

## 第二节 初等函数

- 一、指数函数
- 二、对数函数
- 三、幂函数
- 四、三角函数和双曲函数
- 五、小结与思考

# 一、指数函数

## 1. 指数函数的定义:

对于复变数  $z = x + iy$ , 由关系式

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

所确定的函数称为**指数函数**.

## 2. 指数函数的性质

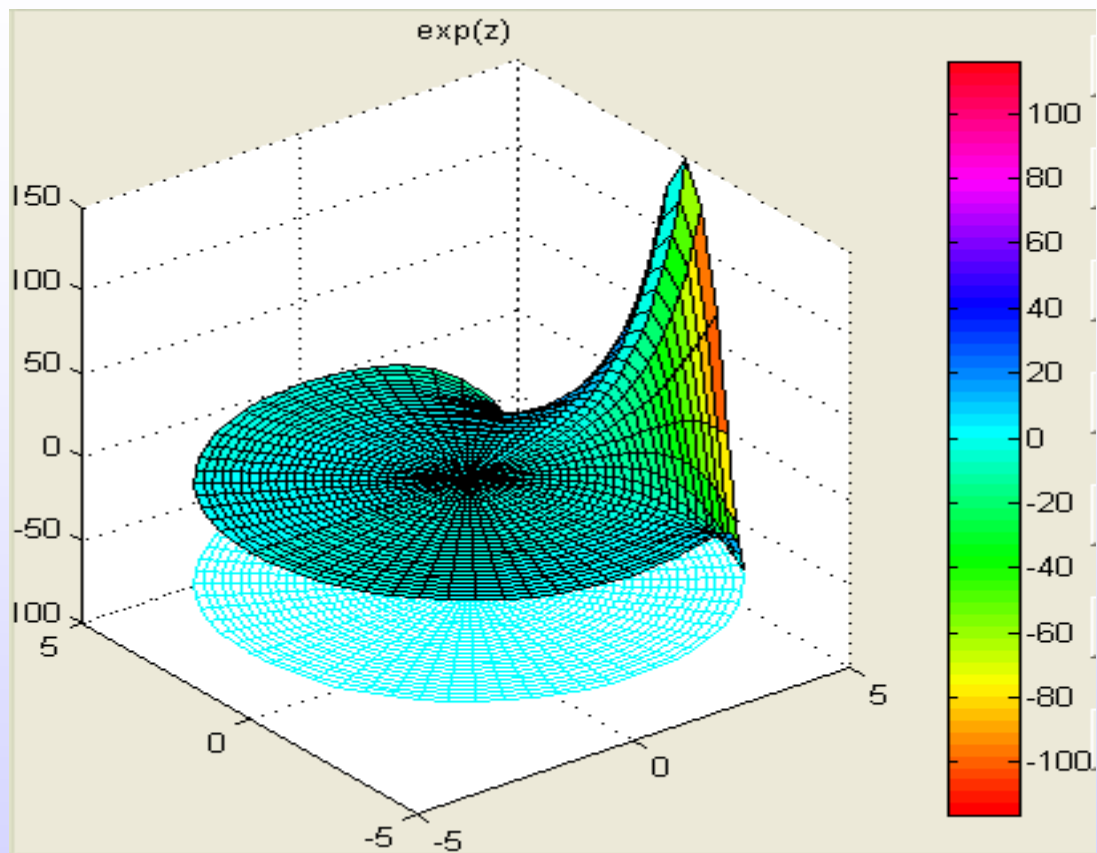
(1) 指数函数在复平面处处不为零.

(2) 加法定理  $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

(3)  $e^z$  的周期是  $2k\pi i$ ,

即  $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z$ . (其中  $k$  为任何整数)

(4)  $e^z$  在复平面内处处解析,  $(e^z)' = e^z$ .



Exp(z)的图像 `z=4*cplxgrid(30); cplxmap(z, exp(z))` .

