



## **Nuevo método de suavizado de modelos digitales del terreno procedentes de correlación fotogramétrica automática mediante interpolación bicúbica**

**José Juan Arranz Justel**

Universidad Politécnica de Madrid, [josejuan.arranz@upm.es](mailto:josejuan.arranz@upm.es)

### **RESUMEN**

*Se propone una nueva técnica de suavizado de datos, procedentes de correlación fotogramétrica automática, utilizando modelos digitales del terreno generados a partir de la unión de superficies bicúbicas interpoladas en un rejilla. Estas superficies bicúbicas son de tipo  $C^2$  lo que supone que proporcionan continuidad en el dato, en la pendiente del terreno y en la curvatura de éste en todo el espacio del modelo. Esta propiedad permite obtener interpolaciones de gran precisión y realismo, paliando en gran medida los errores que contienen los puntos originales obtenidos mediante correlación. Para ilustrar la técnica se presentan ejemplos, donde los resultados obtenidos mediante esta interpolación se comparan con los obtenidos a partir de modelos sin suavizar.*

## **New smoothing method of DTM from automatic photogrammetric correlation using bicubic interpolation**

### **ABSTRACT**

*New method of data smoothness for data that comes from automatic Photogrammetric correlation using digital elevation models generated from the joint of bicubic surfaces interpolated in a grid is proposed. This bicubic surfaces are type  $C^2$  which means that have continuity on the data, on the slope and on the curvature. This property allows obtaining very accurate interpolations avoiding most of the errors that the original correlated data has. Examples are included to show the method where are compared the results of this method with results of digital models without smoothness.*

## **1. INTRODUCCIÓN**

### **1.1. Objetivos**

El objetivo del presente artículo es mostrar las ventajas que ofrece la generación de superficies de interpolación de tipo  $C^2$  a partir del modelo digital del terreno generado a partir de datos procedentes de la correlación automática de un par estereoscópico realizado en una estación de Fotogrametría digital.

Para su elaboración se han estudiado los diferentes tipos de modelos que pueden ser utilizados para representar digitalmente la superficie del terreno, y así elegir cuál de ellos es el idóneo. También se han documentado los posibles métodos de generación de superficies de interpolación que se pueden utilizar para representar un conjunto de datos del terreno, de tal forma que se pueda elegir uno de ellos para su representación eficaz. Además, se ha desarrollado una aplicación que genera superficies continuas de tipo  $C^2$  a partir de un modelo digital del terreno, permitiendo su representación y manejo digital, y se han programado herramientas que permitan manejar la superficie calculada para generar diferentes mapas de representación del relieve, como son los mapas de curvas de nivel, mapas de tintas hipsométricas y mapas de sombreados, para comparar con los resultados obtenidos con modelos digitales tradicionales.

### **1.2. Antecedentes técnicos**

Hoy en día, gracias al avance de las tecnologías, la utilización de modelos digitales se ha extendido de gran manera en todas las ramas y aplicaciones de ingeniería. No cabe pensar en un ningún proyecto en el que no se muestren,

manipulen o calculen los datos de forma digital. La difícil representación del terreno por medio de modelos no continuos ha dado lugar a este estudio.

Ese mismo avance ha llevado consigo una utilización masiva de sistemas de representación digital en Cartografía. La representación del relieve se lleva a cabo por medio de modelos digitales del terreno en sus más diversos formatos, expresados como un conjunto de puntos o de superficies regulares o irregulares, sin representar el terreno como una superficie continua sino como unión de pequeñas superficies consideradas continuas.

Por todo ello a continuación se abordará el estudio de la representación del terreno por medio de modelos digitales, siendo expresados como una superficie continua en el valor, en la primera derivada y en la segunda derivada. Con ello se pretende que los resultados obtenidos sean más reales y extrapolables al terreno original.

### 1.3. Técnicas de interpolación espacial

Existen, fundamentalmente, dos tipos de interpolación espacial en función del tipo de datos: puntuales o superficiales. Tradicionalmente, los datos puntuales se han representado por medio de mapas de isolíneas como, por ejemplo, medidas de temperatura o de altitud; y los datos superficiales se han representado por medio de mapas de isopleas como, por ejemplo, las densidades de población.

Asimismo, la interpolación de datos superficiales se puede utilizar para obtener datos de áreas cuyos límites no coinciden. Estos tipos de interpolación se dividen en aquellas que preservan el volumen y las que no.

Los métodos de interpolación de datos puntuales se pueden dividir a su vez en exactos y aproximados, en función de si respetan los datos originales o no. Entre los métodos exactos se pueden incluir: *Krigeage*, interpolación por *splines*, interpolación por polinomios, métodos ponderados por distancia y métodos de diferencia finita. Entre los métodos aproximados se puede incluir: modelos basados en series de potencias, modelos basados en series de Fourier, mínimos cuadrados ponderados por distancia y mínimos cuadrados ajustados con *splines*.

El problema de la interpolación espacial se basa en: dado un conjunto de puntos discretos (o subáreas), encontrar la función que mejor represente la superficie completa que podrá predecir valores en otros puntos (o subáreas). En Cartografía, el objetivo principal de esta función de interpolación es la obtención de mapas de isolíneas o curvas de nivel, que no siempre se referirán a la variable "altitud".

Sin embargo, pueden existir otras aplicaciones de estas funciones de interpolación; por ejemplo, el estudio de los efectos de las características socio-económicas y la intención de voto de una población requiere la comparación de los datos de un distrito electoral con los datos del censo, cuyos límites geográficos pueden no coincidir, por lo que es necesario tener una función de interpolación que haga selecciones apropiadas de datos.

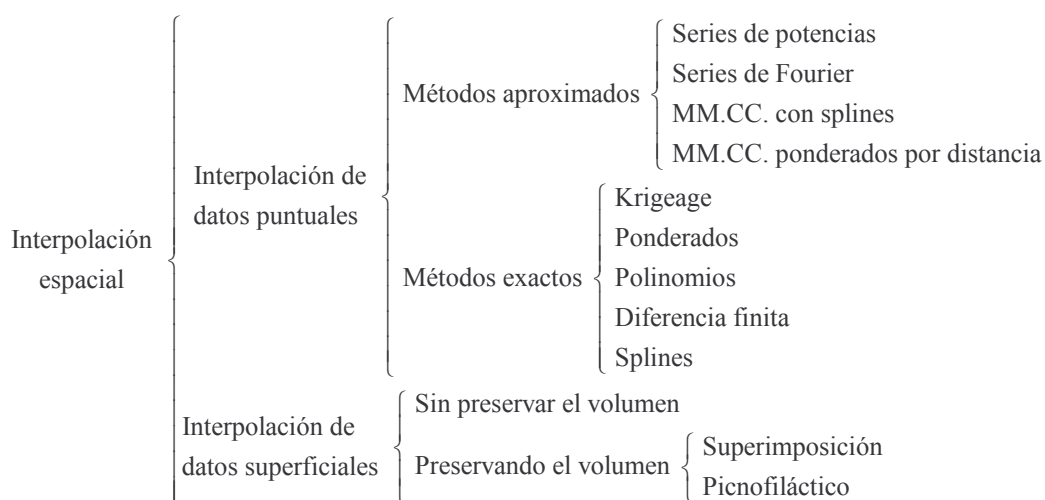


Figura 1: Organización de los diversos métodos de interpolación planteada por Lam.

En general, los métodos exactos o diferenciales son más fiables que los métodos aproximados o globales por la simplicidad, flexibilidad y fiabilidad de los resultados.

Por ello, el presente artículo se va a centrar en los métodos de interpolación exactos basados en polinomios, diferencias finitas y splines. Además, el estudio se particularizará sobre los métodos que existen de interpolación sobre rejillas de datos regulares, apoyándose para ello en la interpolación de Hermite y los diferentes métodos de interpolación basados en ella.

## 2. MÉTODOS EXACTOS DE INTERPOLACIÓN EN SUPERFICIES MEDIANTE SPLINES

### 2.1. Introducción a splines y B-splines

Un spline se puede interpretar como una banda flexible de madera, plástico o metal. En el diseño de productos que toman formas libres, tales como barcos, aviones o automóviles, se han utilizado los splines apoyados en la superficie por medio de “pesos” para obtener formas curvas diversas. Se conoce por experiencia que las curvas producidas por splines son “bonitas”. Una curva producida por un spline se describe por medio de diferentes curvas de grado cúbico en diferentes segmentos entre peso y peso. En las posiciones de los pesos, es decir, en los puntos de conexión entre segmentos de curva, está asegurada la continuidad de la segunda derivada. Además, a lo largo de todo el spline, la integral del cuadrado de la segunda derivada debería ser la mínima de todas las posibles curvas que pasarán por los puntos donde se encuentran los pesos. Esto significa que la energía total acumulada por el spline es mínima.

Matemáticamente, se puede definir un spline como: Una función  $s(x)$  definida en un intervalo finito  $[a, b]$  se denomina función spline de grado  $k > 0$  (orden  $k+1$ ) tomando como nodos la secuencia estrictamente en aumento  $\lambda_j, j=0, 1, \dots, g+1$  ( $\lambda_0=a, \lambda_{g+1}=b$ ) si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- Es polinomial en el subintervalo. En cada nodo del intervalo  $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ ,  $s(x)$  viene dada por un polinomio de al menos grado  $k$ .

$$s_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]} \in P_k$$

$$j = 0, 1, \dots, g$$

[1]

- Es continua. La función  $s(x)$  y sus derivadas hasta el orden  $k-1$  son todas continuas en  $[a, b]$ .

$$s(x) \in C^{k-1}[a, b]$$

[2]

Esta definición tiene diversas variantes. Por ejemplo, la restricción de que el grado  $k > 0$  se puede despreciar si se tienen en cuenta splines constantes en trozos,  $k=0$ . Para hacer esto, la segunda condición tendría que omitirse y en la primera condición se debería sustituir  $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$  por  $[\lambda_j, \lambda_{j+1})$ . Otra variación muy común es la omisión del requisito de que la secuencia de nodos debería ser estrictamente en aumento permitiendo nodos coincidentes, es decir, multiplicidad de nodos mayor que 1. Como se verá a continuación, esto significa que no se tendrán que considerar las condiciones de continuidad en los nodos.

