后缀自动机

MengChunlei

March 28, 2021

- 定义
- 性质
- 算法
- 实现

1 定义

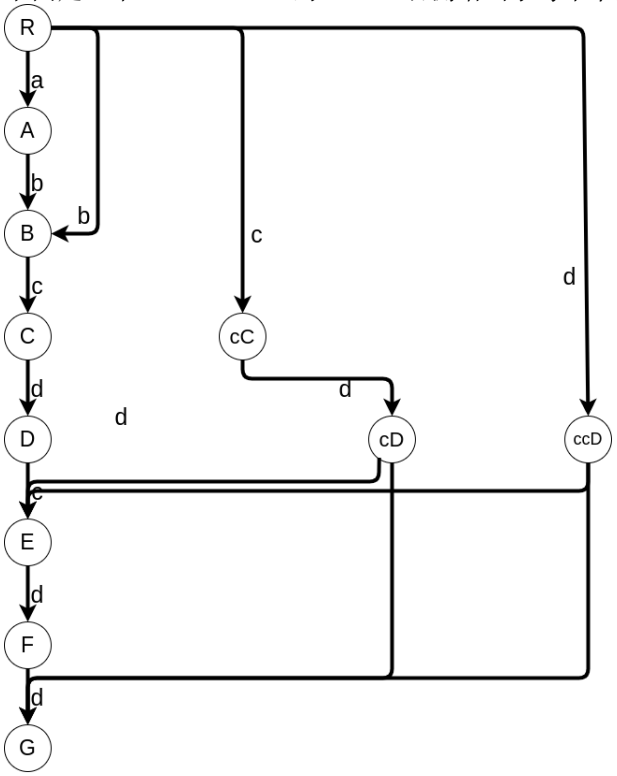
1.1 前置定义

- 字符串 s 的长度定义为 $|s|$
- 本文描述的字符串 s 的下标从 0 开始, 即 $s[0]$ 到 $s[|s|-1]$.
- s 中所包含的字符集为 Σ, 字符集大小为 $|\Sigma|$

1.2 SAM 的定义

- 它是一棵树，节点表示状态，边为转移。每条边上是一个字符。从根节点到达某个节点的路径有很多条。一条路径上经过的所有边的字符连起来对应一个串。所以一个节点是一些串的集合。
- 根节点用 R 表示。
- 每个子串 (包括后缀) 对应树上一条唯一的路径。
- SAM 是满足上述性质的节点数最少的树。

下面是一个 $s = abcdcdd$ 的 SAM. 右侧给出了每个节点代表的串的集合。



R	$empty$
A	a
B	b, ab
cC	c
C	bc, abc
ccD	d
cD	cd
D	$bcd, abcd$
E	$dc, cdc, bcdc, abcdc$
F	$dcd, cdcd, bcdcd, abcdcd$
G	$dd, cdd, dcdd, cdcdd, bcdcdd, abcdcdd$

1.3 endpos

- $endpos(t)$ 表示一个子串 t 出现的位置 (t 的最后一个字符的位置) 的集合，比如对于上面的例子，$endpos(cd) = \{2, 4\}$
- 两个子串的 $endpos$ 集合有可能相同，比如 $endpos(bcd) = endpos(abcd) = \{3\}$
- $endpos$ 相同的串对应树上的同一个节点，也就是说，总的节点个数是不同的 $endpos$ 的集合个数再加 1 (根节点)