例1 设  $z = x + iy$ , 求(1)  $|e^{i-2z}|$ ; (2)  $\text{Arg}(e^{z^2})$ ; (3)  $\text{Re}(e^{\frac{1}{z}})$ ;

解 (1)  $e^{i-2z} = e^{i-2(x+iy)} = e^{-2x+i(1-2y)},$

$$|e^{i-2z}| = e^{-2x};$$

$$(2) e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+2xyi},$$

$$\text{Arg}(e^{z^2}) = 2xy + 2k\pi, \quad k \text{ 取任意整数}$$

$$(3) e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+yi}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}},$$

$$\text{Re}(e^{\frac{1}{z}}) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \frac{y}{x^2+y^2}.$$

例2 求函数  $f(z) = e^{\frac{z}{5}}$  的周期.

解  $e^z$  的周期是  $2k\pi i$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{\frac{z}{5}} = e^{\frac{z}{5} + 2k\pi i} = e^{\frac{z + 10k\pi i}{5}} \\ &= f(z + 10k\pi i), \end{aligned}$$

故函数  $f(z) = e^{\frac{z}{5}}$  的周期是  $10k\pi i$ .

## 二、对数函数

### 1. 定义

满足方程  $e^w = z$  ( $z \neq 0$ ) 的函数  $w = f(z)$  称为对数函数, 记为  $w = \text{Ln}z$ .

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i\text{Arg}z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i.$$

由于  $\text{Arg}z$  为多值函数, 所以对数函数  $w = f(z)$  也是多值函数, 并且每两值相差  $2\pi i$  的整数倍.

对于每一个固定的  $k$ , 可得一个单值函数, 称为  $\text{Ln}z$  的第  $k$  个分支.