Por lo afirmado en esta definición, en cada intervalo, el spline es simplemente un polinomio de grado  $k$ , (orden  $k+1$ ). De esta forma, cualquier spline  $s(x)$  se puede escribir como:

$$s(x) = p_{k,j}(x) = \sum_{i=0}^k a_{i,j} (x - \lambda_j)^i$$

$$\text{si } \lambda_j \leq x \leq \lambda_{j+1}, j = 0, \dots, g$$

[3]

Se puede demostrar que el conjunto de funciones spline satisfacen estas condiciones sobre todo si son un espacio vectorial (las operaciones de suma de vectores y de producto escalar son normalmente únicas, por ejemplo, si  $s_1$  y  $s_2$  son funciones splines del mismo grado y están definidas en el mismo conjunto de nodos, su suma  $s_1+s_2$  como vectores es el spline  $(s_1+s_2)(x)=s_1(x)+s_2(x)$ ). Este espacio se denotará como  $\eta_k(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{g+1})$ . No todos los coeficientes  $a_{i,j}$  son independientes, es decir, la condición de continuidad impone condiciones en estos coeficientes. Se puede demostrar que el espacio vectorial  $\eta_k(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{g+1})$  tiene dimensión  $g+k+1$ . De esta forma, en vez de la

representación de la ecuación [3], sería más útil tener una representación más compacta de una función spline  $s \in \eta_k$  (Alapää, 0 y Hope, 0).

La representación estándar para vectores (es decir, funciones)  $s \in \eta_k$  es el conjunto de funciones base B-splines; utilizando la llamada función de energía truncada:

$$(x-c)_+^k = \begin{cases} (x-c)^k & \text{si } x \geq c \\ 0 & \text{si } x < c \end{cases} \quad [4]$$

La (función base) B-spline (normalizada)  $N_{i,k+1}$  de grado  $k$  con nodos  $\lambda_0, \dots, \lambda_{g+1}$  se puede expresar explícitamente como:

$$N_{i,k+1}(x) = (\lambda_{i+k+1} - \lambda_i) \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(\lambda_{i+j} - x)_+^k}{\prod_{l=0, l \neq j}^{k+1} (\lambda_{i+j} - \lambda_{i+l})} \quad [5]$$

Una característica de las funciones base B-splines que es muy importante en cálculos y aplicaciones actuales es la propiedad de soporte local:

$$N_{i,k+1}(x) = 0 \quad \text{si } x \notin [\lambda_i, \lambda_{i+k+1}] \quad [6]$$

Utilizando los nodos  $\lambda_j, j=0, 1, \dots, g+1$  ( $\lambda_0=a, \lambda_{g+1}=b$ ) se pueden construir  $g-k+1$  funciones base B-splines linealmente independientes de grado  $k$ . Ya que el espacio vectorial  $\eta_k$  ( $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{g+1}$ ) tiene dimensión  $g-k+1$ , se necesitan  $2k$  vectores base más. Para obtener estos, se introducen nodos adicionales como finales de la secuencia de nodos. Específicamente, una introducción de nodos adicionales podría ser:

$$\begin{aligned} \lambda_{-k} &\leq \lambda_{-k+1} \leq \dots \leq \lambda_{-1} \leq \lambda_0 = a \\ b = \lambda_{g+1} &\leq \lambda_{g+2} \leq \dots \leq \lambda_{g+k} \leq \lambda_{g+k+1} \end{aligned} \quad [7]$$

Con estos nodos, se pueden construir los B-splines perdidos y se obtiene una base para el espacio vectorial  $\eta_k$ . Entonces, se puede expresar cualquier spline  $s(x) \in \eta_k$  como combinación lineal de los B-splines:

$$s(x) = \sum_{i=-k}^g c_i N_{i,k+1}(x) \quad [8]$$

donde los  $c_i$  se denominan coeficientes B-spline de  $s(x)$ .

## 2.2. Splines en más de una dimensión

El producto tensorial en B-splines es una de las generalizaciones más comunes en varias variables de los B-splines y su definición es muy parecida al caso de una variable. Se consideran las secuencias estrictamente en aumento:

$$\begin{aligned} a &= \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_g < \lambda_{g+1} = b, \\ c &= \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_h < \mu_{h+1} = d \end{aligned} \quad [9]$$

La función bivariable  $s(x,y)$  se denomina producto tensorial de splines de grados  $k$  (en la dirección  $x$ ) y  $l$  (en la dirección  $y$ ) en el rectángulo  $R=[a, b] \times [c, d]$  con la secuencia de nodos  $\lambda_i, i=0, \dots, g+1$  en la dirección  $x$  y  $\mu_j, j=0, \dots, h+1$  en la dirección  $y$ , si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- Polinomial en el subrectángulo. En cada rectángulo  $R_{i,j}=[\lambda_i, \lambda_{i+1}] \times [\mu_j, \mu_{j+1}]$ ,  $i=0, \dots, g, j=0, \dots, h$ , la función  $s(x,y)$  es un polinomio de dos variables de grados  $k$  y  $l$  en la dirección  $x$  e  $y$  respectivamente, es decir

$$s(x,y)_{|R_{i,j}} \in P_k \otimes P_l \quad [10]$$

- Continua. La función  $s(x,y)$  y todas sus derivadas parciales de orden hasta  $k-l$  en la dirección  $x$  y de orden hasta  $l-l$  en la dirección  $y$ , son continuas en  $R$ , es decir

$$\frac{\partial^{i+j} s(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \in C(R),$$

$$i = 0, \dots, k-1$$

$$j = 0, \dots, l-1$$

[11]

Se denotará el espacio vectorial de las funciones que satisfacen esta definición como  $\eta_{k,l}(\lambda_0, \dots, \lambda_{g+l}; \mu_0, \dots, \mu_{h+l})$ . Este espacio vectorial tiene dimensión  $(g+k+1) \cdot (h+l+1)$  e introduciendo nodos de manera similar al caso de una sola variable se obtienen las funciones base  $N_{i,k+1}(x) \cdot M_{j,l+1}(y)$  que permiten expresar cualquier spline  $s(x,y) \in \eta_{k,l}$  como combinación lineal:

$$s(x,y) = \sum_{i=-k}^g \sum_{j=-l}^h c_{i,j} N_{i,k+1}(x) \cdot M_{j,l+1}(y)$$

[12]

Como en el caso de una sola variable, los  $c_{i,j}$  se denominan coeficientes B-spline.

### 2.3. Comparación entre métodos con datos dispersos y datos en rejilla

Se considera el siguiente problema: Dados  $m$  puntos  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, \dots, m$  en el plano y los correspondientes valores de  $z$  tomados de una superficie desconocida, decidir cuál de los dos métodos (datos dispersos o en rejilla) es más apropiado para la reconstrucción con una aproximación razonable de la superficie original.

Los dos métodos están basados en el producto tensorial de B-splines. Un método requiere que los datos de entrada sean especificados en una rejilla rectangular, mientras que el otro método no (en adelante, se hará referencia como datos en rejilla y datos dispersos, respectivamente).

La principal diferencia entre los dos métodos es que uno de ellos requiere una organización de los puntos de entrada, por lo que si se desea utilizar datos no dispuestos en rejilla pertenecientes a una superficie, se necesitará crear previamente ésta. La creación de la rejilla requiere que el usuario introduzca el tamaño de las celdas.

Sin embargo, el método de datos en rejilla es significativamente más rápido, debido a que el problema inherente a las dos dimensiones se puede dividir en problemas unidimensionales, más fáciles de resolver.

Por ello, parece razonable señalar que los algoritmos que utilizan datos predispuestos en rejilla son mejores que los algoritmos que utilizan datos dispersos como demuestran Alapää, y Hope.

## 3. TÉCNICA UTILIZADA

A continuación, se presentan los diferentes algoritmos empleados para dar solución al problema de encontrar una definición matemática para una porción de terreno, de tal forma que la superficie generada sea de clase  $C^2$ , es decir, que haya continuidad en la primera derivada o pendientes y en la segunda derivada o curvaturas. El tipo de modelo digital que se va a utilizar es de rejilla (o DEM), definiendo superficies bicúbicas en cada celda definida por cada cuatro puntos. Una técnica para resolver el problema de conexión entre estas superficies son los splines.

### 3.1. Splines cúbicos

Las curvas matemáticas que aproximan formas de spline por medio de funciones vectoriales paramétricas son muy importantes en CAD. En particular, los splines naturales tienen la propiedad que minimiza la integral del cuadrado de la segunda derivada. Las condiciones de Ferguson y Coons para la conexión de segmentos de curvas y trozos de superficie aseguran la continuidad matemática local. Sin embargo, se puede obtener un número infinito de curvas, que son matemáticamente continuas en los puntos de contacto, variando la magnitud del vector tangente, resultando un número infinito de posibles curvas. La propiedad de la mínima interpolación del spline natural indica qué condiciones

debería satisfacer en los segmentos de conexión de curvas y qué forma debería tener. En un spline curvo, las condiciones de conexión son determinadas simultáneamente en todos los puntos de conexión. De manera similar al método de creación de curvas splines, se puede crear una superficie spline. La superficie spline se determina de forma única. Según Yamaguchi, el método spline puede ser la solución al problema de conexión que existe entre las curvas y superficies de Ferguson y Coons.

La forma de una curva spline se puede controlar variando las posiciones de los puntos de conexión entre los segmentos de curva (correspondientes a las posiciones de los pesos) e incrementando el número de segmentos de curva. Debido a que la posición de un punto en una curva spline se determina por medio de todos los datos iniciales a través de los cuales pasa la curva (y que son los puntos de conexión de los segmentos de curva), el efecto de cambiar la posición de un punto por el que pasa la curva afecta a toda la curva. Además, en algunos casos, es difícil predecir la forma de la curva que debe pasar por un determinado conjunto de puntos, es decir, a veces se pueden generar lazos en las curvas generadas.

