

第三节 泰勒级数

- 一、泰勒定理
- 二、将函数展开成泰勒级数
- 三、唯一性定理与最大模原理
- 四、小结与思考

一、泰勒定理

定理4.9 设 $f(z)$ 在圆 $K: |z-z_0|<R$ 内解析, 则 $f(z)$ 在 K 内可以展成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

泰勒展开式

泰勒级数

其中 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), n = 0, 1, 2, \dots$

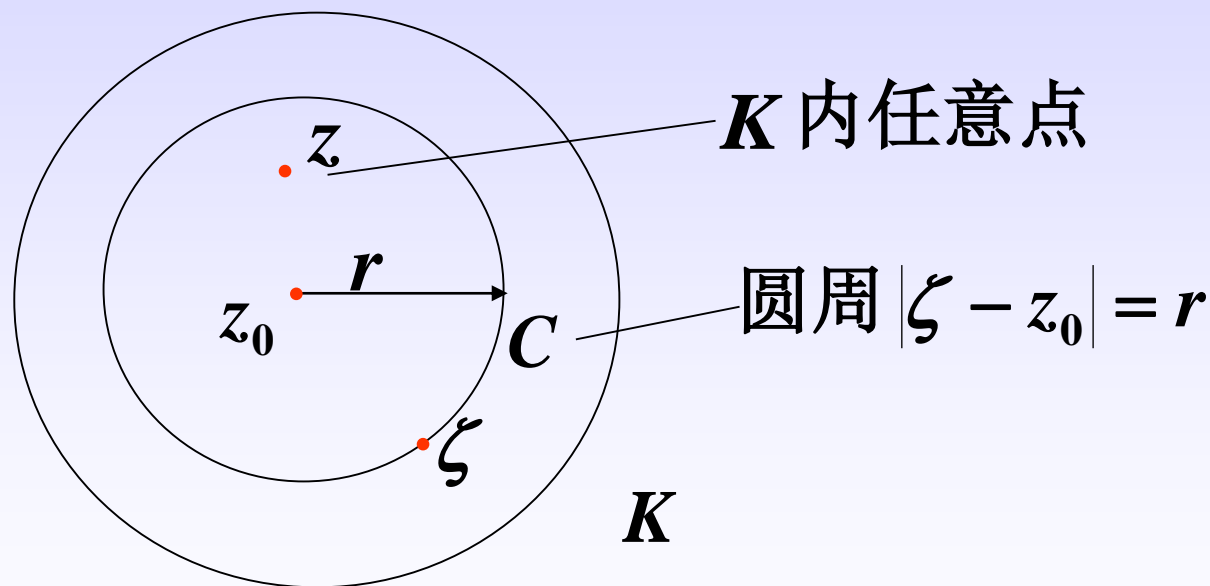
并且展式是唯一的.

泰勒介绍

证明:

设函数 $f(z)$ 在圆 $K: |z - z_0| < R$ 内解析, z 为 K 内任意点,
 $|\zeta - z_0| = r$ 为 K 内以 z_0 为中心包含 z 的圆周,
记为 C ,

如图:



由柯西积分公式, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ 其中 } C \text{ 取正方向.}$$

因为积分变量 ζ 取在圆周 C 上, 点 z 在 C 的内部,

所以 $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$. 则

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \left[1 + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right) + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \cdots \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

于是 $f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right] d\zeta.$$

由高阶导数公式, 上式又可写成

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_N(z)$$

其中 $R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right] d\zeta$

若 $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(z) = 0,$

可知在 K 内 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

即 $f(z)$ 在 C 内可以用幂级数来表示,

$$\text{令 } \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} = q$$

q 是与积分变量 ζ 无关的量, 且 $0 \leq q < 1$,

$f(z)$ 在 K ($C \subset K$) 内解析, 则在 C 上连续,

因此 $f(\zeta)$ 在 C 上也连续, $f(\zeta)$ 在 C 上有界,

即存在一个正常数 M , 在 C 上 $|f(\zeta)| \leq M$.

$$|R_N(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right| ds$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|} \frac{|z - z_0|^n}{|\zeta - z_0|} \right] ds$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{M}{r} q^n \cdot 2\pi r = \frac{Mq^N}{1-q}.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q^N = 0 \longrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} R_N(z) = 0 \text{ 在 } C \text{ 内成立,}$$

从而在 C 内 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ 泰勒级数

$f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式,

下证唯一性.

设 $f(z)$ 在 z_0 已被展开成幂级数:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \\ + a_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

那末 $f(z_0) = a_0, f'(z_0) = a_1, \dots$

即 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \dots$

因此, 任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数, 因而是唯一的.

说明:

1. 当 $z_0 = 0$ 时, 级数称为麦克劳林级
2. 复变函数展开为泰勒级数, 比实变函数展开成幂级数的条件弱。

定理4.10 函数 $f(z)$ 在 z_0 解析的充分必要条件是 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内可以展成幂级数.

