

1 令 $n = 2^a 3^b 5^c$, 它的因子个数为 $k = (a+1)(b+1)(c+1)$ 。所以 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时对应的 $n = 1, 2, 4, 6, 16, 12$

2 $Gcd(n, m) * Lcm(n, m) = n * m$. 因为对于某个素数 p , m, n 中 p 的个数的最小值最大值分别在最大公约数和最小公倍数中

$$Gcd((n)mod(m), m) * Lcm((n)mod(m), m) = (n)mod(m) * m$$

$$Gcd(n, m) = Gcd((n)mod(m), m)$$

$$\Rightarrow Lcm(n, m) = Lcm((n)mod(m), m) * \frac{n}{(n)mod(m)}$$

3 x 是整数时满足, x 为实数时 $\pi(x) - \pi(x-1) = [x \text{ is prime}]$

$$4 \text{ depth1: } \frac{1}{1}, \frac{1}{-1}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{1}$$

$$\text{depth2: } \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{-1}, \frac{-1}{-2}, \frac{-2}{-1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}$$

如果把分子分母看作一个二维向量的话, 每一层都是顺时针排列的。

5

$$L^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

$$6 (x)mod(0) = x \rightarrow a = b$$

$$7 m \text{ 需要满足 } (m)mod(10) = 0, (m)mod(9) = k, (m)mod(8) = 1$$

$(m)mod(10) = 0$ 说明 m 是偶数, $(m)mod(8) = 1$ 说明 m 是奇数。这是矛盾的。

$$8 9x + y = 3k, 10x = 5p. \text{ 这说明 } y \text{ 可以取 } 0, 3, x \text{ 可以取 } 0, 1.$$

$$9 3^{2t+1}mod(4) = 3. \text{ 所以 } 3^{2t+1} = 4k + 3. \text{ 所以 } \frac{3^{2t+1}-1}{2} = 2k + 1 \text{ 是奇数.}$$

$$\text{另外 } \frac{3^{77}-1}{2} \text{ 可以被 } \frac{3^7-1}{2} \text{ 整除. 因为 } 3^{77}-1 = (3^7-1)(3^{70}+3^{63}+..+3^7+3^0)$$

$$10 999 = 3^3 37^1 \rightarrow \varphi(999) = 999(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{37}) = 648$$

$$11 f(n) = g(n) - g(n-1) \rightarrow \sigma(0) = 1, \sigma(1) = -1, \sigma(n) = 0, n > 1$$

$$12 \sum_{d|m} \sum_{k|d} \mu(k)g(\frac{d}{k}) = \sum_{d|m} \sum_{k|d} \mu(\frac{d}{k})g(k) = \sum_{k|m} \sum_{d|\frac{m}{k}} \mu(d)g(k) = \sum_{k|m} g(k) * [\frac{m}{k} = 1] = g(m)$$

$$13 n \text{ 的每个质因子个数都是 } 1. (1) n_p \leq 1 (2) \mu(n) \neq 0$$

14 $k > 0$ 时两个都成立。

15 很明显 5 不是任何 e_n 的因子。首先对于模 5 来说, $e_1 = 2, e_n = e_{n-1}^2 - e_n + 1$, 所以这个模的结果依次是 2, 3, 2, 3, 不会出现 0。

$$16 \frac{1}{e_1} = \frac{1}{2}, \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = \frac{5}{6}, \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} = \frac{41}{42}, \text{ 由此猜测 } \sum_{i=1}^k \frac{1}{e_i} = \frac{e_{k+1}-2}{e_{k+1}-1}$$

$$\text{假设前 } n \text{ 项都成立, 即 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} = \frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1}$$

$$\text{那么 } \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{e_i} = \frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1} + \frac{1}{e_{n+1}} = \frac{(e_{n+1}-1)e_{n+1}-1}{(e_{n+1}-1)e_{n+1}} = \frac{e_{n+2}-2}{e_{n+2}-1}$$

$$17 Gcd(f_m, f_n) = Gcd(f_m, (f_n)mod(f_m)) = Gcd(f_m, 2) = 1$$

$$18 \text{ 如果 } n = rm \text{ 且 } r \text{ 为奇数, 那么有 } 2^n + 1 = (2^m + 1)(2^{n-m} - 2^{n-2m} + 2^{n-3m} - \dots + 1), \text{ 比如 } 2^{12} + 1 = (2^4 + 1)(2^8 - 2^4 + 1)$$

$$19 \left\lfloor \frac{\varphi(k+1)}{k} \right\rfloor = 1 \text{ 当且仅当 } k+1 \text{ 为素数. 所以第一个式子表示 } [2, n] \text{ 中素数的个数, 即 } \pi(n)$$

$$\text{第二个式子 } \sum_{1 \leq k < m} \left\lfloor \frac{\frac{m}{k}}{\left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil} \right\rfloor \text{ 当且仅当 } m \text{ 为素数时等于 } 1, \text{ 否则大于 } 1. \text{ 所以也表示 } \pi(n)$$

$$((k-1)! + 1)mod(k) = 0 \text{ 当且仅当 } k \text{ 为素数. 所以也表示 } \pi(n)$$

$$20 p_1 = 2. \text{ 令 } p_n \text{ 是满足大于 } 2^{p_{n-1}} \text{ 的最小素数, 那么有 } 2^{p_{n-1}} < p_n < 2^{1+p_{n-1}}, \text{ 那么 } b = \lim_{n \rightarrow \infty} \lg^{(n)} p_n$$