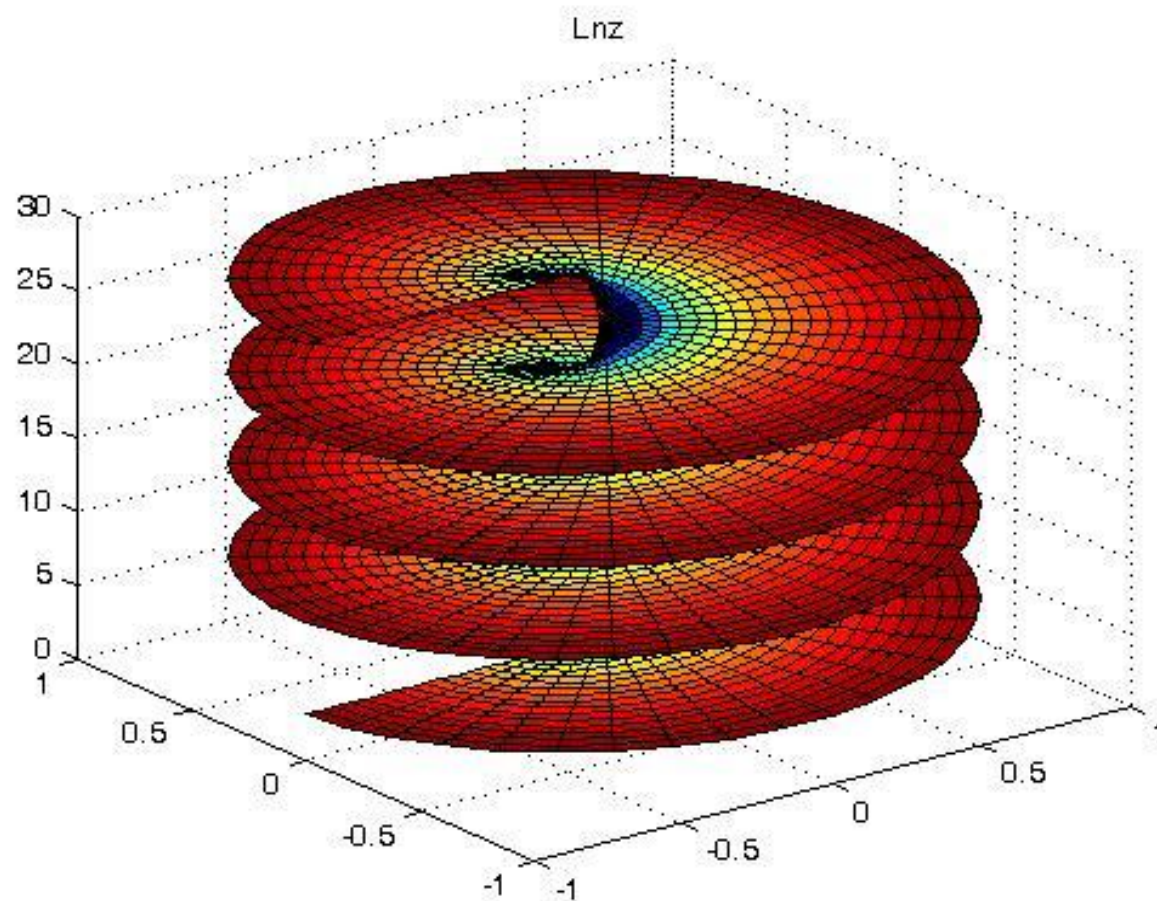
$k=0$  时, 称

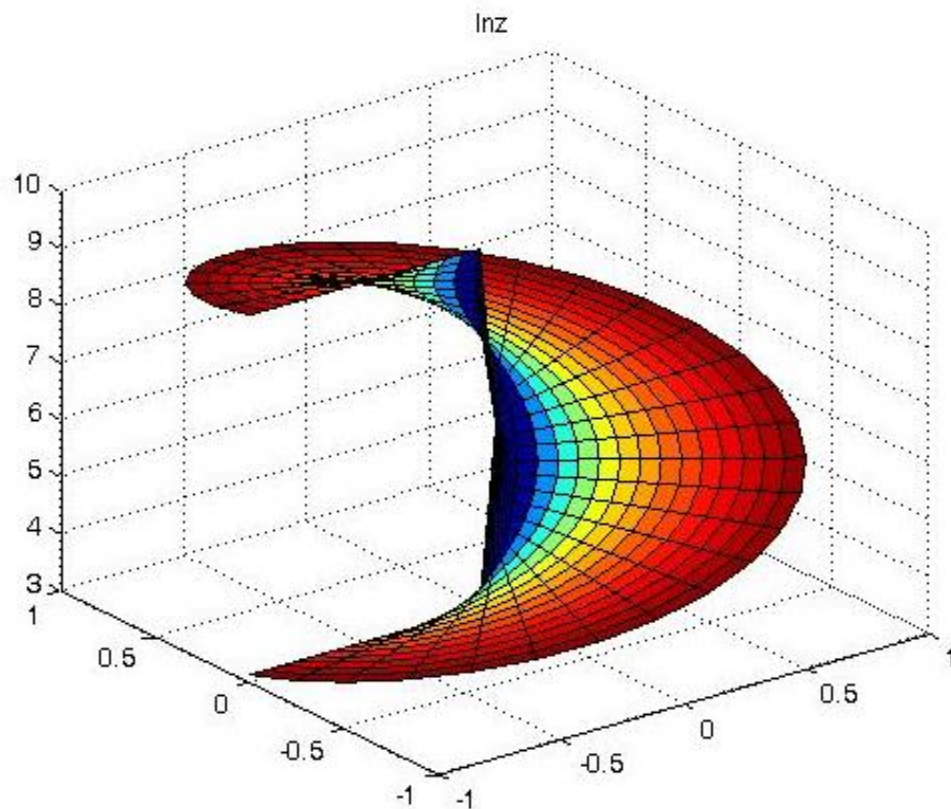
$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

为对数函数的主值, 记为  $\ln z$ .

其余各值为  $\text{Ln}z = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots),$







**例4** 求  $\text{Ln}(-1)$ ,  $\text{Ln}(1+i)$  以及它们相应的主值.

**解** 因为  $\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i\text{Arg}(-1)$   
 $= (2k+1)\pi i \quad (k \text{ 为整数})$

所以  $\text{Ln}(-1)$  的主值就是  $\pi i$ .

