第一节　复级数

- 一、复数列的极限
- 二、复数项级数的概念
- 三、复变函数项级数
- 四、小结与思考

一、复数列的极限

1. 定义 设$\{z_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$为一复数列, 其中

$z_n = a_n + ib_n$, 又设 $z = a + ib$ 为一确定的复数,

如果任意给定 $\varepsilon > 0$, 相应地都能找到一个正数

$N(\varepsilon)$, 使 $|z_n - z| < \varepsilon$ 在 $n > N$ 时成立,

那末 z称为复数列$\{z_n\}$当$n \to \infty$时的极限,

记作 $$\lim_{n\to\infty} z_n = z .$$

此时也称复数列$\{z_n\}$收敛于 z.

2.复数列收敛的条件

复数列$\{z_n\}(n=1,2,\cdots)$收敛于z的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

定理说明: 可将复数列的敛散性转化为判别两个实数列的敛散性.

例1 下列数列是否收敛, 如果收敛, 求出其极限.

$$(1)\ \alpha_n = (1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}};\qquad (2)\ \alpha_n = n\cos in.$$

解 (1) 因为 $\alpha_n = (1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}} = (1+\frac{1}{n})(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n})$,

所以 $a_n = (1+\frac{1}{n})\cos\frac{\pi}{n}$, $\qquad b_n = (1+\frac{1}{n})\sin\frac{\pi}{n}$.

而 $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

所以数列$\alpha_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$收敛,

且$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$.

解 (2) 由于$\alpha_n=n\cos in=n\cosh n$,

当$n\to\infty$时, $\alpha_n\to\infty$,

所以数列发散.

课堂练习:

下列数列是否收敛? 如果收敛, 求出其极限.

(1) $z_n = \dfrac{1+ni}{1-ni}$;

(2) $z_n = (-1)^n + \dfrac{i}{n+1}$;

(3) $z_n = \dfrac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$.

二、级数的概念

1. 定义 设$\{z_n\}=\{a_n+ib_n\}\ (n=1,2,\cdots)$为一复数列,

表达式 $$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

称为复数项无穷级数.

部分和 其最前面 n 项的和

$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 称为级数的部分和.

收敛与发散

如果部分和数列$\{s_n\}$收敛，那末级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，

并且极限$\lim_{n\to\infty} s_n = s$称为级数的和.

如果部分和数列$\{s_n\}$不收敛，

那末级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$发散.

说明：与实数项级数相同，判别复数项级数敛散性的基本方法是：利用极限$\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

2.复数项级数收敛的条件

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ 收敛的充要条件

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

证 因为 $s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= \sigma_n + i\tau_n,$$

根据$\{s_n\}$极限存在的充要条件:

$\{\sigma_n\}$和$\{\tau_n\}$的极限存在,

于是级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛.

说明 复数项级数的审敛问题

$$\Downarrow$$

实数项级数的审敛问题

课堂练习 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$是否收敛?

解 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散;

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{收敛.}$$

所以原级数发散.

必要条件

因为实数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} b_n = 0 .$$

所以复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

重要结论: $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0 \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$发散.

启示: 判别级数的敛散性时, 可先考察 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \overset{?}{=} 0$

如果 $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0, & \text{级数发散;} \\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0, & \text{应进一步判断.} \end{cases}$

例如, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in}$:

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{in} \neq 0,$ 级数发散;

不满足必要条件, 所以原级数发散.

柯西收敛准则

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充分必要条件是：对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 使当$n > N$时, p=1, 2, …时, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} z_k\right| = |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

序列$\{z_n\}$收敛的充分必要条件是：对任给$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 使当$m, n > N$时，有

$$|z_m - z_n| < \varepsilon.$$

3. 绝对收敛与条件收敛

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 那末称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 为**绝对收敛**.

非绝对收敛的收敛级数称为**条件收敛级数**.

定理 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 那末 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 也收敛.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$,

而 $|a_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $|b_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}$,

根据实数项级数的比较准则, 知

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 都收敛,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也都收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 是收敛的.

说明 由 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le |a_n|+|b_n|,$

知 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\le \sum_{k=1}^{n}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}|b_k|,$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛时,

$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$也绝对收敛.

综上:

$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$绝对收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛.

例2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 是否收敛?

解 级数满足必要条件, 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=0$,

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n i}{n}$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots)-i(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 虽 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛,

原级数仍发散.

例3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛?

解 因为 $\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right|=\frac{8^n}{n!}$,

所以由正项级数的比值判别法知:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛,

故原级数收敛, 且为绝对收敛.

例4 级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i]$是否绝对收敛?

解 因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$也收敛,

故原级数收敛.

但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$为条件收敛,

所以原级数非绝对收敛.

三、复变函数项级数

定义 设$\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$为一复变函数序列,

其中各项在区域D内有定义. 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

称为复变函数项级数, 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

级数最前面n项的和

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

称为这级数的**部分和**.

和函数

如果对于 D 内的某一点 z_0, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0) = s(z_0)$ 存在, 那末称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 收敛, $s(z_0)$ 称为它的和.

如果级数在D内处处收敛, 那末它的和一定是z的一个函数$s(z)$:

$$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为该级数在区域D上的**和函数**.

四、小结与思考

通过本课的学习, 应了解复数列的极限概念; 熟悉复数列收敛及复数项级数收敛与绝对收敛的充要条件;理解复数项级数收敛、发散、绝对收敛与条件收敛的概念与性质，以及复变函数项级数的相关概念和性质.

思考题

如果复数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$均发散,问:

级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \pm \beta_n)$也发散吗?

思考题答案

否.