1 $m=\lfloor lg(n)\rfloor$,$l=n-2^m=n-2^{\lfloor lg(n)\rfloor}$

2 (1) 如果规定 $x=n.5$ 时向上取整，那么距离实数 x 最近的整数为 $\lfloor x+0.5\rfloor$
(2) 如果规定 $x=n.5$ 时向下取整，那么距离实数 x 最近的整数为 $\lceil x-0.5\rceil$

3 $\left\lfloor \frac{\lfloor m\alpha\rfloor n}{\alpha}\right\rfloor$
$=\left\lfloor \frac{(m\alpha-\{m\alpha\})n}{\alpha}\right\rfloor$
$=\left\lfloor mn-\frac{\{m\alpha\}n}{\alpha}\right\rfloor=mn-1$
其中 $0<\{m\alpha\}<1$

4 不清楚

5 将 $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ 代入：
右侧 $=\lfloor n\lfloor x\rfloor+n\{x\}\rfloor=n\lfloor x\rfloor+\lfloor n\{x\}\rfloor$
左侧 $=n\lfloor\lfloor x\rfloor+\{x\}\rfloor=n\lfloor x\rfloor$
所以 $\lfloor n\{x\}\rfloor=0$，所以 $\{x\}<\frac{1}{n}$

6 $\lfloor f(x)\rfloor=\lfloor f(\lceil x\rceil)\rfloor$
$\lceil f(x)\rceil=\lceil f(\lfloor x\rfloor)\rceil$

7 $n\%m+\lfloor\frac{n}{m}\rfloor$

8 (1) 假设都小于 $\lceil\frac{n}{m}\rceil$，那么有 $n\le(\lceil\frac{n}{m}\rceil-1)m$，即 $\frac{n}{m}+1\le\lceil\frac{n}{m}\rceil$，恒不成立。
(2) 假设都大于 $\lfloor\frac{n}{m}\rfloor$, 那么有 $n\ge(\lfloor\frac{n}{m}\rfloor+1)m$, 即 $\frac{n}{m}-1\ge\lfloor\frac{n}{m}\rfloor$, 恒不成立。

9 如果 $n\%m$=0，则显然成立。
否则，令 $n=m(q-1)+t, 0<t<m$, 那么有 $\frac{m}{n}-\frac{1}{q}=\frac{m-t}{nq}$, 可以看到分子严格减少 1.

10 令 $0\le p<1$。分两种情况考虑：
(1) $x=2k+1+p$, 此时可以得到：如果 $p<0.5$，那么答案为 $2k+1$, 否则为 $2k+2$
(2) $x=2k+p$, 此时可以得到：如果 $p\le 0.5$，那么答案为 $2k$, 否则为 $2k+1$
综上所述: 如果 $x\in(2k+0.5,2k+1.5)$，答案为 $2k+1$, 否则 $x\in[2k-0.5,2k+0.5]$，答案为 $2k$

11 当 $\alpha=\beta=$ 整数时不成立。

12 令 $n=km+t, 0\le t<m$, 当 $t=0$ 时显然成立。否则 $\lceil\frac{n}{m}\rceil=k+1$,$\lfloor\frac{n+m-1}{m}\rfloor=k+\lfloor\frac{t+m-1}{m}\rfloor=k+1$

13(1) 由后面向前证明比较简单，即若 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ 且都为无理数，那么构成一个划分。
(2) 由前向后证明：先讨论 $\frac{n+1}{\alpha}+\frac{n+1}{\beta}-\left\{\frac{n+1}{\alpha}\right\}-\left\{\frac{n+1}{\beta}\right\}=n$ 是否在 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\ne 1$ 的时候成立。
假设 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=0.999$，那么当 n 足够大比如 $n=100000$, 这个等式必然不成立；
假设 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}==1.001$，那么当 n 足够大比如 $n=100000$, 这个等式必然也不成立。
所以假设失败。
假设 α,β 为有理数是必然是不行的，因为那样的话必然会存在两个整数 n_1,n_2 使得 $n_1\alpha=n_2\beta$. 如果一个是有理数一个是无理数，那么不能满足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}==1$

