1、下面的是下界，上面的是上界，所以这个取值范围为空，答案应该是 0

2、$|x|$

3、$\sum_{0\leq k\leq 5} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
$\sum_{0\leq k^2\leq 5} a_{k^2} = \sum_{k=-2}^{2} a_{k^2} = a_4 + a_1 + a_0 + a_1 + a_4$

4、$\sum_{1\leq i<j<k\leq 4} a_{ijk} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4} a_{ijk} = ((a_{123} + a_{124}) + a_{134}) + a_{234}$
$\sum_{1\leq i<j<k\leq 4} a_{ijk} = \sum_{k=3}^{4}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ijk} = a_{123} + (a_{124} + (a_{134} + a_{234}))$

5、两个求和符号用了同样的下标符号，其实它们是不同的，所以不能约分。

6、$[1\leq j\leq n](n-j+1)$

7、$mx^{\overline{m-1}}$

8、当 $m>0$ 时，为 0; 当 $m=0$ 为 1; 当 $m<0$ 时为 $\frac{1}{|m|!}$

9、$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$。令 $m=-n$ 可以得到:$x^{\overline{-n}} = \frac{1}{(x-n)^{\overline{n}}} = \frac{1}{(x-1)^{\underline{b}}}$

10、$u\Delta v + E_v\Delta u = v\Delta u + E_u\Delta v$, 这样就对称了。

11、$a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{0\leq k<n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k)$
$= a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{0\leq k<n} a_{k+1}b_{k+1} + \sum_{0\leq k<n} a_{k+1}b_k$
$= a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{1\leq k\leq n} a_kb_k + \sum_{0\leq k<n} a_{k+1}b_k$
$= -\sum_{0\leq k<n} a_kb_k + \sum_{0\leq k<n} a_{k+1}b_k$
$= \sum_{0\leq k<n}(a_{k+1} - a_k)b_k$

12、从两点证明:

- 对于两个不同的 k_1, k_2,$p(k_1)\neq p(k_2)$
- 对于一个整数 n, 一定存在一个整数 k, 满足 $p(k)=n$. 如果 k 是奇数，那么 $p(2t+1) = 2t+1-c$, 和跟 c 的奇偶性相反; 如果 k 是偶数，那么 $p(2t) = 2t-c$，和跟 c 的奇偶性相同。这两个里面一定会存在一个等于 n

13、令 $R_0=\alpha, R_n = R_{n-1} + (-1)^n(\beta+\gamma n+\delta n^2)$, 所以 $R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C_n\gamma + D_n\delta$
(1) 令 $R_n = 1$ 可以得到:$\alpha=1, \beta=\gamma=\delta=0$, 所以 $A_n = 1$
(2) 令 $R_n = (-1)^n$，可以得到:$\alpha=1, \beta=2, \gamma=\delta=0$, 所以 $A(n) + 2B(n) = (-1)^n$
(3) 令 $R_n = (-1)^n n$, 可以得到:$-B(n) + 2C(n) = (-1)^n n$
(4) 令 $R_n = (-1)^n n^2$，可以得到:$B(n) - 2C(n) + 2D(n) = (-1)^n n^2$.
令 $\alpha=\beta=\gamma=0, \delta=1, R_n = (-1)^n n^2$, 那么有:

- $R_n = D(n)$
- $R_0 = 0$
- $R_1 = (-1)^1 1^2$
- $R_2 = R_1 + (-1)^2 2^2 = (-1)^1 1^2 + (-1)^2 2^2$
- 所以 $D(n) = R_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$

因此 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = D(n) = \frac{(-1)^n n^2 - B(n) + 2C(n)}{2}$
$= \frac{(-1)^n n^2 + (-1)^n n}{2} = \frac{(-1)^n(n^2+n)}{2}$

14、$\sum_{1\leq j\leq k\leq n} 2^k$
$= \sum_{1\leq j\leq n}\sum_{j\leq k\leq n} 2^k$
$= \sum_{1\leq j\leq n}(2^{n+1} - 2^j)$
$= n2^{n+1} - \sum_{1\leq j\leq n} 2^j$
$= n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2)$
$= (n-1)2^{n+1} + 2$

15、$\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2$
$=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)$
$=\sum_{k=1}^{n}k*k(k+1)$
$=\sum_{k=1}^{n}k\sum_{j=1}^{k}2j$
$=2\sum_{1\le j\le k\le n}jk$
$=\sum_{1\le j,k\le n}jk+\sum_{1\le j=k\le n}jk=\left(\sum_{1\le k\le n}k\right)^2+\sum_{k=1}^{n}k^2$
$=(\frac{n(n+1)}{2})^2+\sum_{k=1}^{n}k^2$
所以 $\sum_{k=1}^{n}k^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

16、$x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}}=x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}=x^{\underline{n+m}}$

17、两个式子类似，只证明第一个。首先给出一些总结:

- 当 $m>0$ 时，有 $x^{\overline{m}}=x(x+1)(x+2)..(x+m-2)(x+m-1)$
- 当 $m=0$ 时，有 $x^{\overline{0}}=1$
- 当 $m<0$ 时，有 $x^{\overline{m}}=\frac{1}{(x-1)(x-2)...(x-(|m|-1))(x-|m|)}$
- 当 $m>$ 时，有 $x^{\underline{m}}=x(x-1)(x-2)..(x-(m-2))(x-(m-1))$
- 当 $m=0$ 时，有 $x^{\underline{0}}=1$
- 当 $m<0$ 时，有 $x^{\underline{m}}=\frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+(|m|-1))(x+|m|)}$

$(1)m=0$ 时显然都是 1
$(2)m>0$ 时，

- $(-1)^m(-x)^{\underline{m}}=(-1)^m(-x)(-x-1)(-x-2)...(-x-(m-1))=x(x+1)(x+2)...(x+m-1)=x^{\overline{m}}$
- $(x+m-1)^{\underline{m}}=(x+m-1)(x+m-2)...(x+1)x=x^{\overline{m}}$
- $\frac{1}{(x-1)^{\underline{-m}}}=(x-1+1)(x-1+2)...(x-1+m)=x^{\overline{m}}$

(3) 当 $m<0$ 时，不妨令 $m=-m$，

- $(-1)^{-m}(-x)^{\underline{-m}}=\frac{1}{(-1)^m}*\frac{1}{(-x+1)(-x+2)...(-x+m)}=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)..(x-m)}=x^{\overline{-m}}$
- $(x-m-1)^{\underline{-m}}=\frac{1}{(x-m-1+1)(x-m-1+2)...(x-m-1+m)}=x^{\overline{-m}}$
- $\frac{1}{(x-1)^{\underline{m}}}=\frac{1}{(x-1)(x-1-1)...(x-1-(m-1))}=x^{\overline{-m}}$

18、

- p: $\sum_{k\in K}a_k$ 绝对收敛
- q: 存在有界常数 B 使得任意有限子集 $F\in K$ 有 $\sum_{k\in F}|a_k|\le B$

(1) $p\to q$:
若 $\sum_{k\in K}a_k$ 绝对收敛，那么有 $\sum_{k\in K}\Re a_k,\sum_{k\in K}\Im a_k$ 分别绝对收敛，而 $|a_k|\le(\Re a_k)^++(\Re a_k)^-+(\Im a_k)^++(\Im a_k)^-$，所以 $\sum_{k\in F}|a_k|\le\sum_{k\in F}((\Re a_k)^++(\Re a_k)^-+(\Im a_k)^++(\Im a_k)^-)$，而后者绝对收敛，所以存在有界常数 B 满足条件;
(2) $q\to p$:
由于 $(\Re a_k)^+\le|a_k|,(\Re a_k)^-\le|a_k|,(\Im a_k)^+\le|a_k|,(\Im a_k)^-\le|a_k|$, 所以对于任意的 F 存在有界常数 X,Y,Z,W 使得 $\sum_{k\in F}(\Re a_k)^+\le X,\sum_{k\in F}(\Re a_k)^-\le Y,\sum_{k\in F}(\Im a_k)^+\le Z,\sum_{k\in F}(\Im a_k)^-\le W$, 所以 $\sum_{k\in K}\Re a_k,\sum_{k\in K}\Im a_k$ 都是绝对收敛的，所以 $\sum_{k\in K}a_k$ 绝对收敛
19、

- $a_n=2,b_n=n$, 所以 $s_n=\frac{a_1a_2...a_{n-1}}{b_2b_3...b_n}=\frac{2^{n-1}}{n!}$
- 两边同时乘以 s_n 得到:$\frac{2^n}{n!}T_n=\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}T_{n-1}+3*2^{n-1}$，$T_0=5\to T_1=4$
- 令 $P_n=\frac{2^n}{n!}T_n$, 那么有 $P_n=P_{n-1}+3*2^{n-1},P_1=8$, 所以 $P_n=3*(2^{n-1}+2^{n-2}+...+2^1)+8=3*2^n+2$
- 所以 $T_n=(3*2^n+2)*\frac{n!}{2^n}$，验证可得对于 $n=0$ 也满足条件。

20、$\sum_{k=0}^{n} kH_k+(n+1)H_{n+1}$
$=\sum_{k=0}^{n}(k+1)H_{k+1}$
$=\sum_{k=0}^{n} kH_{k+1}+\sum_{k=0}^{n} H_{k+1}$
$=\sum_{k=0}^{n} k(H_k+\frac{1}{k+1})+\sum_{k=0}^{n}(H_k+\frac{1}{k+1})$
$=\sum_{k=0}^{n} kH_k+\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k+1}+\sum_{k=0}^{n} H_k+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$
$=\sum_{k=0}^{n} kH_k+\sum_{k=0}^{n} H_k+n+1$
所以 $\sum_{k=0}^{n} H_k=(n+1)(H_{n+1}-1)$

21、(1)S_n 的计算:
一方面，$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}=1+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}=1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}=1-S_n$
另一方面，$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}=(-1)^{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}=(-1)^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}=(-1)^{n+1}+S_n$
所以 $S_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$

