第二节 柯西积分定理

- 一、柯西定理
- 二、多连通区域的柯西积分定理
- 三、小结与思考

一、柯西定理

被积函数 $f(z)=z^2$ 在复平面内处处解析,

此时积分与路线无关(观察上节例2).

观察上节练习,被积函数 $f(z)=\bar{z}=x-iy$,

由于不满足柯西一黎曼方程，故而在复平面内处处不解析.

此时积分值 $\int_c \bar{z}\mathrm{d}z$ 与路线有关.

观察上节例4，被积函数当 $n=0$ 时为 $\dfrac{1}{z-z_0}$,

此时 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i\neq 0.$

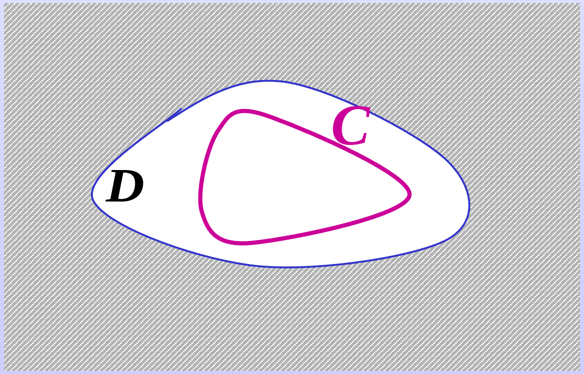
由以上讨论可知, 积分是否与路线有关, 可能决定于被积函数的解析性及区域的连通性.

1825年，柯西给出如下定理，肯定地回答了上述问题，它是研究复变函数的钥匙。即

柯西定理

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, C为D内任意一条简单闭曲线，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$



机动 目录 上页 下页 返回 结束

1851年，柯西在附加假设“$f'(z)$在D内连续”的条件下，得到了一个如下简单证明：

证明：令$z = x + iy, f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, 有

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

而 $f'(z)$ 在 D 内连续, 所以 u_x, u_y, v_x, v_y在 D 内连续,

并适合柯西–黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由格林定理,

$$\int_C udx - vdy = 0, \quad \int_C vdx + udy = 0$$

故得, $\int_C f(z)dz = 0.$

1900 年古萨发表此定理新的证明方法. 无须将 $f(z)$ 分为实部和虚部. 更重要的是免去了$f'(z)$连续的假设，只需$f'(z)$在区域D内存在即可.

定理 设函数$f(z)$在单连通域D内解析, 则$f(z)$在D内任意按段光滑曲线C上的积分与路径无关, 只与C的起点和终点有关.

定理 设D是逐段光滑曲线 C所围成的单连通区域, 函数$f(z)$在D内解析, 在$\overline{D}=D+C$ 上连续, 那末

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

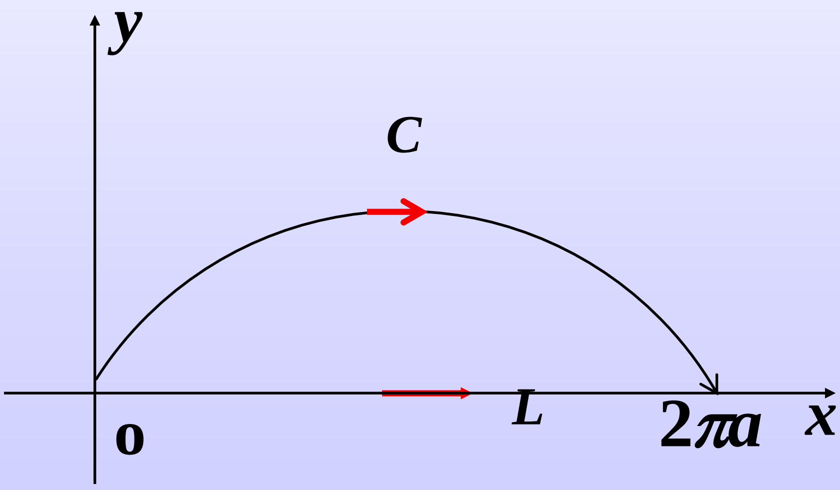
例1 求$\int_C (2z^2+8z+1)dz$，其中C是连接原点到点$(2\pi a,0)$的摆线

