# 第一节 复变函数积分的概念

- 一、积分的定义
- 二、积分的计算
- 三、积分的性质
- 四、小结与思考

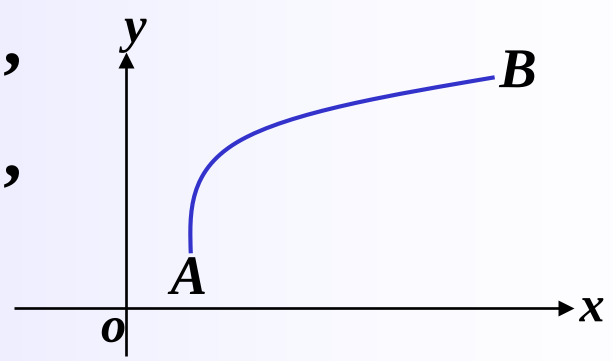
机动 目录 上页 下页 返回 结束

# 一、积分的定义

## 1.有向曲线:

设$C$为平面上给定的一条光滑(或按段光滑)曲线，如果选定$C$的两个可能方向中的一个作为正方向(或正向)，那么我们就把$C$理解为带有方向的曲线，称为**有向曲线**.

如果$A$到$B$作为曲线$C$的正向，那么$B$到$A$就是曲线$C$的负向，记为$C^-$.

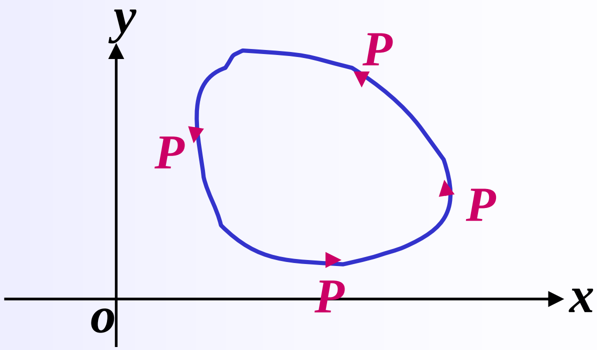


关于曲线方向的说明:

在今后的讨论中,常把两个端点中的一个作为起点，另一个作为终点，除特殊声明外，正方向总是指从起点到终点的方向.

简单闭曲线正向的定义:

简单闭曲线$C$的正向是指当曲线上的点$P$顺此方向前进时，邻近$P$点的曲线的内部始终位于$P$点的左方.




与之相反的方向就是曲线的负方向.

## 2.积分的定义:

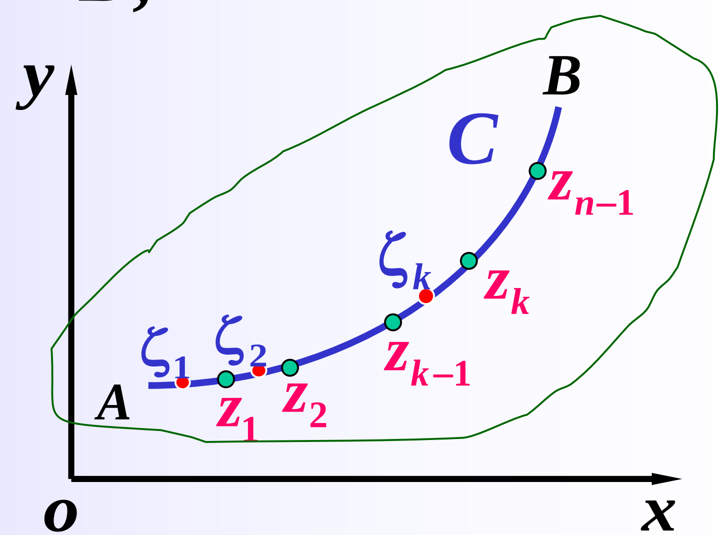
设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 $D$ 内, $C$ 为区域 $D$ 内起点为 $A$ 终点为 $B$ 的一条光滑的有向曲线, 把曲线 $C$ 任意分成 $n$ 个弧段, 设分点为