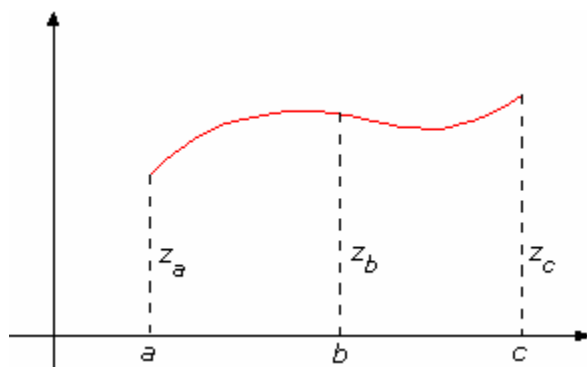


Figura 2: Curva que pasa por tres puntos

$g \in \text{splines cúbicos} \rightarrow g \in C^2[a,b] \rightarrow$  continua, primera derivada continua y segunda derivada continua.

$$g(x)|_{a,b} = p(x) \in P_3$$

$$g(x)|_{b,c} = q(x) \in P_3$$

[13]

$$\left. \begin{array}{l} g(a) = z_a \\ g(b) = z_b \\ g(c) = z_c \end{array} \right\}$$

[14]

Con estas únicas soluciones, el problema no queda unívocamente determinado (hay más incógnitas que ecuaciones) y se precisarán dos condiciones más.

$$p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

$$q(x) = \lambda_4 + \lambda_5 x + \lambda_6 x^2 + \lambda_7 x^3$$

[15]

Determinación de las ecuaciones:

$$p(a) = z_a$$

$$p(b) = z_b$$

$$q(b) = z_b$$

$$q(c) = z_c$$

$$p'(b) - q'(b) = 0 \Rightarrow \text{Función es } C^1 \text{ (continua en primera derivada)}$$

$$p''(b) - q''(b) = 0 \Rightarrow \text{Función es } C^2 \text{ (continua en segunda derivada)}$$

[16]

Faltan dos ecuaciones, ecuaciones condicionales que deben ser aportadas y que pueden ser de muchos tipos:



$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet p'(a) = z_a^* \\ \bullet q'(c) = z_c^* \\ \bullet p''(a) = M_a \\ \bullet q''(c) = M_c \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Otros dos tipos de soluciones resultarían de combinar estas condiciones}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet p'(a) - q'(c) = 0 \\ \bullet p''(a) - q''(c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso periódico: Requiere que } z_a = z_c$$

[17]

El sistema formado sería el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 & 0 & -1 & -2b & -3b^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6b & 0 & 0 & -2 & -6b \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2c & 3c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_a \\ z_b \\ z_b \\ z_c \\ 0 \\ 0 \\ z_a^* \\ z_c^* \end{pmatrix}$$

[18]

Este procedimiento tiene el inconveniente de resolver un sistema de grandes dimensiones (cuatro incógnitas por intervalo). Para solucionarlo, se utilizará una incógnita por nodo en vez de cuatro incógnitas por intervalo. Con lo cual, el sistema queda reducido a la cuarta parte.

Hay dos posibilidades para ello:

- utilizar el valor de las pendientes o derivadas primeras como incógnitas auxiliares,
- utilizar el valor de las curvaturas o derivadas segundas como incógnitas auxiliares.

En todo problema de spline cúbico siempre se van a dar como datos las coordenadas por donde pasará y para que el problema quede unívocamente determinado se darán dos condiciones más, siendo las más habituales las pendientes en los extremos, las derivadas segundas, o las derivadas mixtas o periódicas. En el caso periódico sólo deberán ser iguales las ordenadas en los extremos, no siendo necesaria más información.

En el caso que ocupa, se van a disponer de las altitudes de todos los puntos de la malla y se deberán calcular el resto de los parámetros. Para ello se podría establecer arbitrariamente la curvatura en los extremos de las filas (o columnas) o fijar una pendiente en estos, como puede ser la obtenida de ajustar un polinomio cuadrático en el primer y último tramo. Se ha realizado el cálculo por los dos caminos y se han obtenido los mismos resultados, optando al final por calcular utilizando curvaturas.

El problema quedará resuelto cuando se conozca la expresión del polinomio cúbico en cada subintervalo.

### 3.1.1. Determinación de splines cúbicos por pendientes

La primera posibilidad consiste en resolver splines cúbicos partiendo del conocimiento de las pendientes en los extremos:

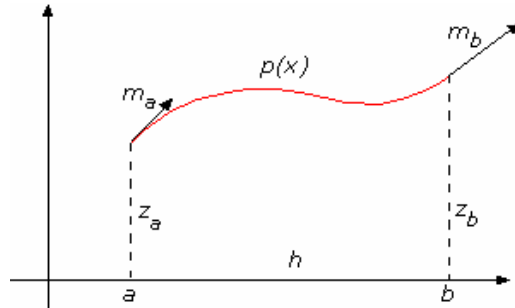


Figura 3: Ecuación a partir del valor de la función y la segunda derivada en los extremos.

Cuatro incógnitas y dos parámetros conocidos.

$$\begin{aligned} p(x) &= \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \lambda_3(x-a)^3 \\ p(a) &= z_a \\ p(b) &= z_b \\ p'(a) &= m_a \\ p'(b) &= m_b \\ h &= b - a \end{aligned}$$

[19]

$m_a$  y  $m_b$  serán comunes en los polinomios adyacentes. Si se expresa  $p(x)$  en función de  $m_a$  y  $m_b$  se pasará de cuatro incógnitas por intervalo a una incógnita por nodo. El sistema generado es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_a \\ m_a \\ z_b \\ m_b \end{pmatrix}$$

[20]

Directamente se obtiene que:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= z_a \\ \lambda_1 &= m_a \end{aligned}$$

[21]

Restando la cuarta ecuación a la segunda:

$$2h\lambda_2 + 3h^2\lambda_3 = m_b - m_a \rightarrow \lambda_3 = \frac{m_b - m_a - 2h\lambda_2}{3h^2}$$

[22]

De la tercera ecuación y de las ecuaciones [21] y [22] se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{z_b - z_a - hm_a - h^3\lambda_3}{h^2} = \frac{z_b - z_a - hm_a}{h^2} - \left( \frac{m_b - m_a - 2h\lambda_2}{3h} \right) \\ \frac{\lambda_2}{3} &= \frac{z_b - z_a}{h^2} - \frac{m_a}{h} - \frac{m_b}{3h} + \frac{m_a}{3h} \\ \lambda_2 &= \frac{3}{h^2}(z_b - z_a) - \frac{2m_a + m_b}{h} \end{aligned}$$

[23]



Sustituyendo en la ecuación [22]:

$$\lambda_3 = \frac{m_b - m_a - \frac{6}{h}(z_b - z_a) + 4m_a + 2m_b}{3h^2} = -\frac{2}{h^3}(z_b - z_a) + \frac{m_a + m_b}{h^2}$$

[24]

Además, la segunda derivada en los extremos será:

$$\begin{aligned} p''(a) &= 2\lambda_2 = 2 \cdot \left( \frac{3}{h^2}(z_b - z_a) - \frac{2m_a + m_b}{h} \right) = \frac{6}{h^2}(z_b - z_a) - \frac{4m_a + 2m_b}{h} \\ p''(b) &= 2\lambda_2 + 6h\lambda_3 = \frac{6}{h^2}(z_b - z_a) - \frac{4m_a}{h} - \frac{2m_b}{h} - \frac{12}{h^2}(z_b - z_a) + \frac{6m_a}{h} + \frac{6m_b}{h} = \\ &= \frac{2m_a + 4m_b}{h} - \frac{6}{h^2}(z_b - z_a) \end{aligned}$$

[25]

De forma general:

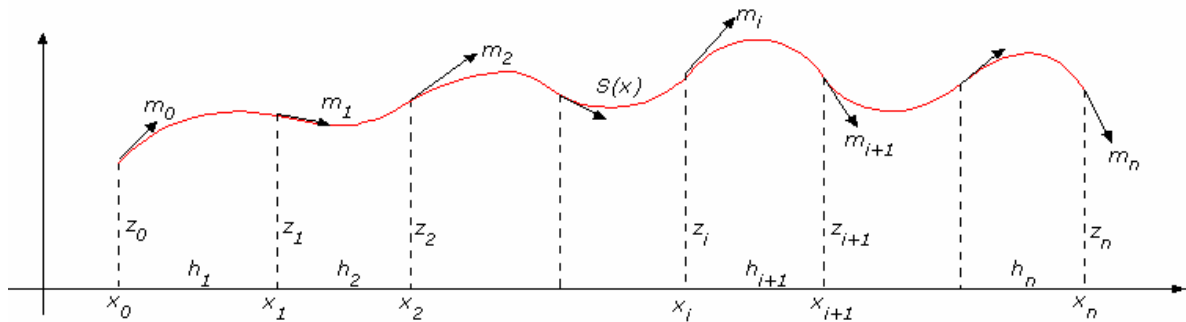


Figura 4: Función definida a partir de los datos de la función y la segunda derivada en los puntos.

$$\begin{aligned} S(x) &\in C^2[x_0, x_n] \\ S(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} &\in P_3 \end{aligned} \quad \begin{cases} S(x_i) = z_i \\ i = 0, \dots, n \end{cases} \quad \begin{cases} m_i = S'(x_i) \\ i = 0, \dots, n \end{cases} \quad \begin{cases} h_{i+1} = x_{i+1} - x_i \\ i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

[26]

$$S(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_i) + \lambda_2(x - x_i)^2 + \lambda_3(x - x_i)^3$$

[27]

siendo:

$$\begin{aligned} \lambda_{0i} &= z_i & \lambda_{2i} &= \frac{3}{h_{i+1}^2}(z_{i+1} - z_i) - \frac{2m_i + m_{i+1}}{h_{i+1}} \\ \lambda_{1i} &= m_i & \lambda_{3i} &= -\frac{2}{h_{i+1}^3}(z_{i+1} - z_i) + \frac{m_i + m_{i+1}}{h_{i+1}^2} \end{aligned}$$

[28]

Conociendo todas las  $m_i$  se tendría la expresión del polinomio cúbico en cada intervalo.

