Catalan Number

MengChunlei

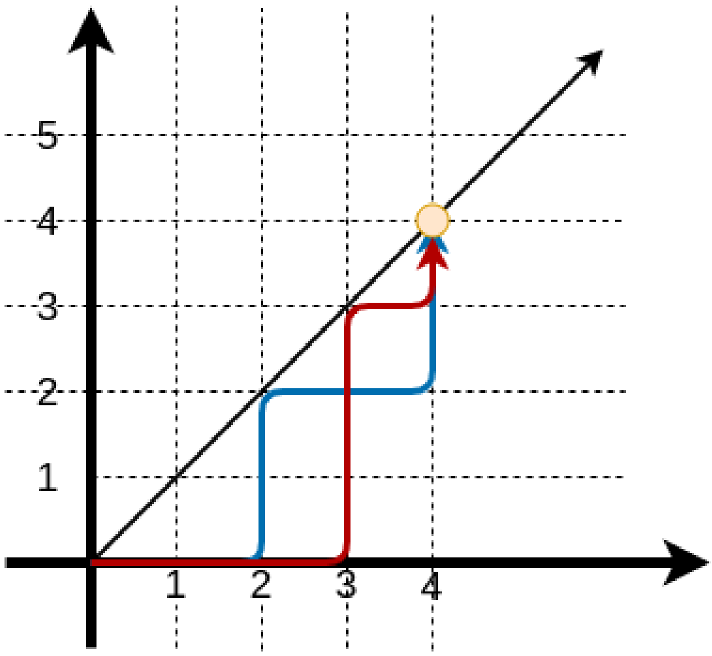
January 8, 2021

1 题目描述

有 n 个左括号'(' 以及 n 个右括号')' 组成的所有排列中, 有多少个是合法的括号匹配 (即任何前缀, 左括号的个数不小于右括号). 令 $f(n)$ 表示个数, 那么有 $f(1) = 1$, 即'()', $f(2) = 2$, 即'()()' 和'(())'.

2 解决思路

首先, 对这个问题做一个转化. 初始时, 二维坐标的原点 (0,0). 左括号表示向 x 方向前进一个单位, 即 (a, b) 到 $(a+1, b)$. 同理, 右括号表示向 y 方向前进一个单位, 即 (a, b) 到 $(a, b+1)$. 那么这个问题就转化为有多少条路径可以从 $(0, 0)$ 到 (n, n) 且路径都在 $y = x$ 这条线的下方.
对于 $n = 4$, 下面是一些合法的路径.



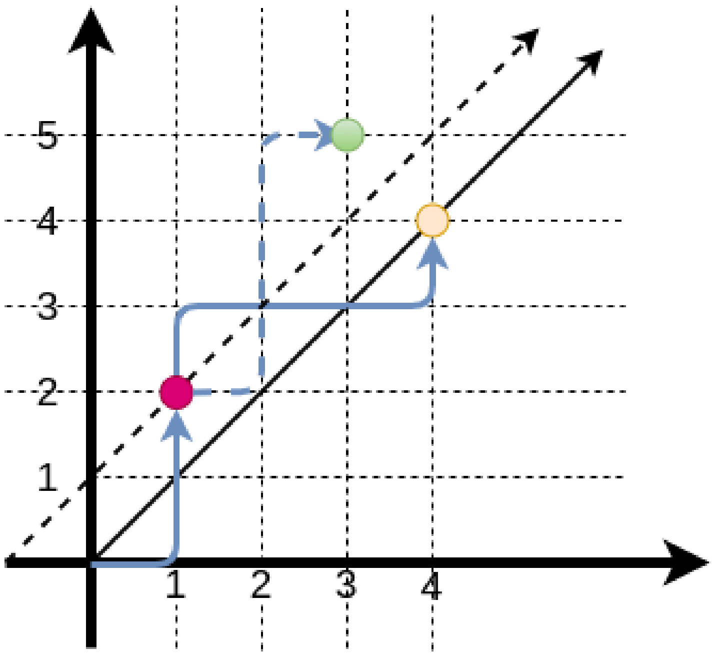
如果不考虑 $y = x$ 的限制, 那么所有的路径有 $\binom{2n}{n}$ 条. 然后考虑不合法的路径. 对于一条不合法的路径, 如下图的蓝色实线所示, 它一定与直线 $y = x + 1$ 有一个交点 (红点的位置), 然后将这个交点之后一直到 (n, n) 之间的路径沿着 $y = x + 1$ 作翻转, 如蓝色虚线所示, 那么这条蓝色虚线的终点为 $(n-1, n+1)$.
可以发现每一条不合法的路径, 按照这个翻转规则, 都对应一条从 $(0, 0)$ 到 $(n-1, n+1)$ 的路径, 所以不合法的路径为 $\binom{2n}{n+1}$.
所以 $f(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$

$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$

$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{(2n)!(n+1)}{n!n!} - \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\right)$

$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{(2n)!(n+1)}{n!n!} - \frac{(2n)!n}{n!n!}\right)$

$= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$



3 总结

这个数列叫做卡特兰数,C_n. 它的前几项如下:

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
1	1	2	5	14	42	132	429	1430

还有一些其他的关系:

- $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i}$
- $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+1} C_n$
- $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \frac{z^n}{n+1} = \sum_{n\geq 0} C_n z^n = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$