$$A = z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n = B,$$

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$

$$(k = 1,2,\cdots,n)$$

上任意取一点 $\zeta_k$,




机动 目录 上页 下页 返回 结束

作和式 $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k,$

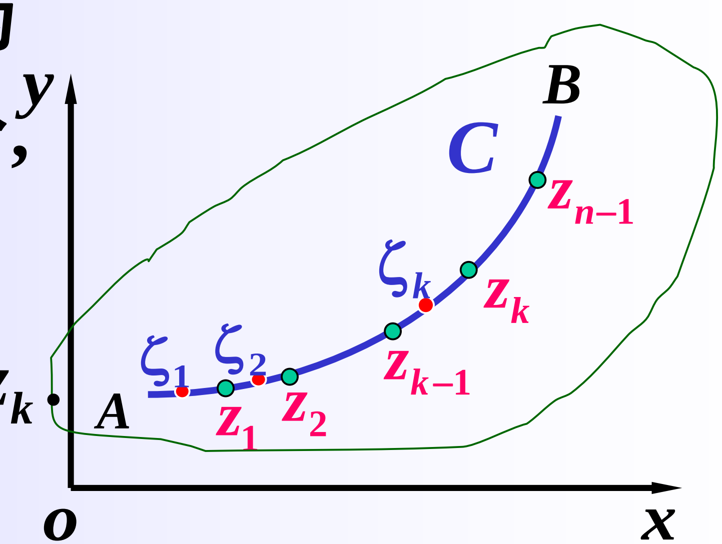
这里 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，$\Delta s_k=\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度,

记 $\delta=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$，当 $n$ 无限增加且 $\delta\to 0$ 时,

如果不论对 $C$ 的分法及 $\zeta_k$ 的取法如何, $S_n$ 有唯一极限,那么称这极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 $C$ 的积分,

记为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k.$$




机动 目录 上页 下页 返回 结束

# 二、积分的计算

**定理:**

设$C$ 是复平面上的逐段光滑曲线, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$C$上连续，则$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 在$C$上可积,且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y$$
$$+i\int_C u(x,y)\mathrm{d}y+v(x,y)\mathrm{d}x$$

**证** 如果 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $D$ 内处处连续,

那么 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 $D$ 内均为连续函数,

设 $\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$， $f(\zeta_k)=u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)$

因为$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}=x_k+iy_k-(x_{k-1}+iy_{k-1})$

$$=(x_k-x_{k-1})+i(y_k-y_{k-1})$$

$$=\Delta x_k+i\Delta y_k,$$

所以 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$+i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

由于 $u, v$ 都是连续函数，根据线积分的存在定理，

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k} = \boxed{\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]}$$

$$+i\boxed{\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]}$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

## 积分计算的参数方程法

设$z(t)=x(t)+iy(t)$, 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\{u[x(t),y(t)]x'(t)-v[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$+i\int_\alpha^\beta\{v[x(t),y(t)]x'(t)+u[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_\alpha^\beta\{u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]\}\{x'(t)+iy'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

公式 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

**例1** 计算$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z$, 其中$C$为:

(1)从原点到点$1+i$的直线段;

(2)抛物线$y=x^2$上从原点到点$1+i$的弧段;

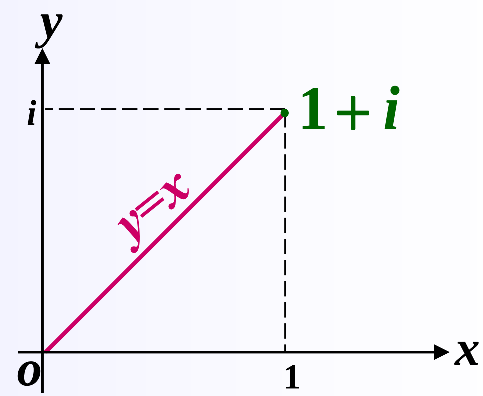
(3)从原点沿$x$轴到点1再到$1+i$的折线.

