第二章习题

一、映射的像

二、函数解析性

三、初等函数

初等函数

极限

复变函数

连续性

可导与解析

判别定理

C-R条件

一、映射的像

（几何上观察,将映射对应二元函数与已知条件结合）

例1 函数 $w=1/z$ 将 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线?

(1) $x^2+y^2=9$, (2) $x=2$.

解 (1) 因为 $x^2+y^2=|z|^2=9$

又 $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{9}(x-iy)$,

于是 $w=u+iv=\dfrac{1}{9}x-\dfrac{1}{9}iy \Rightarrow u=\dfrac{1}{9}x,\ \ v=-\dfrac{1}{9}y$

$u^2+v^2=\dfrac{1}{81}(x^2+y^2)=\dfrac{1}{9}$ 表示 w 平面上的圆.

(2) $x=2.$

解 因为 $z=x+iy=2+iy$

所以 $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2+iy}=\dfrac{2-iy}{4+y^2}=u+iv$

$$\Rightarrow u=\frac{2}{4+y^2},\ v=-\frac{y}{4+y^2}$$

因为 $u^2+v^2=\dfrac{4+y^2}{(4+y^2)^2}=\dfrac{1}{4+y^2}=\dfrac{u}{2},$

所以 $u^2+v^2-\dfrac{u}{2}=0\Rightarrow\left(u-\dfrac{1}{4}\right)^2+v^2=\dfrac{1}{16}$

表示 w平面上以$\left(\dfrac{1}{4},0\right)$为圆心，$\dfrac{1}{4}$为半径的圆.

例2 映射 $w = z + \dfrac{1}{z}$ 的特点.

解

1. 单位圆周 $z = e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi \rightarrow$ [-2, 2]

2. $z = re^{i\theta} \rightarrow \quad \dfrac{u^2}{(r+\frac{1}{r})^2} + \dfrac{v^2}{(r-\frac{1}{r})^2} = 1$

二、 函数解析性相关性质

1 函数解析、可导的判别

(1) 如果能用求导公式与求导法则证实复变函数 $f(z)$ 的导数在区域 D 内处处存在, 则可根据解析函数的定义断定 $f(z)$ 在 D 内是解析的.

(2) 如果复变函数 $f(z)=u+iv$ 中 u,v 在 D 内的各一阶偏导数都存在、连续(因而 $u,v(x,y)$ 可微)并满足 $\mathrm{C-R}$ 方程, 那么根据解析函数的充要条件可以断定 $f(z)$ 在 D 内解析.

练习: $f(z)=\dfrac{2}{z+1}$ $f(z)=\dfrac{2z}{(z+1)(z-2)}$

$f(z)=\dfrac{2\sin z}{(z+1)(z-2)}$ $f(z)=\cos z+i\sin z$

定理 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 D 内, 则 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+yi$ 可导的充要条件是: $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 并且在该点满足柯西—黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

例2 函数 $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$ 在何处可导，何处解析.

解 $u(x,y)=x^2-y^2-x$， $u_x=2x-1$， $u_y=-2y$;

$v(x,y)=2xy-y^2$， $v_x=2y$ ，$v_y=2x-2y$;

当且仅当 $y=\dfrac{1}{2}$ 时， $u_x=v_y$， $u_y=-v_x$.

故 $f(z)$ 仅在直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上可导.

由解析函数的定义知，$f(z)$ 在直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上处处不解析， 故 $f(z)$ 在复平面上处处不解析.

2、$f(z)$取常值的等价条件

如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析,则以下条件彼此等价.

(1) $f(z)$恒取常值;

(2) $f'(z)=0$;

(3) $|f(z)|=$ 常数;

(4) $\overline{f(z)}$解析;

(5) $\mathrm{Re}[f(z)]=$ 常数;

(6) $\mathrm{Im}[f(z)]=$ 常数;

(7) $\arg f(z)=$ 常数.

(8) $au+bv=c$,其中a,b,c是不全为零的实常数.

例3 证明: 已知 $f(z)$ 在 D 内解析，如果在 D 内 $\arg f(z) =$ 常数, 则 $f(z)$ 取常值.

证 分两种情况讨论

(1) $u = 0$时,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

u, v 均为常数，故$f(z)$为常数.

(2) $u \neq 0$ 时,

因为$\arg z$ 在D内是一个常数, 所以

$$\frac{v}{u} = tg\theta = \text{常数}c. \qquad v = cu$$

两边同时取关于x, y的偏导数得

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u\dfrac{\partial v}{\partial y} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

由此可知或者$u = v = 0$, 和假设矛盾

或者 $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & -\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

又 $f(z)$ 在 D 内解析，所以满足柯西 – 黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由上面两式得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

u, v 均为常数，故 $f(z)$ 为常数.