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

解 由图形知直线段 L 与 C 构成一条闭曲线。因为

$f(z)=2z^2+8z+1$在全平面上解析，　则

$$\int_{C^-+L}(2z^2+8z+1)dz=0,$$



即$\displaystyle\int_C (2z^2+8z+1)dz$

$$=\int_L (2z^2+8z+1)dz$$

而

$$\int_L (2z^2+8z+1)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi a}(2x^2+8x+1)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi a\left(\frac{8}{3}\pi^2 a^2 + 8\pi a + 1\right)$$

故

$$\int_C (2z^2+8z+1)\mathrm{d}z = 2\pi a\left(\frac{8}{3}\pi^2 a^2 + 8\pi a + 1\right).$$

例2 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z.$

解 $\displaystyle\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right),$

因为 $\dfrac{1}{z}$ 和 $\dfrac{1}{z+i}$ 都在 $|z-i| \le \dfrac{1}{2}$ 上解析,

根据柯西定理得

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right)\mathrm{d}z$$

例3 设C为单位圆周，计算积分 $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z+2}$， 并证明

$$\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

解 由单连通区域柯西定理有 $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z+2} = 0.$

令 $z = e^{i\theta}$，$(-\pi \le \theta \le \pi)$ 则

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z+2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{(\cos\theta+2)+i\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\sin\theta + 2i\cos\theta + i}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2i\int_0^{\pi} \frac{2\cos\theta + 1}{5 + 4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\int_0^{\pi} \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

$$= \boxed{\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+i}\mathrm{d}z} - \frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$= 0$$

$$= -\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = -\pi i.$$

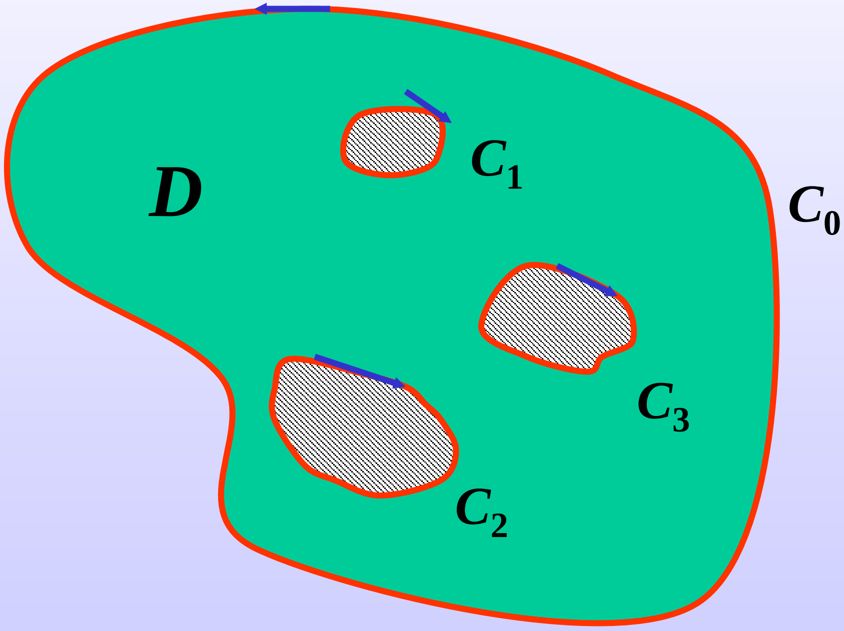
思考：若积分曲线为绕圆周 $|z-i|=1/2$ 两周的周线?

