第四节 洛朗级数

- 一、问题的引入
- 二、洛朗级数的概念
- 三、函数的洛朗展开式
- 四、小结与思考

一、问题的引入

问题: 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析,是否能表示为 $z-z_0$ 的幂级数.

1.双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂项部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{正幂项部分}}$$

收敛

负幂项部分　　正幂项部分

主要部分　　解析部分

同时收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\text{令}\zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n}$$

收敛半径 R_2 ↓

收敛域 $|z-z_0| < R_2$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}$ 收敛半径 R ↓

$|\zeta| < R$时,收敛

收敛域 ↓

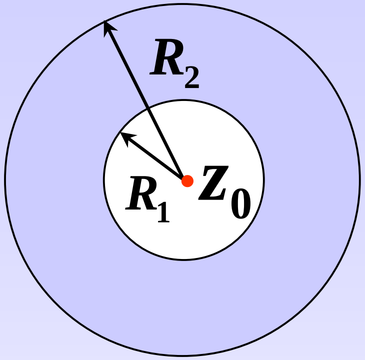
$$|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$$

若 (1) $R_1 > R_2$： 两收敛域无公共部分,

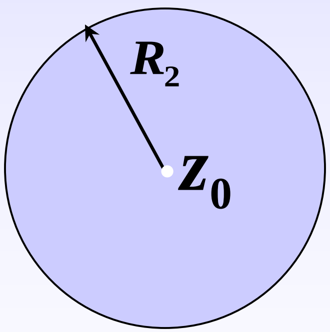
(2) $R_1 < R_2$： 两收敛域有公共部分 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

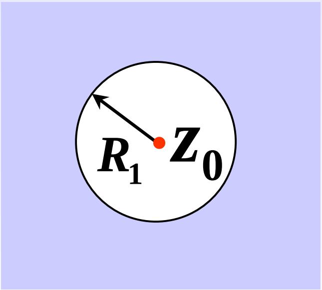
结论： 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛区域为

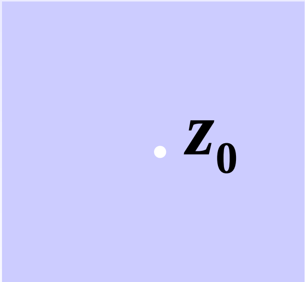
圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.



常见的特殊圆环域：







$0 < |z-z_0| < R_2$ $\quad$ $R_1 < |z-z_0| < \infty$ $\quad$ $0 < |z-z_0| < \infty$

二、洛朗级数的概念

定理 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析，那末 $f(z)$ 在 D 内可展开成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

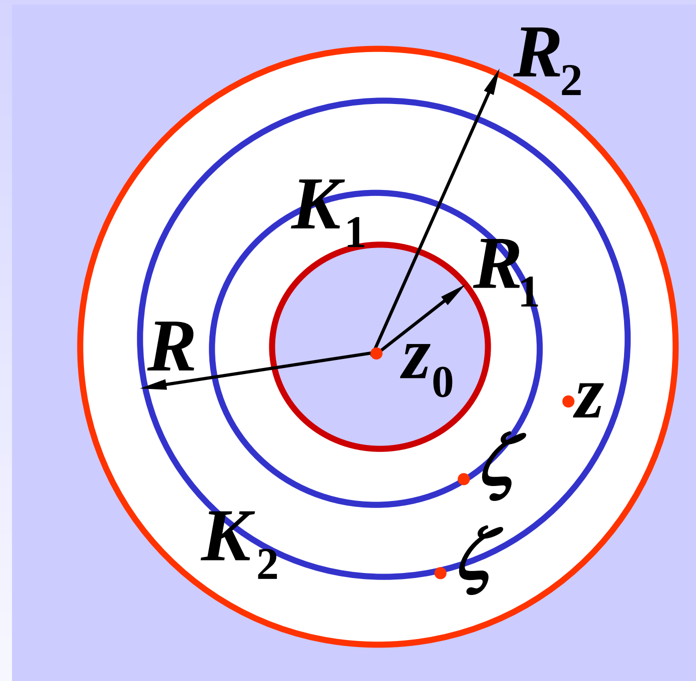
其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$ 为洛朗系数.

$$(n = 0, \pm 1, \cdots)$$

C 为圆环域内绕 z_0 的任一正向简单闭曲线.

证 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

对于第一个积分:



因为 $$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\quad\left(\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

所以 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

对于第二个积分: $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$

因为 $\dfrac{1}{\zeta - z}=\dfrac{1}{(\zeta - z_0)-(z-z_0)}=\dfrac{-1}{z-z_0}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\zeta - z_0}{z-z_0}}\quad\left(\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z-z_0}\right|<1\right)$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}(z - z_0)^{-n},$$

则 $-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z - z_0)^{-n} + R_N(z)$$

其中 $R_N(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\dfrac{(\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta)}{(z - z_0)^n}\right]\mathrm{d}\zeta$

下面证明 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z)=0$ 在 K_1外部成立.