**解** (1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it \quad (0\le t\le 1),$$

于是 $\mathrm{Re}\,z=t, \quad \mathrm{d}z=(1+i)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=\int_0^1 t(1+i)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+i);$$



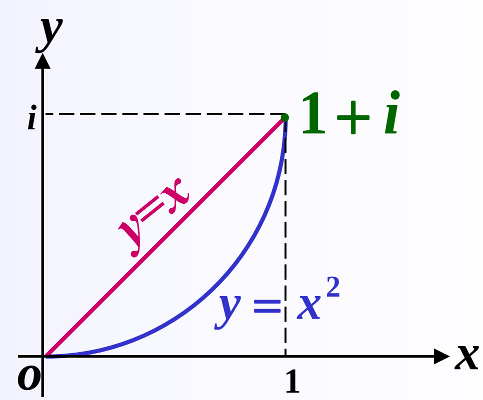
(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t) = t + it^2 \quad (0 \le t \le 1),$$

于是 $\operatorname{Re} z = t, \quad \mathrm{d}z = (1 + 2ti)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \operatorname{Re} z \mathrm{d}z = \int_0^1 t(1 + 2it)\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2i}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i;$$



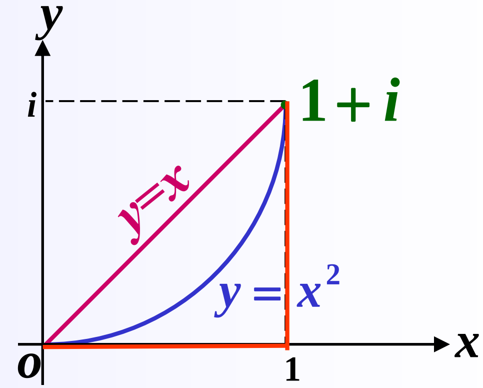
(3) 积分路径由两段直线段构成

$x$轴上直线段的参数方程为 $z(t)=t \quad (0\le t\le 1)$,

于是 $\mathrm{Re}\,z=t, \quad \mathrm{d}z=\mathrm{d}t,$

1到1+$i$直线段的参数方程为$z(t)=1+it\ (0\le t\le 1)$,

于是 $\mathrm{Re}\,z=1, \quad \mathrm{d}z=i\mathrm{d}t,$




$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_0^1 1\cdot i\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}+i.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

**例2** 计算 $\int_C z^2 \mathrm{d}z$, 其中 $C$ 为:

(1)从原点到点 (2,1) 的直线段;

(2) 从原点到(2,0)的直线段 $C_1$ 和由(2,0)到(2,1)的线段 $C_2$ 所组成的折线.

**解** (1)从原点到点 (2,1) 的直线段方程为

$$z=(2+i)t\ (0\le t\le 1),$$

于是

$$\int_C z^2 \mathrm{d}z=\int_0^1 (2+i)^2 t^2 (2+i)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}(2+i)^3=\frac{1}{3}(2+11i).$$

从原点到(2,0)的直线段$C_1$的方程为

$$z = 2t,\ (0 \le t \le 1),$$

从(2,0)到(2,1)的直线段$C_2$的方程为

$$z = 2 + it,\ (0 \le t \le 1),$$

于是

$$\int_C z^2 \mathrm{d}z = \int_{C_1} z^2 \mathrm{d}z + \int_{C_2} z^2 \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 (2t)^2 \cdot 2\mathrm{d}t + \int_0^1 (2+it)^2 i\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}(2+11i).$$

课堂练习:

计算 $\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z$, 其中$C$为:

(1)从点(1,0)到点(0,1)的直线段.

(2)从点(1,0)到(0,0),再从(0,0)到(0,1)的折线.

答案: (1)$i$, (2) 0

**例3** 计算 $\int_C |z|\mathrm{d}z$, 其中 $C$ 为：圆周 $|z| = 2.$

**解** 积分路径的参数方程为

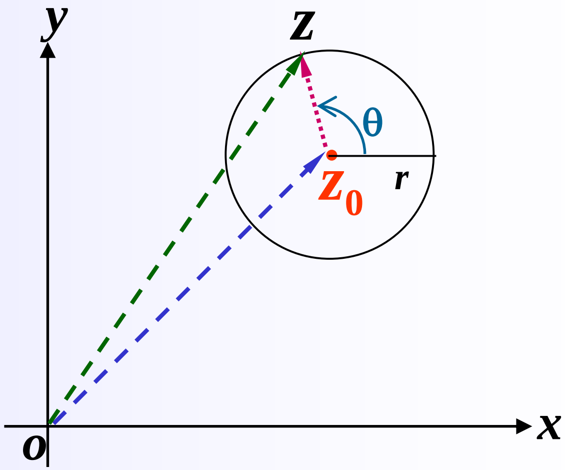
$$z = 2e^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi), \quad \mathrm{d}z = 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\int_C |z|\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} 2 \cdot 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \quad (\text{因为 } |z| = 2)$$