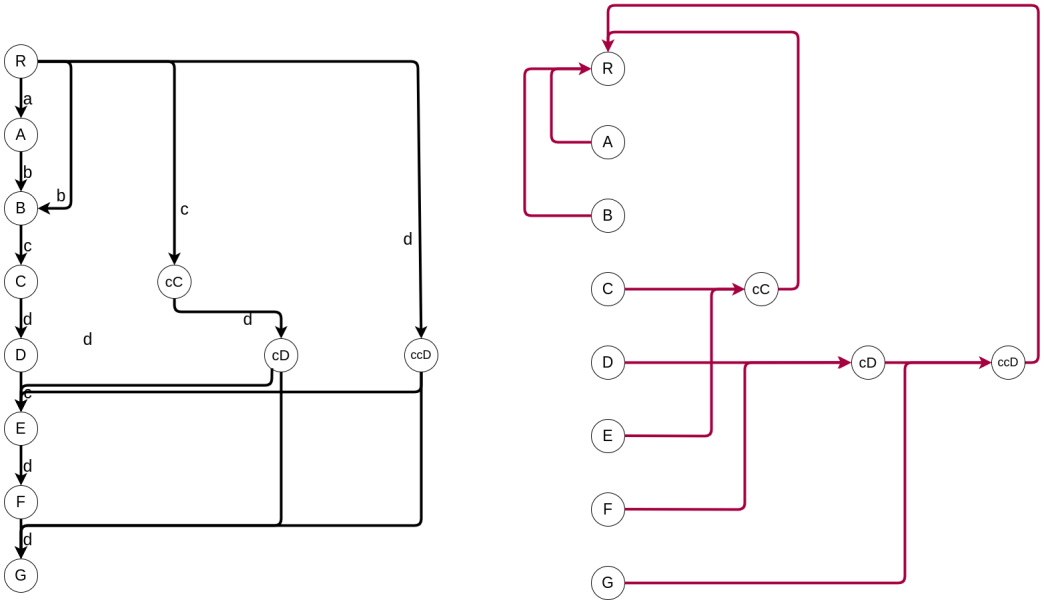
0	1	2	3	4	5	6
a	b	c	d	c	d	d

上面是字符串 s 的下标。下面最有一列是每个节点对应的 $endpos$

R	$empty$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
A	a	$\{0\}$
B	b, ab	$\{1\}$
cC	c	$\{2, 4\}$
C	bc, abc	$\{2\}$
ccD	d	$\{3, 5, 6\}$
cD	cd	$\{3, 5\}$
D	$bcd, abcd$	$\{3\}$
E	$dc, cdc, bcdc, abcdc$	$\{4\}$
F	$dcd, cdcd, bcdcd, abcdcd$	$\{5\}$
G	$dd, cdd, dcdd, cdcdd, bcdcdd, abcdcdd$	$\{6\}$

2 性质

- 性质 1：两个子串 $t_1, t_2(|t_1| \le |t_2|)$ 的 endpos 集合相同，那么当且仅当 t_1 在 s 中的每次出现，都是以 t_2 的后缀出现
- 性质 2: 两个子串 $t_1, t_2(|t_1| \le |t_2|)$，如果 t_1 是 t_2 的后缀，那么 $endpos(t_2) \sqsubseteq endpos(t_1)$，否则 $endpos(t_1) \sqcap endpos(t_2) = \emptyset$
- 性质 3: 对于一个等价类 $Q = endpos$，设所有 $endpos$ 为 Q 的字符串集合为 U，比如上面的例子，对于 $Q = \{3\}$ 来说，$U = \{bcd, abcd\}$。将 U 中的字符串按照长度递增排序，那么排在前面的字符串一定是后面的字符串的后缀。假设 U 中最长的串的长度为 $maxl$，最短的为 $minl$，那么 U 中的串的长度会覆盖区间 $[minl, maxl]$. 即每个长度都有一个串。
- 定义一种边后缀链接 $link$: 如果 $u = link(v)$，那么表示从节点 v 沿着它的 $link$ 边，会到达节点 u. 节点 v 对应一个等价类，假设这个等价类中串的长度区间为 $[min_v, max_v]$，同理假设节点 u 对应串的集合的长度区间为 $[min_u, max_u]$，那么满足 $min_v = max_u + 1$，并且 u 中所有的串都是 v 中所有串的后缀。即 $link(v)$ 指向的节点是 v 中串最长后缀的另一个等价类。
- 性质 4: 后缀链接构成一棵以 R 为根的树。因为对于任意一个不是 R 的节点，沿着 $link$ 边走所到达的节点对应的串集合中的最长的长度都会严格减少，所以一定能走到 R.
- 性质 5: link 边形成的树跟 $endpos$ 形成的树的节点一样. 如下图所示。右侧为 link 边的树。



