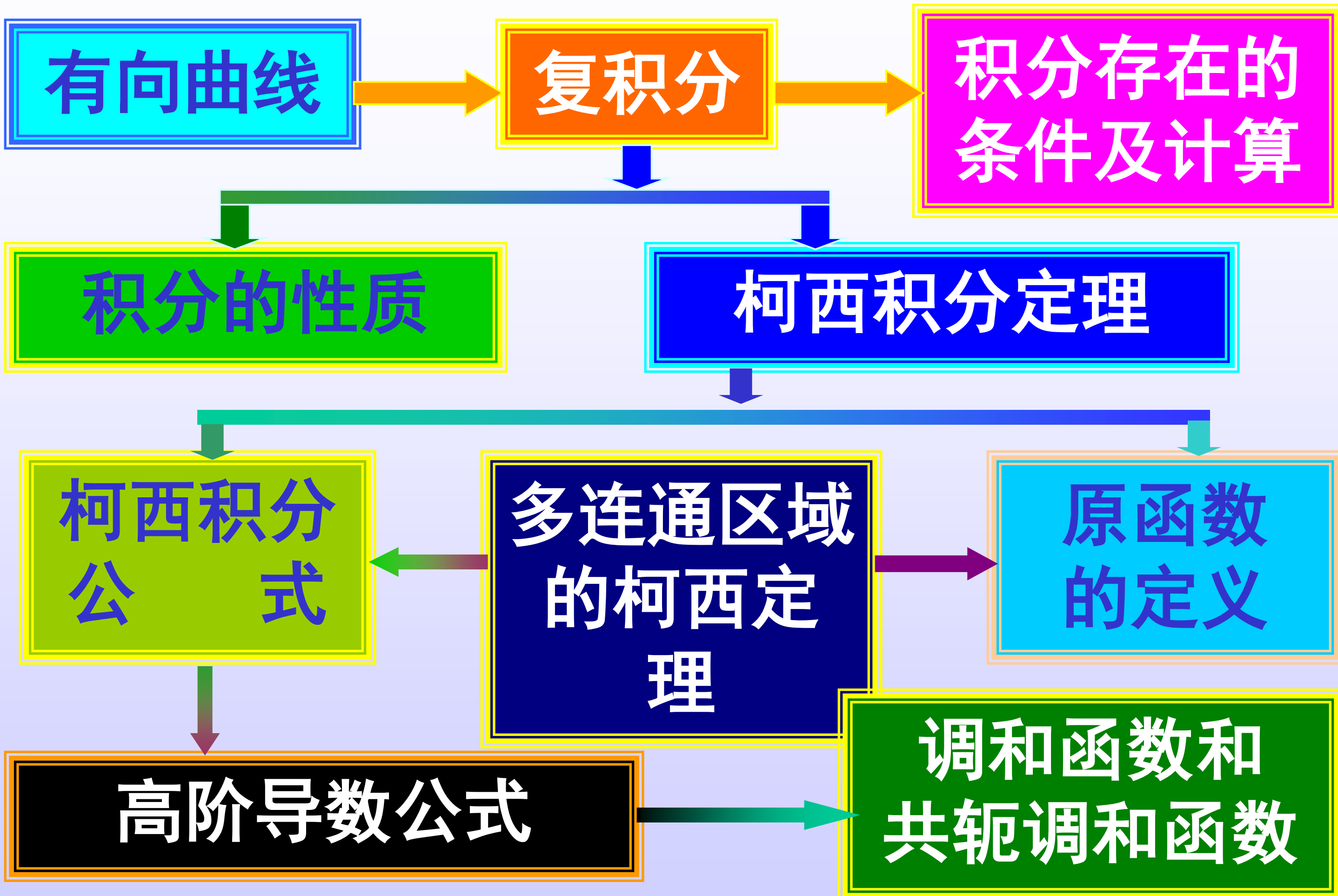
第三章 复变函数的积分

一、定积分与不定积分

二、围线积分

三、用积分不等式证明

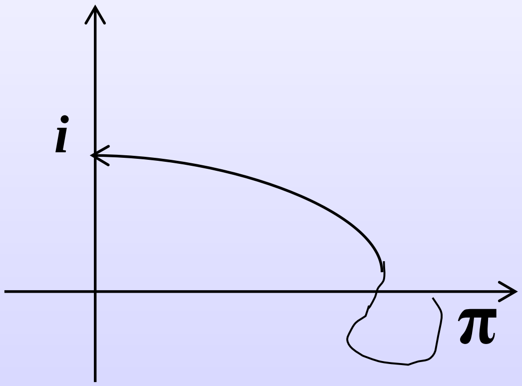
四、已知调和函数求解析函数


有向曲线
复积分
积分存在的
条件及计算
积分的性质
柯西积分定理
柯西积分
公　　式
多连通区域
的柯西定
理
原函数
的定义
高阶导数公式
调和函数和
共轭调和函数

一、定积分与不定积分

定积分(参数方程法)常用于函数在积分曲线上有奇点或在积分区域内部有无穷多奇点情况；不定积分注意所要求条件

$$\int_C e^z \cos z dz =$$



$$\int_C e^z \cos z dz = \frac{1}{2}[e^z \sin z\Big|_{\pi}^{i} + e^z \cos z\Big|_{\pi}^{i}]$$

$$= \frac{e^{\pi}}{2} + \frac{e^{i}}{2}\left(\frac{e+e^{-1}}{2} + i\frac{e-e^{-1}}{2}\right)$$

积分计算的参数方程法

设$z(t)=x(t)+iy(t)$, 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$$

例1　计算 $\int_c \bar{z}\mathrm{d}z$ 的值，其中C为

1）沿从$(0,0)$到$(1,1)$的线段：

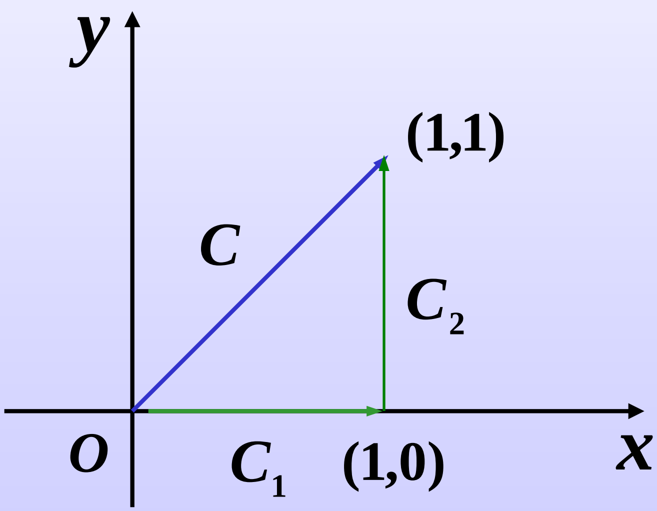
2）沿从$(0,0)$到$(1,0)$ 的线段C_1与从$(1,0)$到$(1,1)$的线段C_2 所接成的折线.

解

$$\int_c \bar{z}\mathrm{d}z = \int_0^1 (t - it)\mathrm{d}(t + it)$$

$$= \int_0^1 (t - it)(1 + i)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 2t\mathrm{d}t \quad = 1;$$



2) $\int_c \bar{z}\mathrm{d}z = \int_{c_1} \bar{z}\mathrm{d}z + \int_{c_2} \bar{z}\mathrm{d}z$

$$= \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 (1 - it)i\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + i\right) \quad = 1 + i.$$

练习：设C 为正向圆周 $|z| = 3$， 则

$$\oint_c \frac{z + \bar{z}}{|z|} dz = \quad$$ 答案：$6\pi i$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

练习：设C为正向圆周 $|z|=1$，则

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \qquad \int_C \frac{\mathrm{d}z}{|z|} = \qquad \int_C \frac{|\mathrm{d}z|}{z} = \qquad \int_C \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|} =$$

