\cdot\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)}+\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}\right]=-\frac{1}{2+i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^{-n-1}-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(3) 在$2<|z|<\infty$内, $\left|\dfrac{i}{z}\right|<1,\quad \left|\dfrac{2}{z}\right|<1$

故 $f(z)=-\dfrac{1}{2+i}\left[\dfrac{1}{z+i}-\dfrac{1}{z-2}\right]$

$$=-\frac{1}{2+i}\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2^n\cdot z^{-n-1}\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-i)^n-2^n\right]z^{-n-1}.$$

例13 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数

$(1)\ |a|<|z|<|b|,\qquad (2)\ |b|<|z|$

解 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{z-a}-\dfrac{1}{z-b}\right)$

$(1)\ |a|<|z|<|b|,$

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$$

$$=\frac{1}{a-b}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}+\frac{1}{a-b}\frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}} \quad =\frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right)$$

(2) $|b|<|z|$

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$$

$$=\frac{1}{a-b}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}-\frac{1}{a-b}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{b}{z}}$$

$$=\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{z^{n+1}}$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例14 试证函数 $f(z)=\sin(z+\frac{1}{z})$ 的罗朗展式 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n$

的系数为 $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

证明 由罗朗级数系数计算公式

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\sin(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\theta\sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

令$t=\theta-\pi$，则有

$$\int_0^{2\pi}\sin n\theta\sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(-1)^{n+1}\sin nt\sin(2\cos t)\mathrm{d}t \quad =0$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

四、判别奇点类型

孤立奇点	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m级极点	含有限个负幂项 关于 $(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为 ∞

等价定义

极点和零点关系

零点级数判别：求导，等价定义，展开，

$z=0$ 是 $3\cos z^4-3$ 的几级零点？

例15 求函数$f(z)=\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2 z^2 (z+1)^3}$的有限奇点, 并确定类型.

解 $z=0, z=1, z=-1$是奇点.

因为 $f(z)=\dfrac{1}{z}\left[\dfrac{z-5}{(z-1)^2(z+1)^3}\cdot\dfrac{\sin z}{z}\right]=\dfrac{1}{z}g(z)$,

所以 $z=0$ 是单极点； $z=1$ 是二级极点;

$z=-1$ 是三级极点.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

求下列函数的奇点，指出类型

$$(1)\ \frac{1}{\sin z+\cos z};\ (2)\ \frac{1-e^{z}}{1+e^{z}};\ (3)\ \sin\frac{1}{1-z};$$

$$(4)\ \operatorname{ctan} z;\ (5)\ e^{\frac{1}{z-1}}\frac{1}{e^{z}-1};\ (6)\ \frac{\sin z-z}{z^{3}}.$$

五、求各奇点处留数

留数的计算方法

(1) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0.$

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$展开成洛朗级数求 c_{-1}.

(3) 如果 z_0为 $f(z)$的极点, 则有如下计算规则

定理 如果 z_0为$f(z)$的 n 级极点， 那末

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)].$$

推论1 如果 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 那末

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

推论2 设 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 在 z_0 都解析,

如果 $\varphi(z_0)\neq 0, \psi(z_0)=0, \psi'(z_0)\neq 0$, 那末 z_0 为

$f(z)$ 的一级极点, 且有 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

例16 求下列各函数在有限奇点处的留数.

$$(1)\sin\frac{1}{z-1},\quad (2)z^2\sin\frac{1}{z},\quad (3)\frac{1}{z\sin z},$$

解 (1)在 $0<|z-1|<+\infty$ 内,

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots,$$

所以 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{\sin(z-1)},1\right]=C_{-1}=1.$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

(2) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$

解 因为$\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \cdots,$

所以在$0 < |z| < +\infty$内，

$$z^2\sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots\right)$$

$$= z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \cdots$$

故 $\operatorname{Res}\left[z^2\sin\dfrac{1}{z}, 0\right] = C_{-1} = -\dfrac{1}{6}.$

(3) $\dfrac{1}{z\sin z}$

解 $z = n\pi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为奇点,

当 $n \neq 0$ 时 $n\pi$ 为一级极点,

因为 $\lim\limits_{z \to n\pi} (z - n\pi) \dfrac{1}{z\sin z}$

$$= \lim_{z \to n\pi} (-1)^n \frac{z - n\pi}{z\sin(z - n\pi)} = (-1)^n \frac{1}{n\pi},$$

