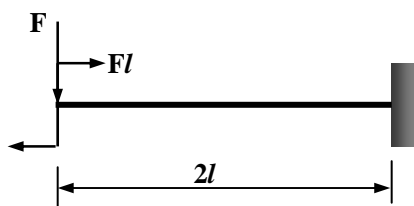


试卷一参考答案

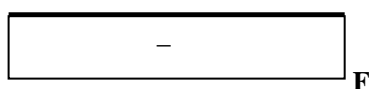
材料力学 A (I) 期末考试卷(A 卷) (参考答案)

1. 悬臂梁长  $2l$ ，自由端作用向下集中力  $F$  和力偶  $Fl$ 。试画梁的剪力弯矩图，并画出梁变形时挠曲轴的大致形状。(12 分)

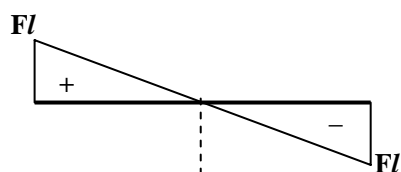


答案:

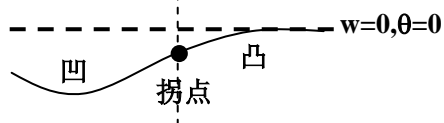
$F_s$  图:



$M$  图:



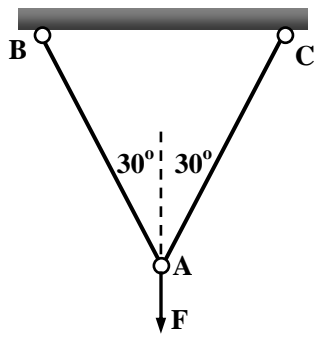
挠曲轴大致形状:



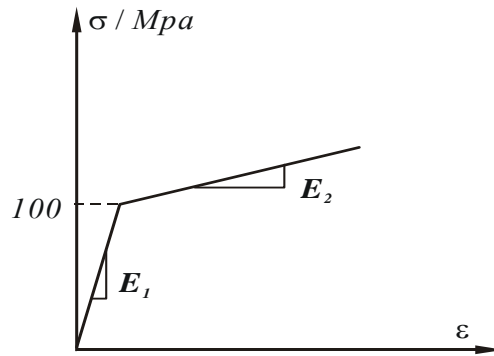
2. 图 a 所示简单杆系的两杆长  $l = 1\text{m}$ ，横截面积  $A = 100\text{mm}^2$ ，材料的应力应变关系如图 b 所示， $E_1 = 100\text{GPa}$ ， $E_2 = 10\text{GPa}$ ，试求两杆的应力和 A 点的铅垂位移。(15 分)

(1) 铅垂载荷  $F = 10\sqrt{3}\text{KN}$ ;

(2) 铅垂载荷  $F = 11\sqrt{3}\text{KN}$



图(a)



图(b)

解：(1) 当  $F = 10\sqrt{3}KN$  时， $F_{N,AB} = F_{N,AC} = F / (2 \cos 30^\circ) = 10KN$

$$\sigma_{AB} = \sigma_{AC} = 4F / (\pi d^2) = 100MPa$$

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} = Fl / (EA) = 1mm$$

$$f_A = \Delta l_{AB} / \cos 30^\circ = 1.15mm$$

(2) 当  $F = 11\sqrt{3}KN$  时， $F_{N,AB} = F_{N,AC} = F / (2 \cos 30^\circ) = 11KN$

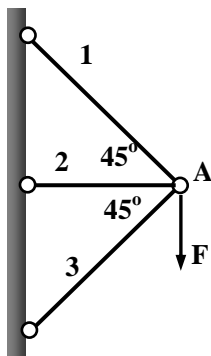
$$\sigma_{AB} = \sigma_{AC} = 4F / (\pi d^2) = 110MPa$$

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} = \frac{100}{100 \times 10^3} \times 1 \times 10^3 + \frac{10}{10 \times 10^3} \times 1 \times 10^3 = 2mm$$

$$f_A = \Delta l_{AB} / \cos 30^\circ = 2.31mm$$

3. 图示三杆桁架，杆 2 水平，A 点承受铅垂载荷  $F$ ，求各杆内力。(15 分)