答案：$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i$ $\quad \int_C \frac{\mathrm{d}z}{|z|} = 0$ $\quad \int_C \frac{|\mathrm{d}z|}{z} = 0$

$$\int_C \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|} = 2\pi$$

例2 计算积分

$$\int_{|z|=1} |z-1||\mathrm{d}z|.$$

解 设 $z=e^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$, $|\mathrm{d}z| = \mathrm{d}\theta$,

所以

$$\int_{|z|=1} |z-1||\mathrm{d}z| = \int_0^{2\pi} |\cos\theta - 1 + i\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -4\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8.$$

例3 计算积分

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2},\rho>0,\text{其中}a\neq 0,|a|\neq\rho.$$

解 设$z=\rho e^{i\theta}$, 则$\mathrm{d}z=i\rho e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$, $|\mathrm{d}z|=\rho\,\mathrm{d}\theta$,

进而有 $\mathrm{d}z=ie^{i\theta}|\mathrm{d}z|$, 即 $|\mathrm{d}z|=\dfrac{-i\rho\,\mathrm{d}z}{z}$.

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2}=\int_C\frac{-i\rho}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$=-i\rho\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(\rho^2-\bar{a}z)}$$

由柯西积分公式……

例4 求积分 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z$, 并证明 $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi$.

解 根据柯西积分公式知,

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot e^z\Big|_{z=0}=2\pi i;$$

令 $z=e^{i\theta}$, $(-\pi\le\theta\le\pi)$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}ie^{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} ie^{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} ie^{\cos\theta + i\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

因为 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i,$

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z = 2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

比较两式得 $\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \pi.$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

二、沿围线积分

(重要公式、柯西定理、柯西积分公式、高阶导数公式、定积分)

定理 设D是逐段光滑曲线 C所围成的单连通区域，函数$f(z)$在D内解析，在$\overline{D}=D+C$ 上连续，那末

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

定理：设 D 是由 $n+1$条简单闭曲线 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 所围成的多连通区域(如图)，$C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$，函数 $f(z)$在 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$上连续，则

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=$$

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

重要公式 $$\oint_\Gamma \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

柯西积分公式

设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D内解析，在$\overline{D}=D+C$上连续，则对于D内任一点 z, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

高阶导数公式 …… …… ……，则$f(z)$ 在D内有各阶导数，

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n=1,2,\cdots)$$

定积分 参数方程法

例5 计算 $\oint_{|z|=1}\dfrac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z.$

解 当 $|z|\le 1$ 时,

$$\left|z^2+2z+4\right|\ge 4-|2z|-|z|^2\ge 4-2-1=1,$$

故由柯西定理得

$$\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z=0.$$

$$\int_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1}\left[\frac{1}{z-i}+(z-i)\right]\mathrm{d}z$$

例6 沿指定路径$C: |z-i| = \frac{3}{2}$计算以下积分

$$(1) \oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz; \qquad \oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz.$$

解 (1) $\frac{1}{z(z^2+1)}$在C内有两个奇点$z=0$及$z=i$分别

以$z=0$及$z=i$为圆心,以$1/4$为半径作圆C_1及C_2,则

由柯西定理有

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z(z^2+1)} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz$$

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z(z^2+1)}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z(z^2+1)}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1/(z^2+1)}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{1/[z(z+i)]}{z-i}dz$$

$$= 2\pi i + 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi i.$$

(2) $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$在C内有两个奇点$z=0$及$z=i$分别以$z=0$及$z=i$为圆心,以$1/4$为半径作圆C_1及C_2,则由柯西定理有

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

由柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z/(z^2+1)}{z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z/[z(z+i)]}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i + 2\pi i\left(-\frac{e^i}{2}\right) = \pi i(2-e^i)$$

$$= \pi[\sin 1 + i(2-\cos 1)].$$

练习：设C为过点$2+3i$的正向简单闭曲线，则当z从曲线C内部趋向$2+3i$时，$\lim\limits_{z\to 2+3i}\oint_{c}\frac{e^{\zeta}}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=$

当z从曲线C外部趋向$2+3i$时，$\lim\limits_{z\to 2+3i}\oint_{c}\frac{e^{\zeta}}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=$

答案：$2\pi ie^{2}[\cos 3+i\sin 3]$ 　　　0

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例7 计算$\int_C \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\mathrm{d}z$，其中$C:|z|=R\,(R>0)$，$a,b$不在圆周上，$n$为正整数.

