Series temporales univariadas

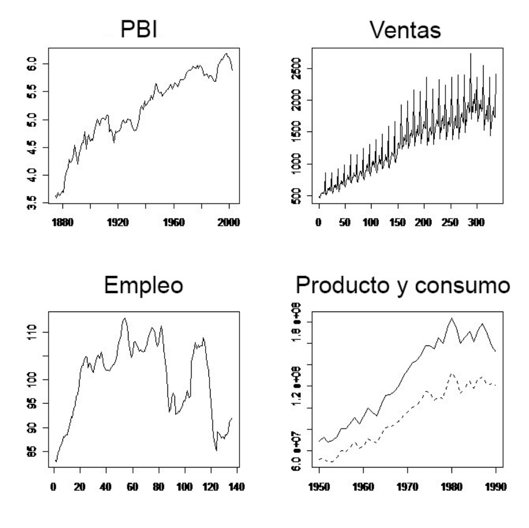
Walter Sosa Escudero

wsosa@udesa.edu.ar

Banco Central del Uruguay, 2020

Conceptos basicos

Tipologia



PBI
1880
1920
1960
2000
Ventas
0
50
100
150
200
250
300
Empleo
0
20
40
60
80
100
120
140
Producto y consumo
1950
1960
1970
1980
1990

Series temporales

- Proceso estocastico: coleccion de variables aleatorias ordenadas.
- Serie de tiempo: el orden es el tiempo.

$$Y_t; \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

Punto central: los Y_t no son necesariamente independientes.

- $\mu_t \equiv E(Y_t)$
- $\gamma_{0t} \equiv V(Y_t)$
- $\gamma_{t,j-t} \equiv Cov(Y_t, Y_{t-j}) =$ j-esima autocovarianza

Estacionariedad

Y_t estacionario:

1. $E(Y_t) = \mu \ \ \forall t$
2. $Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \gamma_j < \ \ \forall t, \forall j$

Si Y_t estacionario:

- $V(Y_t) = Cov(Y_t, Y_t) = \gamma_0$, constante.
- $Cor(Y_t, Y_{t-j}) \equiv \rho_j = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-j})}{\sqrt{V(Y_t)V(Y_{t-j})}} = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$

Discusion:

- Estructura de momentos primeros y segundos constante (estable).
- Covarianzas dependen solo de la separacion.

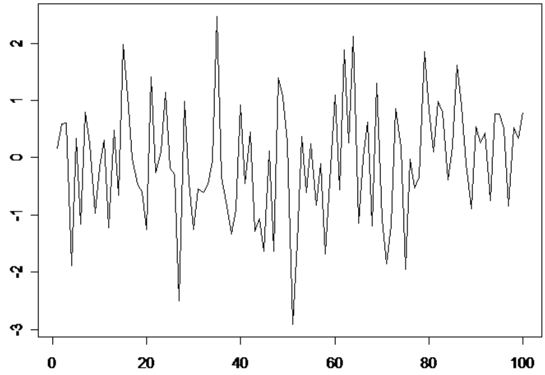
P: puede un proceso ser no estacionario y tener esperanza constante?

Ruido blanco

Y_t , $t = 1, 2, \ldots, T$ es ruido blanco si:

1. $E(Y_t) = 0, \;\; \forall t.$
2. $V(Y_t) = E(Y_t^2) = \sigma^2, \; \forall t$
3. $Cov(Y_i, Y_j) = 0, \;\; \forall \; i \neq j.$

- Por construccion estacionario. Coleccion de variables aleatorias con media cero y no correlacionadas entre ellas.
- Proceso mas simple de todos. Notacion: $Y_t \sim RB(0, \sigma^2)$.
- Ejemplo: El termino de error de un modelo de regresion clasico es ruido blanco.



Predecible?

Media movil infinita ($MA(\infty)$)

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \qquad RB(0, \sigma^2),\ \psi_0 = 1$$

MA(∞) estacionario si:

- $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$
- $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ (sumabilidad absoluta)

2) $\Rightarrow$ 1), pero no al reves.