因为  $\text{Ln}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i$ ,

所以  $\text{Ln}(1+i)$  的主值就是  $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i$ .

**注意:** 在实变函数中, 负数无对数, 而复变数对数函数是实变数对数函数的拓广.

例5 求下列各式的值:

$$(1)\text{Ln}(-2+3i); \quad (2)\text{Ln}(3-\sqrt{3}i); \quad (3)\text{Ln}(-3).$$

解 (1) $\text{Ln}(-2+3i)$

$$= \ln|-2+3i| + i\text{Arg}(-2+3i)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 13 + i\left(\pi - \arctan\frac{3}{2} + 2k\pi\right).$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(2)\text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$$

$$= \ln|3 - \sqrt{3}i| + i\text{Arg}(3 - \sqrt{3}i)$$

$$= \ln 2\sqrt{3} + i\left(\arctan \frac{-\sqrt{3}}{3} + 2k\pi\right)$$

$$= \ln 2\sqrt{3} + i\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right). \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(3)\text{Ln}(-3) = \ln|-3| + i\text{Arg}(-3)$$

$$= \ln 3 + (2k + 1)\pi i. \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

**例6** 解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .

**解** 因为  $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ ,

所以  $z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}i)$

$$= \ln|1 + \sqrt{3}i| + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$= \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

## 2. 性质

$$(1) \operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 ,$$

$$(2) \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 ,$$

(3) 在除去负实轴(包括原点)的复平面内,主值支和其它各分支处处连续,处处可导,且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

证 (3) 设  $z = x + iy$ , 当  $x < 0$  时,

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \arg z = -\pi, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \arg z = \pi,$$

所以,除原点与负实轴,在复平面内其它点  $\ln z$  处处连续.

利用C - R方程可以验证,对数函数的各个分支在复平面上除去原点与负实轴外处处解析,并且

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}.$$

[证毕]



$$(4) \quad \text{Ln}z^n \neq n\text{Ln}z$$

$$\text{Ln}z + \text{Ln}z \neq 2\text{Ln}z$$

**原因：**有限个无穷集合相加，不一定是对应部分相加.

例：

**Bernoulli  
悖论**

**原因**

$$(1) \because z^2 = (-z)^2$$

$$\Rightarrow (2) \operatorname{Ln} z^2 = \operatorname{Ln} (-z)^2$$

$$\Rightarrow (3) \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} (-z) + \operatorname{Ln} (-z)$$

$$\Rightarrow (4) 2\operatorname{Ln} z = 2\operatorname{Ln} (-z)$$

$$\Rightarrow (5) \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} (-z)$$

因为  $\operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\operatorname{Ln}(1) = 2k\pi i \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\operatorname{Ln} z$  是集合  
记号，应该  
理解为两个  
集合相加

$$A = \{0, 1\}$$

$$A + A = \{0, 1, 2\}$$

$$2A = \{0, 2\}$$

$$A + A \neq 2A$$

# 三、幂函数

## 1. 幂函数的定义

对于任意复数 $\alpha$ , 当 $z \neq 0$ 时,

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$$

称为 $z$ 的幂函数.

**注意:** 由于  $\operatorname{Ln} z$  是多值的, 因而 $z^{\alpha}$  也是多值的.

$$\begin{aligned} z^{\alpha} &= e^{\alpha(\ln|z| + i\operatorname{Arg} z)} = e^{\alpha \ln|z| + i\alpha \arg z + 2k\pi\alpha i} \\ &= |z|^{\alpha} e^{i\alpha \arg z + 2k\pi\alpha i} \quad (k \text{ 为整数}) \end{aligned}$$

(1) 当  $\alpha = n$  为整数时,

$$z^\alpha = e^{n \operatorname{Ln} z} = |z|^n e^{i n \arg z}.$$

单值函数.