机动 目录 上页 下页 返回 结束

二、多连通区域的柯西积分定理

定理： 设 D 是由 $n+1$ 条简单闭曲线 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 所围成的多连通区域(如图)，$C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D} = D + C$ 上连续，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$



或者

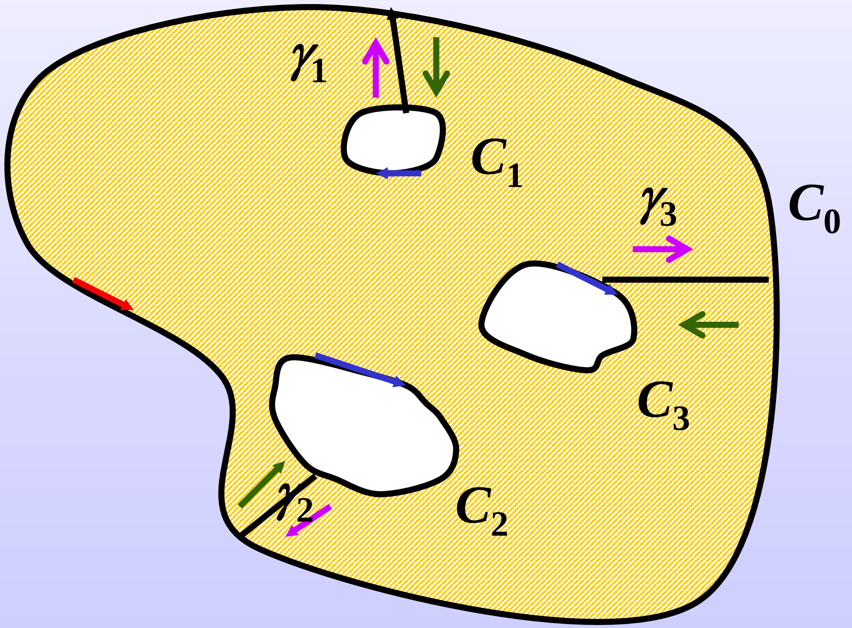
$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z =$$

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

柯西介绍

证 取n条互不相交且除去端点外全在D内的辅助曲线 γ_1，γ_2，…，γ_n，分别把C_0依次与$C_1, C_2, \ldots, C_n$连接起来，则以 $\Gamma = C_0 + \gamma_1 + C_1^- + \gamma_1^- + \cdots + \gamma_n + C_n^- + \gamma_n^-$ 为边界的区域就是单连通区域，则

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$



机动 目录 上页 下页 返回 结束

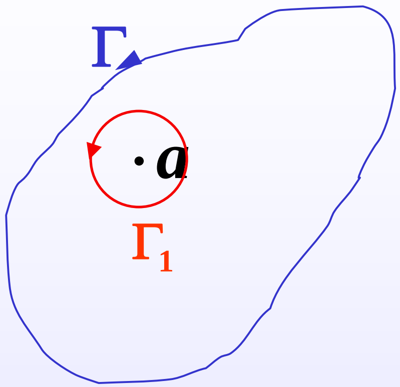
由于沿 γ_1，γ_2，…，γ_n 的积分正好沿这些曲线的正负方向各取了一次，所以

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

即

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

例4 求 $\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$, Γ 为含 a 的任一简单闭路, n 为整数.



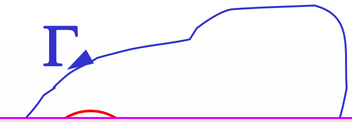
解 因为 a 在曲线 Γ 内部,

故可取很小的正数 ρ,

使 $\Gamma_1: |z-a|=\rho$ 含在 Γ 内部,

由定理,

$$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$$



此结论非常重要, 用起来很方便, 因为Γ不必是圆, a也不必是圆的圆心, 只要a在简单闭曲线Γ内即可.

令 $z = a + \rho e^{i\theta}$

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z = \int_0 \cdots (\rho e \cdots \int_0 \cdots \rho^n$$

故 $$\boxed{\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}}$$

例5 计算积分

$$\int_C \frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z \quad ,$$

其中C为包含1，不包含-1的任意正向简单闭曲线.

解 被积函数在复平面上有两个奇点1，-1，只有奇点 1 在 C 的内部. 所以

$$\int_C \frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z$$

$$= \pi i.$$

例6 计算积分

$$\int_C \frac{1}{z^2-1}\,dz \quad ,$$

其中C为包含圆1, –1在内的任何正向光滑曲线.

