doi：

矩阵的逆与矩阵的行列式和秩的几何关系

XXX

西安电子科技大学 计算机学院，陕西 西安 710071；

摘要：通过线性代数中矩阵在空间线性变换中的含义，对矩阵行列式和秩的几何意义进行分析，探索矩阵的逆存在的条件，从几何层面上对线性变换进行分析和理解

关键词：线性代数 矩阵 线性变换 矩阵的逆 几何关系

中图分类号：O151.21 **文献标识码：**A **文章编号：**

The Inverse Relation of Matrix and the Determinant of Rank and Rank Geometry

School of Computer, Xidian University, Xi'an 710071, China;

Abstract: By analyzing the meaning of matrix in space linear transformation in linear algebra, the geometrical meaning of matrix determinant and rank is analyzed, and the inverse condition of matrix is explored. The linear transformation is analyzed and understood from the geometric level

Key Words: linear algebraic matrix, linear transformation matrix, inverse geometric relation

1 矩阵和线性变换的关系

1.1 线性变换的几何含义

变换可以看做接收输入内容，并输出对应结果，在线性代数的情况下，我们考虑的是接收一个向量并且将向量变换后输出。我们可以在二维空间内，想象每一个输入向量移动到对应输出向量的位置，即可将线性变换看做对空间的一种操作。

线性变换是操纵空间的一种手段，它满足两个特点：

1、变换后网格线平行且等距分布。

2、且保持原点不动。

1.2 线性变换的矩阵表示

我们在二维空间内观察线性变换的过程：

由于线性变换满足以上两个特点，我们可以用 $\boldsymbol{i}$ 向量和 $\boldsymbol{j}$ 向量的变换来表示整个空间的变换。

一个二维空间经过线性变换之后，任意变换后的向量可以看做是变换后的 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 向量的线性组合，而且线性组合的关系不会改变。所以，只要记录下变换后的 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 向量，我们就可以推断出任意向量在变换之后的位置，不必观察变换本身怎么样

一般的，一个向量，变换后的坐标就是 x 乘变换后 $\boldsymbol{i}$ 的坐标加 y 乘变换后的 $\boldsymbol{j}$ 坐标

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to x \begin{bmatrix} i'_x \\ i'_y \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} j'_x \\ j'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i'_x x + j'_x y \\ i'_y x + j'_y y \end{bmatrix}$$

所以，二维空间的线性变换可以用四个数字表示，这四个数字可以组成 2*2 矩阵，其列向量即为变换后的 i 向量与 j 向量。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

其中：

$$\begin{aligned} a &= i_x^{'} \\ b &= j_x^{'} \\ c &= i_y^{'} \\ d &= j_y^{'} \end{aligned}$$

若一个空间进行了多次变换，我们可以用一个最终的变换结果来代替整个变换的过程，例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

由此可见，矩阵乘法即可得到线性变换作用于给定向量的结果。每一个矩阵，都可以看做是一个空间的线性变换。

所以，两个矩阵相乘的几何意义，就是两个线性变换相继作用。

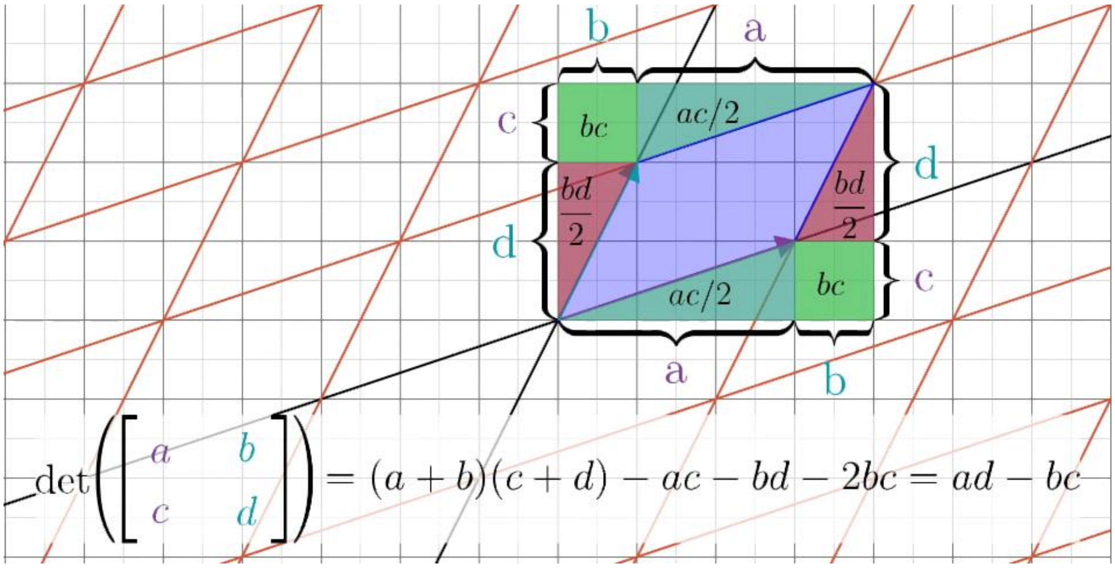
如果变换后的 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 在同一条直线上，即 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 线性相关，那么这个线性变换将整个二维空间挤压到一条直线上

