第一节　解析函数

- 一、复变函数的概念
- 二、复变函数的极限与连续
- 三、解析函数
- 四、小结与思考

一、复变函数的概念

1.复变函数:

设G是一个复数$z=x+iy$的集合.如果有一个确定的法则存在,按这个法则,对于集合G中的每一个复数z,就有一个或几个复数$w=u+iv$与之对应,那末称复变数w是复变数z的函数(简称复变函数),记作 $w=f(z)$.

2.单(多)值函数的定义:

如果 z 的一个值对应着一个 w 的值,那末我们称函数 $f(z)$ 是单值的.

如果 z 的一个值对应着两个或两个以上 w 的值,那末我们称函数 $f(z)$ 是多值的.

3.定义集合和函数值集合:

集合 G 称为 $f(z)$ 的定义集合 (定义域);

对应于 G 中所有 z 的一切 w 值所成的集合 G^*,称为函数值集合.

4. 复变函数与自变量之间的关系:

复变函数 w 与自变量 z 之间的关系 $w = f(z)$

相当于两个关系式:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实变函数.

例如, 函数 $w = z^2$, 令 $z = x + iy$, $w = u + iv$,

则 $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$,

于是函数 $w = z^2$ 对应于两个二元实变函数:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

5. 映射

对于复变函数,由于它反映了两对变量 u,v 和 x,y 之间的对应关系,因而无法用同一平面内的几何图形表示出来,必须看成是两个复平面上的点集之间的对应关系.

映射的定义:

如果用 z 平面上的点表示自变量 z 的值,而用另一个平面 w 平面上的点表示函数 w 的值,那末函数 $w = f(z)$ 在几何上就可以看作是把 z 平面上的一个点集 G (定义集合)变到 w 平面上的一个点集 G^* (函数值集合)的映射(或变换).

这个映射通常简称为由函数 $w = f(z)$ 所构成的映射.

如果 G 中的点 z 被映射 $w = f(z)$ 映射成 G^* 中的点 w, 那末 w 称为 z 的象 (映象), 而 z 称为 w 的原象.

例1 求函数 $f(z)=x^2+2i$ 在闭单位圆盘$|z|\le 1$上的值域.

解　因为$f(z)$对应的两个二元实变函数为

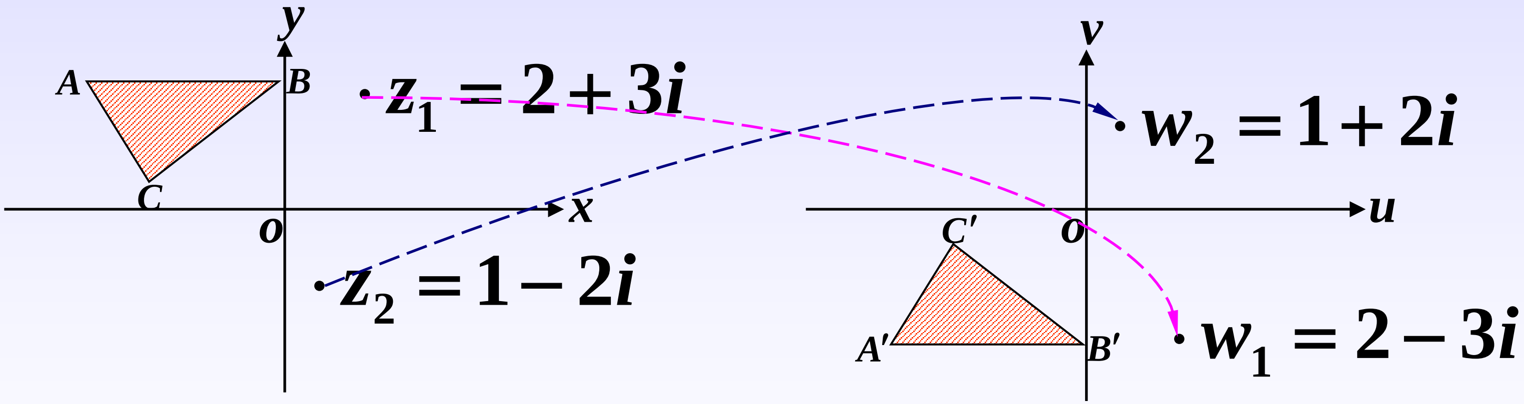
$$u=x^2,\qquad v=2.$$

当 z 在闭单位圆盘$|z|\le 1$上变化时，u 在0与1之间变化，v 为常数2.　因此值域为$w=2i$到 $w=1+2i$ 之间的线段.