练习 1. 如果 $f'(z)$在单位圆 $|z|<1$内处处为零，且 $f(0)=-1$ 那么在 $|z|<1$内 $f(z)\equiv$ （ C ）

（A） 0 （B） 1 （C） -1 （D）任意常数

2．设函数 $f(z)$ 在区域 D 内有定义，则下列命题中，正确的是（ D ）

(A) 若 $|f(z)|$ 在 D 内是一常数，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数

(B) 若 $\mathrm{Re}(f(z))$ 在 D 内是一常数，$f(z)$ 在 D 内是一常数

(C) 若 $\arg(f(z))$ 在 D 内是一常数，$f(z)$ 在 D 内是一常数

（D）若 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数

3 解析函数的导数

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

练习

1. 设 $f(z)=e^{x^2-y^2}[\cos(2xy)+i\sin(2xy)]$，则 $f'(1)=$ $2e$

2. 设 $f(z)=\frac{1}{5}z^5-(1+i)z$, 则方程 $f'(z)=0$ 的所有根为

$$z=\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]$$

3. 设 $f(z)=z^3-\frac{3-6i}{2}z^2+(-3-3i)z$,则方程 $f'(z)=0$

的所有根为 $-i,1-i$

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

三、初等函数

1 与实初等函数不同的性质

(1). 指数函数具有周期性(周期为 $2\pi i$)

(2). 负数无对数的结论不再成立

(3). 三角正弦与余弦不再具有有界性

例4 下列命题中，正确的是(D)

（A）设 x, y 为实数，则 $|\cos(x+iy)| \le 1$

（B）若 z_0 是函数 $f(z)$ 的奇点, 则 $f(z)$ 在点 z_0 不可导

（C）若 u, v 在区域 D 内满足柯西–黎曼方程，则 $f(z)=u+iv$ 在 D 内解析

（D）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则 $if(z)$ 在 D 内也解析

设 α 为任意实数，则 1^{α}（ *D* ）

（A）无定义　　　　（B）等于1

（C）是复数，其实部等于1

（D）是复数，其模等于1

2. 初等函数的计算

例5 解方程 $\sin z = 0$

解 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{e^{2iz} - 1}{2ie^{iz}} = 0$

$\Rightarrow e^{2iz} = 1$

$\Rightarrow e^{2iz} = e^{2k\pi i}$

$\Rightarrow z = k\pi.$ $\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

例6 求出 $(-2)^{\sqrt{2}}$ 的值.

解 $$(-2)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}(-2)}$$

$$=e^{\sqrt{2}[\ln 2+i(\pi+2k\pi)]}$$

$$=e^{\sqrt{2}\ln 2}\{\cos[\sqrt{2}(2k+1)\pi]+i\sin[\sqrt{2}(2k+1)\pi]\}$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

例7 试求 $(1+i)^{1-i}$ 函数值及其主值:

解 $(1+i)^{1-i}=e^{(1-i)\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}$

$$= e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)} = e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)}$$

$$=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right\}$$

令 $k=0$ 得主值: $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$$(1+i)^{(1-i)}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right\}.$$

例8 试求 $\mathrm{Ln}(i^i)$ 函数值及其主值:

解: $\mathrm{Ln}(i^i) = \mathrm{Ln}(e^{i\mathrm{Ln}i})$

$$= \mathrm{Ln}(e^{i[(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i]}) = \mathrm{Ln}(e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)})$$

$$= -\frac{\pi}{2} - 2k\pi + 2m\pi i$$

$$\ln(i^i) = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi$$

作业：P30 8

补充作业:

1. 求下列函数在$-i$处导数

(1) $6z^3+8z^2+iz+10$ (2) $\dfrac{z^2-9}{iz^3+2z+\pi}$

(3) $\cos(2z)+i\sin\dfrac{1}{z}$ (4) $x^2+y^2+y-2+ix$

2. 讨论下列函数的解析性

(1) $8\bar{z}+i$ (2) $x^3-3xy^2+3x^2yi-iy^3$

(3) $\dfrac{2z}{z-5}$ (4) $\left(x+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)+i\left(y-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

3. 证明：若解析函数$f(z)$将区域D映射为直线的一部分，则$f(z)$在区域D内为常数.

4．求下列初等函数。

(1)$\mathrm{Ln}(1-i)$; (2) $\sin(2i)$; (3) $(-2)^{i}$; (4)$(1+i)^{3}$

(5)$\ln(i^{\frac{1}{2}})$; (6)$\cos(i\ln 3)$; (7)$\mathrm{Ln}(\cos i)$;

5. 解方程

(1) $e^{z}=2i$; (2) $e^{2z}+e^{z}+1=0$;

(3) $\sin z+i\cos z=4i$.

6. 证明 $\cos^{2}z+\sin^{2}z=1$.

（提示：证明 $\cos^{2}z+\sin^{2}z$ 是导函数为零的解析函数，进而是常值函数，且在0处值为1.

7. 映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 将 $|z|=2$ 映为什么图形？