14 首先，如果 $ny=0$ 时显然成立。
否则，$((x)mod(ny))mod(y)=(x-ny\left\lfloor\frac{x}{ny}\right\rfloor)mod(y)=(x)mod(y)$
所以恒成立。

15 $\lceil mx\rceil=\sum_{i=0}^{m-1}\lceil x-\frac{i}{m}\rceil$

16 根据 $n\%3$ 等于 0,1,2 列三个方程然后计算出 a,b,c 的值，$a=1, b=\frac{w-1}{3}, c=-\frac{w+2}{3}$

17 $\sum_{0\le k<m}[x+\frac{k}{m}]$
$=\sum_{j,k}[0\le k<m][1\le j\le x+\frac{k}{m}]$
$=\sum_{j,k}[0\le k<m][1\le j\le\lceil x\rceil]-\sum_k[0\le k<m(\lceil x\rceil-x)]$
$=m\lceil x\rceil-\lceil m(\lceil x\rceil-x)\rceil$
$=\lfloor mx\rfloor$

18 不清楚

19 首先若 b 不是整数，那么等式在 $x=b$ 时一定不成立。若 b 为整数，则 $log_b(x)$ 取整数时必定有 x 为整数。那么根据公式 3.10, 恒成立。

20 $x\sum_k k[\lceil\frac{\alpha}{x}\rceil \le k \le \lfloor\frac{\beta}{x}\rfloor] = \frac{x(p+q)(q-p+1)}{2}$
其中 $p=\lceil\frac{\alpha}{x}\rceil, q=\lfloor\frac{\beta}{x}\rfloor$

21 如果 $10^n \le 2^M < 10^{n+1}$, 那么有 $n+1$ 个 m 满足要求。假设 $n=4, M=15$,
那么满足要求的有 $2^0=1\in[10^0,10^1-1], 2^4=16\in[10^1,10^2-1], 2^7=128\in[10^2,10^3-1], 2^{10}=1024\in[10^3,10^4-1], 2^{14}=16384\in[10^4,10^5-1]$. 所以答案为 $1+\lfloor Mlog_{10}^2\rfloor$

22 假设 $n=2^{t-1}q, t\ge 1$，其中 q 为奇数。

- 那么当 $k=t$ 时，$\lfloor\frac{n}{2^t}+\frac{1}{2}\rfloor=\frac{q+1}{2}, \lfloor\frac{n-1}{2^t}+\frac{1}{2}\rfloor=\frac{q-1}{2}$
- 如果 $k\ne t$，$\lfloor\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{n-1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor$(下面会证明这个)

所以 $S_n=S_{n-1}+1$(这里 S_{n-1}, 是 $k\ne t$ 的部分，1 是 $k=t$ 的部分), 所以 $S_n=n$.
所以 $T_n=T_{n-1}+2^t((\frac{q+1}{2})^2-(\frac{q-1}{2})^2)=T_{n-1}+2n$, 所以 $T_n=n(n+1)$.
下面正面上面 $k\ne t$ 的部分。
(1) $1\le k\le t-1$: 那么，$\lfloor\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=2^{t-1-k}q, \lfloor\frac{n-1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=2^{t-1-k}q+\lfloor-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=2^{t-1-k}q$
(2) $k\ge t+1$:$\lfloor\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{q}{2^{k-t+1}}+\frac{1}{2}\rfloor, \lfloor\frac{n-1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{q}{2^{k-t+1}}-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor$. 不妨令 $1\le q<2^{k-t+1}$. 因为大于的部分可以作为整数单独拿出来。此时分两种情况。第一种 $0<\frac{q}{2^{k-t+1}}<\frac{1}{2}$, 那么两边都等于 0. 第二种，$\frac{1}{2}\le\frac{q}{2^{k-t+1}}<1$, 那么只需要证明 $\frac{q}{2^{k-t+1}}-\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2^k}$。因为 q 是奇数，所以可以 $q\ge 2^{k-t}+1$. 所以 $\frac{q}{2^{k-t+1}}-\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2^{k-t+1}}\ge\frac{1}{2^k}$。此时两边都等于 1

