

# 第六节 解析函数与调和函数的关系

- 一、解析函数与调和函数
- 二、由调和函数求解析函数
- 三、小结与思考

# 一、解析函数与调和函数

## 1. 两者的关系

设  $w = f(z) = u + iv$  为  $D$  内的一个解析函数,

那末 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

从而 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

根据解析函数高阶导数定理,

$u$  与  $v$  具有任意阶的连续偏导数,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

从而  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 同理  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ ,

定义 如果二元实变函数  $\varphi(x, y)$  在区域  $D$  内具有二阶连续偏导数, 并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

那末称  $\varphi(x, y)$  为区域  $D$  内的调和函数 拉普拉斯

另外

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

是一种运算符号, 称为拉普拉斯算子.

## 2. 共轭调和函数的定义

**定义** 设 $u(x, y), v(x, y)$ 都是区域 $D$ 内的调和函数, 若 $u(x, y), v(x, y)$ 满足C-R方程, 则称 $v(x, y)$ 是 $u(x, y)$ 的**共轭调和函数**.

**定理** 函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 $D$ 内解析的充分必要条件是 $v(x, y)$ 是 $u(x, y)$ 的共轭调和函数.

## 二、由调和函数求解析函数

### 1. 偏积分法

利用C—R方程求得它的共轭调和函数  $v$ , 从而构成一个解析函数  $u+vi$ . 这种方法称为偏积分法.

例1 证明  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  为调和函数, 并求其共轭调和函数  $v(x, y)$  和由它们构成的解析函数.

解 因为  $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x,$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x,$

于是  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 故  $u(x, y)$  为调和函数.

$$\text{因为 } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,$$

$$v(x, y) = \int (3x^2 - 3y^2) dy = 3x^2 y - y^3 + \varphi(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \varphi'(x),$$

$$\text{又因为 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy = 6xy + \varphi'(x)$$

故  $\varphi(x) = C$ ,  $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + c$ ,

得一个解析函数

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C) \\ &= z^3 + iC. \end{aligned}$$

**课后练习** 证明  $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$  为调和函数, 并求其共轭调和函数.

**答案**  $v(x, y) = 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + 2x^3 + c$ .

( $C$  为任意常数)



## 2. 不定积分法

已知调和函数  $u(x, y)$  或  $v(x, y)$ , 用不定积分求解析函数的方法称为不定积分法.

不定积分法的实施过程:

解析函数  $f(z) = u + iv$  的导数  $f'(z)$  仍为解析函数,

$$\text{且 } f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

把  $u_x - iu_y$  与  $v_y + iv_x$  用  $z$  来表示,

$$f'(z) = u_x - iu_y = U(z), \quad f'(z) = v_y + iv_x = V(z),$$

将上两式积分, 得

$$f(z) = \int U(z) dz + c,$$

适用于已知实部  $u$  求  $f(z)$ ,

$$f(z) = \int V(z) dz + c,$$

适用于已知虚部  $v$  求  $f(z)$ ,

**例2** 求  $k$  值, 使  $u = x^2 + ky^2$  为调和函数. 再求  $v$ , 使  $f(z) = u + iv$  为解析函数, 并求  $f(i) = -1$  的  $f(z)$ .

解 因为  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ky, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2k,$$

根据调和函数的定义可得  $k = -1$ ,

$$\text{因为 } f'(z) = U(z) = u_x - iu_y = 2x - 2kyi$$

$$= 2x - 2kyi = 2x + 2yi = 2z,$$

根据不定积分法  $f(z) = \int 2zdz = z^2 + c,$

由  $f(i) = -1,$  得  $c = 0,$

所求解析函数为

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = z^2.$$

练习：用不定积分法求解解析函数  $f(z)$

实部  $u(x, y) = y^3 - 3x^2y.$

答案  $f'(z) = U(z) = u_x - iu_y$   
 $= 3i(x^2 + 2xyi - y^2) = 3iz^2,$

$$f(z) = \int 3iz^2 dz = iz^3 + c_1,$$

故  $f(z) = i(z^3 + c).$  ( $c$  为任意实常数)

**例3** 已知  $u + v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2) - 2(x + y)$ ,  
试确定解析函数  $f(z) = u + iv$ .

**解** 两边同时求导数

$$u_x + v_x = (x^2 + 4xy + y^2) + (x - y)(2x + 4y) - 2,$$

$$u_y + v_y = -(x^2 + 4xy + y^2) + (x - y)(4x + 2y) - 2,$$

$$\text{且 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

所以上面两式分别相加减可得

$$v_y = 3x^2 - 3y^2 - 2, \quad v_x = 6xy,$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y + iv_x = 3x^2 - 3y^2 - 2 + 6xyi \\ &= 3z^2 - 2, \end{aligned}$$

$$f(z) = \int (3z^2 - 2)dz = z^3 - 2z + c.$$

( $c$  为任意实常数)

### 三、小结与思考

本节我们学习了调和函数的概念、解析函数与调和函数的关系以及共轭调和函数的概念.

**应注意的是:** 1. 任意两个调和函数 $u$ 与 $v$ 所构成的函数 $u+iv$ 不一定是解析函数.

2. 满足柯西—黎曼方程 $u_x = v_y, v_x = -u_y$ 的 $v$ 称为 $u$ 的共轭调和函数,  $u$ 与 $v$ 注意的是地位不能颠倒.

作业: P50 17 (3) (4)

放映结束, 按Esc退出.