- (1) 三杆拉压刚度均为  $EA$ ；
- (2) 杆 1 为刚性杆，杆 2 与杆 3 拉压刚度为  $EA$ ；



解：（1）根据反对称性，可得：

$$F_{N2} = 0$$

$$F_{N1} = -F_{N3} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

（2）

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 \times \cos 45^\circ$$

$$\Delta l_2 = F_2 l_2 / EA$$

$$\Delta l_3 = F_3 l_3 / EA$$

$$F_1 \times \sin 45^\circ + F_3 \times \sin 45^\circ = F$$

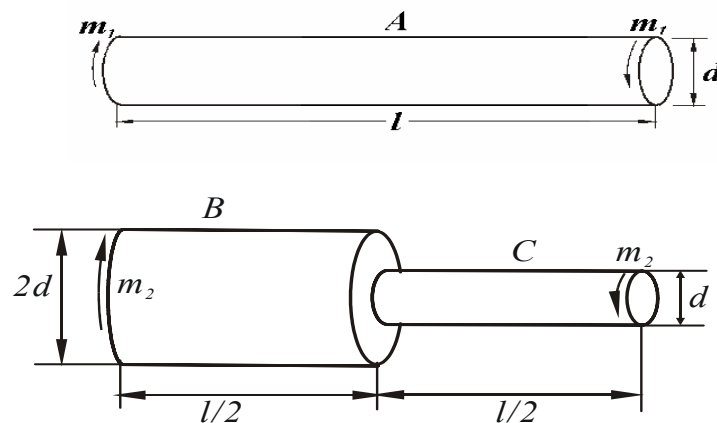
$$F_1 \times \cos 45^\circ = F_3 \times \cos 45^\circ + F_2$$

解得：

$$F_2 = F_3 = (\sqrt{2} - 1)F$$

$$F_1 = F$$

4. 如图所示等截面轴和阶梯轴的参数为：长  $l = 1\text{m}$ ，直径  $d = 20\text{mm}$ ，两轴的两端截面相对扭转角均为  $\varphi = 0.1\text{rad}$ ，材料剪切模量  $G = 80\text{GPa}$ ，试求两轴在两端的外力偶  $m_1$  和  $m_2$ 。（13 分）



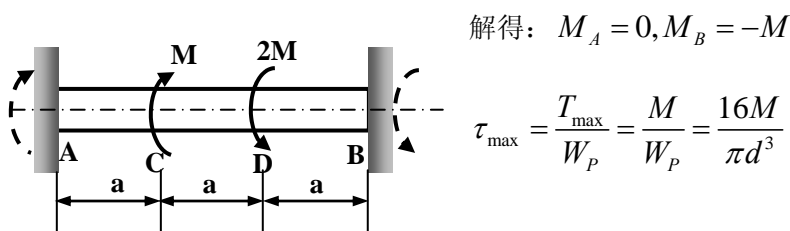
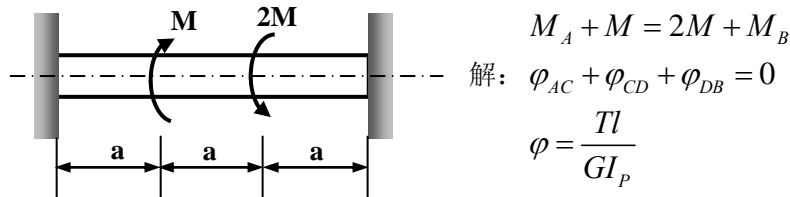
解：等截面圆轴：

$$\varphi = \frac{m_1 l}{GI_p} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 1.257 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

