

第五章 留数

一、选择题：

1. 函数 $\frac{\cot \pi z}{2z-3}$ 在 $|z-i|=2$ 内的奇点个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z=a$ 为本性奇点与 m 级极点, 则 $z=a$ 为函数 $f(z)g(z)$ 的 ()

- (A) 可去奇点 (B) 本性奇点
(C) m 级极点 (D) 小于 m 级的极点

3. 设 $z=0$ 为函数 $\frac{1-e^{x^2}}{z^4 \sin z}$ 的 m 级极点, 那么 $m=()$

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

4. $z=1$ 是函数 $(z-1)\sin \frac{1}{z-1}$ 的 ()

- (A) 可去奇点 (B) 一级极点
(C) 一级零点 (D) 本性奇点

5. $z=\infty$ 是函数 $\frac{3+2z+z^3}{z^2}$ 的 ()

- (A) 可去奇点 (B) 一级极点
(C) 二级极点 (D) 本性奇点

6. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| < R$ 内解析, k 为正整数, 那么 $\operatorname{Res}[\frac{f(z)}{z^k}, 0] = ()$

- (A) a_k (B) $k!a_k$ (C) a_{k-1} (D) $(k-1)!a_{k-1}$

7. 设 $z=a$ 为解析函数 $f(z)$ 的 m 级零点, 那么 $\operatorname{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)}, a] = ()$

- (A) m (B) $-m$ (C) $m-1$ (D) $-(m-1)$

8. 在下列函数中, $\operatorname{Res}[f(z), 0] = 0$ 的是 ()

$$(A) \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$$

$$(B) \quad f(z) = \frac{\sin z}{z} - \frac{1}{z}$$

$$(C) \quad f(z) = \frac{\sin z + \cos z}{z}$$

$$(D) \quad f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$$

9. 下列命题中, 正确的是()

(A) 设 $f(z) = (z - z_0)^{-m} \varphi(z)$, $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析, m 为自然数, 则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点.

(B) 如果无穷远点 ∞ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 那么 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$

(C) 若 $z = 0$ 为偶函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 则 $\operatorname{Res}[f(z), 0] = 0$

(D) 若 $\oint_c f(z) dz = 0$, 则 $f(z)$ 在 c 内无奇点

10. $\operatorname{Res}[z^3 \cos \frac{2i}{z}, \infty] = ()$

$$(A) \quad -\frac{2}{3}$$

$$(B) \quad \frac{2}{3}$$

$$(C) \quad \frac{2}{3}i$$

$$(D) \quad -\frac{2}{3}i$$

11. $\operatorname{Res}[z^2 e^{\frac{1}{z-i}}, i] = ()$

$$(A) \quad -\frac{1}{6} + i$$

$$(B) \quad -\frac{5}{6} + i$$

$$(C) \quad \frac{1}{6} + i$$

$$(D) \quad \frac{5}{6} + i$$

12. 下列命题中, 不正确的是()

(A) 若 $z_0 (\neq \infty)$ 是 $f(z)$ 的可去奇点或解析点, 则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = 0$

(B) 若 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 解析, z_0 为 $Q(z)$ 的一级零点, 则 $\operatorname{Res}[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

(C) 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点, $n \geq m$ 为自然数, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n}{dz^n} [(z - z_0)^{n+1} f(z)]$$

(D) 如果无穷远点 ∞ 为 $f(z)$ 的一级极点, 则 $z=0$ 为 $f(\frac{1}{z})$ 的一级极点, 并且

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \lim_{z \rightarrow 0} z f\left(\frac{1}{z}\right)$$

13. 设 $n > 1$ 为正整数, 则 $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^n - 1} dz = (\quad)$

(A) 0

(B) $2\pi i$ (C) $\frac{2\pi i}{n}$ (D) $2n\pi i$

14. 积分 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^9}{z^{10} - 1} dz = (\quad)$

(A) 0

(B) $2\pi i$

(C) 10

(D) $\frac{\pi i}{5}$

15. 积分 $\oint_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz = (\quad)$

(A) 0

(B) $-\frac{1}{6}$ (C) $-\frac{\pi i}{3}$ (D) $-\pi i$

二、填空题

1. 设 $z=0$ 为函数 $z^3 - \sin z^3$ 的 m 级零点, 那么 $m =$ _____.

2. 函数 $f(z) = \frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$ 在其孤立奇点 $z_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处的留数

$\operatorname{Res}[f(z), z_k] =$ _____.

3. 设函数 $f(z) = \exp\{z^2 + \frac{1}{z^2}\}$, 则 $\operatorname{Res}[f(z), 0] =$ _____.

4. 设 $z = a$ 为函数 $f(z)$ 的 m 级极点, 那么 $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right] =$ _____.

5. 双曲正切函数 $\tanh z$ 在其孤立奇点处的留数为_____.

6. 设 $f(z) = \frac{2z}{1+z^2}$, 则 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] =$ _____.

7. 设 $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^5}$, 则 $\operatorname{Res}[f(z), 0] =$ _____.

8. 积分 $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz =$ _____.

9. 积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{\sin z} dz =$ _____.

10. 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{1+x^2} dx =$ _____.

三、计算积分 $\oint_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{z \sin z}{(e^z - 1 - z)^2} dz$.

四、设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, m 为正整数, 试证 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件是

$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = b$, 其中 $b \neq 0$ 为有限数.

五、设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 试证: 若 $f(z)$ 是奇函数, 则 $\operatorname{Res}[f(z), a] = \operatorname{Res}[f(z), -a]$;

若 $f(z)$ 是偶函数, 则 $\operatorname{Res}[f(z), a] = -\operatorname{Res}[f(z), -a]$.

答案