第五节　孤立奇点

- 一、孤立奇点的概念
- 二、函数在无穷远点的性态
- 三、小结与思考

一、孤立奇点的概念

定义 如果函数 $f(z)$在 z_0不解析, 但 $f(z)$在 z_0 的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$内处处解析, 则称 z_0为 $f(z)$的孤立奇点.

例 $z=0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

注意: 孤立奇点一定是奇点, 但奇点不一定是孤立奇点.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例1 指出函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z}}$ 在点 $z=0$ 的奇点特性.

解 函数的奇点为

$$z=0,\ z=\frac{1}{k\pi}\qquad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k\pi}=0,$

即在 $z=0$ 的不论怎样小的去心邻域内, 总有 $f(z)$ 的奇点存在, 所以 $z=0$ 不是孤立奇点.

孤立奇点的分类

依据 $f(z)$在其孤立奇点 z_0的去心邻域

$0<|z-z_0|<\delta$ 内的洛朗级数的情况分为三类:

1. 可去奇点; 2. 极点; 3. 本性奇点.

1. 可去奇点

1) 定义 如果洛朗级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项,

那末孤立奇点 z_0称为 $f(z)$ 的可去奇点.

2） 可去奇点的判定

(1) 由定义判断：如果 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗级数无负幂项则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(2) 判断极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$：若极限存在且为有限值，则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

定理 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta\,(0\le\delta<+\infty)$内解析，则 z_0为 $f(z)$ 的可去奇点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限.(4.16)

证 必要性

设 z_0为$f(z)$的可去奇点，从而在$0<|z-z_0|<\delta$ 内有

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

因为上式右端幂级数的和函数$g(z)$在$|z-z_0|<\delta$ 内解析，特别在 $z=z_0$ 处连续，当 $z\neq z_0$ 时， 记$f(z)=g(z)$, 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} g(z)=c_0.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

充分性　设在$0<|z-z_0|<\delta$内 $f(z)$ 的洛朗展式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

由于$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$存在，则存在正数 M 和$\rho\,(<\delta)$ 使得

$0<|z-z_0|<\rho$ 时，$|f(z)|\le M$. 所以

$$0\le|c_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\left|\int_C\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{-n+1}}|\mathrm{d}\zeta|\right|$$

机动　目录　上页　下页　返回　结束

$$\le \frac{1}{2\pi} M\, 2\pi\rho / \rho^{-n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

令$\rho \to 0$得$c_{-n} = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$, z_0是$f(z)$的可去奇点.

例2 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的哪种孤立奇点.

解 $\dfrac{e^z-1}{z}=\dfrac{1}{z}(1+z+\dfrac{1}{2!}z^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}z^n+\cdots-1)$

$$=\underbrace{1+\frac{1}{2!}z+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n-1}+\cdots}_{\text{无负幂项}},\quad 0<|z|<+\infty$$

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

另解 因为 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}e^z=1$,

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

2. 极点

1) 定义 如果洛朗级数中只有有限多个 $z-z_0$ 的负幂项，且

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots \qquad (m\geq 1,\ c_{-m}\neq 0)$$

那末孤立奇点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的 m 级极点.

2)极点的判定方法

(1) 由定义判别

$f(z)$的洛朗展开式中含有$z-z_0$的负幂项为有限项.

(2) 由定义的等价形式判别

在点z_0的某去心邻域内$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$

其中$\varphi(z)$在z_0的邻域内解析, 且$\varphi(z_0)\neq 0$.

(3) 利用零点和极点关系判断

(4) 利用极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ 判断 .

定理4.17 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点的充分必要条件是 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内可表示为

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$

的形式，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$.

证 必要性 设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，那么在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内，$f(z)$ 有洛朗展式

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+\cdots$$
$$+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

这里$c_{-m} \neq 0$.　　于是

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z),$$

其中$\varphi(z)$ 是在 z_0附近 的幂级数，收敛半径仍为δ.

故在 z_0 解析，且$\varphi(z_0)\neq 0$.

充分性　　设

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z),$$

把$\varphi(z)$ 在$z=z_0$ 的邻域内展开成幂级数，则

$$f(z)=\frac{b_0}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{z-z_0}+b_m+b_{m+1}(z-z_0)+\cdots$$

$$(b_0\neq 0)$$

于是 z_0为$f(z)$ 的 m 级极点.

