答案：

一、(1)C (2) A (3) B (4) D (5) A (6) D (7) B (8) A (9)A

二、1。$aF(as+1)$ 2。$\frac{2}{s^3}$ 3。$\frac{(s+1)e^{-\alpha}}{(s+1)^2+\beta^2}$ 4。$\frac{e^{-2s}}{s^2+1}$ 5. $eu(t-5)$

6. $\frac{1}{a^3}(e^{at}-\frac{a^2t^2}{2}-at-1)$ 7. $\frac{1}{t}(1+e^{-t}-2\cos t)$ 8. $\frac{\pi}{2}$ 9. $\begin{cases}0, & t<a\\ f(t-a), & t\ge a\end{cases}$

三、(1) $\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^2 3e^{-st}\,\mathrm{d}t-\int_2^4 e^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}(e^{-4s}-4e^{-2s}+3)$

(2) $\mathcal{L}[[f(t)]=\frac{2}{s^2+4}-3\frac{s}{s^2+4}-8\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s}$

(3) $\mathcal{L}[f(t)]=-[\frac{s}{s^2+a^2}]'=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

(4) $\mathcal{L}[\int_0^t\frac{e^t-\cos 2t}{t}\mathrm{d}t]=\frac{1}{s}\mathcal{L}[\frac{e^t-\cos 2t}{t}]=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\mathcal{L}[e^t-\cos 2t]\mathrm{d}s$

$=\frac{1}{s}\int_s^{+\infty}(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+4})\mathrm{d}s=\frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s-1}$。

四 (1) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s^2+4s+4}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+2)}-\frac{1}{(s+2)^2}]=e^{-2t}-te^{-2t}$

(2) 因为

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^3+3s^2+2s}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s+2)(s+1)}]=\operatorname{Res}[\frac{1}{s(s+2)(s+1)}e^{st},s=0]+$

$\operatorname{Res}[\frac{1}{s(s+2)(s+1)}e^{st},s=-1]+\operatorname{Res}[\frac{1}{s(s+2)(s+1)}e^{st},s=-2]=\frac{1}{2}[1-2e^{-t}+e^{-2t}]$

(3) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s^2}{(s+2)^2+4}]=\mathcal{L}^{-1}[1-\frac{4(s+2)}{(s+2)^2+4}]=\delta(t)-4e^{-2t}\cos 2t$

（4）$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2s^2e^{-s}-(s+1)e^{-2s}}{s^3}]=2\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{s}]-\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^2}]-\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^3}]$

$$=2u(t-1)-(t-2)u(t-2)-\frac{1}{2}(t-2)^2u(t-2)$$

五、（1）因为$\mathcal{L}[t\cos at]=-(\frac{s}{s^2+a^2})'=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$，

所以 $\int_0^{+\infty}te^{-2t}\cos at\,\mathrm{d}t=\left.\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right|_{s=2}=\frac{4-a^2}{(4+a^2)^2}$

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}\sin^2 t(\frac{1}{t})'\mathrm{d}t=-\left.\frac{\sin^2 t}{t}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t=\int_s^{\infty}\frac{2}{s^2+4}\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}.$

(3) 因为$\mathcal{L}[\sin(t-2)u(t-2)]=e^{-2s}\frac{1}{s^2+1}$，所以

$$\int_0^{+\infty}\sin(t-2)u(t-2)e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^{-2}.$$

六、(1) $f(t)=e^{2t}$

(2) 假设$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$,对方程两边同时进行拉普拉斯变换，有

$$(s^2+2s+1)F(s)-s-2=\frac{1}{s^2+1}$$

整理得

$$F(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+1}+\frac{1}{(s^2+2s+1)(s^2+1)}$$

将上式右端的第一项写为

$$\frac{s+2}{s^2+2s+1}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+2}]=e^{-t} \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}]=\operatorname{Res}[\frac{1}{(s+1)^2}e^{st}, s=-1]=te^{-t},$$

可得 $\frac{s+2}{s^2+2s+1}$ 的拉普拉斯逆变换为

$$f_1(t)=e^{-t}+te^{-t}$$

将上式右端的第二项写为

$$\frac{1}{(s^2+2s+1)(s^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

其拉普拉斯逆变换为

$$f_2(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}\cos t.$$

因此，原方程的解为

$$f(t)=\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}\cos t.$$

（3）假设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, 对方程两边同时进行拉普拉斯变换，有

$$-\frac{d}{ds}[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+[sY(s)-y(0)]-4\frac{d}{ds}Y(s)=0$$

从而

$$(s^2+4)\frac{dY}{ds}+sY(s)=0$$

即

$$\frac{dY}{ds}=-\frac{sds}{s^2+4}$$

两边积分得 $\ln Y+\frac{1}{2}\ln(s^2+4)=c$ 或 $Y(s)=\frac{c}{\sqrt{s^2+4}}$，取逆变换得 $y(t)=cJ_0(2t)$. 又

$y(0)=3$, 知 $y(0)=cJ_0(0)=c=3$，所以方程的解为

$$y(t) = 3J_0(2t),$$

其中 $J_0(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} (\frac{x}{2})^{2k}$.

（4）假设L $[f(t)] = F(s)$, 对方程两边同时进行拉普拉斯变换，有

$$-\frac{d}{ds}[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + (1-n)[sY(s) - y(0)] + \frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] + nY(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

整理得

$$\frac{d}{ds}Y(s) + \frac{n+1}{s}Y(s) = \frac{1}{s^3}.$$

这是一个一阶线性非齐次微分方程，这里

$$P(s) = \frac{n+1}{s}, \quad Q(s) = \frac{1}{s^3},$$

所以

$$Y(s) = e^{\int P(s)ds}[\int Q(s)e^{\int P(s)ds} + c] \qquad = \frac{1}{s^{n+1}}[\int \frac{1}{s^3} s^{n+1} ds + c]$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}}[\frac{1}{n-1}s^{n-1} + c] = \frac{1}{(n-1)s^2} + \frac{c}{s^{n+1}}$$

所以方程的解为

$$y(t) = \frac{t}{n-1} + \frac{c}{n!}t^n = \frac{t}{n-1} + c_1 t^n, \quad c_1 \text{为任意常数。}$$

（5）假设L $[y(t)] = Y(s)$, 对方程两边同时进行拉普拉斯变换，有

$$-[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)]' - 2[sY(s) - y(0)]' - 2[sY(s) - y(0)] - Y'(s) - 2Y(s) = 0$$

所以

$$Y'(s) + \frac{4}{s+1}Y(s) = \frac{3y(0)}{(s+1)^2}$$

则

$$Y(s)=\frac{y(0)}{s+1}+\frac{c}{(s+1)^4}$$

求拉普拉斯逆变换得

$$y(t)=y(0)e^{-t}+ct^3e^{-t}$$

又 $y(0)=0$，所以 $y(t)=ct^3e^{-t}$.

（6）假设L $[x(t)]=X(s)$，L $[y(t)]=Y(s)$,对方程两边同时进行拉普拉斯变换，有

$$\begin{cases} s^2X(s)-sx(0)-x'(0)-X(s)-2[sY(s)-y(0)]=\dfrac{1}{s-1} \\ sX(s)-x(0)-[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-2Y(s)=\dfrac{2}{s^3} \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} X(s)=-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{s^2} \\ Y(s)=-\dfrac{1}{2(s-1)}-\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{3}{2s} \end{cases}$$

进行拉普拉斯逆变换，有

$$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{3}{2}e^t+2t \\ y(t)=-\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$