映射的实例:

(1) 函数 $w=\bar{z}$ 构成的映射.

将 z 平面上的点 $z=a+ib$ 映射成 w 平面上的点 $w=a-ib$.

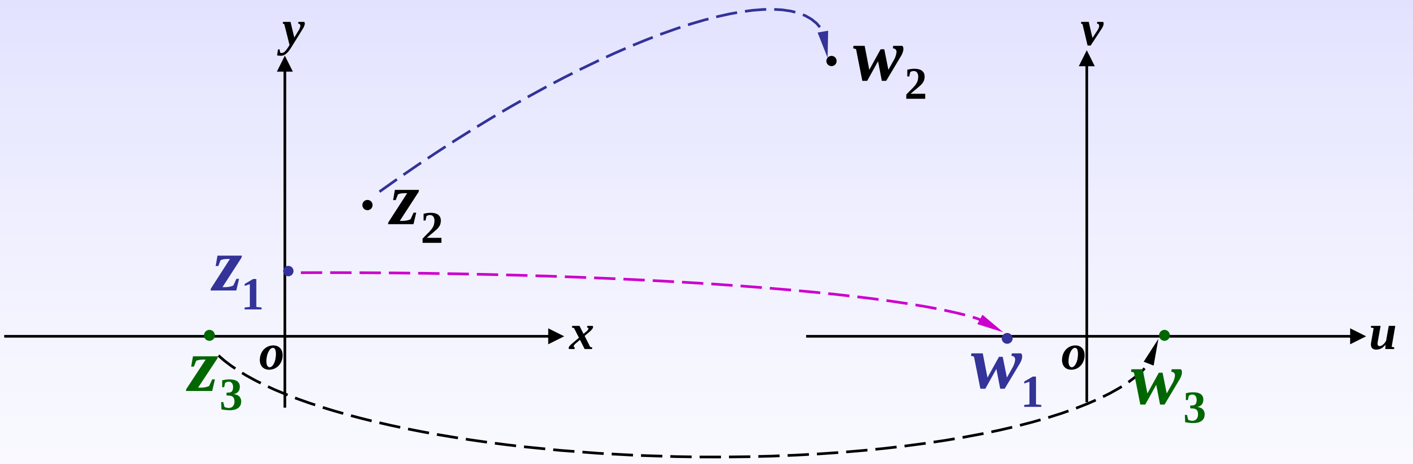


$z_1\to w_1$, $z_2\to w_2$, $\Delta ABC\to\Delta A'B'C'$.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

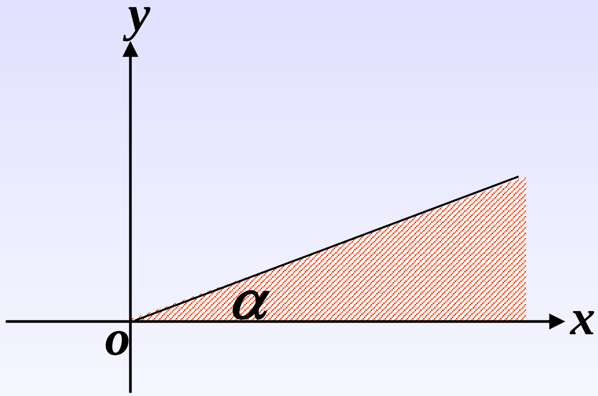
显然将 z 平面上的点 $z_1 = i, z_2 = 1 + 2i, z_3 = -1$ 映射成 w 平面上的点 $w_1 = -1, w_2 = -3 + 4i, w_3 = 1.$

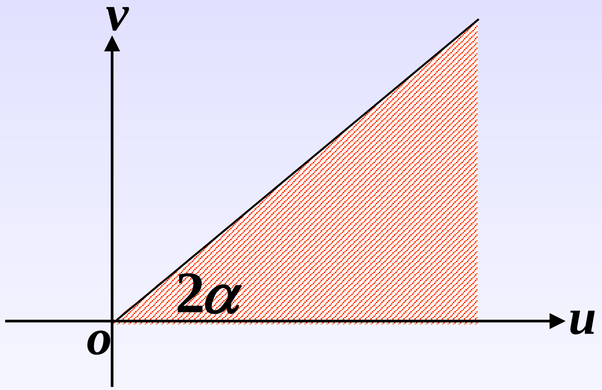


(2) 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

根据复数的乘法公式可知,

映射 $w=z^2$ 将 z 的辐角增大一倍.