定理4.11 幂级数的和函数在它的收敛圆周上至少有一个奇点.

结论: 如果函数 $f(z)$ 在 D 内有奇点, 则 R 等于 z_0 到最近一个奇点 a 之间的距离.

二、将函数展开成泰勒级数

常用方法: 直接法和间接法.

1.直接法:

由泰勒展开定理计算系数

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

将函数 $f(z)$ 在 z_0 展开成幂级数.

例如, 求 e^z 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

因为 $(e^z)^{(n)} = e^z$,

$$(e^z)^{(n)}|_{z=0} = 1, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

故有
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

因为 e^z 在复平面内处处解析,

所以级数的收敛半径 $R = \infty$.

仿照上例，可得 $\sin z$ 与 $\cos z$ 在 $z = 0$ 的泰勒展开式.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots ,$$
$$(R = \infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots ,$$
$$(R = \infty)$$

附: 常见函数的泰勒展开式

$$1) e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty)$$

$$2) \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$3) \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$4) \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad (|z| < \infty)$$

$$5) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad (|z| < \infty)$$

$$6) \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots, \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (|z| < 1)$$

$$7) (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \\ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \quad (|z| < 1)$$

2. 间接展开法：

借助于一些已知函数的展开式，结合解析函数的性质，幂级数运算性质 (逐项求导, 积分等) 和其它数学技巧 (代换等)，求函数的泰勒展开式.

间接法的优点：

不需要求各阶导数与收敛半径，因而比直接展开更为简洁，使用范围也更为广泛。

(1) 换元法

例1 求 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解 显然 $z=1$ 是函数的唯一奇点, 于是它可在 $|z|<1$ 内展开成幂级数,

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1-z}} &= e \cdot e^{\frac{z}{1-z}} = e \cdot e^{z+z^2+\cdots+z^n+\cdots} \\ &= e \cdot [1 + (z + z^2 + \cdots) + \frac{1}{2!}(z + z^2 + \cdots)^2 + \cdots] \\ &= e \cdot [1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \cdots], |z| < 1. \end{aligned}$$

(2) 逐项积分、求导法

例2 将函数 $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ 展成 $z-i$ 的幂级数.

解

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\frac{1}{1-i-(z-i)}\right)' = \left[\frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}\right]'$$

$$= \frac{1}{1-i} \left[1 + \frac{z-i}{1-i} + \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n + \cdots\right]'$$

$$= \frac{1}{(1-i)^2} \left[1 + 2\left(\frac{z-i}{1-i}\right) + \cdots + n\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^{n-1} + \cdots\right],$$

$$|z-i| < \sqrt{2}.$$



例3 求 $\arctan z$ 在 $z = 0$ 的幂级数展开式.

解 因为 $\arctan z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$,

$$\text{且 } \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (z^2)^n, \quad |z| < 1$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \arctan z &= \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (z^2)^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

(3) 微分方程法

例4 将 $\frac{e^z}{1+z}$ 展为麦克劳林级数.

解 微分方程法 因为 $\frac{e^z}{1+z}$ 的唯一奇点为 $z = -1$,

所以收敛半径为1, 可在 $|z| < 1$ 内进行展开,

令 $f(z) = \frac{e^z}{1+z}$, 对 $f(z)$ 求导得 $f'(z) = \frac{ze^z}{(1+z)^2}$,

即微分方程 $(1+z)f'(z) - zf(z) = 0$

对微分方程逐次求导得:

$$(1+z)f''(z) + (1-z)f'(z) - f(z) = 0$$

$$(1+z)f'''(z) + (2-z)f''(z) - 2f'(z) = 0$$

... ..

由 $f(0) = 1$, 得 $f'(0) = 0, f''(0) = 1, f'''(0) = -2, \dots$

所以 $f(z)$ 的麦克劳林级数为

$$\frac{e^z}{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \dots, \quad |z| < 1.$$

(4) 柯西乘积

收敛半径为1, 可在 $|z| < 1$ 内进行展开,

$$\text{而 } e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{e^z}{1+z} &= 1 + (1-1)z + \left(\frac{1}{2!} - 1 + 1\right)z^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} + 1 - 1\right)z^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \cdots, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

	1	$-z$	z^2	$-z^3$
1	1	$-z$	z^2	$-z^3$
z	z	$-z^2$	z^3	$-z^4$
$\frac{z^2}{2!}$	$\frac{z^2}{2!}$	$-\frac{z^3}{2!}$	$\frac{z^4}{2!}$	$-\frac{z^5}{2!}$
$\frac{z^3}{3!}$	$\frac{z^3}{3!}$	$-\frac{z^4}{3!}$	$\frac{z^5}{3!}$	$-\frac{z^6}{3!}$