Pero que tenga continuidad en la primera derivada no asegura que tenga continuidad en la segunda derivada por lo que se debe imponer la condición:

$$\begin{aligned} S''(x_i^+) &= S''(x_i^-) \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

[29]

Teniendo las ecuaciones [25], [28] y [29], el sistema de ecuaciones que deben satisfacer las  $m_i$  es:

$$\begin{cases} S''(x_i^+) = \frac{6 \cdot (z_{i+1} - z_i)}{h_{i+1}^2} - m_i \frac{4}{h_{i+1}} - m_{i+1} \frac{2}{h_{i+1}} = S''(x_i^-) = m_{i-1} \frac{2}{h_i} + m_i \frac{4}{h_i} - \frac{6 \cdot (z_i - z_{i-1})}{h_i^2} \\ i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

[30]

Pasando las  $m$  a un miembro y las  $z$  al otro:

$$\begin{cases} h_{i+1} m_{i-1} + (2h_i + 2h_{i+1}) m_i + h_i m_{i+1} = \frac{3h_{i+1}}{h_i} (z_i - z_{i-1}) + \frac{3h_i}{h_{i+1}} (z_{i+1} - z_i) \\ i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

[31]

Esto aporta  $n-1$  ecuaciones pero se tienen  $n+1$  incógnitas (las  $m$ ). Hacen falta dos ecuaciones más y serán algún dúo de los vistos en la ecuación [17]:

$$\begin{cases} \bullet S''(x_0) = M_0 \rightarrow \text{curvatura en el extremo izquierdo} \\ \bullet S''(x_n) = M_n \rightarrow \text{curvatura en el extremo derecho} \\ M_0 = \frac{6}{h_1^2} (z_1 - z_0) - \frac{4m_0 + 2m_1}{h_1} \\ M_n = \frac{2m_{n-1} + 4m_n}{h_n} - \frac{6}{h_n^2} (z_n - z_{n-1}) \\ \bullet S'(x_0) = m_0 \\ \bullet S'(x_n) = m_n \end{cases}$$

[32]

La solución, por tanto, será añadir dos ecuaciones más o eliminar dos incógnitas. Además, existen los casos combinados y el caso periódico que es el siguiente (se debe cumplir  $z_0 = z_n$ ):

$$\begin{cases} \bullet S'(x_0^+) = S'(x_n^-) & \rightarrow \text{Añade una ecuación} \\ \bullet S''(x_0) = S''(x_n) \rightarrow M_0 = M_n & \rightarrow \text{Elimina una incógnita} \end{cases}$$

[33]

Ahlberg demostró que este conjunto de condiciones da siempre un sistema compatible y determinado.

### 3.1.2. Determinación de splines cúbicos por derivadas segundas

Esta es la segunda posibilidad para resolver splines cúbicos, conociendo las derivadas segundas en los extremos:

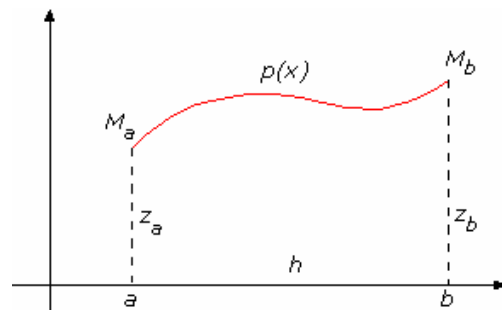


Figura 5: Ecuación a partir del valor de la función y la primera derivada en los extremos.

Cuatro incógnitas y dos parámetros conocidos.

$$\begin{aligned} p(x) &= \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \lambda_3(x-a)^3 \\ p(a) &= z_a \\ p(b) &= z_b \\ p''(a) &= M_a \\ p''(b) &= M_b \\ h &= b-a \end{aligned}$$

[34]

$M_a$  y  $M_b$  serán comunes en los polinomios adyacentes. Si se expresa  $p(x)$  en función de  $M_a$  y  $M_b$  se pasará de cuatro incógnitas por intervalo a una incógnita por nodo, siendo el sistema generado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_a \\ M_a \\ z_b \\ M_b \end{pmatrix}$$

[35]

Directamente se obtiene que:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= z_a \\ \lambda_2 &= M_a/2 \end{aligned}$$

[36]

Si a la última ecuación se le resta la segunda:

$$\lambda_3 = \frac{M_b - M_a}{6h}$$

[37]

Y por último:

$$\lambda_1 = \frac{z_b - z_a - h^2 \frac{M_a}{2} - h^3 \frac{M_b - M_a}{6h}}{h} = \frac{z_b - z_a}{h} - M_a \frac{h}{3} + M_b \frac{h}{6}$$

[38]

Todo está en función de  $M_a$  y  $M_b$  como únicas incógnitas. Para simplificar se van a calcular las pendientes en los extremos:

$$\begin{aligned} p'(a) &= \lambda_1 \\ p'(b) &= \lambda_1 + 2\lambda_2 h + 3\lambda_3 h^2 = \frac{z_b - z_a}{h} + M_a \frac{h}{6} + M_b \frac{h}{3} \end{aligned}$$

[39]

De forma general:

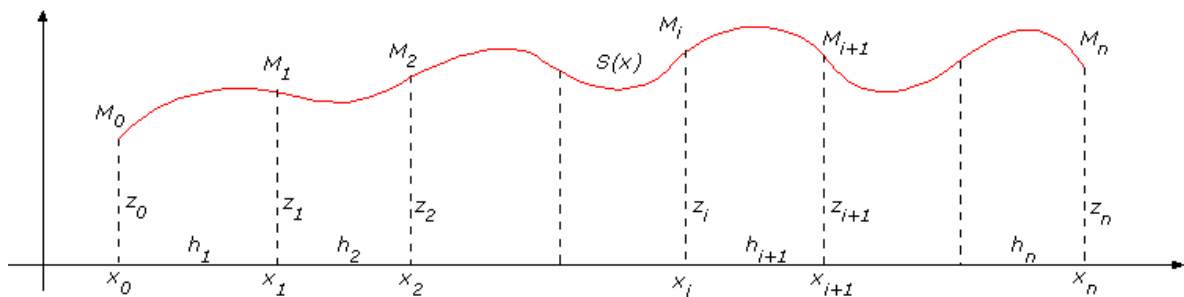


Figura 6: Función definida a partir de los datos de la función y la primera derivada en los puntos.

$$\begin{aligned} S(x) \in C^2[x_0, x_n] & \quad \begin{cases} S(x_i) = z_i \\ i = 0, \dots, n \end{cases} \quad \begin{cases} M_i = S''(x_i) \\ i = 0, \dots, n \end{cases} \quad \begin{cases} h_{i+1} = x_{i+1} - x_i \\ i = 0, \dots, n-1 \end{cases} \\ S(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_3 & \end{aligned} \quad [40]$$

$$S(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_i) + \lambda_2(x - x_i)^2 + \lambda_3(x - x_i)^3 \quad [41]$$

siendo:

$$\begin{aligned} \lambda_{0i} &= z_i & \lambda_{2i} &= \frac{M_i}{2} \\ \lambda_{1i} &= \frac{z_{i+1} - z_i}{h_{i+1}} - M_i \frac{h_{i+1}}{3} - M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} & \lambda_{3i} &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_{i+1}} \end{aligned} \quad [42]$$

Conociendo todas las  $M_i$  se tendría la expresión del polinomio cúbico en cada intervalo.

Para asegurar la existencia de la segunda derivada, se debe imponer la existencia de la primera derivada, por tanto, se obliga, en los nodos intermedios, que la primera derivada sea igual por la derecha y por la izquierda:

$$\begin{aligned} S'(x_i^+) &= S'(x_i^-) \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad [43]$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones [39], [42] y [43], el sistema de ecuaciones que deben satisfacer las  $M_i$  es:

$$\begin{cases} S'(x_i^+) = \frac{z_{i+1} - z_i}{h_{i+1}} - M_i \frac{h_{i+1}}{3} - M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} = S'(x_i^-) = \frac{z_i - z_{i-1}}{h_i} + M_{i-1} \frac{h_i}{6} + M_i \frac{h_i}{3} \\ i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad [44]$$

Pasando las  $M$  a un miembro y las  $z$  al otro:

$$\begin{cases} M_{i-1} \frac{h_i}{6} + M_i \left( \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3} \right) + M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} = \frac{z_{i+1} - z_i}{h_{i+1}} - \frac{z_i - z_{i-1}}{h_i} \\ i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad [45]$$

Esto aporta  $n-1$  ecuaciones pero se tienen  $n+1$  incógnitas (las  $M$ ). Hacen falta dos ecuaciones más y serán algún dúo de los vistos en la ecuación [17]:

$$\begin{cases} \bullet S'(x_0) = z'_0 \rightarrow \text{pendiente en el extremo izquierdo} \\ \bullet S'(x_n) = z'_n \rightarrow \text{pendiente en el extremo derecho} \\ \quad z'_0 = \frac{z_1 - z_0}{h_1} - M_0 \frac{h_1}{3} - M_1 \frac{h_1}{6} \\ \quad z'_n = \frac{z_n - z_{n-1}}{h_n} + M_{n-1} \frac{h_n}{6} + M_n \frac{h_n}{3} \\ \bullet S''(x_0) = M_0 \\ \bullet S''(x_n) = M_n \end{cases} \quad [46]$$

La solución, por tanto, será añadir dos ecuaciones más o eliminar dos incógnitas. Además, existen los casos combinados y el caso periódico que es el siguiente (se debe cumplir  $z_0 = z_n$ ):

$$\begin{cases} \bullet S'(x_0^+) = S'(x_n^-) & \rightarrow \text{Añade una ecuación} \\ \bullet S''(x_0) = S''(x_n) \rightarrow M_0 = M_n & \rightarrow \text{Elimina una incógnita} \end{cases} \quad [47]$$

Se demuestra, que este conjunto de condiciones da siempre un sistema compatible y determinado.

### 3.2. Interpolación de Hermite

A continuación, se presenta un método para obtener la expresión de la superficie en cada trozo o celda de la malla, utilizando los conocimientos establecidos en la sección 3.1, es decir, por medio de los valores de la función, de la primera y de la segunda derivada en los nodos de la malla. Por ello, se elige la interpolación de Hermite que permite obtener la expresión buscada con estos datos como se describe a continuación.