定理4.18 $z=z_0$为函数$f(z)$的 m 级极点的充分必要条件是 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在 z_0解析且以z_0为m 级零点.

定理4.19 设 z_0为函数$f(z)$的孤立奇点，则 z_0为 $f(z)$ 的极点的充分必要条件是

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

课堂练习

求 $\dfrac{1}{z^3 - z^2 - z + 1}$ 的奇点, 如果是极点, 指出它的级数.

答案 由于 $\dfrac{1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$,

所以：$z = -1$是函数的一级极点,

$z = 1$是函数的二级极点.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例3 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 有些什么奇点, 如果是极点, 指出它的级.

解 函数的奇点是使 $\sin z = 0$ 的点,

这些奇点是 $z = k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$.是孤立奇点.

因为 $(\sin z)'\big|_{z=k\pi} = \cos z\big|_{z=k\pi} = (-1)^k \neq 0$,

所以 $z = k\pi$ 是 $\sin z$ 的一级零点，即 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的一级极点.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例4 问 $z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的二级极点吗?

解 $$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)$$ 解析且 $\varphi(0)\neq 0$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots=\frac{1}{z}\varphi(z),$$

所以 $z=0$ 不是二级极点, 而是一级极点.

思考 $z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的几级极点?

注意: 不能以函数的表面形式作出结论 .

3. 本性奇点

如果洛朗级数中含有无穷多个 $z-z_0$ 的负幂项,

那末孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的本性奇点.

例如, $e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{-n} + \cdots,$

含有无穷多个z的负幂项 $(0 < |z| < \infty)$

所以 $z = 0$ 为本性奇点,

特点: 在本性奇点的邻域内 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在且不为 ∞.

例5 $z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z},\dfrac{\sin z}{z^2},\sin\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点.

这三个函数在 $z=0$的去心邻域的洛朗展式分别为

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-3}}{(2n-1)!}+\cdots\qquad 0<|z|<+\infty.$$

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}\frac{1}{z^{2n-1}}+\cdots$$

所以 $z=0$ 分别为 $\sin z/z,\sin z/z^2,\sin\dfrac{1}{z}$ 的可去奇点,一级极点和本性奇点.

综上所述:

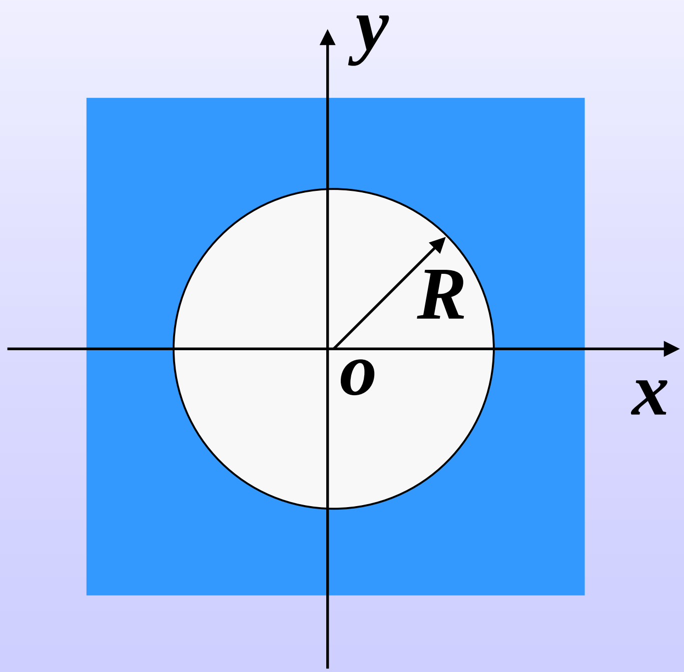
孤立奇点	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m级极点	含有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为 ∞

等价定义

极点和零点关系

二、函数在无穷远点的性态

1. 定义 如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析, 则称点 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点.