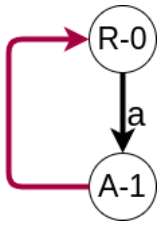
3 算法

下面以构建 $s = abcdcdd$ 为例子。

3.1 step0: R

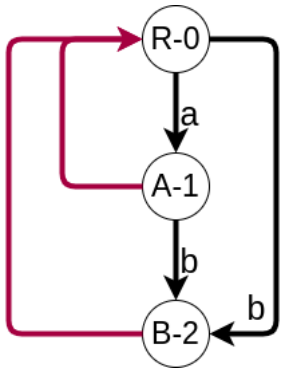
初始时只有根节点。对应的 *endpos* 集合串的最长长度为 0. R-0 后面的 0 表示长度。

3.2 step 1：插入 a



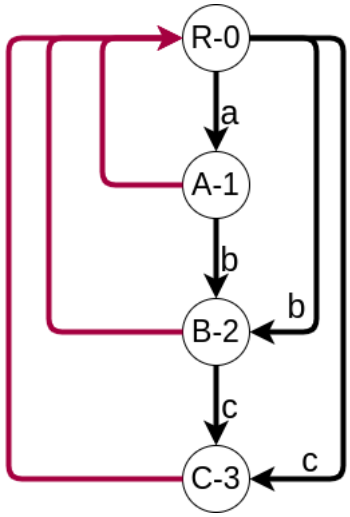
首先构造一个新节点 A, 它的长度为 1. 先看转移边, 由根节点通过一条 a 的转移边到达 A. 再看 $link$ 边，A 节点对应的 *endpos* 集合为 $\{0\}$，即串的集合为 $\{a\}$, 所以它的 $link$ 边到达的串的长度为 0(空串是串 a 的后缀)，即 R.

3.3 step2: 插入 b



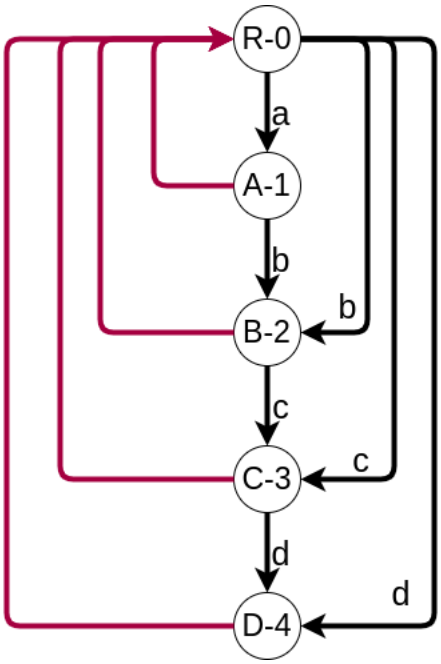
首先构造一个新节点 B, 它的长度为 2. 先看转移边, 由 A 节点通过一条 b 的转移边到达 B. 此时应该从 $R = link(A)$ 也连一条 b 的转移边到 B, 因为 R 代表的串集合是 A 的真后缀。所以 B 对应的串集合为 $\{b, ab\}$. 再看 $link$ 边，B 中所有串的真后缀为空串，它的 $link$ 边到达的串的长度为 0(空串是串 b 的后缀)，即 R.