$$= 4i\int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 0.$$

**例4** 求 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$，$C$ 为以 $z_0$ 为中心，$r$ 为半径的正向圆周，$n$ 为整数.




**解** 积分路径的参数方程为

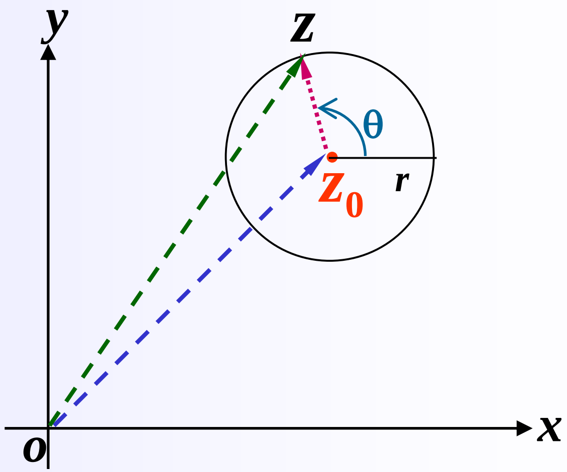
$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi),$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta,$$

当$n=0$时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i;$$




当$n\neq 0$时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 0;$$

所以 $$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}}$$

**重要结论：积分值与路径圆周的中心和半径无关.**

# 三、积分的性质

(1) $\int_C af(z)\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\mathrm{d}z$;  ($a$为常数)

(2) $\int_C [f(z) \pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z$;

(3) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$;

(4) 设曲线 $C$ 的长度为 $L$, 函数 $f(z)$ 在 $C$ 上满足

$|f(z)| \le M$, 那末 $\boxed{\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML}$。

估值不等式

## 性质(4)的证明

因为 $|\Delta z_k|$ 是 $z_k$ 与 $z_{k-1}$ 两点之间的距离,

$\Delta s_k$ 为这两点之间弧段的长度,

所以 $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k$

两端取极限得 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$

因为 $\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k \le M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = ML,$

所以 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$ [证毕]

**例5** 设曲线 $C$ 是单位圆周，证明

$$\left|\int_C \frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z\right| \le 2\pi e.$$

**证** 在$C$上，$|z|=1$, 于是

$$\left|\int_C \frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_C \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2iz^2}\mathrm{d}z\right|$$

$$\le \int_C \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2iz^2}\right|\mathrm{d}s \le \int_C \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\mathrm{d}s \le 2\pi e.$$

**例6** 设曲线 $C$ 是正向圆周$|z|=2$，求 $\int_C \frac{e^z}{z^2+1}\mathrm{d}z$ 的一个上界.

**证** 先求被积函数在$|z|=2$上的一个上界.

设 $z = x + \mathrm{i}y$, 当$|z|=2$时，有

$$|e^z| = e^x \le e^2,$$

$$|z^2+1| \ge |z|^2 - 1 = 3.$$

所以 $$\left|\int_C \frac{e^z}{z^2+1}\mathrm{d}z\right| \le \frac{e^2}{3}\cdot 4\pi.$$

# 四、小结与思考

本课我们学习了积分的定义、计算和性质. 应注意复变函数的积分有跟微积分学中的线积分完全相似的性质. 本课中重点掌握复积分的一般方法.

作业：**P48 1(2)(4), 2**

## 思考题

数学分析中实变函数的积分中值定理，能否直接推广到复积分上来？

## 思考题答案：

数学分析中的积分中值定理，不能直接推广到复变函数中来

反例：$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + i\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$

而$e^{i\xi}(2\pi - 0) \neq 0$,矛盾.

放映结束，按Esc退出.