23 假设第 n 个数字是 t，那么 $[1,t-1]$ 一共有 $\frac{t(t-1)}{2}$ 个数字，所以 $\frac{t(t-1)}{2}<n\le\frac{t(t+1)}{2}\leftrightarrow t^2-t<2n\le t^2+t$, 进而得到 $t^2-t+\frac{1}{4}<2n<t^2+t+\frac{1}{4}\leftrightarrow t-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<t+\frac{1}{2}\leftrightarrow\sqrt{2n}-\frac{1}{2}<t<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\Rightarrow t=\lfloor\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\rfloor$

24 $N(\alpha,n)=\lceil\frac{n+1}{\alpha}\rceil-1$
$N(\frac{\alpha}{\alpha+1},n)=\lceil\frac{(n+1)(\alpha+1)}{\alpha}\rceil-1=(n+1)+\lceil\frac{n+1}{\alpha}\rceil-1=N(\alpha,n)+n+1$
所以数字 m，其在 $Spec(\frac{\alpha}{\alpha+1})$ 出现的次数比在 $Spec(\alpha)$ 出现的次数多 1.

25 数学归纳法：对所有 $n, K_0\ge n+1$, 对于 $n=3p+1, K_n\ge n+2$,
首先对 $n=0,1,2,3,4,5$ 都满足
假设 $[0,n-1]$ 都满足，现在证明 K_n. 按照 n 模 6 的余数分六种情况

n	$2K_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$	$3K_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}$	min	$min+1$	$target$	$compare$
$6p$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+1$	ok
$6p+1$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+3$	ok
$6p+2$	$6p+6$	$6p+3$	$6p+3$	$6p+4$	$6p+3$	ok
$6p+3$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+7$	$6p+4$	ok
$6p+4$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+7$	$6p+6$	ok
$6p+5$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+7$	$6p+6$	ok

26 前半部分很明显成立：$(\frac{q}{q-1})^n\le D_n^q$
对于后半部分，由于 $(q-1)((\frac{q}{q-1})^{n+1}-1)=\frac{q^{n+1}}{(q-1)^n}-(q-1)<\frac{q^{n+1}}{(q-1)^n}=q(\frac{q}{q-1})^n$
所以现在证明 $D_n^q\le(q-1)((\frac{q}{q-1})^{n+1}-1)$
当 $n=0,1$ 时成立，假设对于 $[0,n-1]$ 均成立
那么 $D_n^q=\lceil\frac{q}{q-1}D_{n-1}^q\rceil\le\lceil\frac{q}{q-1}(q-1)((\frac{q}{q-1})^n-1)\rceil$
$=\lceil\frac{q^{n+1}}{(q-1)^n}\rceil-q<\frac{q^{n+1}}{(q-1)^n}+1-q$
$=(q-1)((\frac{q}{q-1})^{n+1}-1)$

27 首先若第 n 项为偶数，即 $D_n^3=2^tq$，q 为奇数，那么 $D_{n+t}^3=3^tq$ 为奇数；
若第 n 项为奇数，设为 $D_n^3=2^mq-1$, q 为奇数。那么 $D_{n+1}^3=D_n^3+\lceil\frac{D_n^3}{2}\rceil=2^mq-1+2^{m-1}q=2^{m-1}*3q-1$, 所以 $D_{n+m}^3=3^mq-1$ 为偶数。

28 $a_n=m^2\to a_{n+2k+1}=(m+k)^2+m-k, a_{n+2k+2}=(m+k)^2+2m, 0\le k\le m$

$\to a_{n+2m+1}=(2m)^2$

29 不清楚

30 可以用数学归纳法证明:$X_n=\alpha^{2^n}+\frac{1}{\alpha^{2^n}}$. 而 $\frac{1}{\alpha^{2^n}}<1$，同时 X_n 是整数，所以 $X_n=\lceil \alpha^{2^n} \rceil$