将 z 平面上与实轴交角为 α 的角形域映射成 w 平面上与实轴交角为 2α 的角形域.

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

直线 $x = \lambda$ 的象的参数方程为:

$u = \lambda^2 - y^2, \quad v = 2\lambda y. \quad$ (y 为参数)

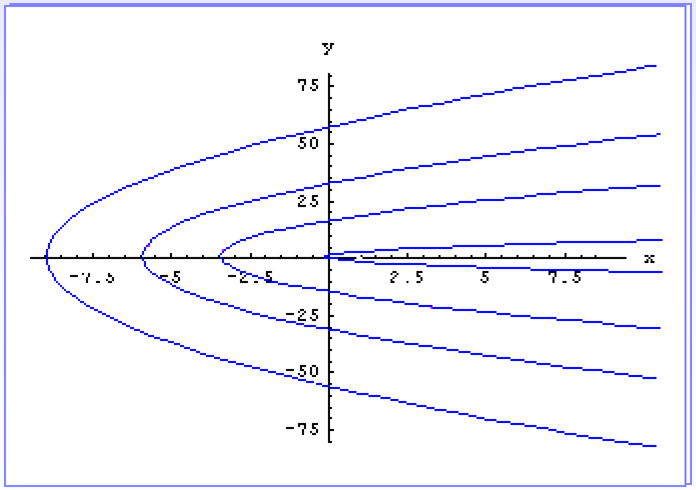
消去参数 y 得: $\quad v^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - u),$

以原点为焦点,开口向左的抛物线.(图中红色曲线)

同理直线 $y = \mu$ 的象为:

$v^2 = 4\mu^2(\mu^2 + u),$

以原点为焦点,开口向右的抛物线.(图中蓝色曲线)



(2) 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数:

$$u=x^2-y^2, \quad v=2xy.$$

它把 z 平面上的两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1, \quad 2xy=c_2,$$

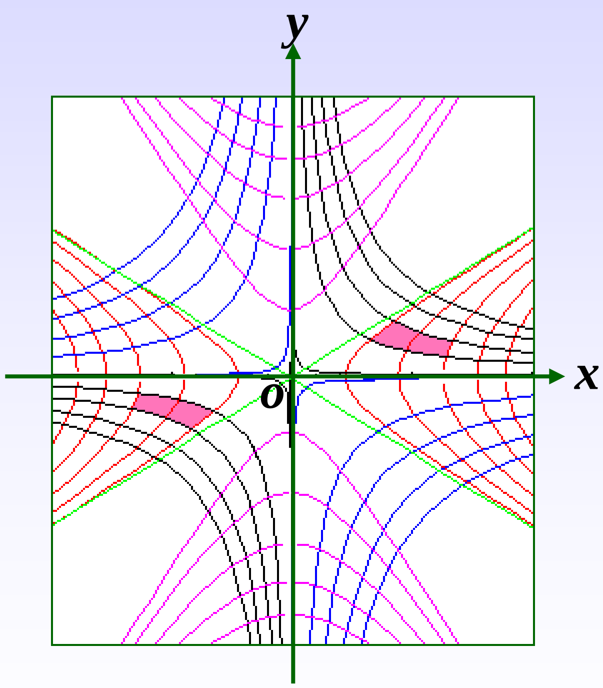
分别映射成 w 平面上的两族平行直线

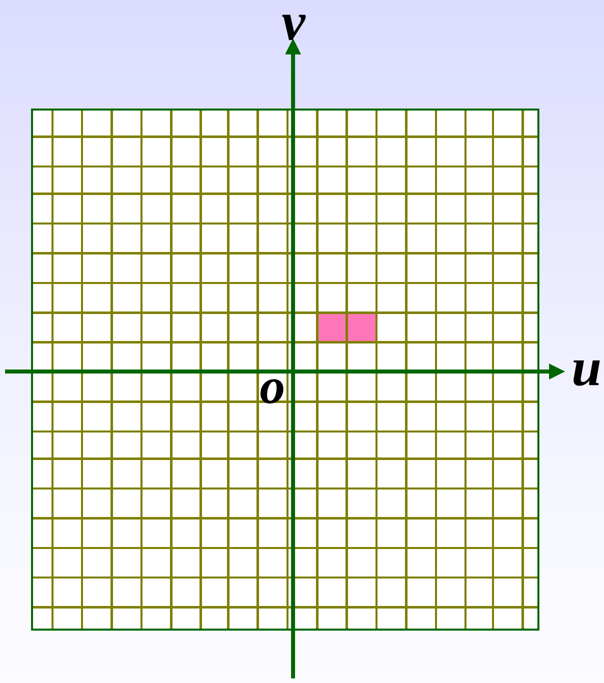
$$u=c_1, \quad v=c_2.$$

(如下页图)

