

第三章 复变函数的积分

一、选择题：

1. 设 c 为从原点沿 $y^2 = x$ 至 $1+i$ 的弧段, 则 $\int_c (x+iy^2)dz = (\quad)$

- (A) $\frac{1}{6} - \frac{5}{6}i$ (B) $-\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$ (C) $-\frac{1}{6} - \frac{5}{6}i$ (D) $\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$

2. 设 c 为不经过点 1 与 -1 的正向简单闭曲线, 则 $\oint_c \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} dz$ 为 (\quad)

- (A) $\frac{\pi i}{2}$ (B) $-\frac{\pi i}{2}$ (C) 0 (D) (A) (B) (C) 都有可能

3. 设 $c_1: |z|=1$ 为负向, $c_2: |z|=3$ 正向, 则 $\oint_{c=c_1+c_2} \frac{\sin z}{z^2} dz = (\quad)$

- (A) $-2\pi i$ (B) 0 (C) $2\pi i$ (D) $4\pi i$

4. 设 c 为正向圆周 $|z|=2$, 则 $\oint_c \frac{\cos z}{(1-z)^2} dz = (\quad)$

- (A) $-\sin 1$ (B) $\sin 1$ (C) $-2\pi i \sin 1$ (D) $2\pi i \sin 1$

5. 设 c 为正向圆周 $|z|=\frac{1}{2}$, 则 $\oint_c \frac{z^3 \cos \frac{1}{z-2}}{(1-z)^2} dz = (\quad)$

- (A) $2\pi i(3\cos 1 - \sin 1)$ (B) 0 (C) $6\pi i \cos 1$ (D) $-2\pi i \sin 1$

6. 设 $f(z) = \oint_{|\xi|=4} \frac{e^\xi}{\xi-z} d\xi$, 其中 $|z| \neq 4$, 则 $f'(\pi i) = (\quad)$

- (A) $-2\pi i$ (B) -1 (C) $2\pi i$ (D) 1

7. 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析且不为零, c 为 B 内任何一条简单闭曲线, 则积分

$$\oint_c \frac{f''(z) + 2f'(z) + f(z)}{f(z)} dz \quad (\quad)$$

- (A) 于 $2\pi i$ (B) 等于 $-2\pi i$ (C) 等于 0 (D) 不能确定

8. 设 c 是从 0 到 $1 + \frac{\pi}{2}i$ 的直线段, 则积分 $\int_c z e^z dz = (\quad)$

- (A) $1 - \frac{\pi e}{2}$ (B) $-1 - \frac{\pi e}{2}$ (C) $1 + \frac{\pi e}{2}i$ (D) $1 - \frac{\pi e}{2}i$

9. 设 c 为正向圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, 则 $\oint_c \frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{z^2 - 1} dz = (\quad)$

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$ (B) $\sqrt{2}\pi i$ (C) 0 (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$

10. 设 c 为正向圆周 $|z - i| = 1, a \neq i$, 则 $\oint_c \frac{z \cos z}{(a - i)^2} dz = (\quad)$

- (A) $2\pi i e$ (B) $\frac{2\pi i}{e}$ (C) 0 (D) $i \cos i$

11. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, c 为 D 内任一条正向简单闭曲线, 它的内部全属于 D . 如果 $f(z)$ 在 c 上的值为 2 , 那么对 c 内任一点 z_0 , $f(z_0) (\quad)$

- (A) 等于 0 (B) 等于 1 (C) 等于 2 (D) 不能确定

12. 下列命题中, 不正确的是 ()

(A) 积分 $\oint_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a} dz$ 的值与半径 $r (r > 0)$ 的大小无关

(B) $\left| \oint_c (x^2 + iy^2) dz \right| \leq 2$, 其中 c 为连接 $-i$ 到 i 的线段

(C) 若在区域 D 内有 $f'(z) = g(z)$, 则在 D 内 $g'(z)$ 存在且解析

(D) 若 $f(z)$ 在 $0 < |z| < 1$ 内解析, 且沿任何圆周 $c: |z| = r (0 < r < 1)$ 的积分等于零, 则

$f(z)$ 在 $z = 0$ 处解析

13. 设 c 为任意实常数, 那么由调和函数 $u = x^2 - y^2$ 确定的解析函数 $f(z) = u + iv$ 是 ()