阶梯轴：

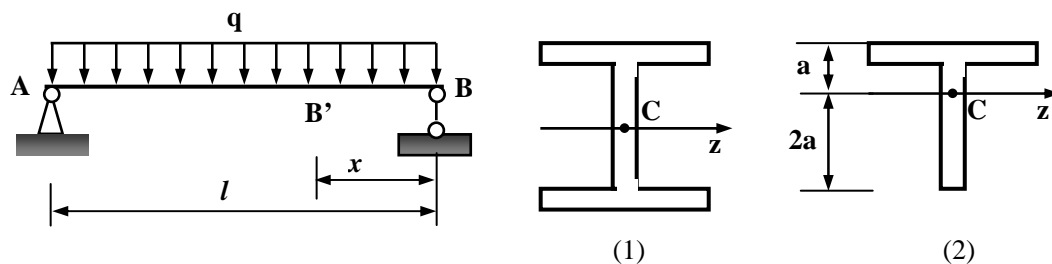
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{m_2 l / 2}{GI_{p1}} + \frac{m_2 l / 2}{GI_{p2}} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 2.365 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

5. 求图示轴的最大扭转切应力。已知轴的直径为  $d$ ，外扭矩距分别为  $M$  和  $2M$ ，轴的变形在线弹性变形范围内。(15 分)



6. 图所示铸铁梁长  $l$ ， $[\sigma_c] = 4[\sigma_t]$ ，其中  $[\sigma_t]$  和  $[\sigma_c]$  分别为拉、压许用应力。支座 B 可移动，则当支座 B 向内移动多少时，梁的许用载荷  $q$  为最大。(15 分)

- (1) 梁横截面为对称的工字形；  
 (2) 梁横截面为 T 形， $c$  为截面形心；



解:  $R_B = \frac{ql^2}{2(l-x)}, R_A = \frac{ql(l-2x)}{2(l-x)}$

$$M_{-, \max} = \frac{qx^2}{2},$$

$$M_{+, \max} = M_{F_3=0} = \frac{ql(l-2x)}{2(l-x)} \times \frac{l(l-2x)}{2(l-x)} - \frac{q}{2} \times \left( \frac{l(l-2x)}{2(l-x)} \right)^2 = \frac{q}{2} \times \left( \frac{l(l-2x)}{2(l-x)} \right)^2$$

- (1) 梁横截面为对称的工字形：

当  $M_{-, \max} = M_{+, \max}$  时， $[q]$  最大

$$\frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2} \left( \frac{l(l-2x)}{2(l-x)} \right)^2 \Rightarrow x = \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) l$$

(2) 梁横截面为 T 字形:

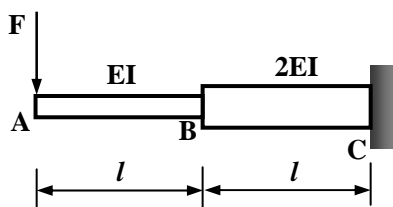
$$\text{在 } M_{-, \max} \text{ 处: } \sigma_{+, \max} = \frac{M_{-, \max} \times a}{I_z}, \sigma_{-, \max} = \frac{M_{-, \max} \times 2a}{I_z}$$

$$\text{在 } M_{+, \max} \text{ 处: } \sigma_{+, \max} = \frac{M_{+, \max} \times 2a}{I_z}, \sigma_{-, \max} = \frac{M_{+, \max} \times a}{I_z}$$

由于,  $[\sigma_c] = 4[\sigma_t]$ , 故当  $\frac{M_{-, \max} \times a}{I_z} = \frac{M_{+, \max} \times 2a}{I_z}$  时,  $[q]$  最大

解得:  $x = 0.34l, x = 0.66l$  (舍去)

7. 试求图示阶梯悬臂梁自由端 A 的挠度。 (15 分)



解: 刚化 BC:

$$w_{A1} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

刚化 AB:

$$w_B = \frac{Fl^3}{6EI} + \frac{Fl^3}{4EI}$$

$$\theta_B = \frac{Fl^2}{4EI} + \frac{Fl^2}{2EI}$$

综合得:

$$w_A = w_{A1} + w_B + l_{BC} \times \theta_B = \frac{3Fl^3}{2EI}$$

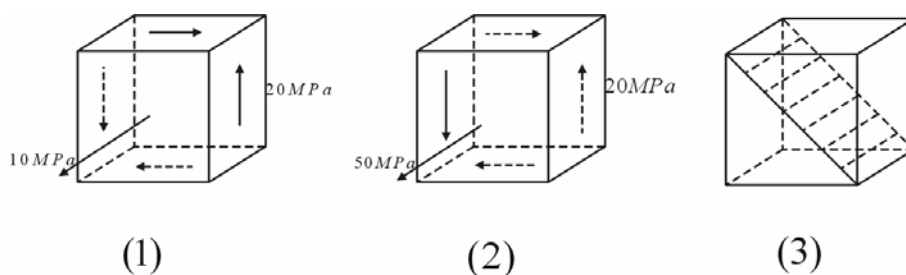
## 试卷二参考答案

### 2004—2005 年度第二学期材料力学期末考试试卷（答案）

#### 一、单选题或多选题（每题 5 分，部分选对 3 分，出现选错 0 分）

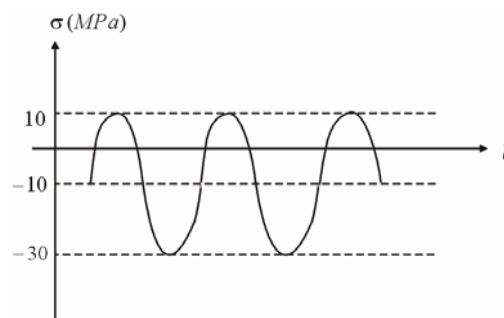
1、下述说法正确的是 (A、D)。

- A. 图（1）所示单元体最大正应力作用面是图（3）阴影面
- B. 图（1）所示单元体最大正应力作用面不是图（3）阴影面
- C. 图（2）所示单元体最大正应力作用面是图（3）阴影面
- D. 图（2）所示单元体最大正应力作用面不是图（3）阴影面



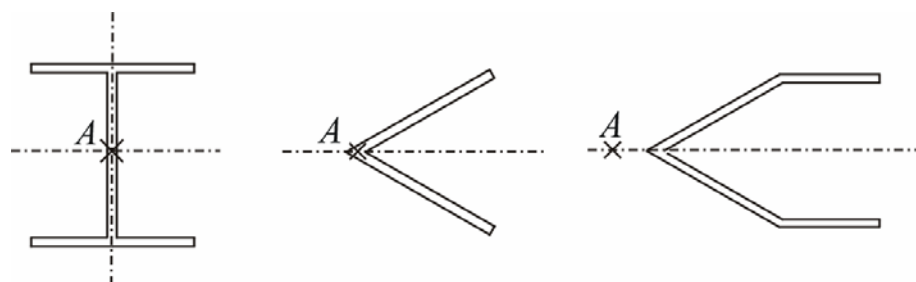
2、恒幅循环应力变化如图，则 (A、C)。

- A. 循环特征为 -3
- B. 循环特征为 3
- C. 应力幅为 20MPa
- D. 应力幅为 40MPa



#### 二、填空题（5 分）

试标出下述截面图形剪心的大致位置



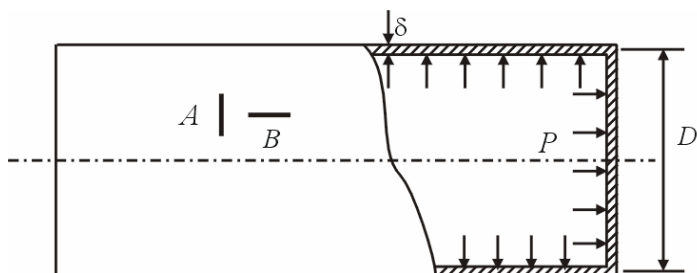
#### 三、计算题

1、如图，薄壁圆筒内径  $D = 500 \text{ mm}$  壁厚  $\delta = 10 \text{ mm}$ ，材料弹性模量  $E = 200 \text{ GPa}$ ，

泊松比  $\mu = 0.25$ 。为测量内压  $P$ ，沿周向贴应变片 A，沿轴向贴应变片 B。

- (1) 从测量精度考虑，由应变片 A 的测量方案还是由应变片 B 的测量方案较佳？
- (2) 已测得应变片 B 的应变  $\varepsilon_B = 120 \times 10^{-6}$ ， $\varepsilon_A$  等于多少（不计实验误差）？
- (3) 计算轴向应力  $\sigma_x$  与周向应力  $\sigma_t$ 。