31 $\lfloor x \rfloor+\lfloor y \rfloor+\lfloor x+y \rfloor=\lfloor x+\lfloor y \rfloor\rfloor+\lfloor x+y \rfloor$
(1)$\lfloor y \rfloor \le \frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor$，可以分别假设 y 是整数，y 是小数且小数部分小于 0.5 以及小数部分大于等于 0.5 三种情况讨论，可以得到这个式子总是成立；
(2) $y\le \frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor+\frac{1}{2}$ 这个的证明也可以像上面一样分三种情况讨论
所以 $\lfloor x+\lfloor y \rfloor\rfloor+\lfloor x+y \rfloor \le \left\lfloor x+\frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor+\frac{1}{2}\right\rfloor$
此时,令 $p=\lfloor 2y \rfloor$。可以看出,不管 p 是奇数还是偶数,都有 $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor x \rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor+\lfloor 2y \rfloor$
最后可以发现，同样将 x 像上面一样分三种情况讨论有 $\lfloor x \rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x \rfloor$
所以结论是给出的关系恒成立

32 设 $f(x)=\sum_k 2^k||\frac{x}{2^k}||^2$, 那么有 $f(x)=f(-x)$，所以只需要考虑 $x\ge 0$ 的部分。
设 $l(x)=\sum_{k\le 0}2^k||\frac{x}{2^k}||^2, r(x)=\sum_{k>0}2^k||\frac{x}{2^k}||^2$
对于 $l(x)$ 来说，由于 $\frac{1}{2^k}$ 是整数, 所以 $l(x+1)=l(x)$, 由于 $||x||\le\frac{1}{2}$, 所以 $l(x)\le\frac{1}{2}(\sum_{k\le 0}2^k)=1$
对于 $r(x)$ 来说，假设 $0\le x<1, r(x)=\sum_{k>0}\frac{x^2}{2^k}=x^2, r(x+1)=\frac{(x-1)^2}{2}+\sum_{k>1}\frac{(x+1)^2}{2^k}=x^2+1=f(x)+1$
所以对于 $0\le x<1$, 来说，有 $f(x+1)=f(x)+1$. 接下去可以证明，对于所有的 n 都有 $f(x+n)=f(x)+n$
下面考虑 x 是任意的非负数的情况。
首先有一个性质，$f(2x)=\sum_k 2^k||\frac{2x}{2^k}||^2=2\sum_k 2^{k-1}||\frac{x}{2^{k-1}}||^2=2f(x)$
所以 $f(x)=2^{-m}f(2^m x)$. 然后利用上面的性质 $f(x+n)=f(x)+n$，有 $f(x)=2^{-m}f(2^m x)=2^{-m}(\lfloor 2^m x \rfloor+f(\{2^m x\}))$
而 $f(\{2^m x\})=l(\{2^m x\})+r(\{2^m x\})\le 1+1=2$
所以 $|f(x)-x|\le |2^{-m}\lfloor 2^m x \rfloor-x|+2^{-m}*2=2^{-m}|\lfloor 2^m x \rfloor-2^m x|+2^{-m}*2\le 2^{-m}*3$
这个式子对于所有的整数 m 成立，所以 $f(x)=x$

33 (1) 半径 $r=n-\frac{1}{2}$ 不是整数，所以圆不会经过格点。圆内部有 $2n-1$ 条横线以及 $2n-1$ 条竖线，与每条线有两个交点，相邻两个交点之间都是一个正方形，所以有几个交点就有几个正方形，所以有 $8n-4=8r$ 个；
(2) $f(n,k)=4\left\lfloor\sqrt{r^2-k^2}\right\rfloor$