(2)T_n 的计算:
一方面 $T_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}k=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}k=\sum_{1\le k+1\le n+1}(-1)^{n+1-(k+1)}(k+1)$
$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(k+1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}=T_n+S_n$
另一方面，$T_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}k=n+1+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}k=n+1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k=n+1-T_n$
所以 $T_n=\frac{n+1-S_n}{2}=\frac{2n+1-(-1)^n}{4}$

(3)U_n 的计算:
一方面 $U_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}k^2=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}k^2=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(k+1)^2$
$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k^2+2T_n+S_n=U_n+n+1$
另一方面，$U_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}k^2=(n+1)^2+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}k^2=(n+1)^2-U_n$
所以 $U_n=\frac{n(n+1)}{2}$

22、直接证明下面的一般式:
$\sum_{1\le j<k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)(A_jB_k-A_kB_j)$
$=\frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)(A_jB_k-A_kB_j)$
$=\frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le n}(a_jb_kA_jB_k-a_kb_jA_jB_k-a_jb_kA_kB_j+a_kb_jA_kB_j)$
$=\sum_{1\le j,k\le n}(a_jb_kA_jB_k-a_kb_jA_jB_k)$
$=\left(\sum_{k=1}^{n} a_kA_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_kB_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n} a_kB_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_kA_k\right)$
当 $a_i=A_i,b_i=B_i$ 时可得到上面的等式

23、(1)$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+(k+1)}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})=2H_n-\frac{n}{n+1}$
(2) 令 $u(x)=2x+1,\Delta v(x)=\frac{1}{x(x+1)}=(x-1)^{\underline{-2}}$,
所以 $\Delta u(x)=u(x+1)-u(x)=2,v(x)=-(x-1)^{\underline{-1}}=-\frac{1}{x},E_v(x)=-\frac{1}{x+1}$,
所以 $\sum(2x+1)\frac{1}{x(x+1)}\delta x=(2x+1)(-\frac{1}{x})-\sum(-\frac{2}{x+1})\delta x=-2-\frac{1}{x}+2H_x+C$,
所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k(k+1)}$
$=\sum_{1}^{n+1}(2x+1)\frac{1}{x(x+1)}\delta x$
$=\left(-2-\frac{1}{x}+2H_x\right)|_1^{n+1}$
$=(-2-\frac{1}{n+1}+2H_{n+1})-(-2-1+2H_1)=2H_n-\frac{n}{n+1}$

24 令 $u(x)=H_x,\Delta v(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=x^{\underline{-2}}$,
所以 $\Delta u(x)=\frac{1}{x+1},v(x)=-x^{\underline{-1}}=-\frac{1}{x+1}$,
所以 $E_v(x)=-\frac{1}{x+2}$,
所以 $\sum H_x\frac{1}{(x+1)(x+2)}\delta x$
$=\sum u_x\Delta v_x\delta x$
$=u_xv_x-\sum E_v(x)\Delta u_x\delta x$
$=-\frac{H_x}{x+1}-\sum(-\frac{1}{x+2})\frac{1}{x+1}\delta x$
$=-\frac{H_x}{x+1}+\sum x^{\underline{-2}}\delta x$
$=-\frac{H_x}{x+1}-\frac{1}{x+1}$
$=-\frac{H_x+1}{x+1}$
所以 $\sum_{0\le k<n} H_k\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
$=\left(-\frac{H_x+1}{x+1}\right)|_0^n$
$=-\frac{H_n+1}{n+1}-(-1)=1-\frac{H_n+1}{n+1}$

25、$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k \leftrightarrow \prod_{k\in K} a_k^c = \left(\prod_{k\in K} a_k\right)^c$
$\sum_{k\in K}(a_k + b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k \leftrightarrow \prod_{k\in K} a_k b_k = \left(\prod_{k\in K} a_k\right)\left(\prod_{k\in K} b_k\right)$

26、$P^2 = \left(\prod_{1\le j,k\le n} a_j a_k\right)\left(\prod_{k=1}^n a_k^2\right)$
$= \left(\prod_{1\le k\le n} a_k^{2n}\right)\left(\prod_{k=1}^n a_k^2\right)$
$= \prod_{k=1}^n a_k^{2n+2} \to P = \prod_{k=1}^n a_k^{n+1}$

27、$\Delta((-2)^{\underline{x}})$
$= (-2)^{\underline{x+1}} - (-2)^{\underline{x}}$
$= (-2-x-1)(-2)^{\underline{x}}$
$= \frac{(-2)^{\underline{x}}(-2-x)(-2-(x+1))}{(-2-x)}$
$= -\frac{(-2)^{\underline{x+2}}}{x+2}$
所以 $\Delta(-(-2)^{\underline{x-2}}) = \frac{(-2)^{\underline{x}}}{x}$
所以 $\sum \frac{(-2)^{\underline{x}}}{x}\delta x = -(-2)^{\underline{x-2}}$
所以 $\sum_{k=1}^n \frac{(-2)^{\underline{k}}}{k} = \left(-(-2)^{\underline{x-2}}\right)|_1^{n+1} = (-1)^n n! - 1$

28、不太清楚。