第四章　级　数

一、选择题：

1．设$a_n=\dfrac{(-1)^n+ni}{n+4}(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（　　）

（A）等于0　　（B）等于1　　（C）等于i　　（D）不存在

2．下列级数中，条件收敛的级数为（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1+3i}{2})^n$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+4i)^n}{n!}$

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+i}{\sqrt{n+1}}$

3．下列级数中，绝对收敛的级数为（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{i}{n})$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{i}{2^n}]$

（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n i^n}{2^n}$

4．若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$在$z=1+2i$处收敛，那么该级数在$z=2$处的敛散性为（　　）

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）不能确定

5．设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}nc_n z^{n-1}$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n+1}z^{n+1}$的收敛半径分别为$R_1,R_2,R_3$，则$R_1,R_2,R_3$之间的关系是（　　）

（A）$R_1<R_2<R_3$　　（B）$R_1>R_2>R_3$

（C）$R_1=R_2<R_3$　　（D）$R_1=R_2=R_3$

6．设$0<|q|<1$，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^{n^2}z^n$的收敛半径$R=$（　　）

（A）$|q|$　　　（B）$\dfrac{1}{|q|}$　　　（C）0　　　（D）$+\infty$

7．幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}(\dfrac{z}{2})^n$ 的收敛半径 $R=$（　　）

（A）　1　　　（B）2　　　（C）$\sqrt{2}$　　　（D）$+\infty$

8．幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$ 在$|z|<1$内的和函数为

（A）$\ln(1+z)$　　　（B）$\ln(1-z)$

（D）$\ln\dfrac{1}{1+z}$　　　（D）$\ln\dfrac{1}{1-z}$

9．设函数$\dfrac{e^z}{\cos z}$的泰勒展开式为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$，那么幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径 $R=$（　　）

（A）$+\infty$　　　（B）1　　　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　　　（D）π

10．级数$\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots$的收敛域是（　　）

（A）$|z|<1$　　　（B）$0<|z|<1$　　　（C）$1<|z|<+\infty$　　　（D）不存在的

11．函数$\dfrac{1}{z^2}$在$z=-1$处的泰勒展开式为（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$　　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$

（C）$-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$　　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$

12．函数 $\sin z$，在 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 处的泰勒展开式为(　　)

（A）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\dfrac{\pi}{2})^{2n+1}\quad(\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

（B）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\dfrac{\pi}{2})^{2n}\quad(\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

（C）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\dfrac{\pi}{2})^{2n+1}\quad(\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

（D）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\dfrac{\pi}{2})^{2n}\quad(\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

13．设 $f(z)$ 在圆环域 $H: R_1<|z-z_0|<R_2$ 内的洛朗展开式为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，$c$ 为 H 内绕 z_0 的任一条正向简单闭曲线，那么 $\oint_c\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=$(　　)

(A) $2\pi ic_{-1}$　　（B）$2\pi ic_1$　　（C）$2\pi ic_2$　　（D）$2\pi if'(z_0)$

14．若 $c_n=\begin{cases}3^n+(-1)^n, & n=0,1,2,\cdots\\ 4^n, & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$，则双边幂级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛域为(　　)

（A）$\dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{3}$　　（B）$3<|z|<4$

（C）$\dfrac{1}{4}<|z|<+\infty$　　（D）$\dfrac{1}{3}<|z|<+\infty$

15．设函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)(z+4)}$ 在以原点为中心的圆环内的洛朗展开式有 m 个，那么 $m=$(　　)

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

二、填空题

1．若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+i)^n$ 在 $z=i$ 处发散，那么该级数在 $z=2$ 处的收敛性为_______________．________

2．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} [\mathrm{Re}(c_n)] z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，那么 R_1 与 R_2 之间的关系是________________________.

3．幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2i)^n z^{2n+1}$ 的收敛半径 $R =$ _______________________

4．设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为内的一点，d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，那么当 $|z-z_0|<d$ 时，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 成立，其中 $c_n =$ _____________________.

5．函数 $\arctan z$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为____________________.

6．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R，那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n-1) c_n z^n$ 的收敛半径为______________________.

7．双边幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-\dfrac{z}{2})^n$ 的收敛域为______________________.

8．函数 $e^z + e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内洛朗展开式为_________________________.

9．设函数 $\cot z$ 在原点的去心邻域 $0<|z|<R$ 内的洛朗展开式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$，那么该洛朗级数收敛域的外半径 $R =$ ____________________.

10．函数 $\dfrac{1}{z(z-i)}$ 在 $1<|z-i|<+\infty$ 内的洛朗展开式为_______________________.

三、若函数 $\dfrac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则称 $\{a_n\}$ 为菲波那契(Fibonacci)数列，试确定 a_n 满足的递推关系式，并明确给出 a_n 的表达式.

四、试证明

1. $\left|e^{z}-1\right| \le e^{|z|}-1 \le |z|e^{|z|} \quad (|z|<+\infty)$;

2. $(3-e)|z| \le \left|e^{z}-1\right| \le (e-1)|z| \quad (|z|<1)$;

五、设函数 $f(z)$ 在圆域 $|z|<R$ 内解析，$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$ 试证

1. $S_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=r} f(\xi)\frac{\xi^{n+1}-z^{n+1}}{\xi-z}\frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \quad (|z|<r<R)$.

2. $f(z)-S_n(z)=\frac{z^{n+1}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}(\xi-z)}d\xi \quad (|z|<r<R)$。

六、设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ 的和函数，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 之值.

七、设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n \ (|z|<R_1),\ g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n z^n \ (|z|<R_2)$，则对任意的 $r(0<r<R_1)$，在 $|z|<rR_2$ 内 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=r} f(\xi)g(\frac{z}{\xi})\frac{d\xi}{\xi}$。

八、设在 $|z|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 有泰勒展开式 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$

试证当 $0\le r<R$ 时 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}$.

九、将函数 $\frac{\ln(2-z)}{z(z-1)}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数.

十、试证在 $0<|z|<+\infty$ 内下列展开式成立：

$$e^{z+\frac{1}{z}}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z^n+\frac{1}{z^n}) \text{其中} c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2\cos\theta}\cos n\theta d\theta \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

答案