(5) 利用幂级数的四则运算。

例5 求 $\tan z$ 在 $z = 0$ 的泰勒展式。

解 因 $z = \pm \frac{\pi}{2}$ 是 $\tan z$ 中距 $z = 0$ 最近的奇点,

所求幂级数的收敛半径为 $R = \pi/2$. 设

$$\tan z = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots,$$

由于 $\sin z = \tan z \cos z$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

利用级数乘法，再比较两端同次幂的系数得

$$0 = a_0, \quad 1 = a_1, \quad 0 = a_2 - \frac{1}{2}a_0, \quad -\frac{1}{3!} = a_3 - \frac{1}{2}a_1,$$

$$0 = a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4!}a_0, \quad \frac{1}{5!} = a_5 - \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{4!}a_1, \dots$$

故

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

三、解析函数的唯一性定理

1. 解析函数的零点及唯一性定理

定义 设 $f(z)$ 在 $|z-z_0| < R$ 内解析, $f(z)$ 不恒为零. 若 $f(z_0) = 0$, 则称 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的零点. 若

$$f^{(n)}(z_0) = 0, (n = 0, 1, 2, \cdots m-1); \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

则称 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 级零点.

零点等价定义:

不恒等于零的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 邻域内解析且 $\varphi(z_0) \neq 0$, m 为某一正整数, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点.

定理 若 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内解析且不恒为零, z_0 为其零点, 则存在 z_0 的一个邻域, $f(z)$ 在此邻域中除了 $z = z_0$ 外, 没有其它零点.

不恒等于零的解析函数的零点是孤立的.

引理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $\{z_n\}$ 是 D 内彼此不同的点列, 且 $\{z_n\}$ 在 D 内有聚点. 若 $f(z_n) = 0 (n=1, 2, \dots)$, 则在 D 内, $f(z) \equiv 0$.

唯一性定理 设函数 $f(z), g(z)$ 在区域 D 内解析, $\{z_n\}$ 是 D 内彼此不同的点列, 且 $\{z_n\}$ 在 D 内有聚点. 若 $f(z_n) = g(z_n) (n=1, 2, \dots)$, 则在 D 内, $f(z) \equiv g(z)$.

推论: 设函数 $f(z), g(z)$ 在区域 D 内解析, 若它们在某一子区域或某一子弧段相等, 则在 D 内相等.

注: 在 D 内有聚点条件不可以去掉.

$$\sin \frac{1}{z-1}$$

有无穷多个零点, 但不恒为零.

2. 最大模原理

定理：若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，并且不为常数，则 $|f(z)|$ 在 D 内取不到最大值。

证 假设 $|f(z)|$ 在 D 内某一点 z_0 达到最大值，即

$$|f(z_0)| \geq |f(z)|, z \in D \quad (1)$$

设 z_0 的邻域 $B(z_0, R) \subset D$ ， l 为 $B(z_0, R)$ 内以 z_0 为中心， r ($0 < r < R$) 为半径的任意圆周，则(1)式在 l 上成立。

若能证明在 l 上必有

$$|f(z)| \equiv |f(z_0)|, z \in l, \quad (2)$$

则由 l 的任意性, 在 $B(z_0, R)$ 内, 必有

$$|f(z)| \equiv |f(z_0)|,$$

因此 $f(z)$ 在 $B(z_0, R)$ 内为常数, 由唯一性定理知 $f(z)$ 在 D 内为常数, 矛盾. 定理成立.

下证(2)式成立.

若(2)不成立, 必存在 $z_1 = z_0 + re^{i\theta_1} \in l$, 使得

$$|f(z_0)| > |f(z_1)|.$$

由于 $f(z)$ 在 l 上连续, 故当 $\theta \in [\theta_1 - \delta, \theta_1 + \delta] (\delta > 0)$

时, 有

$$|f(z)| = |f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)|.$$

由平均值公式,

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\theta_1-\delta}^{\theta_1+\delta} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta + \int_0^{\theta_1-\delta} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\theta_1+\delta}^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{1}{2\pi} [|f(z_0)| \cdot 2\delta + |f(z_0)| (2\pi - 2\delta)] \\
 &= |f(z_0)|.
 \end{aligned}$$

矛盾，所以(2)式成立.

推论1: 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $D+C$ 上连续, 则 $|f(z)|$ 在 C 上取到最大值.

推论2: 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 非常值, 则 $\operatorname{Re} f(z)$ 在 D 内取不到最大值.

推论3: 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 非常值, $f \neq 0$, 则 $|f(z)|$ 在 D 内取不到最小值.

五、小结与思考

通过本课的学习, 应理解泰勒展开定理, 熟记五个基本函数的泰勒展开式, 掌握将函数展开成泰勒级数的方法, 能比较熟练的把一些解析函数展开成泰勒级数.

理解唯一性定理和最大模原理的含义, 会简单应用。

作业: P75 3(1)(2)(3), 4(2) (4), 7