Teorema de representación de Wold

Todo proceso estacionario Y_t puede escribirse como:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + k_t$$

en donde $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$, k_t es una funcion deterministica y $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$.

- Todo proceso estacionario es esencialmente un MA(∞) estacionario.
- En la practica implica estimar infinitos parametros.
- Solo el pasado importa.

Prueba: Brockwell y Davis (1987).

Parsimonia

- Wold: todo proceso estacionario es un $MA(\infty)$
- Infinito, pero solo involucra al pasado.
- *Idea:* buscar una representacion parsimoniosa de $MA(\infty)$.

ARMA

Media movil finita ($MA(q)$)

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{q} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \qquad RB(0, \sigma^2), \; \psi_0 = 1$$

- $E(Y_t) = \mu$
- $V(Y_t) = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)$
- $$\gamma_j = \begin{cases} \left[\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \theta_{j+2}\theta_2 + \ldots + \theta_q\theta_{q-j}\right]\sigma^2 & j \leq q \\ 0 & j > q \end{cases}$$

$MA(q)$ es estacionario para cualquier $q < \infty$. La dependencia con el pasado se rompe luego del $q-$esimo periodo.

Procesos autorregresivos

$AR(1):$

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

- $AR(1)$ es un proceso *derivado* de un RB a traves de una recursion.
- *Resultado: AR(1) es estacionario si* $|\phi| < 1$

Notar que $Y_{t-1} = c + \phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$. Reemplazando:

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \phi\left(c + \phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}\right) + \varepsilon_t \\ &= c + c\phi + \phi^2 Y_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Reemplazando $Y_{t-2} = c + \phi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$

$$Y_t = c + c\phi + c\phi^2 + \phi^3 Y_{t-3} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Continuando con este proceso:

$$Y_t = c(1 + \phi + \phi^2 + \cdots) + (\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi^3\varepsilon_{t-3} + \cdots) + \lim_{s\to\infty} \phi^s Y_{t-s}$$

Si $|\phi| < 1$:

$$Y_t = \frac{c}{1-\phi} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i},$$

un $MA(\infty)$ con $\psi_i \equiv \phi^i$. Notar que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{2i} = \frac{1}{1-\phi^2} < \infty \implies \text{AR(1) es estacionario si } |\phi| < 1$$

Representacion $MA(\infty)$ de $AR(1)$

Recordar $MA(\infty)$: $Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \quad RB(0, \sigma^2),\ \psi_0 = 1$

Consideremos el $AR(1)$ estacionario ($|\phi| < 1$):

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Resultado: $Y_t = \frac{c}{1-\phi} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}$

- $AR(1)$ estacionario es un $MA(\infty)$ con $\mu \equiv c/(1-\phi)$ y $\psi_j = \phi^j$
- $AR(1)$ como *simplificacion* del $MA(\infty)$

- $E(Y_t) \equiv \mu = \frac{c}{1-\phi}$
- $V(Y_t) \equiv \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$
- $Cov(Y_t, Y_{t-j}) \equiv \gamma_j = \phi^j \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$
- $Cor(Y_t, Y_{-1}) = \rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \phi^j$

Predecibilidad del $AR(1)$

Caso particular $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \;\; \phi > 0 \; (\mu = 0)$.

- Y_t depende de dos componentes. Uno que lo ata al pasado (ϕY_{t-1}) y otro que lo mueve en forma aleatoria (ε_t).
- El proceso es mas erratico cuando ϕ es mas pequeno y mas suave cuando $\phi \to 1$

Estacionariedad de AR(1) en terminos de raices

Definamos $L^j Y_t \equiv Y_{t-j}$ (operador de rezago). Entonces:

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= c + \phi L Y_t + \varepsilon_t \\ (1 - \phi L) &= Y_t = c + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Estacionariedad: $|\phi| < 1$. Consideremos el polinomio: $(1 - \phi z)$, con raiz $r = 1/\phi$. Notar que $|r| > 1 \iff |\phi| < 1$.

Entonces, AR(1) es estacionario si y solo si $|r| > 1$.