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

将第一图中两块阴影部分映射成第二图中同一个长方形.





6. 反函数的定义:

设 $w = f(z)$ 定义集合为 z 平面上的集合 G, 函数值集合为 w 平面上的集合 G^*, 那末 G^* 中的每一个点 w 必将对应着 G 中的一个(或几个)点.

于是在 G^* 上就确定了一个单值 (或多值)函数 $z = \varphi(w)$, 它称为函数 $w = f(z)$ 的反函数, 也称为映射 $w = f(z)$ 的逆映射.

二、函数的极限与连续

1.函数极限的定义:

设函数 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内, 如果有一确定的数 A 存在, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$ 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta(0 < \delta \leq \rho)$ 时, 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 那末称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限.

记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$. (或 $f(z) \xrightarrow{z \to z_0} A$)

注意: 定义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的.

$$f(U_\delta(z_0)) \subset U_\varepsilon(A)$$

注意:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty? \qquad f(U_\delta(z_0))\subset U_R(\infty)$$

对任意的$R>0$, 存在δ, 使得 $|z-z_0|<\delta$时， $|f(z)|>R$.

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A? \qquad f(U_r(\infty))\subset U_\varepsilon(A)$$

对任意的$\varepsilon>0$, 存在r, 使得 $|z|>r$时, $|f(z)-A|<\varepsilon$

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty? \qquad f(U_r(\infty))\subset U_R(\infty)$$

对任意的$R>0$, 存在r, 使得 $|z|>r$时， $|f(z)|>R$.

2. 极限计算的定理

定理一

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ A=u_0+iv_0,$ $z_0=x_0+iy_0,$ 那末 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

说明

该定理将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限问题, 转化为求两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限问题.

定理二

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 那末

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B;$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB;$

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0).$

与实变函数的极限运算法则类似.

2. 函数连续的定义:

如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 那末我们就说 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 我们说 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理三

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是 : $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例如, $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$,

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在复平面内除原点外处处连续, $v(x,y)=x^2-y^2$ 在复平面内处处连续,

故 $f(x,y)$ 在复平面内除原点外处处连续.

定理四

(1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母在 z_0 不为零) 在 z_0 处仍连续.

(2) 如果函数 $h = g(z)$ 在 z_0 连续, 函数 $w = f(h)$ 在 $h_0 = g(z_0)$ 连续, 那末复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

三、解析函数

1.导数的定义:

设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 D 内, z_0 为 D 中的一点, 点 $z_0 + \Delta z$ 不出 D 的范围,

如果极限 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在,

那末就称 $f(z)$ 在 z_0 可导或可微.这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数,

记作 $$f'(z_0) = \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

在定义中应注意:

$z_0+\Delta z \to z_0$(即$\Delta z \to 0$)的方式是任意的.

即$z_0+\Delta z$在区域D内以任意方式趋于z_0时,

比值$\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$都趋于同一个数.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 我们就称 $f(z)$ 在区域 D内 可导.

例2 求$f(z)=z^n$的导数.

解 $$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(nz^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}\Delta z+\cdots\right)$$