机动 目录 上页 下页 返回 结束

令变换 $t=\dfrac{1}{z}$:则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\varphi(t)$, 规定此变换将:

$z=\infty \xrightarrow{\text{映射为}} t=0,$

扩充 z 平面 $\xrightarrow{\text{映射为}}$ 扩充 t 平面

$\{z_n\}\,(z_n\to\infty) \xrightarrow{\text{映射为}} \left\{t_n=\dfrac{1}{z_n}\right\}(t_n\to 0)$

$R<|z|<+\infty \xrightarrow{\text{映射为}} 0<|t|<\dfrac{1}{R}$

结论:

在去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 内对函数 $f(z)$ 的研究

→ 在去心邻域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 内对函数 $\varphi(t)$ 的研究

因为 $\varphi(t)$ 在去心邻域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 内是解析的,

所以 $t = 0$ 是 $\varphi(t)$ 的孤立奇点.

规定: 如果 t=0 是 $\varphi(t)$ 的可去奇点、m级极点或本性奇点, 那末就称点 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、m级极点或本性奇点.

因为 $\varphi(t)$ 在去心邻域$0<|t|<\dfrac{1}{R}$内是解析的，$t=0$ 是它的一个孤立奇点，在$0<|t|<\dfrac{1}{R}$内有洛朗展式

$$\varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{-n}t^{n},$$

因而

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{-n}\frac{1}{z^{n}},$$

所以

2.判别方法:判别法1 (利用洛朗级数的特点)

如果 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$内的洛朗级数中:

1)不含正幂项;

2)含有有限多的正幂项且 z^m 为最高正幂;

3)含有无穷多的正幂项;

那末 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 1)可去奇点 ;

2) m 级极点;

3)本性奇点 .

判别法2：(利用极限特点)

如果极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

1)存在且为有限值；

2)无穷大;

3)不存在且不为无穷大；

那末 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 1)可去奇点；

2)极点；

3)本性奇点．

例6 $z=\infty$是下列函数的那种类型奇点?

(1) $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ (2) $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ (3) $f(z)=\sin z$

(1) $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式为:

$$f(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{z^n}+\cdots$$

不含正幂项

所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

(2)函数 $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ 含有正幂项且 z 为最高正幂项,

所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 1级极点.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

(3)函数 $\sin z$ 的展开式:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

含有无穷多的正幂项

所以 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

课堂练习

说出函数 $f(z) = z + e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点及其类型.

答案 $z = \infty$是一级极点, $z = 0$是本性奇点.

例7 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有些什么类型的奇点? 如果是极点, 指出它的级.

解 函数 $f(z)$ 除点 $z=0,\pm1,\pm2\cdots$ 外,

在 $|z|<+\infty$ 内解析.

因 $(\sin\pi z)'=\cos\pi z$ 在 $z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处均不为零.

所以这些点都是 $\sin\pi z$ 的一级零点,

故这些点中除1, –1, 2外, 都是 $f(z)$ 的三级极点.

因 $z^2-1=(z-1)(z+1)$，以1与-1为一级零点，

所以 1与-1是 $f(z)$的2级极点.

当$z=2$时，因为

$$\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$$

$$=\frac{3}{\pi^3},$$

那末 $z=2$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

当$z=\infty$时，因为 $k\to\infty$,

所以 $z=\infty$不是 $f(z)$的孤立奇点.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例8 判断 $z=\infty$ 是下列函数的什么类型奇点，对于极点，指出它们的级.

(1) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$; (2) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^4}$.

解 (1) 由于 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 在∞的邻域 $0<|z|<+\infty$ 内的洛朗级数为

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots$$

所以 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

(2) 由于$\cos z$ 在∞ 的邻域的洛朗级数就是它在

$z=0$处的泰勒级数

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

从而

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^4}$$

$$=\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{4!}+\frac{z^2}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2(n-2)}}{(2n)!}+\cdots$$

所以 $z=\infty$为$f(z)$ 的本性奇点. $(0<|z|<+\infty)$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

三、小结与思考

理解孤立奇点的概念及其分类; 掌握可去奇点、极点与本性奇点的特征; 熟悉零点与极点的关系.

作业：**P76 17(1)(2)(3)(4)(5), 18**

思考题

确定函数$f(z)=\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$的有限孤立奇点的类型.

思考题答案

$z=0$是分母的6级零点,

也即是函数 $f(z)$的6级极点.

放映结束，按Esc退出.