34 (1) 设 $m=\lceil lg(n) \rceil, f(2^m)=\sum_{k=1}^{2^m}\lceil lg(k) \rceil=\sum_{k=1}^{m}k2^{k-1}=m2^m-2^m+1$
所以 $f(n)=f(2^m)-(2^m-n)m=(m2^m-2^m+1)-(m2^m-nm)=mn-2^m+1$
(2) 如果 n 是偶数，那么 $\lceil lg(\frac{n}{2}) \rceil=\lceil lg(n)-1 \rceil=m-1\to n-1+2f(\frac{n}{2})=n-1+2(\frac{n}{2}(m-1)-2^{m-1}+1)=nm-2^m+1=f(n)$
如果 n 是奇数，设 $n=2p+1, \lceil\frac{n}{2}\rceil=p+1, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor=p$
$2^{m-1}<2p+1\le 2^m$
$\to 2^{m-2}<p+1\le 2^{m-1}$
$\to \lceil p+1 \rceil=m-1$
$\to f(p+1)=(p+1)(m-1)-2^{m-1}+1$
$2^{m-1}<2p+1\le 2^m\to 2^{m-2}\le p<2^{m-1}$, 所以 $\lceil lg(p) \rceil=m-2$ 或者 $\lceil lg(p) \rceil=m-1$
如果是前者，那么有 $p=2^{m-2}$，所以 $f(p=2^{m-2})=p(m-2)-2^{m-2}+1=p(m-1)-p-2^{m-2}+1=p(m-1)-2^{m-1}+1=f(p)(2^{m-2}<p<2^{m-1})$
可以看到两种情况结果一样
两者相加可以得到 $n-1+f(p+1)+f(p)=n-1+\big((p+1)(m-1)-2^{m-1}+1\big)+\big(p(m-1)-2^{m-1}+1\big)=n-1+(2p+1)(m-1)-2^m+2=nm-2^m+1=f(n)$

35 首先，将 e 进行泰勒展开，$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...$
带入式子中得到 $(n+1)^2n!e=\left(\frac{(n+1)^2n!}{0!}+\frac{(n+1)^2n!}{1!}+...+\frac{(n+1)^2n!}{(n-1)!}\right)+(n+1)^2+(n+1)+\left(\frac{(n+1)^2n!}{(n+2)!}+\frac{(n+1)^2n!}{(n+3)!}+\frac{(n+1)^2n!}{(n+4)!}+...\right)$
其中 $\frac{(n+1)^2n!}{(n+2)!}+\frac{(n+1)^2n!}{(n+3)!}+\frac{(n+1)^2n!}{(n+4)!}+...$
$=\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)}+...\right)$
$<\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{(n+3)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)(n+3)(n+3)}+...\right)$
$=\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}<1$
所以答案是 $\left(\left(\frac{(n+1)^2n!}{0!}+\frac{(n+1)^2n!}{1!}+...+\frac{(n+1)^2n!}{(n-1)!}\right)+(n+1)^2+(n+1)\right)mod\,(n)=2mod\,(n)$

36 将整个区间按照下面进行划分:$[2^{2^0},2^{2^1}),[2^{2^1},2^{2^2}),...,[2^{2^{n-1}},2^{2^n})$,
考虑这一段 $[2^{2^t},2^{2^{t+1}})$
当 $k\in[2^{2^t},2^{2^{t+1}})$ 时，$\lfloor lg(lg(k)) \rfloor=t$

再将 $[2^{2^t}, 2^{2^{t+1}})$ 分成以下几段:$[2^{0+2^t}, 2^{1+2^t}), [2^{1+2^t}, 2^{2+2^t}), ..., [2^{(2^t-1)+2^t}, 2^{2^t+2^t})$
$x \in [2^{p+2^t}, 2^{p+1+2^t}) \to \lfloor lg(x) \rfloor = p + 2^t$。而这一段数字个数恰好为 2^{p+2^t}
所以 $[2^{2^t}, 2^{2^{t+1}})$ 的总和为 $\frac{1}{4^t}(1+1+1+...+1) = \frac{2^t}{4^t} = \frac{1}{2^t}$
所以整个式子的和为 $\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