La interpolación de Hermite es una forma generalizada de la interpolación de Lagrange (Yamaguchi y Anand). Mientras que la interpolación de Lagrange interpola sólo entre los valores de una función  $f_0, f_1, \dots, f_n$  en diferentes abscisas  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , la interpolación de Hermite también interpola entre derivadas de orden superior.

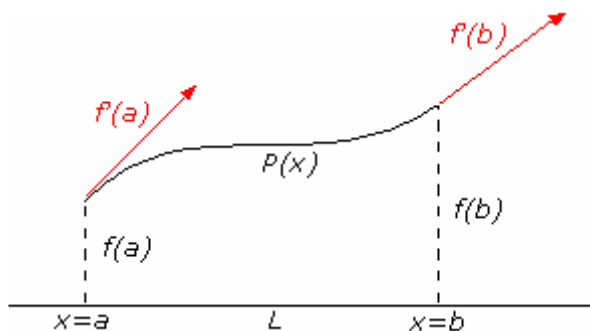


Figura 7: Caso de interpolación lineal

Suponiendo una curva que pasa por las posiciones  $f(a)$  y  $f(b)$  y que tiene como vectores tangentes en dichos puntos  $f'(a)$  y  $f'(b)$  respectivamente, se podría escribir como polinomio interpolador:

$$P(x) = f(a)N_1(x) + f(b)N_2(x) + f'(a)N_3(x) + f'(b)N_4(x)$$

[48]

o matricialmente:

$$P(x) = \begin{bmatrix} f(a) & f(b) & f'(a) & f'(b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix}$$

[49]

Esta es la expresión del polinomio de Hermite expresado en función de bases de Lagrange, donde  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$ ,  $N_3(x)$  y  $N_4(x)$  son las bases de Lagrange y están definidas por:

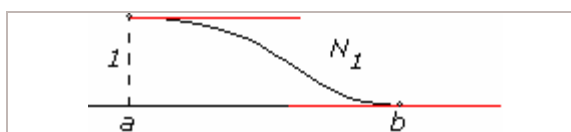


Figura 8: La función es 1 en a y 0 en b siendo en ambos la pendiente 0.

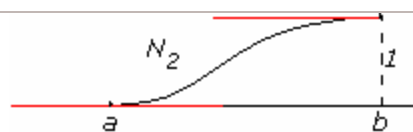


Figura 9: La función es 0 en ambos puntos, siendo la pendiente 1 en a y 0 en b.

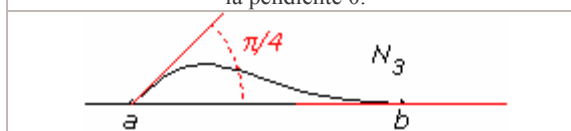


Figura 10: La función es 1 en b y 0 en a siendo en ambos la pendiente 0.

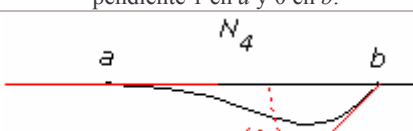


Figura 11: La función es 0 en ambos puntos, siendo la pendiente 1 en b y 0 en a.

Presentando  $N_i$  en base de potencias desplazadas  $(1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3)$ .



Para  $N_1$ :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= C_1 \cdot 1 + C_2(x-a) + C_3(x-a)^2 + C_4(x-a)^3 \\ N_1(a) &= 1 \quad N_1'(a) = 0 \\ N_1(b) &= 0 \quad N_1'(b) = 0 \end{aligned}$$

[50]

Matricialmente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_1 + L \cdot C_2 + L^2 C_3 + L^3 C_4 = 0 \\ C_2 + 2L \cdot C_3 + 3L^2 C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 1 + 0 + L^2 C_3 + L^3 C_4 = 0 \\ 2L \cdot C_3 + 3L^2 C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -3/2 \cdot L \cdot C_4 \\ L^3 C_4 = -1 - L^2(-3/2 \cdot L \cdot C_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -3/L^2 \\ C_4 = 2/L^3 \end{cases} \end{aligned}$$

[51]

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/L^2 & 2/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x-a \\ (x-a)^2 \\ (x-a)^3 \end{bmatrix}$$

[52]

Para  $N_2$ :

$$\begin{aligned} N_2(x) &= C_1 \cdot 1 + C_2(x-a) + C_3(x-a)^2 + C_4(x-a)^3 \\ N_2(a) &= 0 \quad N_2'(a) = 0 \\ N_2(b) &= 1 \quad N_2'(b) = 0 \end{aligned}$$

[53]

Matricialmente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_1 + L \cdot C_2 + L^2 C_3 + L^3 C_4 = 1 \\ C_2 + 2L \cdot C_3 + 3L^2 C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} L^2 C_3 + L^3 C_4 = 1 \\ 2L \cdot C_3 + 3L^2 C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -3/2 \cdot L \cdot C_4 \\ -3/2 L^3 C_4 + L^3 C_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 3/L^2 \\ C_4 = -2/L^3 \end{cases} \end{aligned}$$

[54]

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/L^2 & -2/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x-a \\ (x-a)^2 \\ (x-a)^3 \end{bmatrix}$$

[55]

Para  $N_3$ :

$$\begin{aligned} N_3(x) &= C_1 \cdot 1 + C_2(x-a) + C_3(x-a)^2 + C_4(x-a)^3 \\ N_3(a) &= 1 \quad N_3'(a) = 1 \\ N_3(b) &= 0 \quad N_3'(b) = 0 \end{aligned}$$

[56]



Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_1 + L \cdot C_2 + L^2 C_3 + L^3 C_4 = 0 \\ C_2 + 2L \cdot C_3 + 3L^2 C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 + L + L^2 C_3 + L^3 C_4 = 0 \\ 2L \cdot C_3 + 3L^2 C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -1/L - L \cdot C_4 \\ 1 - 2 - 2L^2 C_4 + 3L^2 C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -2/L \\ C_4 = 1/L^2 \end{cases}$$

[57]

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2/L & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x-a \\ (x-a)^2 \\ (x-a)^3 \end{bmatrix}$$

[58]

Para  $N_4$ :

$$\begin{aligned} N_4(x) &= C_1 \cdot 1 + C_2(x-a) + C_3(x-a)^2 + C_4(x-a)^3 \\ N_4(a) &= 0 \quad N'_4(a) = 0 \\ N_4(b) &= 0 \quad N'_4(b) = 1 \end{aligned}$$

[59]

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_1 + L \cdot C_2 + L^2 C_3 + L^3 C_4 = 0 \\ C_2 + 2L \cdot C_3 + 3L^2 C_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L^2 C_3 + L^3 C_4 = 0 \\ 2L \cdot C_3 + 3L^2 C_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -L \cdot C_4 \\ -2L^3 C_4 + 3L^2 C_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -1/L \\ C_4 = 1/L^2 \end{cases}$$

[60]

$$N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x-a \\ (x-a)^2 \\ (x-a)^3 \end{bmatrix}$$

[61]

Sustituyendo el valor de estas funciones en la expresión del polinomio interpolador:

$$P(x) = \begin{bmatrix} f(a) & f(b) & f'(a) & f'(b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/L^2 & 2/L^3 \\ 0 & 0 & 3/L^2 & -2/L^3 \\ 0 & 1 & -2/L & 1/L^2 \\ 0 & 0 & -1/L & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x-a \\ (x-a)^2 \\ (x-a)^3 \end{bmatrix}$$

[62]

### 3.3. Superficie a trozos de Ferguson

Por último, se presenta este algoritmo como un caso especial de la interpolación de Hermite. Un segmento de curva de Ferguson es una función vectorial cúbica con respecto a un parámetro obtenido especificando la posición de los vectores y los vectores tangentes de los puntos principio y final del segmento de curva. La curva final se crea uniendo suavemente esos segmentos de curva. Además, utilizando esos segmentos de curva, Ferguson propuso un método de creación de trozos de superficie (denominado *parche*<sup>1</sup> o trozo de superficie) que satisface las condiciones impuestas por los especificados vectores de posición y tangentes en los cuatro puntos, y puso en práctica este método en la creación de superficies para la Boeing, en década de los 60.

Según Yamaguchi, las curvas de Ferguson tienen las siguientes ventajas:

- Además de las curvas en el plano, se pueden expresar las curvas en el espacio por medio de funciones simples.
- Se puede especificar fácilmente una parte de la curva que sea necesaria por un rango en el parámetro.
- Si una pendiente paralela al eje  $y$  es expresada como  $dx/dt=0$ , no sería necesario utilizar  $dy/dx=\infty$ .
- Las transformaciones de una curva, tales como traslación y rotación, se pueden llevar a cabo utilizando, simplemente, la multiplicación por una matriz de transformación.

Como inconveniente se podría decir que, cuando las superficies son demasiado extensas, tienden a ser demasiado planas entorno a los vértices de los parches o trozos. Sin embargo, este inconveniente no tiene influencia, prácticamente, sobre las representaciones del relieve que se calcularán a partir del modelo.

Como demuestran Anand, Mortenson y Yamaguchi, el proceso de interpolación en el plano consiste en obtener un polinomio de interpolación  $P(x,y)$  que pueda sustituir a la función  $f(x,y)$  de tal forma que se cumplan las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{llll} P(Q_1) = f(Q_1) & P_x(Q_1) = f_x(Q_1) & P_y(Q_1) = f_y(Q_1) & P_{xy}(Q_1) = f_{xy}(Q_1) \\ P(Q_2) = f(Q_2) & P_x(Q_2) = f_x(Q_2) & P_y(Q_2) = f_y(Q_2) & P_{xy}(Q_2) = f_{xy}(Q_2) \\ P(Q_3) = f(Q_3) & P_x(Q_3) = f_x(Q_3) & P_y(Q_3) = f_y(Q_3) & P_{xy}(Q_3) = f_{xy}(Q_3) \\ P(Q_4) = f(Q_4) & P_x(Q_4) = f_x(Q_4) & P_y(Q_4) = f_y(Q_4) & P_{xy}(Q_4) = f_{xy}(Q_4) \end{array}$$

[63]

En el caso de las superficies de Ferguson las derivadas cruzadas (o comunes)  $f_{xy}$  se toman como cero.