解　分以下四种情况讨论：

(1)　a,b不在曲线C内

这时 $\frac{1}{(z-a)^n(z-b)}$ 在积分区域内处处解析，

由单连通区域柯西定理，有

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\mathrm{d}z=0$$

(2) a在曲线C内，b不在曲线C内

由高阶导数公式，有

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\mathrm{d}z = \int_C \frac{\frac{1}{z-b}}{(z-a)^n}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left(\frac{1}{z-b}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{z=a}$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(z-b)^n}\Bigg|_{z=a}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{2\pi i}{(a-b)^n}$$

(3) a不在曲线C内，b在曲线C内

由柯西积分公式，有

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\mathrm{d}z = \int_C \frac{\frac{1}{(z-a)^n}}{z-b}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \left.\frac{1}{(z-a)^n}\right|_{z=b}$$

$$= \frac{2\pi i}{(b-a)^n}$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

(4) a,b 均在曲线C内

则分别以a,b为圆心做互不相互不包含小圆C_1，C_2，

C_1只包含a, C_2只包含b

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{C_1} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\mathrm{d}z$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{2\pi i}{(a-b)^n}+\frac{2\pi i}{(b-a)^n}=0$$

例8 计算$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$,其中$C$是不经过0与1的闭光滑曲线.

解 分以下四种情况讨论:

1)若封闭曲线C既不包含0也不包含1,则

$$f(z)=\frac{e^z}{z(1-z)^3}\text{在}C\text{内解析},$$

由柯西定理得 $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z = 0.$

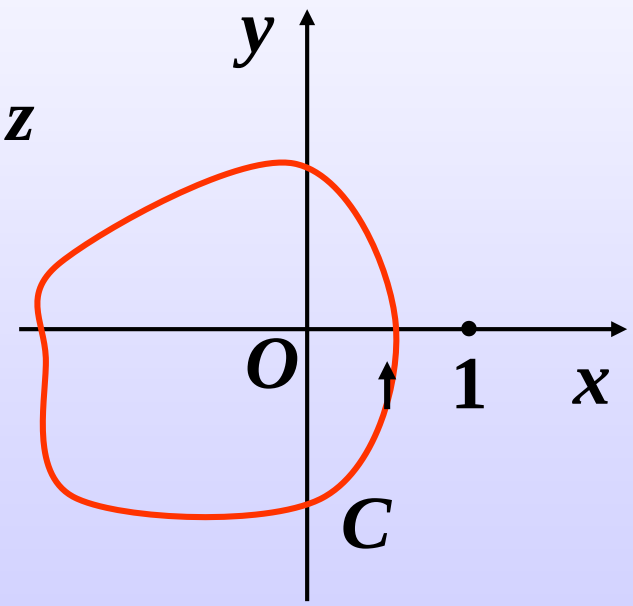
2)若封闭曲线C包含0而不包含1,则

由柯西积分公式得

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z = \int_C \frac{e^z/(1-z)^3}{z}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^z}{(1-z)^3}\right|_{z=0}$$

$$= 2\pi i.$$



3)若封闭曲线C包含1而不包含0,则

$f(z)=\dfrac{e^z}{z}$在C内解析, 由高阶导数公式得

$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{e^z/z}{(1-z)^3}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{-e^z/z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left[-f''(1)\right]=\pi i\left.\frac{(z^2-2z+2)e^z}{-z^3}\right|_{z=1}=-e\pi i.$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n=1,2,\cdots)$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

