第三节　柯西积分公式

- 一、柯西积分公式
- 二、典型例题
- 三、小结与思考

一、柯西积分公式

特殊情况：

C是D中任一包含z的闭曲线，$f(z)=1$，

由重要公式得到 $$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \oint_C \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i.$$

问题的提出

一般地，C是D中任一包含z的简单闭曲线(正向)，$f(z)$是D上任一解析函数，

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \quad ?$$

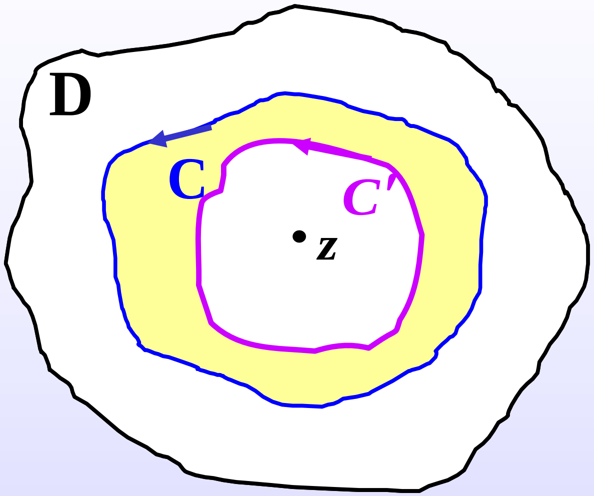
分析：

(1) 与曲线C的关系

设C'是D中另一条包含z的简单闭曲线(正向),

由多连通区域的柯西定理得

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \int_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta .$$



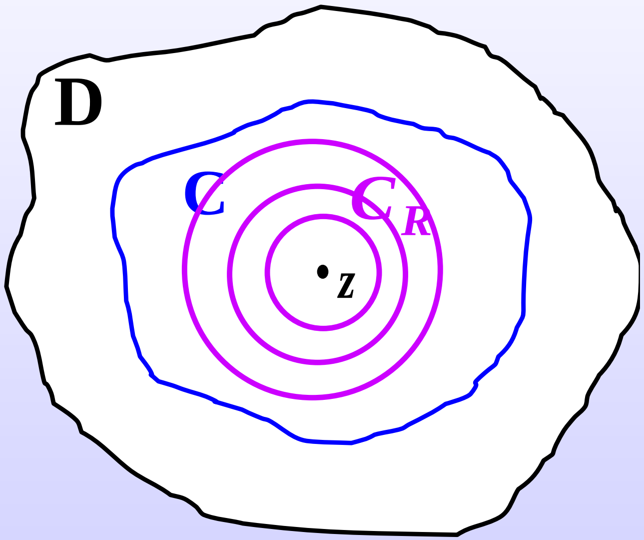
结论1：积分值不随曲线改变.

(2) 与函数 $f(z)$ 的关系

取圆周曲线$C_R: |\zeta - z| = R$,

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta. \quad \rightarrow \int_{C_R}\frac{f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

结论2：积分值只与 $f(z)$ 有关.



(3) 可能积分值

由于$\displaystyle\int_{C_R}\frac{f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = 2\pi i f(z)$.

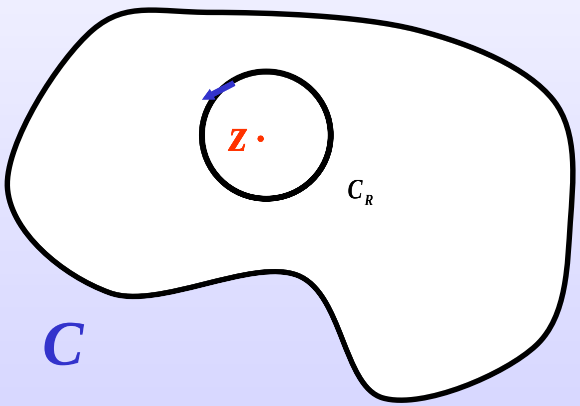
结论3：可能积分值等于$2\pi i\ f(z)$.

即 $$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = 2\pi i\, f(z).$$

定理 设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则对于 D 内任一点 z, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

证 以 z 为中心，充分小的正数 R 为半径作圆 C_R：$|\zeta-z|=R$ 使得 C_R 及其内部完全含于 D 内，所以



机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

要证明定理成立，只需证明

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

因为 $f(z)$ 在 $\zeta = z$ 解析，所以 $f(z)$ 在 $\zeta = z$ 连续，

则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $|\zeta - z| < \delta$ 时,

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

于是当 $R < \delta$ 时, 对于圆周上的点 ζ 都满足 $|\zeta - z| < \delta$,

所以

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-f(z)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|}|\mathrm{d}\zeta|$$

$$<\frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{R}\cdot 2\pi R=\varepsilon.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

平均值公式:

一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

如果 C 是圆周 $z = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r \cdot e^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

$$(0 < r \le R)$$

二、典型例题

例1 求积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\dfrac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$

解 因为 $f(z)=\sin z$ 在复平面内解析,

且 $z=0$ 位于 $|z|<4$ 内, 由柯西积分公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z \quad =\sin z\Big|_{z=0}=0$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

例2 计算积分 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz$

解 由于积分曲线内只有一个奇点 $z_0 = i$,

所以 $$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)} = \frac{\boxed{\frac{1}{z(z+i)}}}{z-i} \quad \boxed{\frac{1}{z(z+i)}} = f(z)$$

显然 $f(z)$ 在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 内解析，由柯西积分公式

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z(z+i)}}{z-i} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{z(z+i)}\bigg|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i^2} = -\pi i.$$

例3 求积分

$$\int_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$$

的值.