3.4 step3: 插入 c



插入 c 类似，节点 C 对应的串为 $\{c, bc, abc\}$, 对应的 *endpos* 为 $\{2\}$

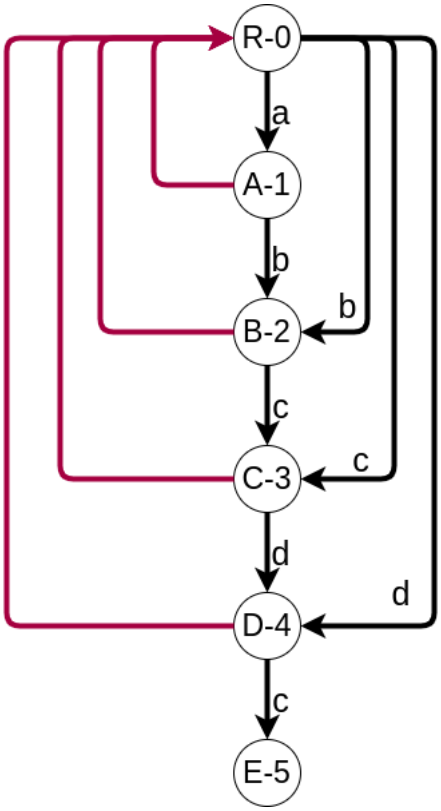
3.5 step4: 插入 d



插入 d 类似，节点 D 对应的串为 $\{d, cd, bcd, abcd\}$, 对应的 $endpos$ 为 $\{3\}$

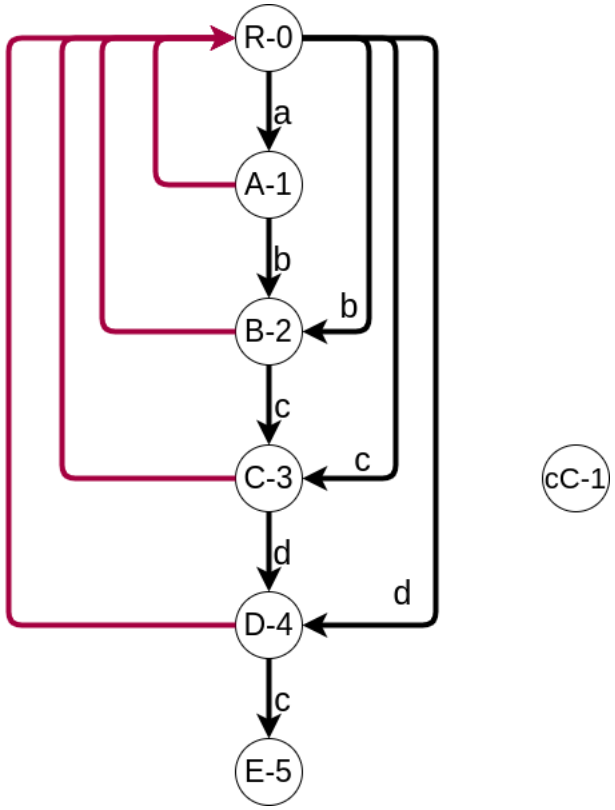
3.6 step5: 插入 c

3.6.1 step5-1: create E



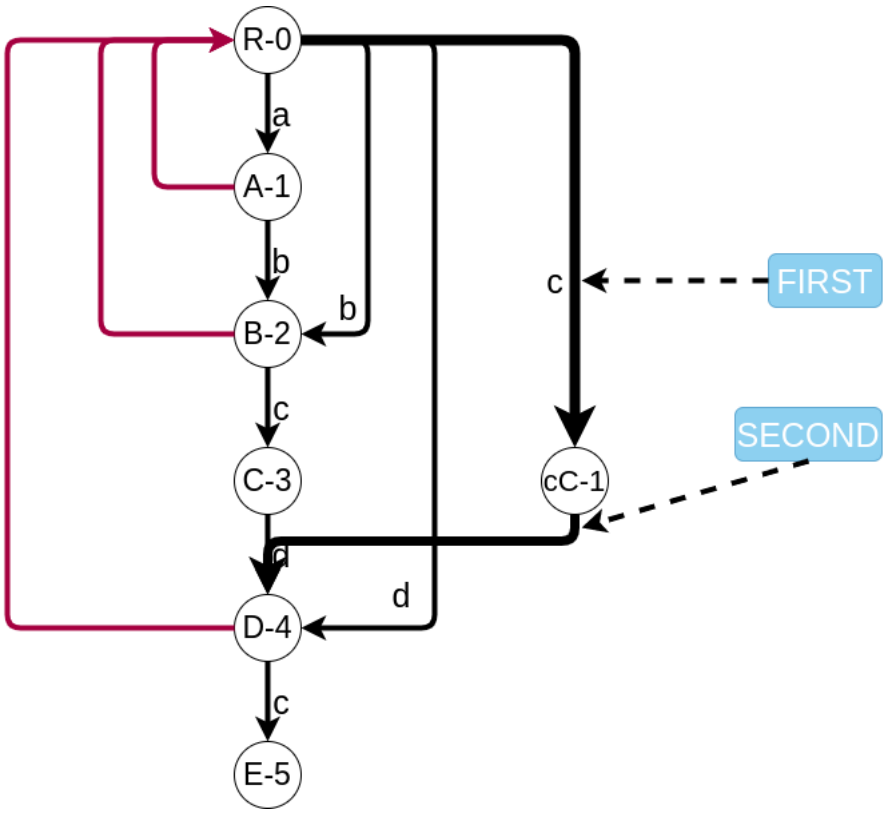
首先新建一个节点 E, 设置长度为 5. 并从 D 连一条 c 的边到 E. 这时,E 代表的串为 $\{dc, cdc, bcdc, abcdc\}$, 即 D 表示的串后面加上字符 c. 这时候理论上还要从 $R = link(D)$ 连一条 c 的边到 E(表示 R 对应的串加上 c). 但是这时候 R 已经有一条 c 的边了，是到节点 C。这时候的解决思路是把 E 和 C 的公共部分抽取出来。