4)若封闭曲线C既包含1又包含0,

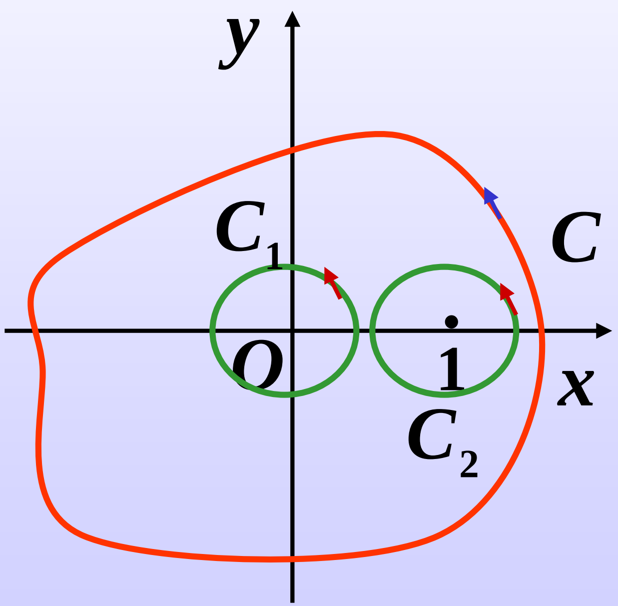
则分别以0,1为圆心,以$\rho > 0$为半径作圆C_1, C_2,

使C_1和C_2也在C内,且C_1与C_2互不相交,互不包含,

据柯西定理有

$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$



机动 目录 上页 下页 返回 结束

而积分$\int_{C_1}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$即为2)的结果$2\pi i$,

而积分$\int_{C_2}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$ 即为3)的结果$-e\pi i$,

所以 $\int_{C}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=(2-e)\pi i.$

三、利用积分估值不等式证明

设曲线 C 的长度为 L,函数 $f(z)$ 在 C 上满足

$$|f(z)| \le M,\text{那末} \left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例9 设C为圆周 $|z-1|=2$证明下列不等式.

$$\left|\int_c \frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z\right| \le 8\pi.$$

证明 因为 $|z-1|=2,$

所以 $$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = \frac{|z-1+2|}{2} \le \frac{|z-1|+2}{2} = 2,$$

因此 $$\left|\int_c \frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z\right| \le \int_c \left|\frac{z+1}{z-1}\right| |\mathrm{d}z|$$

$$\le 2\cdot 2\pi\cdot 2 = 8\pi.$$

例10 如果$|z|<1$内$f(z)$解析且$|f(z)|\le\dfrac{1}{1-|z|}$，证明

$$|f^{(n)}(0)|\le(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e(n+1)!\quad(n=1,2,\cdots)$$

证　因为$f^{(n)}(0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z\quad 0<r<1,$

所以$|f^{(n)}(0)|\le\dfrac{n!}{2\pi}\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\mathrm{d}S\quad\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{1}{(1-|z|)|z|^{n+1}}\mathrm{d}S$

$=\dfrac{n!}{(1-r)r^n}$，　取$r=\dfrac{n}{n+1}$，　不等式即证.

练习：

设 $f(z)$ 在 z平面上解析，且$|f(z)|$ 恒大于正常数M,

试证：$f(z)$为常值函数.

证明：令 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，则$|g(z)|=\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|<\dfrac{1}{M}$,

又因为$f(z)\neq 0$，所以$g(z)$是有界整函数.

由刘维尔定理知 $g(z)$ 为常值函数.

从而$f(z)$也是常值函数.