$AR(p)$

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim RB(0.\sigma^2)$$

Alternativamente:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p)\ Y_t = c + \varepsilon_t$$

Resultado: AR(p) es estacionario sii todas las raices de:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 + \cdots + \phi_z L^p$$

son mayores que 1 en valor absoluto.

Representacion $MA(\infty)$ de $AR(p)$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p)\ Y_t = c + \varepsilon_t$$

$$\Phi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p) = (1 - r_1 L)(1 - r_2 L) \cdots (1 - r_p L)$$

en donde $r_1, \ldots, r_p$ son las raices de $\Phi(L)$.
Si $|r_i| < 1, i = 1, \ldots, p$, (estacionariedad)

$$Y_t = \frac{1}{\Phi(L)}(c + \varepsilon_t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{p}(1 - r_i L)}(c + \varepsilon_t) = \mu + \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s \varepsilon_{t-s}$$

$\Rightarrow$ representacion $MA(\infty)$ del $AR(p)$.

Ventaja: *depende solo de p parametros distintos. Los AR son representaciones parsimoniosas de la descomposicion de Wold.*

$ARMA(p, q)$

$$Y_t = c + \underbrace{\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p}}_{\text{AR(p)}} + \underbrace{\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}}_{\text{MA(q)}}$$

$ARMA(p, q)$ es *estacionario* si la parte AR lo es.

Por el teorema de Wald, si $ARMA(p, q)$ es estacionario, es tambien un $MA(\infty)$ pero con solo $p + q$ parametros!

Parsimonia

The Prediction Performance of the FRB-MIT-PENN Model of the U.S. Economy

By Charles R. Nelson*

This paper presents an evaluation of the prediction performance of the FRB-MIT-PENN (*FMP*) econometric model of the *U.S.* economy using predictions provided by simple time-series models to es- ahead predictions of fourteen endogenous variables of general interest; namely nominal *GNP*, its endogenous components, the unemployment rate, two price indices, and three interest rates. Predictions are

Box-Jenkins

- Buscar un ARMA parsimonioso
- Como elegir p y q? Correlogramas (total y parcial)
- Residuos ruido blanco (Ljung-Box)
- Seleccion de modelos (Akaike, Schwarz, etc,)

Es posible automatizar esta tarea?

Journal of Statistical Software

MMMMMM YYYY, Volume VV, Issue II. *http://www.jstatsoft.org/*

Automatic time series forecasting: the forecast package for R

Rob J Hyndman and Yeasmin Khandakar
Monash University

Procesos no-estacionarios

Procesos no-estacionarios

Y_t es *estacionario* si y solo si:

1. $E(Y_t) = \mu, \ \forall t$
2. $Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \gamma_j, \ \forall t, \forall j$

Y_t es *no-estacionario* si por lo menos alguna de las dos condiciones anteriores no se cumple

Tendencia deterministica

$$Y_t = a + dt + u_t$$

a, d parametros, u_t es cualquier proceso estacionario con $E(u_t) = 0$ y $V(u_t) = \sigma^2 < \infty$.

- $E(Y_t) = a + dt$
- $V(Y_t) = V(u_t) = \sigma^2$

La fuente de no estacionariedad es la media. Fluctuacion estacionaria alrededor de una tendencia deterministica.

Random walk

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

$$\begin{array}{lcl} Y_0 & = & 0 \\ Y_1 & = & Y_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \\ Y_2 & = & Y_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_t & = & Y_{t-1} + \varepsilon_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \end{array}$$

- $E(Y_t) = 0$
- $V(Y_t) = t\sigma^2$

La fuente de no-estacionariedad es la varianza. RW es una suma no-ponderada de elementos de un RB