3.6.2 step5-2: clone C



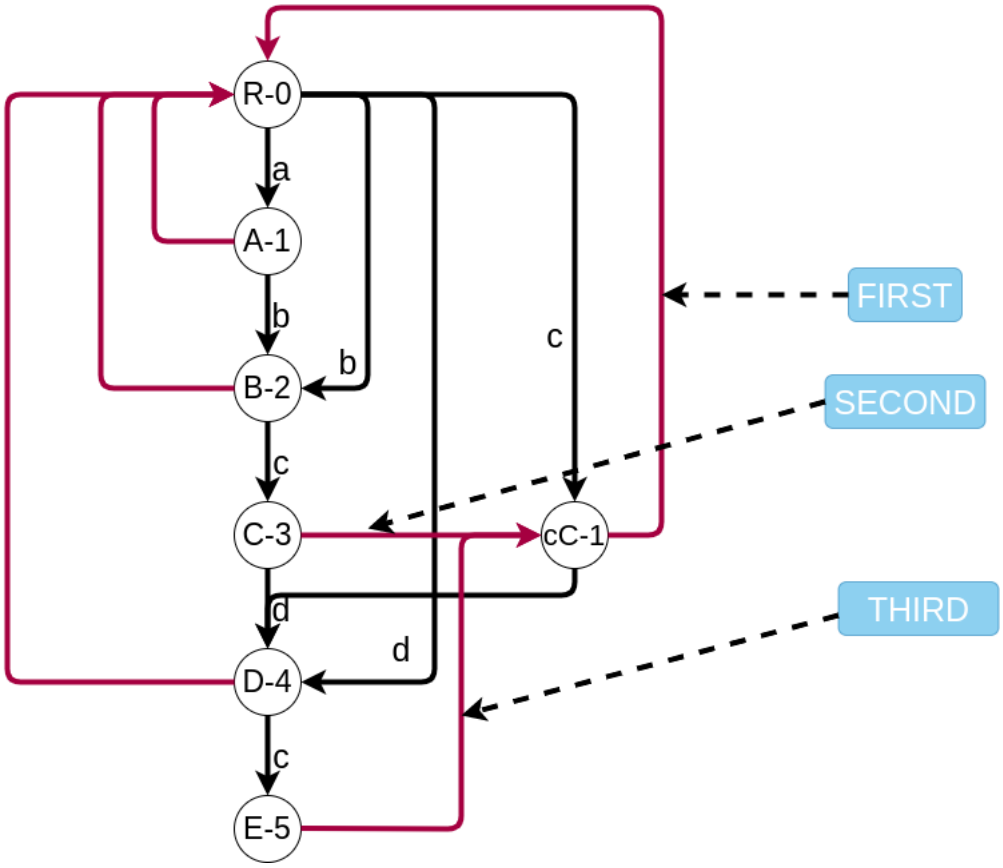
这时候新建一个节点 cC(clone C). 它表示的串是 $C = \{c, bc, abc\}$ 和 $E = \{c, dc, cdc, bcdc, abcdc\}$ 的公共部分，即 $C \sqcap E = \{c\}$, 所以 cC 的长度为 1. 这时候 C 应该只表示 $C = \{bc, abc\}$.