(2) 当  $\alpha = \frac{1}{n} (n > 1)$  时,

$$z^\alpha = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}.$$

即为根式函数  $\sqrt[n]{z}$ .

(3) 当  $\alpha = \frac{m}{n}$  为有理数时,

$$z^\alpha = e^{\frac{m}{n} \operatorname{Ln} z} = |z|^{\frac{m}{n}} e^{\frac{im \arg z + 2mk\pi}{n}} (k=0,1,\dots,n-1).$$

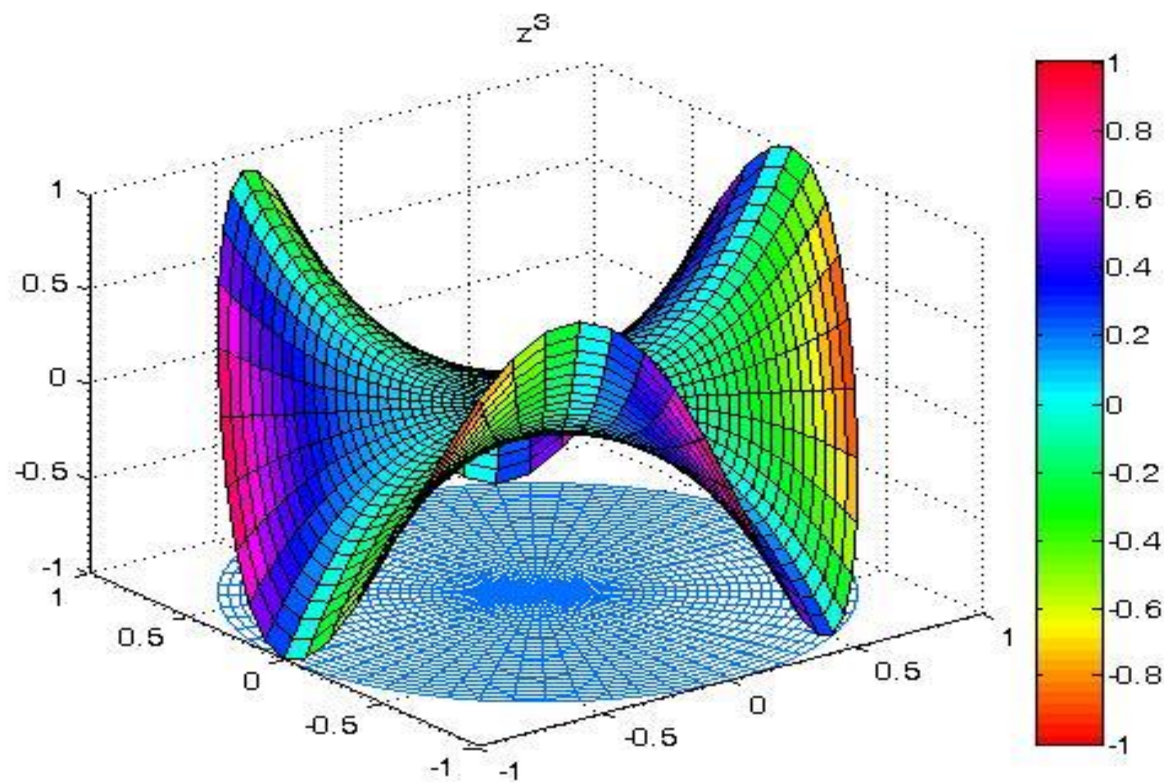
也是一个  $n$  值函数.

(4) 当  $\alpha$  为无理数或任意复数时,

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha (\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)}$$

导数为

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}.$$



**例7** 求  $1^{\sqrt{2}}$  和  $i^i$  的值.

**解**  $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\text{Ln}1} = e^{2k\pi i \cdot \sqrt{2}}$

$$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi) \quad \text{其中 } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$i^i = e^{i\text{Ln}i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \quad \text{其中 } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**课堂练习** 计算  $(-3)^{\sqrt{5}}$ .