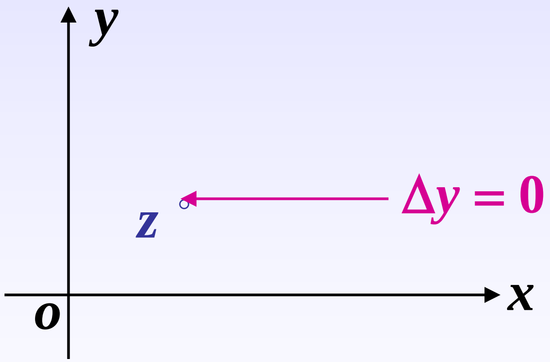
$$=nz^{n-1}.$$

例３　问$f(z)=\bar{z}$是否可导？

解　$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

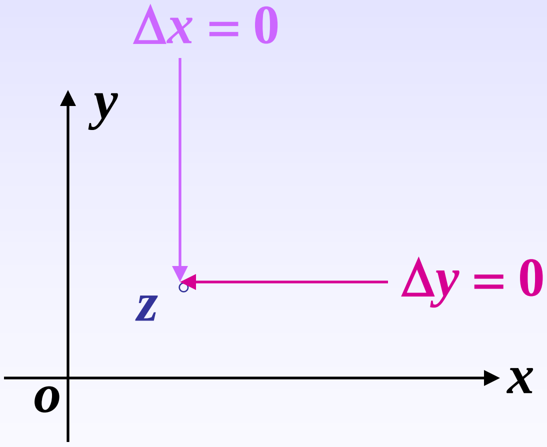


设$z+\Delta z$沿着平行于 x 轴的直线趋向于 z，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=1,$$

设$z+\Delta z$沿着平行于 y 轴的直线趋向于 z,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=-1,$$



所以$f(z)=\bar{z}$的导数不存在.

2. 可导与连续:

函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导则在 z_0 处一定连续, 但函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续不一定在 z_0 处可导.

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z).$$

3 . 解析函数的定义

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内处处可导, 那末称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

如果函数 $f(z)$在 区域 D内每一点解析, 则称 $f(z)$在 区域 D内解析. 或称 $f(z)$是 区域 D 内的一个解析函数(全纯函数或正则函数).

4. 奇点的定义

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 那末称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

根据定义可知:

函数在**区域内解析**与在**区域内可导**是**等价**的.

但是, 函数在**一点处解析**与在**一点处可导**是**不等价**的概念. 即函数在一点处可导, 不一定在该点处解析.

函数在一点处解析比在该点处可导的要求要高得多.

练习

函数$f(z)$ 在点 z 可导是$f(z)$ 在点 z 解析的 (B)

（A）充分不必要条件

（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件

（D）既非充分条件也非必要条件

定理

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析.

(2) 设函数 $h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析, 函数 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析. 如果对 D 内的每一个点 z, 函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 G, 那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内解析, 并且

$$\frac{\mathrm{d}f(g(z))}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}$$

思考：设$f(z), g(z)$是整函数,下列命题哪些是正确的？

$f(z)g(z)$是整函数

$f(z)/g(z)$是整函数

$f^3(z)$ 是整函数

$f(1/z)$是整函数

$f(g(z))$是整函数

$4f(z)+ig(z)$是整函数

四、解析的充分必要条件

定理一 可导的充分必要条件

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 D 内，则 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+yi$ 可导的充要条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，并且在该点满足柯西一黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

柯西介绍

黎曼介绍

证　(1) 必要性.

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 D 内,

且 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+yi$ 可导,

则对于充分小的 $|\Delta z|=|\Delta x+i\Delta y|>0$,

有 $f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)$

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$,

令 $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$,

$f'(z)=a+ib$, $\qquad \rho(\Delta z)=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$,

所以 $\Delta u + i\Delta v =$

$$(a+ib)\cdot(\Delta x + i\Delta y) + (\rho_1 + i\rho_2)$$

$$= (a\Delta x - b\Delta y + \rho_1)$$

$$+ i(b\Delta x + a\Delta y + \rho_2)$$

于是 $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1,$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2$$

由此可知 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,

且满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

(2) 充分性.　由于

$$f(z+\Delta z)-f(z)=u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,y)$$
$$+i[v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,y)]$$
$$=\Delta u+i\Delta v,$$

又因为 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,

于是 $$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1(|\Delta z|),$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

其中 $\lim\limits_{|\Delta z|\to 0}\dfrac{\varepsilon_k}{|\Delta z|}=0,\quad (k=1,2,)$

因此 $f(z+\Delta z)-f(z)=$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+\varepsilon_1(|\Delta z|)+i\varepsilon_2(|\Delta z|).$$

由柯西一黎曼方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=i^2\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$$f(z+\Delta z)-f(z)=$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+\quad \varepsilon_1(|\Delta z|)+\varepsilon_2(|\Delta z|).$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\quad+\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)+\varepsilon_2(|\Delta z|)i}{\Delta z}.$$

所以 $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

即函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+yi$ 可导.