3.6.3 step5-3: rebuild connection



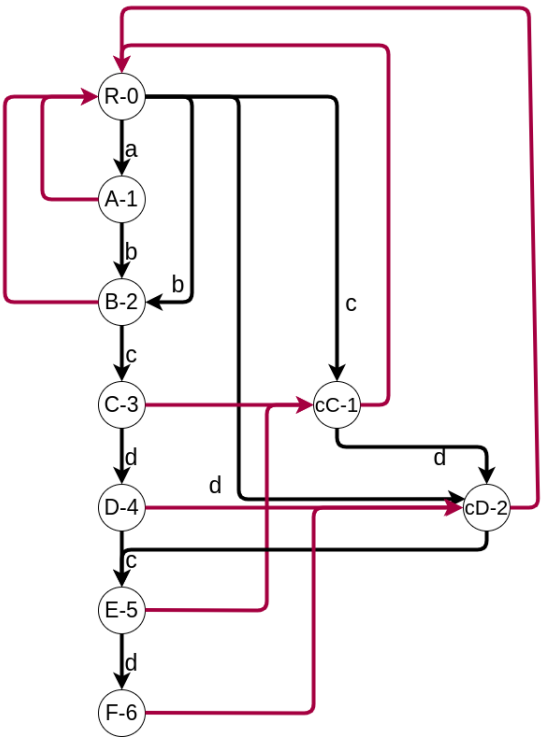
- 第一个修改，将 R 出发的字符为 c 的边从 C 改为指向 cC, 因为这时候 cC 表示串 $\{c\}$
- 第二个修改，所有从 C 出发的边 (不包括 link 边) 都要 copy 一份到 cC 上，即 cC 也要有一条到 D 的字符为 d 的边，否则 D 将丢失串 cd.