**答案**  $(-3)^{\sqrt{5}} = 3^{\sqrt{5}} [\cos \sqrt{5}(2k+1)\pi + i \sin \sqrt{5}(2k+1)\pi].$   
 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

例8 求  $(1+i)^i$  的辐角的主值.

解  $(1+i)^i = e^{i\text{Ln}(1+i)} = e^{i[\ln|1+i|+i\text{Arg}(1+i)]}$

$$= e^{i\left[\frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{\pi}{4}i + 2k\pi i\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\frac{1}{2}\ln 2}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} \cdot \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) \right]$$

其中  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

故  $(1+i)^i$  的辐角的主值为  $\frac{1}{2}\ln 2$ .



# 四、三角函数和双曲函数

## 1. 三角函数的定义

因为  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ,  $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ ,

将两式相加与相减, 得

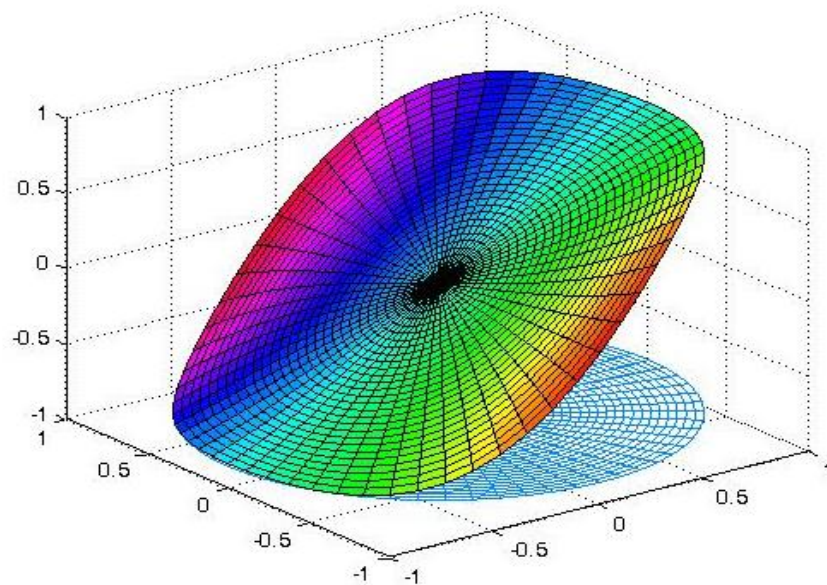
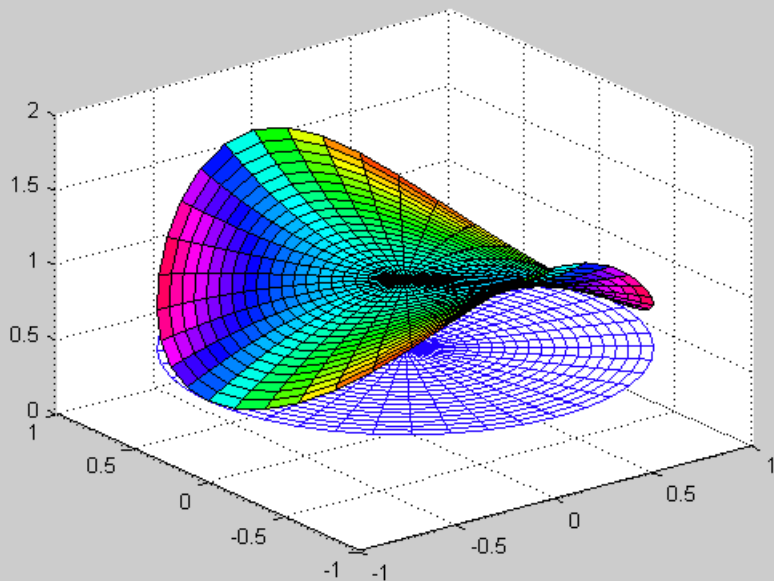
$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

现在把余弦函数和正弦函数的定义推广到自变数取复值的情况.