所以 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{z\sin z}, n\pi\right] = (-1)^n \dfrac{1}{n\pi},$

因为$z=0$是二级极点,

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\sin z},0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1}{z\sin z}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=0.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例17 求下列各函数在有限奇点处的留数.

$$(1)\frac{z}{(z-a)^m(z-b)};\quad (2)e^{\frac{1}{1-z}};\quad (3)\frac{z^{2n}}{(z+1)^n};$$

解（1） $m=1$

$$\operatorname{Res}[\frac{z}{(z-a)^m(z-b)},z=a]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{z}{(z-a)(z-b)}=\frac{a}{a-b}$$

$m\geq 2$

$$\operatorname{Res}[\frac{z}{(z-a)^m(z-b)},z=a]=$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m\frac{z}{(z-a)^m(z-b)}]$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[\frac{z}{z-b}\right]$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}(-1)^{m-1}(m-1)!\,b(z-b)^{-m}$$

$$=(-1)^{m-1}\frac{b}{(a-b)^m}=-\frac{b}{(b-a)^m}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z-a)^m(z-b)},z=b\right]=\lim_{z\to b}(z-b)\frac{z}{(z-a)^m(z-b)}$$

$$=\frac{b}{(b-a)^m}$$

$$(2)e^{\frac{1}{1-z}}$$

$$e^{\frac{1}{1-z}} = 1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2} + \cdots$$

$$\mathrm{Re}\,s[e^{\frac{1}{1-z}}, z = 1] = -1$$

$$(3)\frac{z^{2n}}{(z+1)^n};$$

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}, z = -1] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z+1)^n\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{(2n)!}{(n+1)!}z^{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

六、用留数定理计算沿封闭曲线的积分

例18 求下列围线积分

$$(1)\oint_{|z|=3}\tan\pi z\,dz \qquad (2)\oint_{|z|=1} ze^{\frac{1}{z}}dz \qquad (3)\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z(1-e^{z})}dz$$

解（1）被积函数在积分区域内有6个奇点，

$$k+\frac{1}{2},\ k=0,\pm1,\pm2,\text{-}3$$

并且

$$\mathrm{Re}\,s[\tan\pi z,k+\frac{1}{2}]=\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\bigg|_{k+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}$$

所以 $\oint_{|z|=3}\tan\pi z=2\pi i\cdot 6\cdot(-\frac{1}{\pi})\ =-12i$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

（2）因为被积函数在积分区域内有一个奇点0，为本性奇点

$$ze^{\frac{1}{z}}=z\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$$

$$\operatorname{Res}[ze^{\frac{1}{z}},z=0]=\frac{1}{2}$$

所以 $\displaystyle\oint_{|z|=1} ze^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z=\pi i.$

（3）因为被积函数在积分区域内有一个奇点0，且为一级极点，所以

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z(1-e^z)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{\sin z}{z(1-e^z)}, z=0\right]$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{(1-e^z)}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{-e^z} = -2\pi i.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例19 计算积分$\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin(z+i)}{z(z+i)^8} dz.$

解 $z=0$ 为一级极点，$z=-i$ 为七级极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}=\sin i;$$

$$f(z)=\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}\cdot\frac{1}{(z+i)-i}=\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}\cdot i\frac{1}{1-\dfrac{z+i}{i}}$$

$$=\left\{\frac{1}{(z+i)^7}-\frac{1}{3!(z+i)^5}+\frac{1}{5!(z+i)^3}-\frac{1}{7!(z+i)}+\cdots\right\}$$

$$\cdot i\left\{1+\frac{1}{i}(z+i)+\frac{1}{i^2}(z+i)^2+\cdots\right\}$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$=\cdots+i\left(\frac{-1}{7!}+\frac{-1}{5!}+\frac{-1}{3!}+\frac{-1}{1!}\right)\frac{1}{z+i}+\cdots$$

所以 $\mathrm{Res}[f(z),-i]=-i\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)$

由留数定理得

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin(z+i)}{z(z+i)^8}\mathrm{d}z=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}$$

$$=2\pi i\left\{\sin i-i\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)\right\}.$$