令 $q=\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\dfrac{R_1}{|z-z_0|}$与积分变量$\zeta$无关,$0<q<1$.

又因为$|f(\zeta)|\le M$ (由$f(z)$的连续性决定)

$$|R_N(z)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{R_1}q^n\cdot 2\pi R_1 \quad =\frac{Mq^N}{1-q}.$$

所以 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z) = 0.$

于是 $-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

则 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

如果C为在圆环域内绕 z_0 的任何一条正向简单

闭曲线 . 则 c_n与c_{-n}可用一个式子表示为:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

[证毕]

说明:

1) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$f(z)$在圆环域内的洛朗(Laurent)级数.

函数 $f(z)$在圆环域内的洛朗展开式

2) 某一圆环域内的解析函数展开为含有正、负幂项的级数是唯一的， 这就是 $f(z)$ 的洛朗级数.

定理给出了将圆环域内解析的函数展为洛朗级数的一般方法.

三、函数的洛朗展开式

常用方法 : 1. 直接法　2. 间接法

1. 直接展开法

利用定理公式计算系数 c_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

然后写出　$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$

缺点: 计算往往很麻烦.

2. 间接展开法

根据正、负幂项组成的级数的唯一性, 可用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开 .

优点 : 简捷 , 快速 .

例1 在 $0 < |z| < \infty$ 内, 将 $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$ 展开成洛朗级数.

解 由定理知: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$,

其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} \mathrm{d}\zeta$

$C: |z| = \rho (0 < \rho < \infty)$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$

当$n\le -3$时，$\dfrac{e^z}{z^2}$在圆环域内解析，

故由柯西定理知：　$c_n = 0$

当$n\ge -2$时，　由高阶导数公式知：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{(n+2)!}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}z^{n+2}}(e^z)\right]_{z=0} = \frac{1}{(n+2)!}$$

故 $$f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots$$

$$0<|z|<\infty$$

机动　目录　上页　下页　返回　结束

另解

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$$

例2 将函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ 在 $0<|z|<\infty$ 内展成洛朗展式.

解 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$

$$=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-4}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

$$0<|z|<+\infty$$

例3 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在适当圆环域内展开为z的洛朗级数.

解 z的圆环域包括

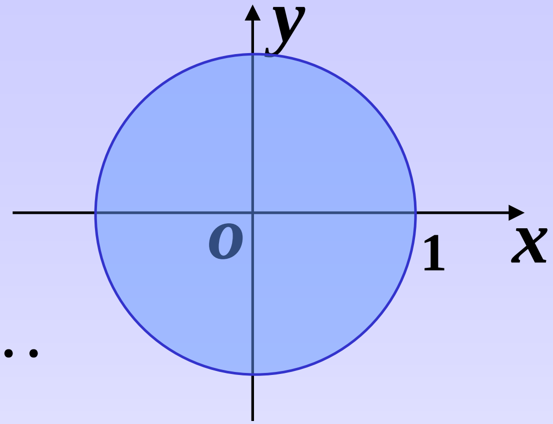
$$1)\ |z|<1;\qquad 2)\ 1<|z|<2;\qquad 3)\ 2<|z|<+\infty.$$

把 $f(z)$ 在这些区域内展开成洛朗级数.

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)}-\frac{1}{(2-z)},$$

1) 在 $|z|<1$内,

由于$|z|<1$，从而$\left|\frac{z}{2}\right|<1$



则 $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

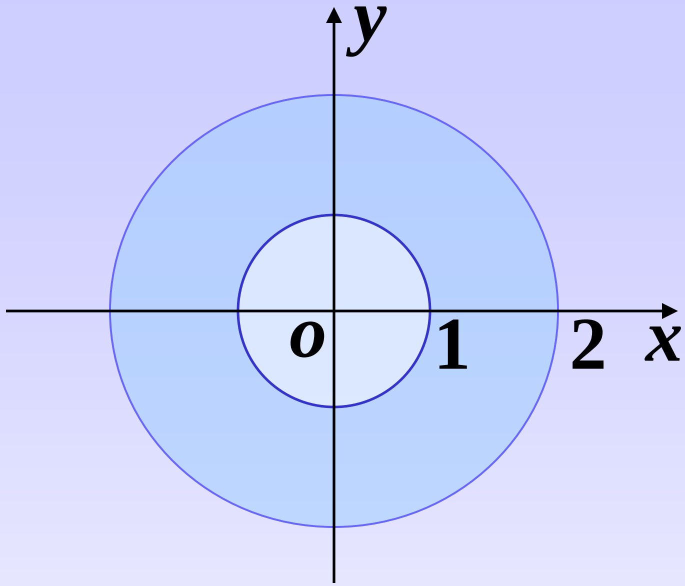
所以 $f(z)=(1+z+z^2+\cdots)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\right)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots$$

