Palindromic Tree

MengChunlei

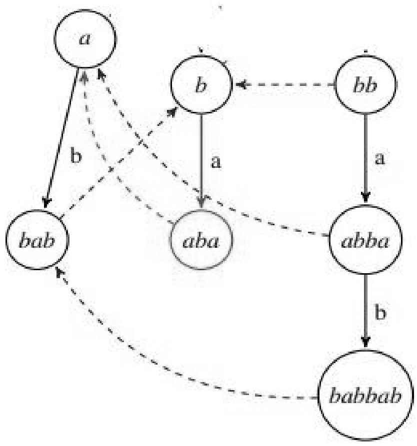
December 20, 2020

1 算法目标

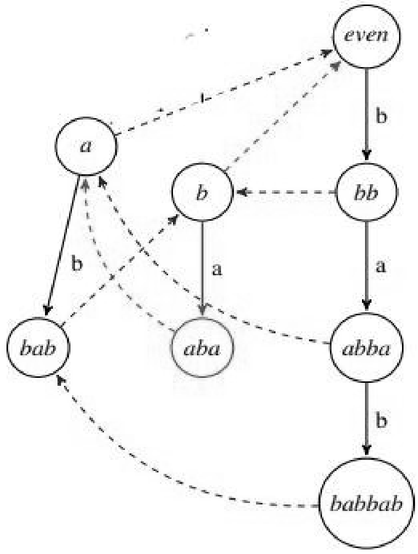
这个数据结构是用来辅助解决跟回文字符串相关的一些问题. 它的输入是一个字符串, 它的输出是一棵树. 树的具体定义如下面所描述.

2 树的定义

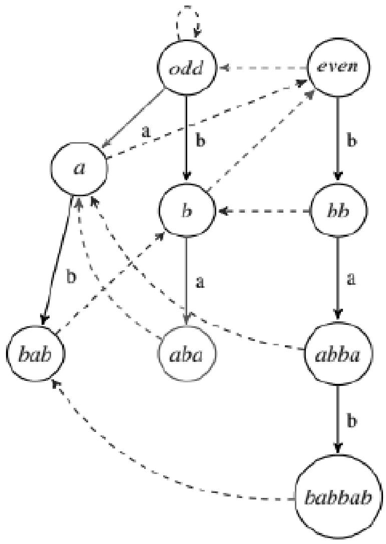
树包含很多节点. 每个节点代表一个回文串. 不同的节点代表的回文串是不同的. 节点上有两种边. 第一种称作 $sonedge$(后面用实线表示), 它表示在当前字符串两边加上某个字符所对应的回文串的节点. 第二种称作 $failedge$(后面用虚线表示), 它指向这个节点代表的回文串的最长的后缀回文串代表的节点. 如下图所示:



另外, 节点 a, b 没有 $failedge$. 为了完整性, 再增加一个虚拟节点, 表示长度为 0 的空串.



这个长度为 0 的节点也叫做偶树根, 因为它所有的孩子节点所代表的回文串的长度都是偶数. 所以如果再有一个奇树根, 那么看起来很完美了. 这个奇树根的长度应该是-1, 因为它的孩子的长度应该比它大 2. 加上奇树根后, 这个树如下所示:



除了边以外, 每个节点会保存长度. 所以节点的定义如下所示:

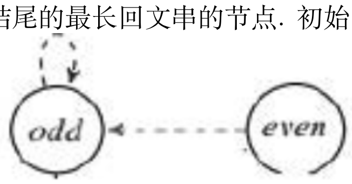
Listing 1: Node Definition

```
struct Node {
  std::array<Node*, N> sons;
  Node* fail;
  int len;
};
```