21 由上面的题目 20 可以得到 $p_n < 10^n$. 证明如下

- 首先 $n = 1$ 时满足, 有 $2 < 10$
- 在 $(10^n, 2 * 10^n]$ 之间一定存在一个素数, 所以 $p_{n+1} \leq 2 * 10^n < 10^{n+1}$

因此 $K = \sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{10^{k^2}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^4} + \frac{5}{10^9} + \dots$

22 假设含有 t 个 $1.(111..11)_b = \frac{b^t-1}{b-1}$. 如果 t 不是素数, 设 $t = nm$, 那么 $\frac{b^t-1}{b-1} = \frac{b^{nm}-1}{b-1} = \frac{b^m-1}{b-1} * (b^{nm-m} + b^{nm-2m} + \dots + 1)$

23 $\rho(2k+1) = 0, \rho(2k) = \rho(k) + 1$.

假设盘子的编号为 $0, 1, 2, \dots, n-1$, 第 k 次移动的盘子编号为 $\rho(k)$, 可以用数学归纳法证明

24 假设 $n = \sum_{k=0}^{m-1} d_k p^k (0 \leq d_k < p)$

那么第 k 位对 $\varepsilon_p(n!)$ 的贡献为 $d_k(1 + p + \dots + p^{k-1}) = \frac{d_k(p^k-1)}{p-1}$, 累加所有项可以得到 $\varepsilon_p(n!) = \frac{n - \nu_p(n)}{p-1}$

25 (1)a 成立: 有 $m \setminus n \leftrightarrow m_p = 0 \parallel m_p = n_p$. 另外 m, k 互质, 则对应的素数因子互不影响

(2) 在 $n = 12, m = 18$ 时 b 不成立

26 是的, 因为 G_n 是 Stern-Brocot 的一个子树. 因为如果一个 Stern-Brocot 的结点属于 G_n , 那么这个结点的两个父节点也属于 G_n , 并且他们是小于和大于这个结点的结点中与这个节点最靠近的。

27 首先如果两个字符串一样长, 那么只需要按照字符串比较大小即可. 否则, 可以在较短的一个串后面补字符 M 直到长度相等然后按照字符串大小比较即可. 补 M 是因为一个结点左孩子都小于当前结点, 右孩子都大于当前结点, 而 M 正好满足 $L < M < R$

28 $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}$

$R^3: \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}$, 每次加上 $\frac{1}{0}$

$L^7: \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{25}{8}$, 每次加上 $\frac{3}{1}$

就这样, 下一行的分子分母的公差为上一行倒数第二个数字的分子分母, 因为那个是它的左祖先

29 对于 $[0, 1)$ 中的数字 x 来说, $1-x$ 的二进制就是 x 的二进制表示中将 01 交换, 因为 $1 = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k}$. 那么对于 $(0, \infty)$ α 来说, 交换 LR 就是 $\frac{1}{\alpha}$. 因为 Stern-Brocot 中对称的数字恰好是互为倒数. 所以 $1-x$ 对应于 $\frac{1}{\alpha}$

30 $[A, A+m)$ 中的数字 x 模 m 各不相同, 所以 r 元组 $((x)(\text{mod})(m_1), (x)(\text{mod})(m_2), \dots, (x)(\text{mod})(m_r))$ 各不相同. 所以总有一个元组是 $((a_1)(\text{mod})(m_1), (a_2)(\text{mod})(m_2), \dots, (a_r)(\text{mod})(m_r))$

31 $(b) \text{mod}(d) = 1 \rightarrow (b^m) \text{mod}(d) = ((kd+1)^m) \text{mod}(d) = 1$

所以 $((a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_b = \sum_{k=0}^m a_k b^k) \text{mod}(d) = \sum_{k=0}^m a_k$ 也就是说, 只要 $(b) \text{mod}(d) = 1$, 那么一个 b 进制的数字能够被 d 整除当且仅当各位数字之和能够被 d 整除

32 假设 $n \perp m$. 那么下面两个集合相等.

$\{(kn) \text{mod}(m) | k \perp m, 1 \leq k < m\} = \{k | k \perp m, 1 \leq k < m\}$

所以将两边的 $\varphi(m)$ 个数字乘起来, 两边除以 $\prod_{k \perp m, 0 \leq k < m} k$ 即可