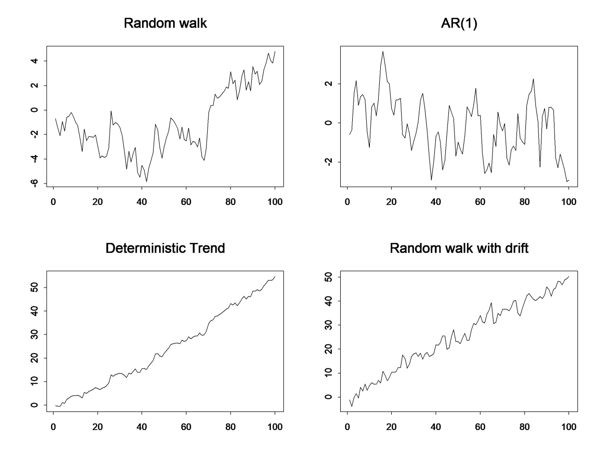
Random walk with drift

$$Y_t = m + Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

$$\begin{array}{lcl} Y_0 & = & 0 \\ Y_1 & = & m + Y_0 + \varepsilon_1 = m + \varepsilon_1 \\ Y_2 & = & m + Y_1 + \varepsilon_2 = 2m + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \multicolumn{3}{l}{\dotfill} \\ Y_t & = & m + Y_{t-1} + \varepsilon_t = tm + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \end{array}$$

- $E(Y_t) = tm$
- $V(Y_t) = t\sigma^2$

La fuente de no estacionariedad es la media y la varianza.RWD es una TD mas un RW.



- Muy dificil distintinguir entre RWD y TD, y entre RW y AR(1).
- Procesos completamente diferentes.

Diferencias AR y RW

- AR es estacionario, RW, no
- La no estacionariedad tiene que ver con la *varianza*
- AR: varianza constante. Intervalo de confianza fijo.
- RW: varianza no acotada. Intervalo o creciente o no acotado. Esencialmente impredecible.

Diferencias TD y RWD

- TD: no estacionario en media
- RWD: no estacionario en media y varianza
- RWD = TD + RW: esencialmente impredecible.

Procesos ARIMA

$ARIMA(p, d, q)$: proceso que diferenciado d veces es un $ARMA(p, q)$

Ej: $ARMA(1, 1, 1)$. Si Y_t es no estacionaria porque tiene una raiz unitaria, $Z_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ es estacionaria

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

es un $ARMA(1, 1)$ en base a una serie que tuvo que ser diferenciada una vez.

Test de raiz unitaria

Un test de raiz unitaria es un test de:

$$H_0 : \phi = 1 \qquad \text{vs.} \qquad H_A : |\phi| < 1$$

en el siguiente modelo:

$$Y_t = m + \phi Y_{t-1} + dt + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Casos particulares (algunos a simple vista, otros, hay que demostrarlos)

$$Y_t = m + \phi Y_{t-1} + dt + \varepsilon_t$$

Caso	Proceso	Parametros	Hipotesis sobre ϕ
1	AR(1)	$\|\phi\| < 1, d = 0$	Alternativa
2	TD	$\|\phi\| < 1, d \neq 0$	Alternativa
3	RW	$\phi = 1, d = m = 0$	Nula
4	RWD	$\phi = 1$	Nula

Los casos 3 y 4 (H_0) son procesos con *raiz unitaria*. Implican una forma muy particular de no-estacionariedad.

Prueba del caso 2: Si $|\phi| < 1$

$$Y_t(1 - \phi L) = m + d\ t + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \frac{m}{1 - \phi} + \frac{d\ t}{1 - \phi L} + \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi L}$$

Notar que

$$t/(1 - \phi L) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i (t - i) = \frac{t}{1 - \phi} - \frac{\phi}{(1 - \phi)^2}$$

reemplazando:

$$Y_t = \mu^* + \frac{d\ t}{1 - \phi} + \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi L}$$

con $\mu^* \equiv [m(1 - \phi) - d\phi]/(1 - \phi)^2$. Bajo $|\phi| < 1$, $\varepsilon_t/(1 - \phi L)$ es un $MA(\infty)$ estacionario, entonces Y_t es una tendencia deterministica.

Ejercicio: verificar el caso (4).

Por que testear por raices unitarias?

- Evaluar estacionariedad.
- Fuente de estacionariedad
- Regresion espuria

Tests

1. Dickey-Fuller
2. Dickey-Fuller Aumentado
3. Philips-Perron
4. KPSS