- (A) $iz^2 + c$ (B) $iz^2 + ic$ (C) $z^2 + c$ (D) $z^2 + ic$

14. 下列命题中, 正确的是 ()

(A) 设 v_1, v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数, 则必有 $v_1 = v_2$

(B) 解析函数的实部是虚部的共轭调和函数

(C) 若 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 为 D 内的调和函数

(D) 以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数

15. 设 $v(x, y)$ 在区域 D 内为 $u(x, y)$ 的共轭调和函数, 则下列函数中为 D 内解析函数的是 ()

(A) $v(x, y) + iu(x, y)$ (B) $v(x, y) - iu(x, y)$

(C) $u(x, y) - iv(x, y)$ (D) $\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x}$

二、填空题

1. 设 c 为沿原点 $z = 0$ 到点 $z = 1 + i$ 的直线段, 则 $\int_c 2\bar{z}dz =$ _____

2. 设 c 为正向圆周 $|z - 4| = 1$, 则 $\int_c \frac{z^2 - 3z + 2}{(z - 4)^2} dz =$ _____

3. 设 $f(z) = \oint_{|\xi|=2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\xi)}{\xi - z} d\xi$, 其中 $|z| \neq 2$, 则 $f'(3) =$ _____

4. 设 c 为正向圆周 $|z| = 3$, 则 $\oint_c \frac{z + \bar{z}}{|z|} dz =$ _____

5. 设 c 为负向圆周 $|z| = 4$, 则 $\oint_c \frac{e^z}{(z - \pi i)^5} dz =$ _____

6. 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的_____

7. 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内连续, 且对于 B 内任何一条简单闭曲线 c 都有 $\oint_c f(z)dz = 0$, 那么 $f(z)$ 在 B 内_____

8. 调和函数 $\varphi(x, y) = xy$ 的共轭调和函数为_____

9. 若函数 $u(x, y) = x^3 + axy^2$ 为某一解析函数的虚部, 则常数 $a =$ _____

10. 设 $u(x, y)$ 的共轭调和函数为 $v(x, y)$, 那么 $v(x, y)$ 的共轭调和函数为_____

三、计算积分

1. $\oint_{|z|=R} \frac{6z}{(z^2-1)(z+2)} dz$, 其中 $R > 0$, $R \neq 1$ 且 $R \neq 2$;

2. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^4 + 2z^2 + 2}$.

四、设 $f(z)$ 在单连通域 B 内解析, 且满足 $|1 - f(z)| < 1$ ($x \in B$). 试证

1. 在 B 内处处有 $f(z) \neq 0$;

2. 对于 B 内任意一条闭曲线 c , 都有 $\oint_c \frac{f''(z)}{f(z)} dz = 0$

五、设 $f(z)$ 在圆域 $|z - a| < R$ 内解析, 若 $\max_{|z-a|=r} |f(z)| = M(r)$ ($0 < r < R$),

则 $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}$ ($n = 1, 2, \dots$).

六、求积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$, 从而证明 $\int_0^\pi e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = \pi$.

七、设 $f(z)$ 在复平面上处处解析且有界, 对于任意给定的两个复数 a, b , 试求极限

$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$ 并由此推证 $f(a) = f(b)$ (刘维尔 Liouville 定理).

八、设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ ($R > 1$) 内解析, 且 $f(0) = 1, f'(0) = 2$, 试计算积分 $\oint_{|z|=1} (z+1)^2 \frac{f(z)}{z^2} dz$

并由此得出 $\int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{\theta}{2} f(e^{i\theta}) d\theta$ 之值.

九、设 $f(z) = u + iv$ 是 z 的解析函数, 证明

$$\frac{\partial^2 \ln(1 + |f(z)|^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln(1 + |f(z)|^2)}{\partial y^2} = \frac{4|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}.$$

十、若 $u = u(x^2 + y^2)$, 试求解析函数 $f(z) = u + iv$.

答案