2) 在$1<|z|<2$内,

由 $|z|>1 \longrightarrow \left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

$|z|<2 \longrightarrow \left|\dfrac{z}{2}\right|<1$



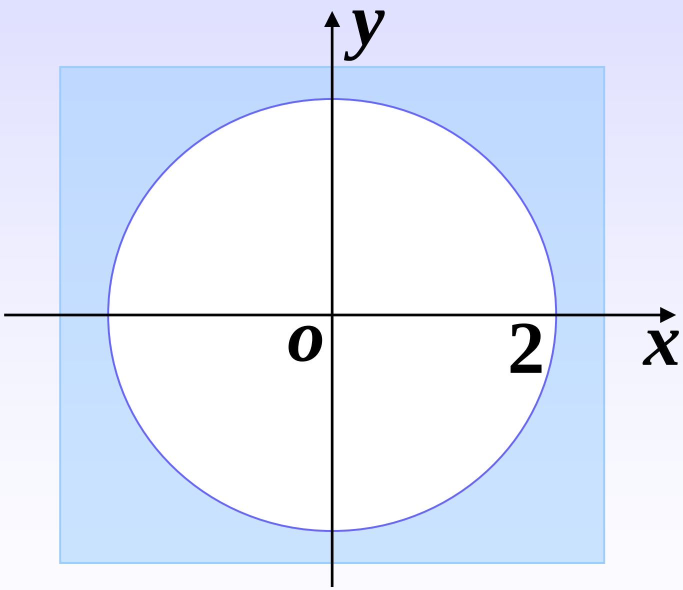
$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

且仍有 $$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

于是 $f(z)=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$

$$=\cdots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\cdots$$

3) 在 $2<|z|<\infty$ 内,



由 $|z|>2 \longrightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1$

此时 $\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$

$$= -\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right)$$

此时 $\left|\frac{1}{z}\right| < \left|\frac{2}{z}\right| < 1,$

仍有 $$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

故 $$f(z) = \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right) - \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots .$$

说明:

1. 函数 $f(z)$ 在以 z_0 为中心的圆环域内的洛朗级数中尽管含有 $z-z_0$ 的负幂项, 而且 z_0 又是这些项的奇点, 但是 z_0 可能是函数 $f(z)$ 的奇点,也可能不是 $f(z)$ 的奇点.

2. 给定了函数 $f(z)$ 与复平面内的一点 z_0 以后，函数在各个不同的圆环域中有不同的洛朗展开式 (包括泰勒展开式作为它的特例).

问题：这与洛朗展开式的唯一性是否相矛盾?

回答：不矛盾 .

(唯一性 : 指函数在某一个给定的圆环域内的洛朗展开式是唯一的)

例4 求 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)^2}$ 在圆环域：$0<|z-2|<1$ 内的洛朗展开式.

解
$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-2-1}=-\frac{1}{1-(z-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

$$\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(\frac{1}{z-3}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-2)^{n-1}$$

所以
$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-2)^{n-2}$$

例5 求 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在以下圆环域：

$(1)1<|z|<2$; $(2)0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内的洛朗展开式.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$

1) 当 $1<|z|<2$ 时, $f(z)=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{z}{2}-1\right)}-\dfrac{2}{z^2\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

2) 在 $0 < |z-2| < \sqrt{5}$ 内,

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} = \frac{1}{z-2} - i\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

$$= \frac{1}{z-2} - i\left[\frac{1}{(z-2)+(i+2)} - \frac{1}{(z-2)+(2-i)}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\frac{1}{(2-i)\left(1+\frac{z-2}{2-i}\right)}-\frac{1}{(2+i)\left(1+\frac{z-2}{2+i}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}}-\frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot[(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}]\cdot\frac{(z-2)^n}{5^{n+1}}.$$

四、小结与思考

在这节课中, 我们学习了洛朗展开定理和函数展开成洛朗级数的方法. 将函数展开成洛朗级数是本节的重点和难点.

思考题

洛朗级数与泰勒级数有何关系?

思考题答案

是一般与特殊的关系.

洛朗级数是一个双边幂级数, 其解析部分是一个普通幂级数;

洛朗级数的收敛区域是圆环域 $r < |z - z_0| < R$.

当 $z_0 = 0, r = 0, c_{-n} = 0$ 时,

洛朗级数就退化为泰勒级数了.

作业: P75 14(1)(2)(3), 15,

放映结束，按Esc退出.