定义： 余弦函数  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ,

正弦函数为  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ .

$\cos(z)$ 的图像 `z=cplxgrid(30); cplxmap(z,cos(z))` .



性质:

1. 正弦函数和余弦函数都是以  $2\pi$  为周期的.

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

2. 正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数.

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

3.  $\sin z$  是奇函数,  $\cos z$  是偶函数.

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

## 4.有关正弦函数和余弦函数的几组重要公式

$$(1) \quad \begin{cases} \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi, \\ \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi. \end{cases}$$

5.  $\sin z, \cos z$  不再有界. 当  $z$  为纯虚数  $yi$  时,

$$\cos yi = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y,$$

$$\sin yi = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sinh y.$$

当  $y \rightarrow \infty$  时,  $|\sin yi| \rightarrow \infty, |\cos yi| \rightarrow \infty$ .

(注意: 这是与实变函数完全不同的)

## 其他复变数三角函数的定义

$$\text{正切函数 } \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{余切函数 } \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\text{正割函数 } \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \text{余割函数 } \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

与  $\sin z$  和  $\cos z$  类似, 我们可以讨论它们的周期性, 奇偶性, 解析性.

**例9** 求  $\cos(1+i)$  的值.

**解**

$$\begin{aligned}\cos(1+i) &= \frac{e^{i(1+i)} + e^{-i(1+i)}}{2} = \frac{e^{-1+i} + e^{1-i}}{2} \\&= \frac{1}{2}[e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1) + e(\cos 1 - i \sin 1)] \\&= \frac{1}{2}(e^{-1} + e)\cos 1 + \frac{1}{2}(e^{-1} - e)i \sin 1 \\&= \cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1.\end{aligned}$$

## 2. 双曲函数的定义

我们定义双曲余弦函数为  $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ ,

双曲正弦函数为  $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ,

双曲正切函数为  $\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ .

当  $z$  为实数  $x$  时, 它与高等数学中的双曲函数的定义完全一致.



容易证明,  $\sinh z$  是奇函数,  $\cosh z$  是偶函数.

它们都是以  $2\pi i$  为周期的周期函数,

它们的导数分别为

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z.$$

并有如下公式:

$$\cosh yi = \cos y, \quad \sinh yi = i \sin y.$$

$$\begin{cases} \cosh(x + yi) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \\ \sinh(x + yi) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y. \end{cases}$$

# 五、反三角函数和反双曲函数

## 1. 反三角函数的定义

设  $z = \cos w$ , 那么称  $w$  为  $z$  的反余弦函数, 记作  $w = \operatorname{Arccos} z$ .

由  $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ , 得  $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$ ,

方程的根为  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ , 两端取对数得

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

同样可以定义反正弦函数和反正切函数, 重复以上步骤, 可以得到它们的表达式:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

## 2. 反双曲函数的定义

反双曲正弦  $\operatorname{Arsinh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$

反双曲余弦  $\operatorname{Arcosh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$

反双曲正切  $\operatorname{Artanh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}.$

## 六、小结与思考

复变初等函数是一元实变初等函数在复数范围内的自然推广，它既保持了后者的某些基本性质，又有一些与后者不同的特性. 如：

1. 指数函数具有周期性（周期为  $2\pi i$ ）
2. 负数无对数的结论不再成立
3. 三角正弦与余弦不再具有有界性
4. 双曲正弦与余弦都是周期函数

# 思考题

实变三角函数与复变三角函数在性质上有哪些异同？

## 思考题答案

两者在函数的奇偶性、周期性、可导性上是类似的,而且导数的形式、加法定理、正余弦函数的平方和等公式也有相同的形式.

最大的区别是,实变三角函数中,正余弦函数都是有界函数,但在复变三角函数中,

$|\sin z| \leq 1$  与  $|\cos z| \leq 1$  不再成立.

# 作业： P30 10, 16, 17

放映结束，按Esc退出.



机动 目录 上页 下页 返回 结束