KMP

MengChunlei

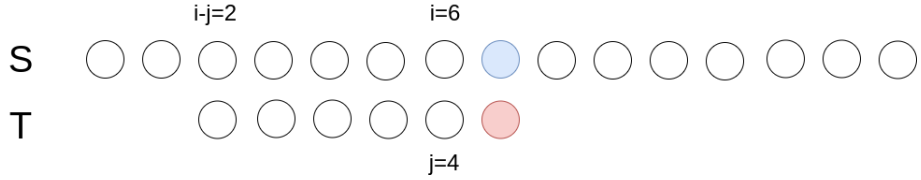
November 1, 2020

1 算法目标

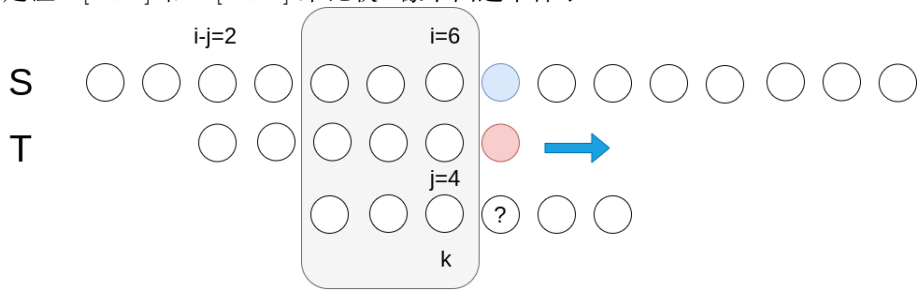
给定字符串 S 和 T(一般 T 会比 S 短)，判断 T 是不是 S 的子串. 如 S=”aabcaad”,T=”caa”，则 T 是 S 的子串，$T = S_{3,5}, T = SubS(3,5)$. 下面用 $SubS(i,j), SubT(i,j)$ 表示 S, T 的子串.

2 算法描述

假设对于位置 i, j, 有 $SubS(i-j, i) = SubT(0, j)$ 但是 $S[i+1] \neq T[j+1]$



这个时候, 算法不是从 $S[i-j+1] = S[3]$ 的位置和 $T[0]$ 重新开始比较, 而是设法让 T 向右滑动一段距离, 也就是让 $S[i+1]$ 和 $T[k+1]$ 来比较. 像下面这个样子:



为了能够直接判断 $S[i+1]$ 是否等于 $T[k+1]$, 需要满足上面方框中的部分相等. 那么只需要满足 $SubT(j-k, j) = SubT(0, k)$. 可以发现, 这是在串 T 上的一个关系, 跟 S 没有关系. 假设现在有了这个关系, 记作数组 f, 其中 $k+1 = f[j+1]$.

比如对于串”abaabcac”, 它的 f 数组是下面这样:

$index$	0	1	2	3	4	5	6	7
$string$	a	b	a	a	b	c	a	c
f	-1	0	0	1	1	2	0	1

有了这个 f 数组，寻找 T 在 S 中第一次出现的算法如下:

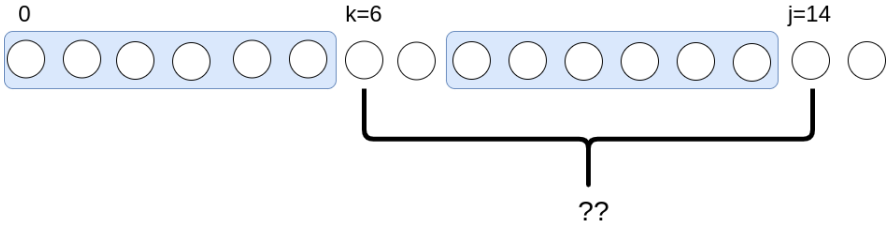
Listing 1: FindFirstPos in S

```
1
2  int FindFirstPos(const std::string &S, const std::string &T,
3                   const std::vector<int> &f) {
4    const int lens = static_cast<int>(S.size());
5    const int lent = static_cast<int>(T.size());
6    int i = 0, j = 0;
7    while (i < lens) {
8      if (j == -1 || S[i] == T[j]) {
9        i++;
10       j++;
11     } else {
12       j = f[j];
13     }
14     if (j >= lent) {
15       return i - lent;
16     }
```