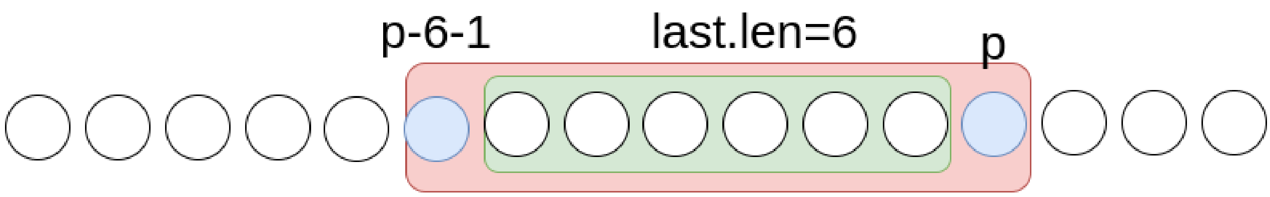
注意这里奇树根的长度为 -1, 偶树根的长度为 0. 偶树根的 $failedge$ 指向奇树根 (这个会利于后面的代码实现). 奇树根的 $failedge$ 指向它自己 (这个没什么用).

3 树的构造

整个构造的过程是增量的. 初始化, 有两个节点, 即奇树根和偶树根. 同时保存 $last$ 节点, 它表示以插入的最后一个字符结尾的最长回文串的节点. 初始时 $last$ = 偶树根, 表示初始时是一个空串.



假设已经构造了一个串的前 $p-1$ 个字符的树. 且以 $s[p-1]$ 结尾的最长回文串的节点为 $last$. 现在考虑第 p 个字符,$s[p]$. 目的是创建 (或找到) 以 $s[p]$ 结尾的最长回文串的节点. 首先, 如果 $last$ 满足 $s[p-last.len-1] = s[p]$, 那么说明 $s[p-last.len-1] \to s[p]$ 是回文的 (如下图所示的红色方框)



如果 $s[p-last.len-1] \neq s[p]$, 那么需要找到 $last$ 代表的回文串的最长后缀的回文串节点 $target$, 并且满足 $s[p-target.len-1] = s[p]$. 这正是 $failedge$ 的定义. 所以寻找 $target$ 的方法如下:

Listing 2: FindTarget

```
Node* FindTarget(Node* last, const std::string &s, size_t p) {
  Node* target = last;
  while (s[n - target->len - 1] != s[p]) {
    target = target->fail;
  }
  return target;
}
```

这里可以看到, 如果一直沿着 $faledge$ 向上找, 那么最终会到达奇树根, 而它的长度为 -1, 这时候一定满足 $s[p-(-1)-1] = s[p]$. 这也是奇树根长度为 -1 的好处. 找到了 $target$ 之后, 有两种情况:

第一种情况, $target$ 已经有一个为 $s[p]$ 的孩子, 即 $target.sons[s[p]] \neq nullptr$, 这说明之前已经出现过同样的回文串.

第二种情况, $target.sons[s[p]] = nullptr$, 这时候需要新建一个节点来表示回文串 $s[p - target.len - 1] \to s[p]$, 令这个节点为 $curr$, 那么有 $target.sons[s[p]] = curr, curr.len = target.len + 2$. 现在考虑 $curr.fail$ 是什么. 跟上面同样的道理, $curr.fail$ 所代表的回文串如果去掉两边的两个字符, 那么剩下的回文串一定是 $target.fail$ 或者 $target.fail.fail$ 或者 $target.fail.fail.fail$ 等等. 所以还是可以调用 $FindTarget$ 去找到一个满足条件的节点.

所以新插入字符的实现如下:

Listing 3: Append

```
Node* Append(cnost std::string &s, size_t p, Node* last) {
  Node* target = GetTarget(last, s, p);
  int index = s[p] - 'a';
  if (target->sons[index] == nullptr) {
    Node* curr = new Node();
    target->sons[index] = curr;
    curr->len = target->len + 2;
    curr->fail = GetTarget(target->fail, s, p)->sons[index];
  }
  return target->sons[index];
}
```

函数最后返回了以新插入的字符结尾的最长回文串对应的节点, 它应该作为新的 $last$, 以便插入 $s[p+1]$.

4 复杂度

可以证明, 对于一个长度为 n 的串 s, 树的节点的个数最多为 $n+2$. 插入 n 个字符的时间复杂度也是 $O(n)$ 的.

5 实现

implemention

6 参考

https://oi-wiki.org/string/pam/
https://www.cnblogs.com/lhm-/p/13293090.html
https://blog.csdn.net/u013368721/article/details/42100363