解 因为被积函数在复平面上有两个奇点，且这两个奇点都在C的内部. 在C内分别以1, –1为心做互不包含互不相交的小圆C_1 ,C_2, C_1只包含奇点1， C_2只包含奇点– 1， 则

$$\int_C \frac{1}{z^2-1}\,dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2-1}\,dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2-1}\,dz$$

而 $$\int_{C_1}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_{C_1}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\int_{C_1}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z$$

$$=\pi i,$$

$$\int_{C_2}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_{C_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\int_{C_2}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z$$

$$=-\pi i,$$

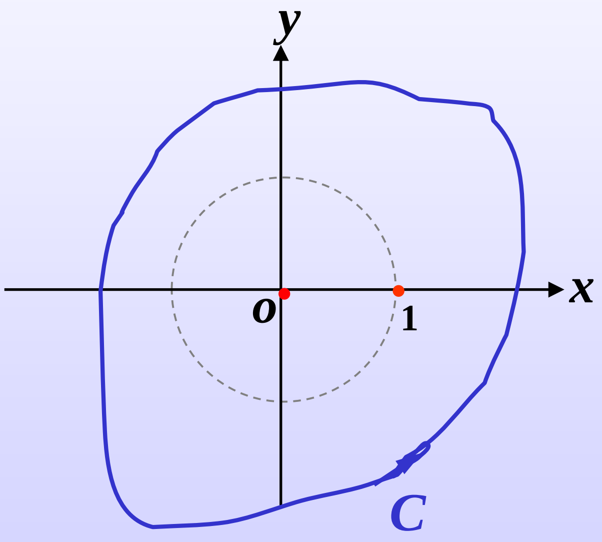
所以

$$\int_{C}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z=0.$$

例7 计算积分

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z \quad ,$$

其中C为包含圆$|z|\le 1$在内的任何正向光滑曲线.



解 因为函数 $\dfrac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面

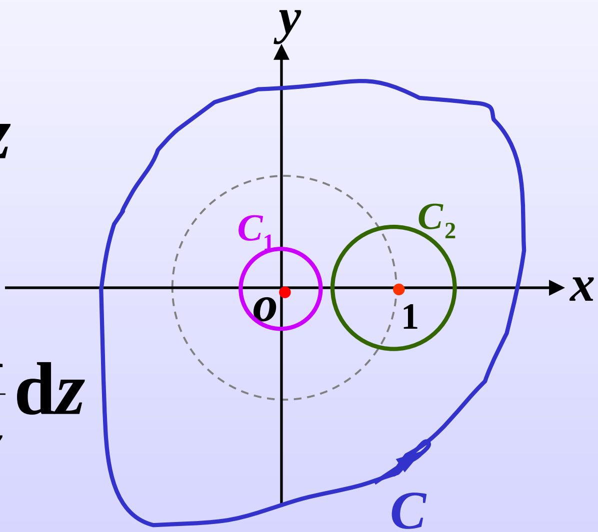
内有两个奇点$z=0$ 和 $z=1$,

且这两个奇点都在C的内部.

在 C 内作两个互不包含也互不相交的正向圆周 C_1 和 C_2，C_1 只包含奇点 $z=0$，　C_2 只包含奇点 $z=1$，

根据多连通区域的柯西积分定理，

$$\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$$



$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z}dz$$

$$= 0 + 2\pi i + 2\pi i + 0 = 4\pi i.$$

四、小结与思考

本课所讲述的多连通区域的柯西积分定理是复积分中的重要定理，掌握并能灵活应用它是本章的难点.

常用结论:

$$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

思考题

定理在积分计算中有什么用? 要注意什么问题?

作业：P49　3(2)(4)

思考题答案

利用多连通区域的柯西积分定理是计算沿闭曲线积分的最主要方法.

使用多连通区域的柯西积分闭路定理时, 要注意曲线的方向.

放映结束，按Esc退出.

柯西资料

Augustin-Louis Cauchy

Born: 21 Aug 1789 in Paris, France

Died: 23 May 1857 in Sceaux (near Paris), France