解: $$\int_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$$

$$=\int_{|z|=2}\frac{\dfrac{z}{(9-z^2)}}{(z-(-i))}dz=2\pi i\frac{z}{9-z^2}\Big|_{z=-i}=\frac{\pi}{5}.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例4 设 C 表示正向圆周 $x^2+y^2=3$,

$$f(z)=\int_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,$$ 求 $f'(1+i)$.

解 根据柯西积分公式知, 当 z 在 C 内时,

$$f(z)=2\pi i\cdot(3\xi^2+7\xi+1)\Big|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

故 $f'(z)=2\pi i(6z+7)$, 而 $1+i$ 在 C 内,

所以 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$.

例5 计算积分 $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中$C:(1)\ |z+1|=\dfrac{1}{2}$;

解 (1) $\displaystyle\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i\cdot\left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right|_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

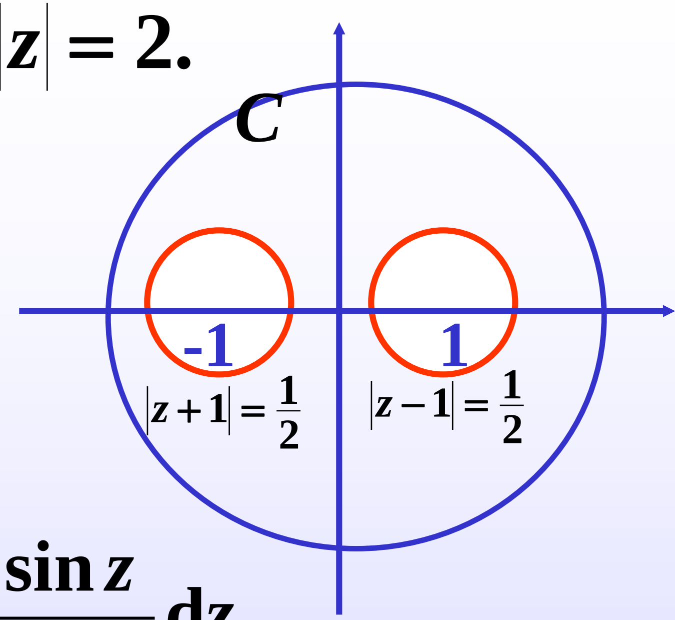
例5 计算积分 $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中$C:(2)\ |z-1|=\dfrac{1}{2}$;

解 (2) $$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例6 计算积分 $\oint_C \frac{\sin z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中 $C: |z| = 2.$



解 积分曲线内有两个奇点 $z_0 = \pm 1,$

则

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z^2-1}\mathrm{d}z + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z^2-1}\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i \sin z\Big|_{z=-1} + \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \sin z\Big|_{z=1} = 2\pi i \sin 1.$$

课堂练习 计算积分 $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} \mathrm{d}z.$

答案 有三个奇点 $z=0, z=1, z=-1$

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} \mathrm{d}z = \oint_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{e^z}{z^2-1}}{z} \mathrm{d}z + \oint_{|z-1|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{e^z}{z(z+1)}}{z-1} \mathrm{d}z + \oint_{|z+1|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{e^z}{z(z-1)}}{z+1} \mathrm{d}z$$

$$= \pi i(e + e^{-1} - 2).$$

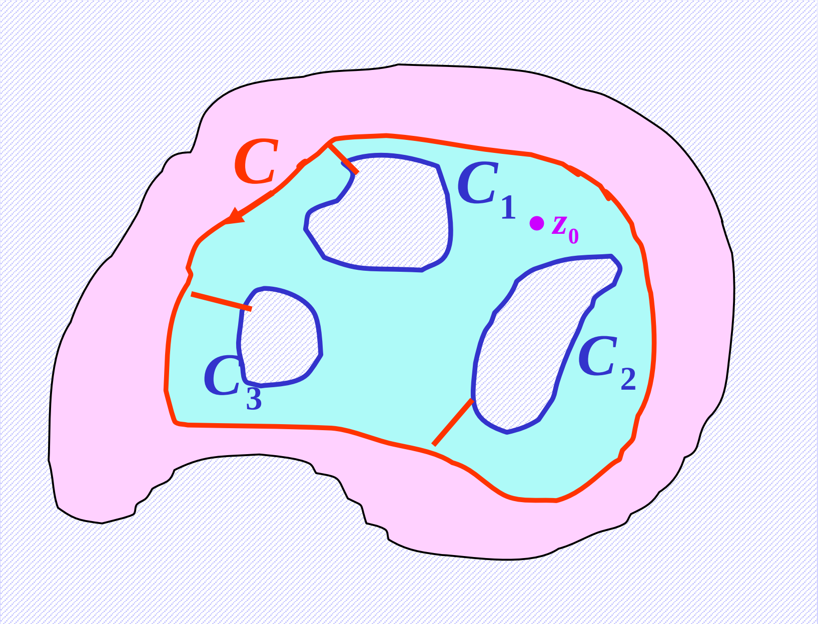
机动 目录 上页 下页 返回 结束

柯西积分公式的推广(多连通)

定理2 如果函数 $f(z)$ 在多连通区域 D 内处处解析,

设 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + C_3^-$ 为 D 内的任何一条复合封闭曲线, z_0 为 C 内任一点(如图), 那末

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$



提示: 仿照多连通区域的柯西定理的证明方法, 即添加几条直线使成为几个单连通区域.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

三、小结与思考

柯西积分公式是复积分计算中的重要公式，它的证明基于柯西定理，它的重要性在于：一个解析函数在区域内部的值可以用它在边界上的值通过积分表示，所以它是研究解析函数的重要工具.

柯西积分公式： $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$

作业：P49 8,10

放映结束，按Esc退出.

机动 目录 上页 下页 返回 结束