2 行列式与矩阵的逆的关系

2.1 行列式的几何含义

以二阶行列式为例，二阶行列式的计算公式：

其几何意义可以看做是单位面积经过线性变换之后放大或缩小的倍数。选取二维空间 1*1 大小的方格，这个方格经过线性变换后的面积即为：



类似地，高阶行列式即可看做是多维空间容积的变化。

2.2 矩阵的逆的几何含义

若一个行列式不为 0 时，经过线性变换后的空间中的每一个点，都能在变换前的空间找到唯一的点与之对应。因此，我们可以将变换后的空间，通过线性变换变换回原始空间。连续运用变换和逆变换，空间不变。

$$A \cdot A^{-1} = E$$

所以，矩阵的逆，表示线性变换的逆变换，在几何上就是变换空间复原的过程。

2.3 矩阵的逆与行列式的关系

特殊的，若一个行列式的值为 0 时，则该多维空间线性变换后的容积为 0，多维空间的维度降低。以二维空间为例，若二维空间线性变换对应的行列式为 0，说明整个平面压缩到了一条线上，或是一个点上。此时任何区域的面积都变成了 0。经过这种线性变换，原来二维平面上的一条线，被压缩到一个点上。也就是说，变换后空间中的一个点，有不止一个变换前的点与之对应。由于线性变换不能将一个向量变换到多个向量，因此，我们无法再将变换后的空间通过矩阵运算恢复为原始的空间，此时矩阵的逆不存在。

由此可见矩阵的逆存在的充分必要条件是矩阵的行列式不为 0。

$$\boldsymbol{A^{-1}}\text{存在} \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$

3 向量空间的基的几何含义

3.1 向量空间的基的定义

如果向量空间 $\boldsymbol{V}$ 中的 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}, \cdots \boldsymbol{\alpha_m}$满足：

(1) $\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}, \cdots\ \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{V}$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可 $\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}, \cdots\ \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性表示.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}, \cdots\ \boldsymbol{\alpha_m}$ 为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个基，向量 $\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}, \cdots\ \boldsymbol{\alpha_m}$ 分别称为基向量.

3.2 张成空间

下面以二维空间为例，

任意选取两个不同方向的向量

然后，选取两个标量，对这两个向量进行缩放，然后把他们相加，能得到不同的结果。对这两个向量的缩放并相加，就得到这两个向量的线性组合。大部分情况下，对于一对初始向量，通过他们的线性组合，能得到二维空间内的所有向量，但是，当两个初始向量恰好共线时，所产生的向量的终点始终被限制在一条过原点的直线上。对于非共线的二维向量，它们张成的空间是所有二维向量的集合。但当它们共线时，它们张成的空间是终点落在一条直线上的向量集合。如果再考虑三维空间，三个向量线性组合，如果第三个向量恰好落在前面两个向量所张成的平面上，它张成的空间仍为二维平面，但当第三个向量不落在前两个向量所张成的平面中时，就能得到所有的三维向量。

所有给的向量线性组合得到的向量的集合，被称为给定向量张成的空间。

3.3 线性相关性以及向量空间的基在几何层面上的展示

当一组向量中至少有一个是多余的，没有对张成空间做出任何贡献，可以移除其中的一个向量而不减小张成的空间时，我们称它们是“线性相关”的。但是，如果所有的向量都给张成的空间增添了新的维度，它们就是“线性无关”的。

向量空间的基，即为能张成这个空间的最少向量的集合。

更进一步地，我们知道，二维空间如果给定三个向量，他们必定共面（二维空间内不可能存在一个“体积”），因此他们必定线性相关。推而广之，我们不难理解，为什么一个维度为 N 的空间内，任意一组 M 个向量（M>N）必定线性相关了：因为维度大于空间维度的超平形四边体不存在。向量空间的基，即为能张成这个空间的最少向量的集合。

4 矩阵的秩与矩阵的逆的关系

4.1 矩阵的秩的定义

如果在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D, 而所有 r+1 阶子式全为 0, 那么 D 称为矩阵 A 的一个最高阶非零子式, 数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 R($\boldsymbol{A}$)或 r($\boldsymbol{A}$).

4.2 矩阵的秩的几何含义

由前文可知，矩阵是描述空间的线性变换，矩阵的列向量可以看做是变换之后的基向量。因此，当某一基向量经过线性变换变成 0 向量时，空间就失去了这个向量所张成的维度。

由于矩阵的秩是矩阵最高阶非零子式的阶数，所以矩阵的秩就是线性变换后空间的维度。

例如：一个 3 阶方阵的秩为 3，则空间经过该矩阵描述的线性变换后，所得到的仍为三维空间；若一个 3 阶方阵的秩为 2，则空间经过该矩阵描述的线性变换后，所得到的为二维空间，原来的三维空间被压缩为一个平面。

4.3 矩阵的秩与矩阵的逆的关系

当矩阵满秩时，空间经过线性变换后的维度不变，经过线性变换后的空间中的每一个点，都能在变换前的空间找到唯一的点与之对应。因此，我们可以将变换后的空间，通过线性变换变换回原始空间。当矩阵 A 不满秩时，空间经过该矩阵描述的线性变换后将会发生维度的降低，该过程是不可逆的，因此，矩阵 A 不可逆。

所以，矩阵满秩为矩阵可逆的充分必要条件。

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^{-1}}\text{存在} \Leftrightarrow R(A) = n$$

综上，对于 n 阶矩阵 A，矩阵可逆与矩阵行列式和矩阵的秩的关系为：

$$\boldsymbol{A^{-1}}\text{存在} \Leftrightarrow R(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$

参考文献：

[1] 刘三阳等. 线性代数［M］. -2 版. 北京：高等教育出版社，2009.7：12.