根据定理一,可得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+yi$ 处的导数公式：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

函数在区域 D 内解析的充要条件

定理二 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义域 D 内解析的充要条件是： $u(x,y)$与 $v(x,y)$ 在 D 内可微,并且满足柯西一黎曼方程.

解析函数的判定方法:

(1) 如果能用求导公式与求导法则证实复变函数 $f(z)$ 的导数在区域 D 内处处存在,则可根据解析函数的定义断定 $f(z)$ 在 D 内是解析的.

(2) 如果复变函数 $f(z)=u+iv$ 中 u,v 在 D 内的各一阶偏导数都存在、连续(因而 $u,v(x,y)$ 可微)并满足 $\mathrm{C-R}$ 方程,那么根据解析函数的充要条件可以断定 $f(z)$ 在 D 内解析.

二、典型例题

例4 判定下列函数在何处可导, 在何处解析:

(1) $w=\bar{z}$; (2) $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$;

(3) $w=z\,\mathrm{Re}(z)$.

解 (1) $w=\bar{z}$, $u=x,\quad v=-y,$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

不满足柯西一黎曼方程,

故 $w=\bar{z}$ 在复平面内处处不可导, 处处不解析.

(2) $f(z) = \boxed{e^x(\cos y + i\sin y)}$ 指数函数

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

四个偏导数均连续

即 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导，处处解析.

且 $f'(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$

(3) $w = z\,\mathrm{Re}(z) = x^2 + xyi,\quad u = x^2,\quad v = xy,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = y,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

四个偏导数均连续

仅当 $x = y = 0$ 时,满足柯西一黎曼方程,

故函数 $w = z\,\mathrm{Re}(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导,

在复平面内处处不解析.

例5 讨论$f(z)=x^2+2yi$在复平面上的解析性.

解 因为$u=x^2, v=2y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2.$$

仅当$x=1$时,满足柯西—黎曼方程,

在复平面内不解析.

思考：求$f(z)$在$z=1+i$处的导数？

例6 设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$，问常数 a,b,c,d 取何值时，$f(z)$ 在复平面内处处解析？

解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+ay,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=ax+2by,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=dx+2y,$$

欲使 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$$2x+ay=dx+2y,\qquad -2cx-dy=ax+2by,$$

所求 $a=2,\ b=-1,\ c=-1,\ d=2.$

例7 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

证 $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0,$$

所以 $u=$ 常数, $v=$ 常数,

因此 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

例8 设 $f(z)=u+iv$ 为一解析函数,且 $f'(z)\neq 0$,那末曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 必相互正交,其中 c_1 , c_2 为常数.

证 因为 $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}\neq 0,$

所以 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 不全为零,

如果在曲线的交点处 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 都不为零,

根据隐函数存在定理,

曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 中任一条曲线的斜率分别为 $k_1=-\dfrac{u_x}{u_y}$, $k_2=-\dfrac{v_x}{v_y}$,

根据柯西一黎曼方程得

$$k_1\cdot k_2=\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\cdot\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=\left(-\frac{v_y}{u_y}\right)\cdot\left(\frac{u_y}{v_y}\right)=-1,$$

故曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 相互正交.

如果 u_y 和 v_y 中有一个为零, 则另一个必不为零, 两族中的曲线在交点处的切线一条是水平的, 另一条是铅直的, 它们仍然相互正交.

极坐标形式下可导的充分必要条件：

若函数$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$, $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则$f(z)$在点$z$可导的充分必要条件是$u,v$在点$(r,\theta)$处可微且满足极坐标下的C—R方程：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},\quad (r>0)$$

且

$$f'(z)=(\cos\theta-i\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

五、小结与思考

理解复变函数极限、连续、导数和解析的概念；重点是奇点和可导、解析的关系以及判别可导、解析方法及求导方法.

掌握并能灵活应用柯西—黎曼方程.

思考题

复变函数 $f(z)$ 在点 z_0 可导与在 z_0 解析有无区别?

思考题答案

$f(z)$ 在点 z_0 解析必在 z_0 可导， 反之不对.

例如 $f(z)=|z|^2$ 在 $z_0=0$ 处可导，

但在 $z_0=0$ 处不解析.

作业：P29 1(1)(2), 2, 5, 6(3)(4)(5)

放映结束，按Esc退出.

黎曼资料

Riemann

Born: 17 Sept 1826 in Breselenz, Hanover (now Germany)

Died: 20 July 1866 in Selasca, Italy