3.6.4 step5-4: update link

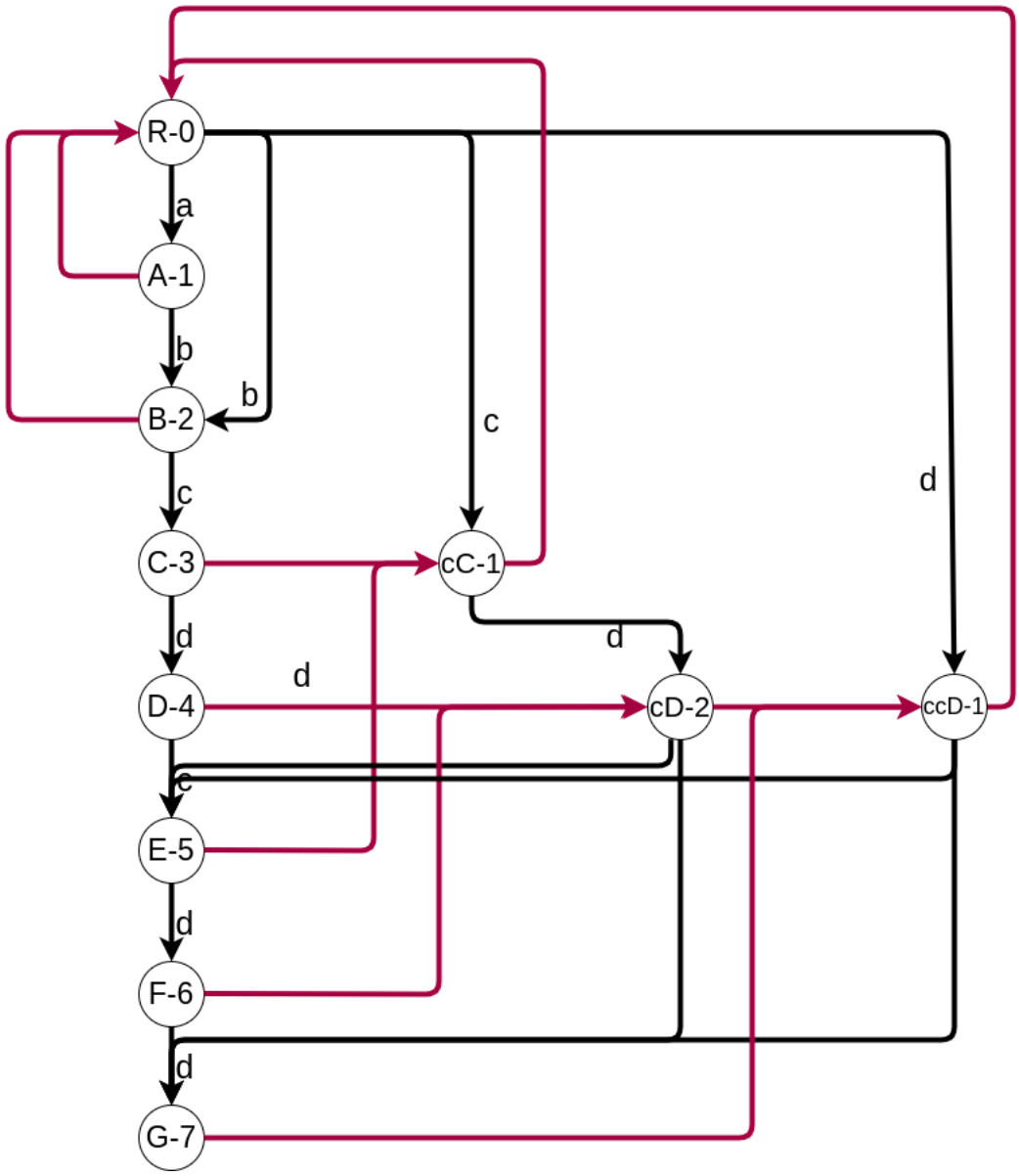


- cC 的 $link$ 指向 R:$\{c\}$ 的后缀为空串
- C 的 $link$ 指向 cC, 即 $\{bc, abc\}$ 的最长后缀为 $\{c\}$
- E 的 $link$ 指向 cC, 即 $\{dc, cdc, bcdc, abcdc\}$ 的最长后缀为 $\{c\}$

3.7 step6: 插入 d



3.8 step7: 插入 d



4 实现

4.1 数据结构定义

Listing 1: Definition

```
class SAM {
public:
  SAM(int size) : pools(size * 2), use_index(1), last_index(0) {
    pools[0].length = 0;  /*The R is index 0*/
    pools[0].link = -1;
  }
private:
  struct Node {
    int length;
    int link;
    std::unordered_map<int, int> next;
  };
  std::vector<Node> pools;
  int use_index;
  int last_index;
};
```

4.2 插入字符

Listing 2: Insert

```
void SAM::Add(int c) {
  int curr_index = use_index++;
  Node &curr = pools[curr_index];
  Node &last = pools[last_index];
  curr.length = last.length + 1;
  int p = last_index;
  while (p != -1 && 0 == pools[p].next.count(c)) {
    pools[p].next[c] = curr_index;
    p = pools[p].link;
  }
  if (p == -1) {
    curr.link = 0;
  } else {
    int q = pools[p].next[c];
    if (pools[p].length + 1 == pools[q].length) {
      curr.link = q;
    } else {
      int clone_index = use_index++;
      Node &clone = pools[clone_index];
      clone.length = pools[p].length + 1;
      clone.next = pools[q].next;
      clone.link = pools[q].link;
      for (; p != -1 && pools[p].next[c] == q; p = pools[p].link) {
        pools[p].next[c] = clone_index;
      }
      pools[q].link = curr.link = clone_index;
    }
  }
  last_index = curr_index;
}
```