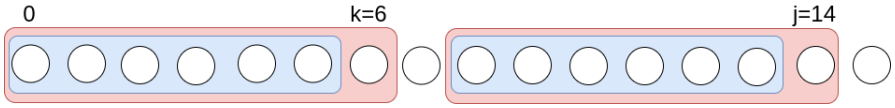
```
17    }
18    return -1;
19  }
```

3 f 数组计算

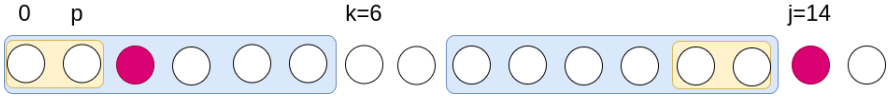
首先 $f[0] = -1$. 假设现在已经计算了 $f[1], f[2], .., f[j]$, 令 $k = f[j]$. 现在来看 $f[j+1]$. 由于 $k = f[j]$, 那么有下面的条件满足:



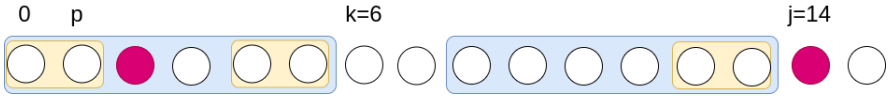
$Sub(0, k-1) = Sub(j-k, j-1)$, 即两个蓝色框里面的串是相等的. 下面来检查 $T[k]$ 和 $T[j]$ 是否相等:
第一种情况, $T[j] == T[k]$, 此时 $f[j+1] = k+1$. 即下面两个粉色框里面的串相等.



第二种情况, $T[j] \neq T[k]$, 那么如下图所示, 需要找到一个位置 p 满足两个条件:
i $Sub(0, p) = Sub(j-(p+1), j-1)$, 即两个黄色方框相等
ii $T[p+1] = T[j]$



如果要使得第一个条件满足, 那么如下图所示这三个黄色方框里面的串应该相等, 所以 p 应该满足 $p+1 = f[k]$.



按照这样依次迭代下去, 直到找到一个位置满足条件 2, 那么就找到了 $f[j+1]$.
下面是计算 f 的代码:

Listing 2: Compute f

```
1  std::vector<int> GetF(const std::string &T) {
2    const int lent = static_cast<int>(T.size());
3    std::vector<int> f(lent);
4    f[0] = -1;
5    int i = 0, j = -1;
6    while (i + 1 < lent) {
7      if (j == -1 || T[i] == T[j]) {
8        f[++i] = ++j;
9      } else {
10       j = f[j];
11     }
12   }
13   return f;
14 }
```

4 进一步思考

上面求出的 f 数组有一些缺陷。我们设 T="aaaab", 那么我们求出的 f 如下:

index	0	1	2	3	4
string	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*
f	−1	0	1	2	3

那么在匹配的时候, 假设匹配到 $T[3]$ 的时候失配了, 那么按照 f 数组, 接下来, 我们将比较 $T[2]$ 和 S 的那个字母, 很明显又失败了 (因为 $T[2], T[3]$ 都是 a), 接着比较 $T[1], T[0]$, 依次都失败了。这就是出现的问题。针对这个问题, 对 f 数组的计算进行以下改进:

Listing 3: Batter algorithm to compute f

```cpp
std::vector<int> FastF(const std::string &T) {
  const int lent = static_cast<int>(T.size());
  std::vector<int> f(lent);
  f[0] = -1;
  int i = 0, j = -1;
  while (i + 1 < lent) {
    if (j == -1 || T[i] == T[j]) {
      i++;
      j++;
      if (T[i] != T[j]) {
        f[i] = j;
      } else {
        f[i] = f[j];
      }
    } else {
      j = f[j];
    }
  }
  return f;
}
```

现在对于 T="aaaab" 求出的 f 数组为:

index	0	1	2	3	4
string	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*
f	−1	−1	−1	−1	3