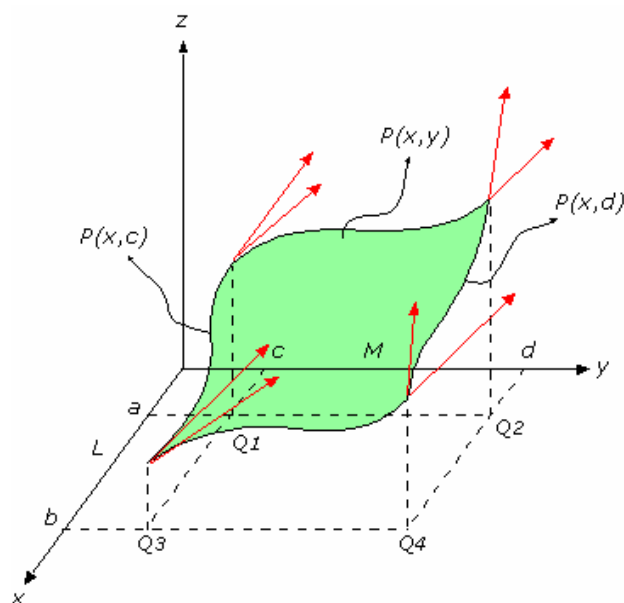


Figura 12: Interpolación en el plano.

<sup>1</sup> Patch, en terminología inglesa.

Siguiendo el mismo procedimiento realizado en el plano se va a obtener un polinomio de interpolación que interpole los datos de las esquinas  $Q_1$  y  $Q_3$  y sus respectivas derivadas en la dirección de las  $x$ , es decir:

$$P(x, c) = [f(Q_1) \quad f(Q_3) \quad f_x(Q_1) \quad f_x(Q_3)] \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} \quad [64]$$

Y otro que interpole los datos de las esquinas  $Q_2$  y  $Q_4$  y sus respectivas derivadas en la dirección de las  $x$ , es decir:

$$P(x, d) = [f(Q_2) \quad f(Q_4) \quad f_x(Q_2) \quad f_x(Q_4)] \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} \quad [65]$$

Ahora, se deberían buscar dos polinomios que interpolen, en los mismos ejes anteriores, los valores de las derivadas en la dirección de las  $y$  y de las derivadas cruzadas. Para ello, se hace una analogía entre la expresión de las ecuaciones [64] y [65] derivándolas respecto de  $y$  quedando:

$$P_y(x, c) = [f_y(Q_1) \quad f_y(Q_3) \quad f_{yx}(Q_1) \quad f_{yx}(Q_3)] \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} \quad [66]$$

$$P_y(x, d) = [f_y(Q_2) \quad f_y(Q_4) \quad f_{yx}(Q_2) \quad f_{yx}(Q_4)] \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} \quad [67]$$

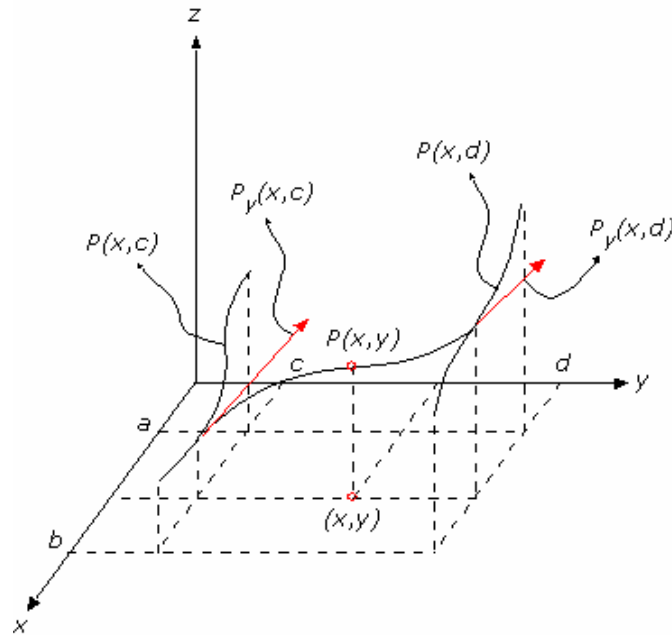


Figura 13: Obtención del polinomio interpolador en la superficie

Para obtener el polinomio que interpola la superficie se debe buscar un polinomio que interpole los puntos de ambos polinomios en la dirección de las  $y$ . Para ello se deben tomar los valores de los polinomios  $P(x,c)$  y  $P(x,d)$ , y sus derivadas parciales en el sentido de las  $y$ ,  $P_y(x,c)$  y  $P_y(x,d)$ .

$$P(x,y) = \begin{bmatrix} P(x,c) & P(x,d) & P_y(x,c) & P_y(x,d) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{N_1(y)} \\ \overline{N_2(y)} \\ \overline{N_3(y)} \\ \overline{N_4(y)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{N_1(y)} & \overline{N_2(y)} & \overline{N_3(y)} & \overline{N_4(y)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(x,c) \\ P(x,d) \\ P_y(x,c) \\ P_y(x,d) \end{bmatrix}$$

[68]

Si se sustituyen los valores obtenidos en las ecuaciones [64], [65], [66] y [67] obteniéndose la siguiente expresión:

$$P(x,y) = \begin{bmatrix} \overline{N_1(y)} & \overline{N_2(y)} & \overline{N_3(y)} & \overline{N_4(y)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(Q_1) & f(Q_3) & f_x(Q_1) & f_x(Q_3) \\ f(Q_2) & f(Q_4) & f_x(Q_2) & f_x(Q_4) \\ f_y(Q_1) & f_y(Q_3) & f_{yx}(Q_1) & f_{yx}(Q_3) \\ f_y(Q_2) & f_y(Q_4) & f_{yx}(Q_2) & f_{yx}(Q_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(Q_1) & f(Q_2) & f_y(Q_1) & f_y(Q_2) \\ f(Q_3) & f(Q_4) & f_y(Q_3) & f_y(Q_4) \\ f_x(Q_1) & f_x(Q_2) & f_{yx}(Q_1) & f_{yx}(Q_2) \\ f_x(Q_3) & f_x(Q_4) & f_{yx}(Q_3) & f_{yx}(Q_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{N_1(y)} \\ \overline{N_2(y)} \\ \overline{N_3(y)} \\ \overline{N_4(y)} \end{bmatrix}$$

[69]

Siendo:

$$f_{yx} = f_{xy} \text{ en } Q_i \text{ para } i=1,\dots,4$$

[70]

La expresión [69] se puede expresar en forma de doble sumatorio:

$$P(x,y) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 N_i(x) \overline{N_j(y)} F_{ij} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 N_{ij}(x,y) F_{ij}$$

[71]

donde:

$$\begin{aligned} F_{11} &= f(Q_1) & F_{12} &= f(Q_2) & F_{13} &= f_y(Q_1) & F_{14} &= f_y(Q_2) \\ F_{21} &= f(Q_3) & F_{22} &= f(Q_4) & F_{23} &= f_y(Q_3) & F_{24} &= f_y(Q_4) \\ F_{31} &= f_x(Q_1) & F_{32} &= f_x(Q_2) & F_{33} &= f_{yx}(Q_1) & F_{34} &= f_{yx}(Q_2) \\ F_{41} &= f_x(Q_3) & F_{42} &= f_x(Q_4) & F_{43} &= f_{yx}(Q_3) & F_{44} &= f_{yx}(Q_4) \end{aligned}$$

[72]

Teniendo en cuenta las expresiones calculadas en las ecuaciones [52], [55], [58] y [61], se puede poner:

$$\begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/L^2 & 2/L^3 \\ 0 & 0 & 3/L^2 & -2/L^3 \\ 0 & 1 & -2/L & 1/L^2 \\ 0 & 0 & -1/L & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x-a \\ (x-a)^2 \\ (x-a)^3 \end{bmatrix}$$

[73]

$$\begin{bmatrix} \overline{N_1(y)} \\ \overline{N_2(y)} \\ \overline{N_3(y)} \\ \overline{N_4(y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/M^2 & 2/M^3 \\ 0 & 0 & 3/M^2 & -2/M^3 \\ 0 & 1 & -2/M & 1/M^2 \\ 0 & 0 & -1/M & 1/M^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y-c \\ (y-c)^2 \\ (y-c)^3 \end{bmatrix}$$

[74]

Si se denomina a

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & x-a & (x-a)^2 & (x-a)^3 \end{bmatrix} \\ Y &= \begin{bmatrix} 1 & y-c & (y-c)^2 & (y-c)^3 \end{bmatrix} \\ C_L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/L^2 & 2/L^3 \\ 0 & 0 & 3/L^2 & -2/L^3 \\ 0 & 1 & -2/L & 1/L^2 \\ 0 & 0 & -1/L & 1/L^2 \end{bmatrix} \\ C_M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/M^2 & 2/M^3 \\ 0 & 0 & 3/M^2 & -2/M^3 \\ 0 & 1 & -2/M & 1/M^2 \\ 0 & 0 & -1/M & 1/M^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[75]

se podría escribir la ecuación [69] como:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= X \cdot C_L \cdot F \cdot C_M^T \cdot Y^T \\ a &\leq x \leq b \\ c &\leq y \leq d \end{aligned}$$

[76]

Para calcular las derivadas parciales en los nodos se utilizarán splines cúbicos vistos en la sección 3.1.

Para definir una superficie a trozos de Ferguson, como se ha comentado antes, las derivadas cruzadas deben ser cero (Anand, Mortenson y Yamaguchi), y la expresión [69] se transforma en:

$$P(x,y) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(Q_1) & f(Q_2) & f_y(Q_1) & f_y(Q_2) \\ f(Q_3) & f(Q_4) & f_y(Q_3) & f_y(Q_4) \\ f_x(Q_1) & f_x(Q_2) & 0 & 0 \\ f_x(Q_3) & f_x(Q_4) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{N_1(y)} \\ \overline{N_2(y)} \\ \overline{N_3(y)} \\ \overline{N_4(y)} \end{bmatrix}$$

[77]

En resumen, si se tiene una rejilla de puntos en los cuales se ha definido un dato y dos vectores tangentes, se puede encontrar una representación matemática para cada trozo de superficie. En el límite entre trozos colindantes, se comparte la curva límite y los vectores tangentes en la dirección de la curva límite, de tal forma que los trozos se conectan dando continuidad a la pendiente. El hecho de que en las superficies de Ferguson las derivadas cruzadas sean cero no asegura que haya continuidad de la derivada segunda entre dichos trozos de superficies. Además, este hecho hace que las superficies sean planas en el entorno de las esquinas de los trozos de superficie.

