第一章　复数与复变函数

一、　　选择题

1．当$z=\dfrac{1+i}{1-i}$时，$z^{100}+z^{75}+z^{50}$的值等于（　　）

（A）i　　　　（B）$-i$　　　　（C）1　　　　（D）-1

2．设复数z满足$arc(z+2)=\dfrac{\pi}{3}$，$arc(z-2)=\dfrac{5\pi}{6}$，那么$z=$（　　）

（A）$-1+\sqrt{3}i$　　（B）$-\sqrt{3}+i$　　（C）$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　（D）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

3．复数$z=\tan\theta-i\,(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi)$的三角表示式是（　　）

（A）$\sec\theta[\cos(\dfrac{\pi}{2}+\theta)+i\sin(\dfrac{\pi}{2}+\theta)]$　　（B）$\sec\theta[\cos(\dfrac{3\pi}{2}+\theta)+i\sin(\dfrac{3\pi}{2}+\theta)]$

（C）$-\sec\theta[\cos(\dfrac{3\pi}{2}+\theta)+i\sin(\dfrac{3\pi}{2}+\theta)]$（D）$-\sec\theta[\cos(\dfrac{\pi}{2}+\theta)+i\sin(\dfrac{\pi}{2}+\theta)]$

4．若z为非零复数，则$\left|z^2-\bar{z}^2\right|$与$2z\bar{z}$的关系是（　　）

（A）$\left|z^2-\bar{z}^2\right|\ge 2z\bar{z}$　　　　（B）$\left|z^2-\bar{z}^2\right|=2z\bar{z}$

（C）$\left|z^2-\bar{z}^2\right|\le 2z\bar{z}$　　　　（D）不能比较大小

5．设x,y为实数，$z_1=x+\sqrt{11}+yi, z_2=x-\sqrt{11}+yi$且有$\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=12$，则动点$(x,y)$的轨迹是（　　）

（A）圆　　　（B）椭圆　　　（C）双曲线　　　（D）抛物线

6．一个向量顺时针旋转$\dfrac{\pi}{3}$，向右平移 3 个单位，再向下平移 1 个单位后对应的复数为$1-\sqrt{3}i$，则原向量对应的复数是（　　）

（A）2　　　（B）$1+\sqrt{3}i$　　　（C）$\sqrt{3}-i$　　　（D）$\sqrt{3}+i$

7．使得 $z^2=|z|^2$ 成立的复数 z 是（　　）

（A）不存在的　　（B）唯一的　　（C）纯虚数　　（D）实数

8．设 z 为复数，则方程 $z+|\bar{z}|=2+i$ 的解是（　　）

（A）$-\frac{3}{4}+i$　　（B）$\frac{3}{4}+i$　　（C）$\frac{3}{4}-i$　　（D）$-\frac{3}{4}-i$

9．满足不等式 $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|\le 2$ 的所有点 z 构成的集合是（　　）

（A）有界区域　　（B）无界区域　　（C）有界闭区域　　（D）无界闭区域

10．方程 $|z+2-3i|=\sqrt{2}$ 所代表的曲线是（　　）

（A）中心为 $2-3i$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周　　（B）中心为 $-2+3i$，半径为 2 的圆周

（C）中心为 $-2+3i$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周　　（D）中心为 $2-3i$，半径为 2 的圆周

11．下列方程所表示的曲线中，不是圆周的为（　　）

（A）$\left|\frac{z-1}{z+2}\right|=2$　　（B）$|z+3|-|z-3|=4$

（C）$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=1\ (|a|<1)$　　（D）$z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{a}-c=0\ (c>0)$

12．设 $f(z)=1-\bar{z}, z_1=2+3i, z_2=5-i,$，则 $f(\overline{z_1-z_2})=$（　　）

（A）$-4-4i$　　（B）$4+4i$　　（C）$4-4i$　　（D）$-4+4i$

13．$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(z_0)}{z-z_0}$（　　）

（A）等于 i　　（B）等于 $-i$　　（C）等于 0　　（D）不存在

14．函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充要条件是（　　）

（A）$u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续　　（B）$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

（C）$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续（D）$u(x,y)+v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

15．设 $z \in C$ 且 $|z| = 1$，则函数 $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 1}{z}$ 的最小值为（　　）

（A）-3　　　（B）-2　　　（C）-1　　　（D）1

二、填空题

1．设 $z = \dfrac{(1+i)(2-i)(3-i)}{(3+i)(2+i)}$，则 $|z| =$ ________

2．设 $z = (2-3i)(-2+i)$，则 $\arg z =$ ________

3．设 $|z| = \sqrt{5}, \arg(z-i) = \dfrac{3\pi}{4}$，则 $z =$ ________

4．复数 $\dfrac{(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^2}$ 的指数表示式为________

5．以方程 $z^6 = 7 - \sqrt{15}i$ 的根的对应点为顶点的多边形的面积为________

6．不等式 $|z-2| + |z+2| < 5$ 所表示的区域是曲线________的内部

7．方程 $\left|\dfrac{2z-1-i}{2-(1-i)z}\right| = 1$ 所表示曲线的直角坐标方程为________

8．方程 $|z+1-2i| = |z-2+i|$ 所表示的曲线是连续点________和________的线段的垂直平分线

9．对于映射 $\omega = \dfrac{i}{z}$，圆周 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的像曲线为________

10．$\lim\limits_{z \to 1+i} (1 + z^2 + 2z^4) =$ ________

三、若复数 z 满足 $z\bar{z} + (1-2i)z + (1+2i)\bar{z} + 3 = 0$，试求 $|z+2|$ 的取值范围.

四、设 $a \geq 0$，在复数集 C 中解方程 $z^2 + 2|z| = a$.

五、设复数 $z \neq \pm i$，试证 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数的充要条件为 $|z| = 1$ 或 $IM(z) = 0$.

六、对于映射 $\omega = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$，求出圆周 $|z| = 4$ 的像.

七、试证 1 . $\dfrac{z_1}{z_2} \geq 0\ (z_2 \neq 0)$ 的充要条件为 $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$；

2 . $\dfrac{z_1}{z_2} \geq 0\ (z_j \neq 0, k \neq j, k, j = 1,2,\cdots,n))$ 的充要条件为

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

八、若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(z) = A \neq 0$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z)| > \dfrac{1}{2}|A|$.

九、设 $z = x + iy$，试证 $\dfrac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|$.

十、设 $z = x + iy$，试讨论下列函数的连续性：

$$1.\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

$$2.\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$$

答案