例11 若函数 $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析，试证对于任一 $r(0<r<R)$ 都有

$$f'(a)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\{f(a+re^{i\theta})\}e^{-i\theta}\mathrm{d}\theta$$

证明：令 $f(a+re^{i\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$, 由高阶导数公式有

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u(r,\theta)+iv(r,\theta))e^{-i\theta}\mathrm{d}\theta$$

由柯西积分定理

$$0=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{r^2}\int_{|z-a|=r}f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u(r,\theta)+iv(r,\theta))e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

上式两边取共轭，

$$0=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u(r,\theta)-iv(r,\theta))e^{-i\theta}\mathrm{d}\theta$$

整理得，

$$f'(a)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\{f(a+re^{i\theta})\}e^{-i\theta}\mathrm{d}\theta$$

例12 设C是一条正向简单闭曲线，D是C的外部区域，$f(z)$在D内解析，在$\overline{D}=D+C$上连续，且

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A\neq\infty,$$

则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases} f(z)-A, & z\in D \\ -A, & z\notin \overline{D}\end{cases}$$

证明　当z在区域D内时，作圆 $C_R:|\zeta-z|=R$，使C_R在区域D内，在曲线C外，由多连通区域柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

因为 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A\neq\infty$, 所以$R$充分大时,

$$|f(\zeta)-A|<\varepsilon$$

从而

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-A\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)-A}{\zeta-z}d\zeta\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2\pi R}\int_{C_R}ds=\varepsilon$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = f(z)-A$$

当 $z\notin\overline{D}$ 即z在曲线C内时，　由多连通区域

柯西积分定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

令$R\to\infty$，上式两边取极限得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = -A.$$

四、用调和函数求解析函数

例13 已知调和函数$u(x,y)=x^2-y^2+xy$.求其共轭调和函数$v(x,y)$及解析函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

解 利用柯西—黎曼方程,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-2y+x)=2y-x,$$

得 $v=\int(2y-x)\mathrm{d}x=2xy-\frac{x^2}{2}+g(y),$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+g'(y). \quad \text{又} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y.$$

比较两式可得：$2x+g'(y)=2x+y$, 故 $g'(y)=y$.

即 $$g(y)=\int y\mathrm{d}y=\frac{y^2}{2}+C.$$

因此 $$v=2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C \quad (C\text{为任意常数})$$

因而得到解析函数

$$\begin{aligned}
f(z)&=u(x,y)+i(x,y)\\
&=(x^2-y^2+xy)+i\left(2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)+iC\\
&=(x^2+2ixy-y^2)-\frac{i}{2}(x^2+2ixy-y^2)+iC\\
&=\frac{z^2}{2}\cdot(2-i)+iC.
\end{aligned}$$

作业：P50 15

1. 求积分 $\int_{\frac{(x-1)^2}{3}+y^2=1}\left[\frac{1}{(z-i)^2}+\frac{2}{z-i}+1-3(z-i)^2\right]dz$

2. 假设曲线 C 为以 $z=0, z=1, z=1+i, z=i$ 为顶点的正方形正向，求如下积分

（1）$\int_C e^z dz$ （2）$\int_C \bar{z}^2 dz$

3. 求积分 $\int_C \frac{1}{z}dz$，其中曲线C为右半正向单位圆周.

4. 计算 $\int_C (|z-1+i|^2 - z)dz$ 其中曲线 C 为以 $1-i$ 为心，以1为半径的的上半圆周正向.

5. 假设曲线 C 是不经过0，4的正向简单闭曲线，求积分

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\mathrm{d}z$$

6. 假设曲线 C为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的正向，定义

$$g(z)=\int_C \frac{\zeta^2-\zeta+2}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

求 $g(1), g'(i), g''(1+i)$.

7. 假设 f 在单位圆周C及其内部解析，证明：若在 $|z|=1$上，有 $|f(z)|\le M$, 则 $|f'(0)|\le M$.

尝试给出 $|f^{(n)}(0)|$ 的上界估计.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

8. 若C为从$z = R$到 $z = R+2\pi i$的垂线段，则

$$\left|\int_C \frac{e^{3z}}{1+e^z}\mathrm{d}z\right| \le \frac{2\pi e^{3R}}{e^R - 1}$$

9. 验证$u = x^2 - y^2 + 2x + 1$ 为调和函数, 并求解析函数 $f(z) = u + iv$.

10. 设$f(z)$ 在 $|z| \le r$ 内解析且有界，证明

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!M}{(r-|z|)^n} \quad (|z| < r)$$