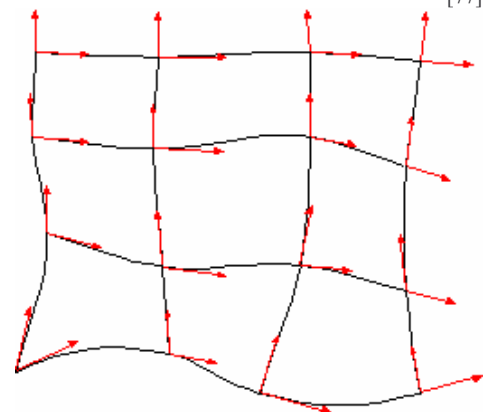


Figura 14: Rejilla de datos y derivadas



## 4. CONCLUSIONES

### 4.1. Conclusiones sobre los métodos de interpolación

Se ha tratado el problema de la interpolación espacial por una gran variedad de disciplinas. Al contrario de la interpolación de datos puntuales, la interpolación de superficie rara vez ha sido estudiada. Existen varios métodos con ventajas y desventajas individuales, y la elección de un modelo de interpolación depende mucho del tipo de datos, del grado de precisión deseada y de la cantidad de esfuerzo de cálculo posible. En general, los métodos exactos o diferenciales son más fiables que los métodos aproximados o globales por la simplicidad, flexibilidad y fiabilidad. Los primeros están representados por métodos ponderados por distancia, Krigeage e interpolaciones con splines y los segundos están representados por modelos de superficie de deriva. En todos los casos, los modelos de interpolación de datos puntuales se ven seriamente afectados por la calidad de los datos originales, la densidad y distribución espacial y la complejidad de la superficie.

La interpolación de datos superficiales está sujeta a otras fuentes de error. La calidad de la estimación por interpolación superficial depende mucho de cómo están definidas las zonas origen y destino, el método de toma de datos, el grado de generalización o el método de añadido y las características de las superficies. Se ha mostrado desde un punto teórico y empírico que los métodos basados en área o que preservan el volumen aproximan mejor que los métodos basados en puntos o que no preservan el volumen. Los métodos de superimposición y picnofilácticos representan diferentes modelos para una superficie estadística, y se supone que el método de superimposición estimará mejor si la superficie es discontinua, mientras que el método picnofiláctico dará mejores resultados cuando la suavidad sea una propiedad de la superficie. En casos donde la superficie está entre discontinua y suavizada, deberían imponerse condiciones laterales y ecuaciones diferentes para obtener resultados fiables.

Indudablemente, la precisión que puede obtenerse en una interpolación depende de la densidad y distribución de los datos y de la elección del método de interpolación. Es decir, el método más simple de interpolación es útil si la densidad de datos es suficientemente grande (Schut).

### 4.2. Conclusiones sobre la técnica utilizada

Se ha desarrollado una aplicación basada en modelos digitales dispuestos en rejilla (DEM) sobre los que se calcula una superficie que interpole sobre todo el espacio del modelo y que, pasando por todos los puntos dato de la rejilla, tenga continuidad en la primera y segunda derivada. La técnica utilizada ha sido la interpolación de Hermite en dos dimensiones que cumple estas condiciones con una gran facilidad de cálculo. El tiempo de cálculo, aún con un gran número de puntos dato, es insignificante y los resultados obtenidos son de una gran calidad.

Se han programado dos algoritmos: uno para obtener una superficie de interpolación de tipo  $C^1$  o continua sólo hasta la primera derivada y otro para obtener una superficie de tipo  $C^2$  o continua hasta la segunda derivada. Los resultados ofrecidos por ambos tipos de superficies son similares no observándose grandes diferencias, aunque la superficie obtenida en el primer caso es más plana que la segunda.

En cuanto al cálculo de las curvas de nivel, el sistema es algo más lento que con una triangulación tipo TIN pero los resultados son mejores y ampliamente satisfactorios, con una sola salvedad: en el caso de obtener una superficie de interpolación de tipo  $C^2$  para un conjunto de puntos con la misma cota, es decir, totalmente planas, se obtiene una superficie que oscila entre esta cota como una onda, obteniéndose un curvado de mala calidad.

Respecto al cálculo de imágenes raster, como pueden ser los mapas de tintas hipsométricas o mapas de sombras, el resultado es muy bueno debido a que se obtiene una gran suavidad o transición entre los valores de los píxeles vecinos, superando ampliamente a los resultados obtenidos a partir de una triangulación TIN. También este cálculo es más lento porque se deben interpolar los puntos del raster sobre la superficie bicúbica (caso de las tintas hipsométricas) o sacar el vector normal a la superficie (caso de los sombreados) y esta operación es mucho más simple sobre un plano.

Por último, señalar que se recomienda la utilización de herramientas de este tipo para tratar datos provenientes de la correlación automática que poseen las actuales estaciones de Fotogrametría digital. La razón principal de esta recomendación es la eliminación de ruido que se produce cuando se obtiene una superficie suavizada obteniendo mejores resultados posteriores.



### 4.3. Ejemplos

A continuación se muestra un ejemplo con los resultados utilizando un modelo digital del terreno tipo TIN y los resultados utilizando la técnica expuesta. El ejemplo corresponde a datos fotogramétricos obtenidos por correlación automática con puntos cada 50 m para realizar cartografía a escala 1:10.000. La porción que se muestra tiene una dimensión aproximada de 3 km x 6.5 km.

Los mapas mostrados son:

- Un curvado con equidistancia de 10 m.
- Un mapa de sombras con sombreado oblicuo.
- Un mapa de tintas hipsométricas.