(4) 计算薄壁圆筒的内压  $P$ 。



解：(1) 圆筒的轴向应力  $\sigma_x$  和周向应力  $\sigma_t$  的公式分别为：

$$\sigma_x = \frac{PD}{4\delta}, \quad \sigma_t = \frac{PD}{2\delta} \quad (\text{a})$$

轴向与周向为应力主方向，同时也应为应变主方向，且周向应变大于轴向应变，从测量精度考虑，由应变片 A 测量的方案较佳。

(2) 由广义胡克定律

$$\sigma_x = \frac{E(\varepsilon_B + \mu\varepsilon_A)}{1 - \mu^2}, \quad \sigma_t = \frac{E(\varepsilon_A + \mu\varepsilon_B)}{1 - \mu^2} \quad (\text{b})$$

由式 (a)

$$\sigma_t = 2\sigma_x$$

故 
$$\frac{E(\varepsilon_A + \mu\varepsilon_B)}{1 - \mu^2} = \frac{2E(\varepsilon_B + \mu\varepsilon_A)}{1 - \mu^2}$$

$$\varepsilon_A = \frac{2 - \mu}{1 - 2\mu} \varepsilon_B = 420 \times 10^{-6}$$

(3) 由式 (b)

$$\sigma_x = 48 \text{ MPa}, \quad \sigma_t = 96 \text{ MPa}$$

(4) 由式 (a)

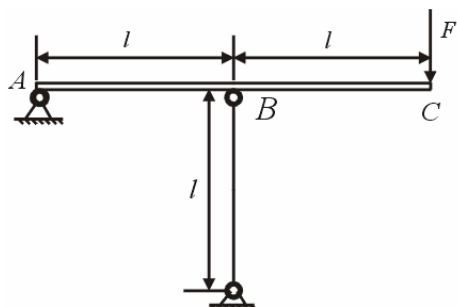
$$P = \frac{4\delta\sigma_x}{D} = \frac{4 \times 10 \times 48}{500} = 3.84 \text{ MPa}$$

2、图示低碳钢梁柱结构， $l = 1\text{m}$ ， $E = 200\text{GPa}$ ，强度杆许用应力 $[\sigma] = 120\text{MPa}$ ，

梁的截面为宽  $b = 50\text{mm}$ ，高  $h = 80\text{mm}$  的矩形，柱的截面为  $d = 20\text{mm}$  的圆形，

稳定安全系数  $n_{st} = 3$ ，对中柔度杆  $\sigma_{cr} = a - b\lambda$ ， $a = 304\text{MPa}$ ， $b = 1.12\text{MPa}$ ，

$\lambda_0 = 61$ ,  $\lambda_p = 101$ , 只考虑在结构自身平面内失稳, 试确定结构的许用载荷。



解: (1) 梁 ABC 的强度, 最大弯矩发生在梁的中点 B

$$M_{\max} = Fl$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{6Fl}{bh^2} \leq [\sigma]$$

$$\text{故 } [F]_1 = \frac{bh^2[\sigma]}{6l} = \frac{50 \times 80^2 \times 120}{6 \times 1000} = 6400N = 6.4kN$$

(2) 研究压杆 BD 的稳定性

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{4\mu l}{d} = \frac{4 \times 1 \times 1000}{20} = 200 > \lambda_p$$

所以 BD 为大柔度杆。

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} = \frac{\pi^3 Ed^2}{4\lambda^2} = \frac{\pi^3 \times 2 \times 10^5 \times 20^2}{4 \times 200^2} = 15503N = 15.503kN$$

BD 杆许用临界压力

$$[F]_{cr} = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = \frac{15.503}{3} = 5.168kN$$