37 (1)$m < \frac{n}{2}$: 这时候两边都是 0，因为 $(m)mod(n) < (-m)mod(n)$
(2)$\frac{2}{n} \le m < n$: 这时候仅当 $n - m \le k < m$ 时左边为 1, 所以左侧为 $2m - n$. 此时 $(n)mod(m) > (-m)mod(n) = n - m$, 所以右侧 $= \left\lfloor \frac{m^2}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{n} \right\rfloor = 2m - n$
(3) 当 $m \ge n$ 时可以将 $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ 单独分离出来，这部分两边相等。剩下的就是上面两种情况之一

38 对所有的 m 有 $\sum_{k=1}^{n} \{mx_k\} < 1$, 所以至多有一个 x_t 不是整数。
如果有两个数字不是整数，设为 x, y，那么根据一致分布原理，点 $(\{mx\}, \{my\})$ 会均匀分布在 1*1 的正方形中，所以一定存在 k 满足，$\{kx\} + \{ky\} \ge 1$.

39 $T = \lfloor log_b^x \rfloor \to b^T \le x < b^{T+1}$
$\sum_{k=0}^{T} \sum_{0<j<b} \left\lceil \frac{x+jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil$
$= \sum_{k=0}^{T} \sum_{0<b-j<b} \left\lceil \frac{x+(b-j)b^k}{b^{k+1}} \right\rceil$
$= \sum_{k=0}^{T} \sum_{0<j<b} \left(1 + \left\lceil \frac{x}{b^{k+1}} - \frac{j}{b} \right\rceil\right)$
$= (b-1)(T+1) + \sum_{k=0}^{T} \sum_{0<j<b} \left\lceil \frac{x}{b^{k+1}} - \frac{j}{b} \right\rceil$
$= (b-1)(T+1) + \sum_{k=0}^{T} \left(\left(\sum_{0\le j<b} \left\lceil \frac{x}{b^{k+1}} - \frac{j}{b} \right\rceil\right) - \left\lceil \frac{x}{b^{k+1}} \right\rceil\right)$
$= (b-1)(T+1) + \sum_{k=0}^{T} \left(\left\lceil \frac{x}{b^k} \right\rceil - \left\lceil \frac{x}{b^{k+1}} \right\rceil\right)$
$= (b-1)(T+1) + \left\lceil \frac{x}{b^0} \right\rceil - \left\lceil \frac{x}{b^{T+1}} \right\rceil$
$= (b-1)(T+1) + \lceil x \rceil - 1$
其中 $\sum_{0\le j<b} \left\lceil \frac{x}{b^{k+1}} - \frac{j}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{b^k} \right\rceil$ 是习题 15 的结论

40 (1) 可以发现以下规律:
$(2k-1)(2k-1) \le n \le (2k-1)2k, m = 2k-1, \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = 4k-2$, 上方水平的线
$(2k-1)2k < n < 2k*2k, m = 2k-1, \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = 4k-1$，左侧垂直的线
$2k*2k \le n \le 2k(2k+1), m = 2k, \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = 4k$，下方水平的线
$(2k+1)2k < n < (2k+1)(2k+1), m = 2k+1, \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = 4k+1$，右侧垂直的线
第一种情况 $m(m+1)$ 表示水平线最左侧的线
第三种情况 $m(m+1)$ 表示水平线最右侧的线
由以上内容很容易证明 $x(n)$ 的公式。$y(n) = (-1)^m(n - m(m+1)[\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor$ 是奇数 $] - \lceil \frac{m}{2} \rceil)$
(2) 第一种第二种情况，符号为负，满足 $x(n) < y(n)$, 第三种第四种情况，符号为正，满足 $x(n) \ge y(n)$. 所以符号为 $(-1)^{[x(n)<y(n)]}$