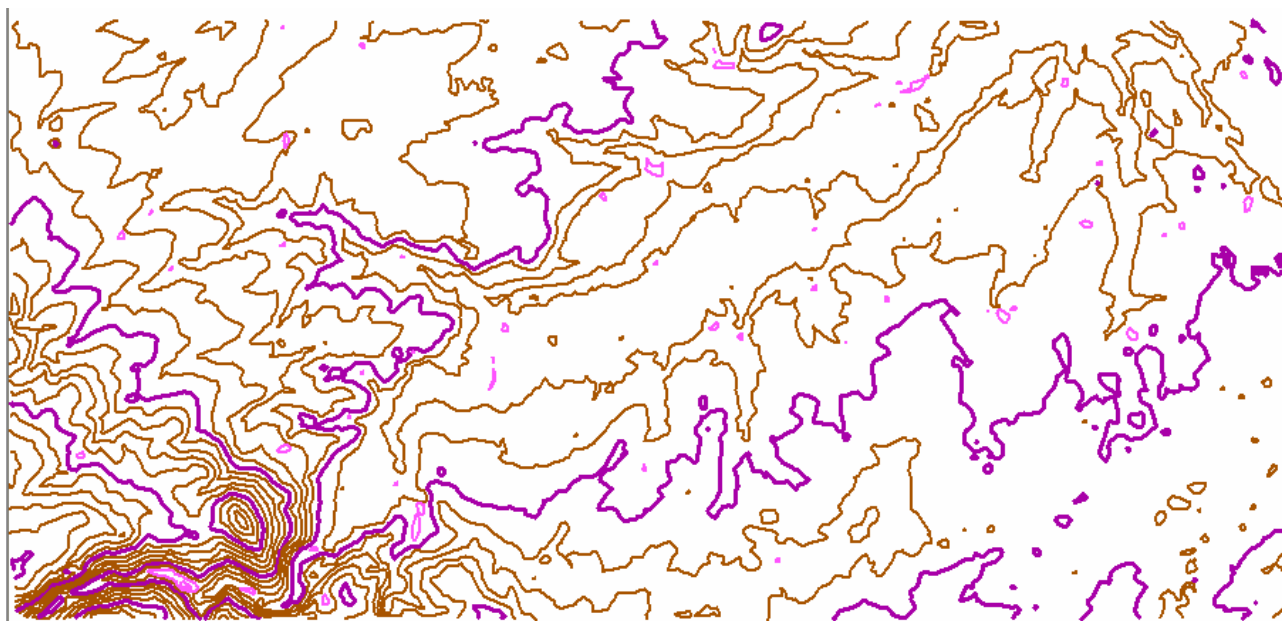


Figura 15: Curvado a partir del TIN

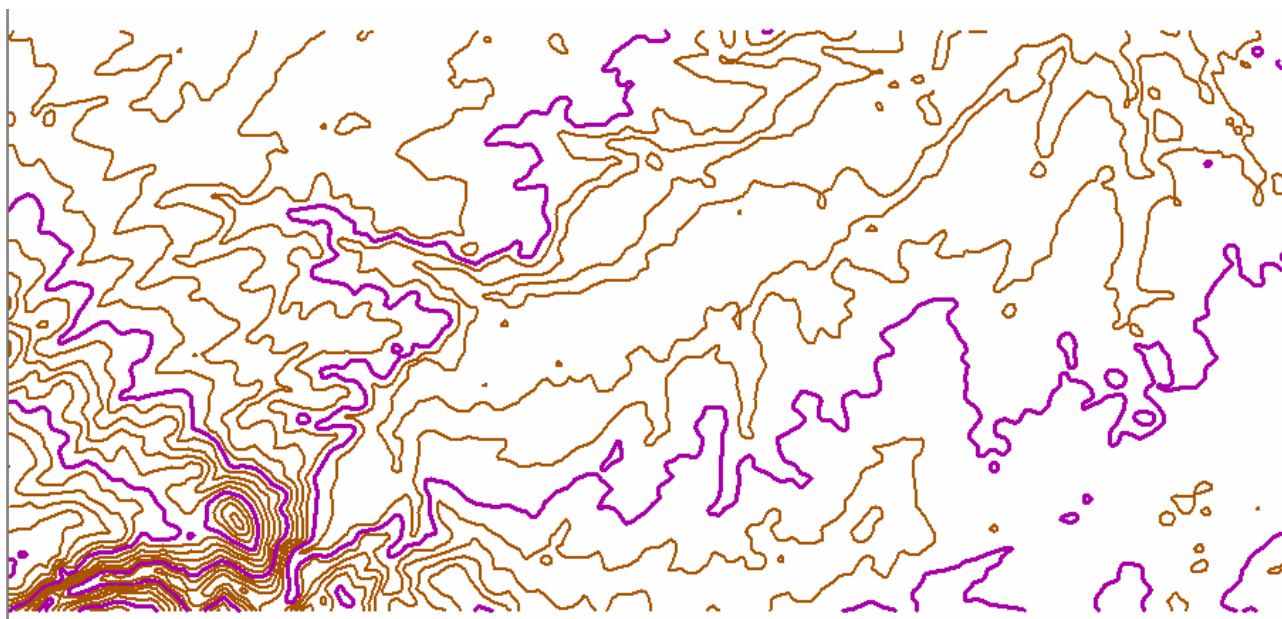
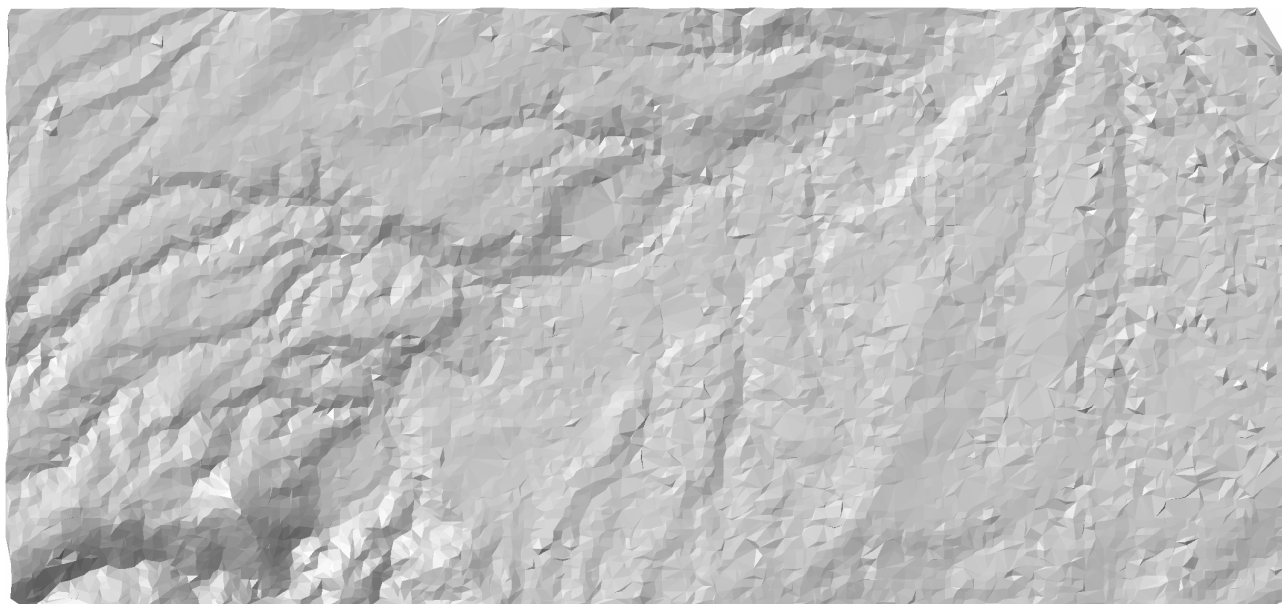
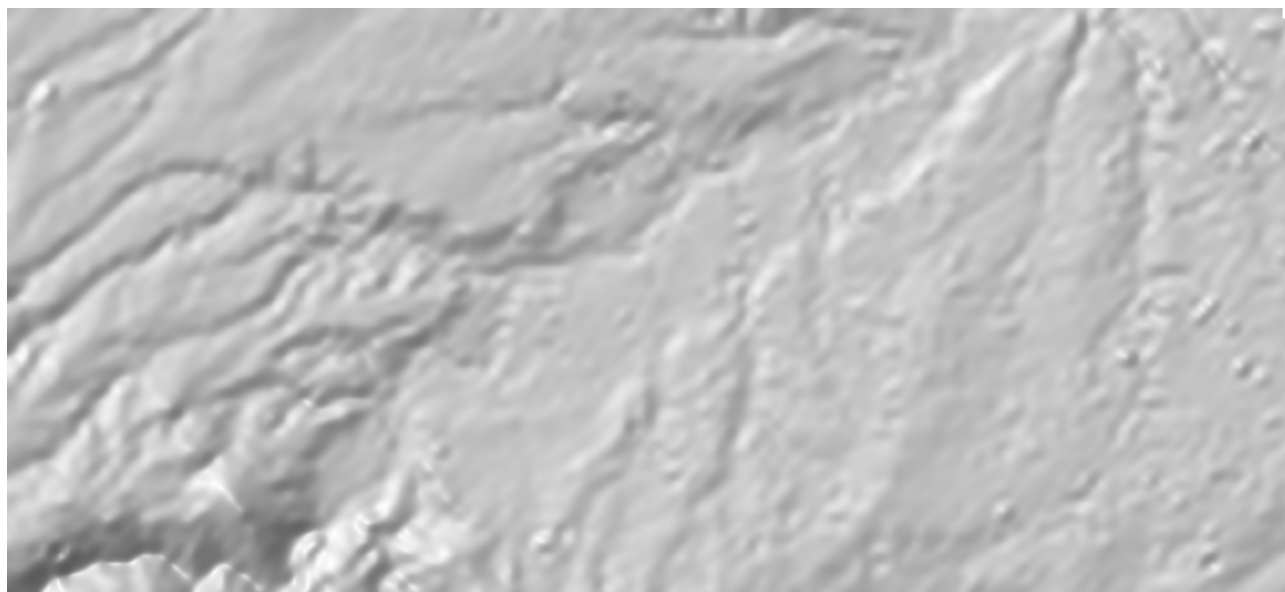


Figura 16: Curvado a partir del DEM suavizado.



*Figura 17:* Sombreado oblicuo a partir del TIN.



*Figura 18:* Sombreado oblicuo a partir del DEM suavizado.

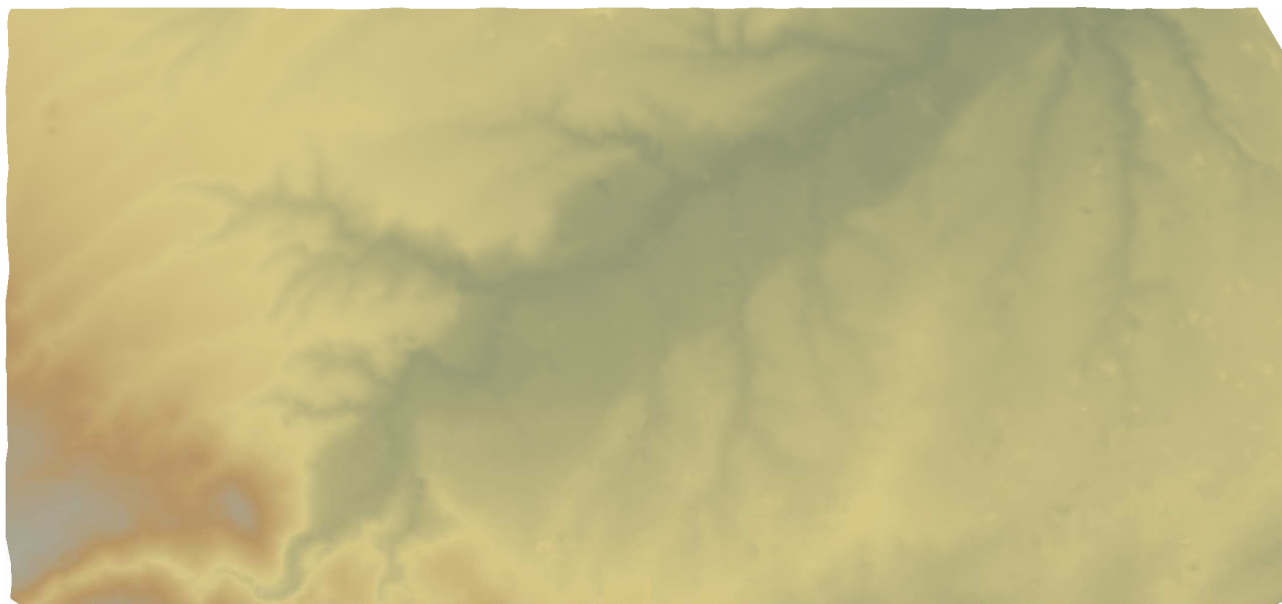


Figura 19: Tintas hipsométricas a partir del TIN.



Figura 20: Tintas hipsométricas a partir del DEM suavizado.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

- Ahlberg, Nilson y Walsh (1967): *The theory of splines and their applications*, Academic Press
- Alapää, Erik (1999): *Topics in Surface Reconstruction and spline theory*, Luleå University of Technology, Sweden,
- Anand, Vera B. (1993): *Computer Graphics and Geometric Modelling for Engineers*, John Wiley & Sons, Inc.
- Arranz Justel, José Juan (2001): *Proyecto de desarrollo de una herramienta informática para la representación del relieve mediante interpolación bicúbica. Aplicación en modelos digitales obtenidos mediante fotogrametría digital*, Proyecto fin de carrera, Escuela Politécnica de Enseñanza Superior, Universidad Politécnica de Madrid
- Hope, Hughes (1994): *Surface Reconstruction from unorganized points*, University of Washington
- Lancaster, Peter y Salkauskas, Kestutis (1990): *Curve and surface fitting. An introduction*, Academic Press
- Mortenson, Michael E.: *Geometric Modelling*, John Wiley & Sons
- Schut, G. H. (1976): *Review of Interpolation Methods for Digital Terrain Models*, The Canadian Surveyor
- Siu-Ngan Lam, Nina (1983): *Spatial Interpolation Methods: A Review*, The American Cartographer
- Yamaguchi, Fujio (1998): *Curves and Surfaces in Computer Aided. Geometric Design*, Springer-Verlag