由梁的平衡, 载荷 F 对应 BD 压杆稳定性的许用值

$$[F]_2 = \frac{1}{2}[F]_{cr} = 2.584kN$$

故结构的许用载荷

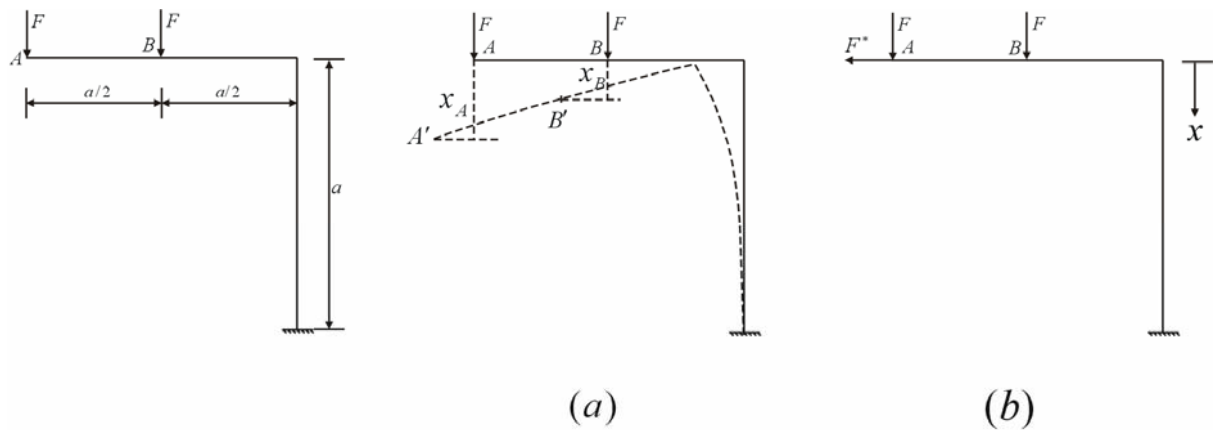
$$[F] = \min\{[F]_1, [F]_2\} = [F]_2 = 2.584kN$$

3、图示等截面线弹性刚架弯曲刚度 EI。

(1) 试解释  $\frac{\partial V_\epsilon}{\partial F}$  的几何意义, 其中  $V_\epsilon$  为刚架的应变能;

(2) 用卡氏第二定理求 A 点的水平位移 (忽略轴力引起的变形)。





解：(1) 如图 (a) 所示， $\frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial F} = x_A + x_B$ ，等于 A 点和 B 点的铅垂位移之和。

(2) 如图 (b)，在 A 点附加一水平力  $F^*$ ，则横杆的应变能  $V^{(1)}(F)$  与  $F^*$  无关，竖

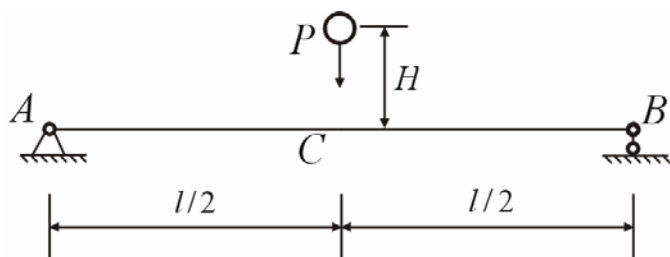
杆的应变能为  $V_{\varepsilon}^{(2)}$ ，弯矩  $M(x) = \frac{3}{2}Fa + F^*x$

$$\begin{aligned}\Delta_A &= \left. \frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial F^*} \right|_{F^*=0} = \left. \frac{\partial V_{\varepsilon}^{(2)}}{\partial F^*} \right|_{F^*=0} \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^a M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial F^*} dx \Big|_{F^*=0} \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^a \left( \frac{3}{2}Fa + F^*x \right) x dx \Big|_{F^*=0} \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^a \frac{3}{2}Fax dx \\ &= \frac{3Fa^3}{4EI} (\leftarrow)\end{aligned}$$

4、如图，重量为  $P$  的物体自高度  $H$  自由下落到长  $l$  的简支梁中点  $C$ ，梁的弯曲刚度为  $EI$ ，抗弯截面模量  $W$ ，且设  $EIH/(Pl^3)=15/4$ 。

(1) 试求梁中点  $C$  的最大挠度  $w_d$  和最大动应力  $\sigma_d$

(2) 如果梁的长度增加一倍成为  $2l$ ，其余条件不变，则最大动挠度和最大动应力分别增加（或减小）百分之几？



解：（1）简支梁 AB 中点 C 作用大小为 P 的静载时，C 点静挠度与最大静应力分别为：

$$\Delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI}, \quad \sigma_{st} = \frac{Pl}{4W}$$

动载系数

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{96EIH}{Pl^3}} = 20$$

故最大动挠度和最大动应力分别为：

$$\Delta_d = K_d \Delta_{st} = \frac{5Pl^3}{12EI}, \quad \sigma_d = K_d \sigma_{st} = \frac{5Pl}{W}$$

（2）当梁的长度增加一倍时，

$$\Delta_{st}' = \frac{P(2l)^3}{48EI} = \frac{Pl^3}{6EI}, \quad \sigma_{st}' = \frac{P(2l)}{4W} = \frac{Pl}{2W}$$

动载系数

$$K_d' = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}'}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{12EIH}{Pl^3}} = 1 + \sqrt{46} = 7.782$$

$$\Delta_d' = K_d' \Delta_{st}' = \frac{1.297 Pl^3}{EI}$$

$$\sigma_d' = K_d' \sigma_{st}' = \frac{3.891 Pl}{W}$$

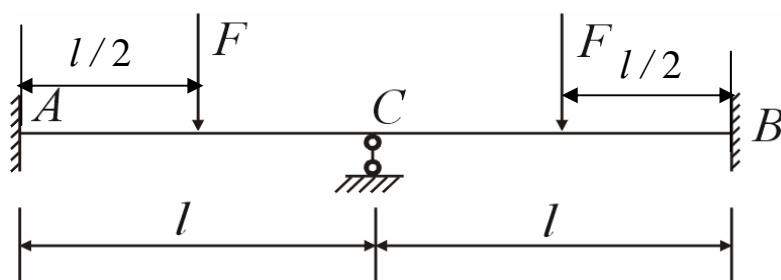
故梁的最大动挠度增加

$$\frac{\Delta_d' - \Delta_d}{\Delta_d} = 211\%$$

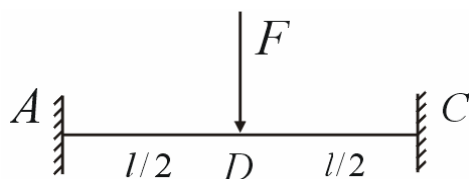
梁的最大动应力减小

$$\frac{\sigma_d - \sigma_d'}{\sigma_d} = 22.2\%$$

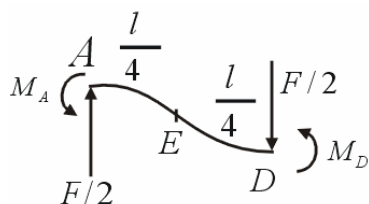
5、图示两端固支梁弯曲刚度 EI，试求 A 端约束反力。



解：由 ACB 对称性，得 C 点： $\theta_c = 0$ ， $\Delta_c = 0$ ；由 C 点铰支，得  $w_c = 0$ 。故 C 点可看作固支点



由 ADC 对称性，得 D 点： $\theta_D = 0$ ， $\Delta_D = 0$

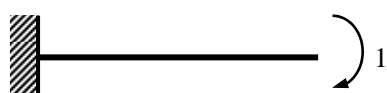
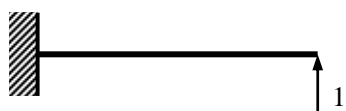
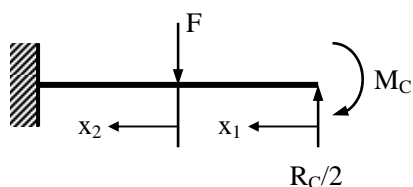


由 AED 反对称，得  $F_{Ay} = \frac{F}{2} (\uparrow)$

$$M_E = 0,$$

$$M_A = \frac{F}{2} \times \frac{l}{4} = \frac{Fl}{8}$$

解法二：



$$M(x_1) = R_C x_1 / 2 - M_C$$

$$M(x_2) = R_C (l/2 + x_2) / 2 - M_C - F x_2$$

$$\bar{M}(x_1) = x_1 \quad M(x_2) = (l/2 + x_2)$$

$$\bar{M}(x_1) = -1 \quad M(x_2) = -1$$

$$\theta_C = 0 \quad f_C = 0$$

$$R_C = F \quad M_C = Fl/8$$

$$R_A = F/2 \quad M_A = Fl/8$$