1 令 $n=2^a3^b5^c$，它的因子个数为 $k=(a+1)(b+1)(c+1)$。所以 $k=1,2,3,4,5,6$ 时对应的 $n=1,2,4,6,16,12$

2 $Gcd(n,m)*Lcm(n,m)=n*m$. 因为对于某个素数 p，m,n 中 p 的个数的最小值最大值分别在最大公约数和最小公倍数中
$Gcd((n)mod(m),m)*Lcm((n)mod(m),m)=(n)mod(m)*m$
$Gcd(n,m)=Gcd((n)mod(m),m)$
$\Rightarrow Lcm(n,m)=Lcm((n)mod(m),m)*\frac{n}{(n)mod(m)}$

3 x 是整数时满足，x 为实数时 $\pi(x)-\pi(x-1)=[\lfloor x\rfloor\ is\ prime]$

4 depth1: $\frac{1}{1},\frac{1}{-1},\frac{-1}{-1},\frac{-1}{1}$
depth2: $\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{2}{-1},\frac{-1}{-2},\frac{-2}{-1},\frac{-2}{1},\frac{-1}{2}$
如果把分子分母看作一个二维向量的话，每一层都是顺时针排列的。

5
$L^k=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$
$R^k=\begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}$

6 $(x)mod(0)=x\rightarrow a=b$

7 m 需要满足 $(m)mod(10)=0,(m)mod(9)=k,(m)mod(8)=1$
$(m)mod(10)=0$ 说明 m 是偶数，$(m)mod(8)=1$ 说明 m 是奇数。这是矛盾的。

8 $9x+y=3k,10x=5p$. 这说明 y 可以取 0,3，x 可以取 0,1.

9 $3^{2t+1}mod(4)=3$。所以 $3^{2t+1}=4k+3$. 所以 $\frac{3^{2t+1}-1}{2}=2k+1$ 是奇数。
另外 $\frac{3^{77}-1}{2}$ 可以被 $\frac{3^7-1}{2}$ 整除。因为 $3^{77}-1=(3^7-1)(3^{70}+3^{63}+..+3^7+3^0)$

10 $999=3^3 37^1\rightarrow\varphi(999)=999(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{37})=648$

11 $f(n)=g(n)-g(n-1)\rightarrow\sigma(0)=1,\sigma(1)=-1,\sigma(n)=0,n>1$

12 $\sum_{d|m}\sum_{k|d}\mu(k)g(\frac{d}{k})=\sum_{d|m}\sum_{k|d}\mu(\frac{d}{k})g(k)=\sum_{k|m}\sum_{d|\frac{m}{k}}\mu(d)g(k)=\sum_{k|m}g(k)*[\frac{m}{k}=1]=g(m)$

13 n 的每个质因子个数都是 1.（1）$n_p\le 1$ (2) $\mu(n)\neq 0$

14 $k>0$ 时两个都成立。

15 很明显 5 不是任何 e_n 的因子。首先对于模 5 来说，$e_1=2,e_n=e_{n-1}^2-e_n+1$, 所以这个模的结果依次是 2,3,2,3, 不会出现 0.

16 $\frac{1}{e_1}=\frac{1}{2},\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{5}{6},\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}=\frac{41}{42}$，由此猜测 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{e_i}=\frac{e_{k+1}-2}{e_{k+1}-1}$

假设前 n 项都成立，即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}=\frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1}$

那么 $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{e_i}=\frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1}+\frac{1}{e_{n+1}}=\frac{(e_{n+1}-1)e_{n+1}-1}{(e_{n+1}-1)e_{n+1}}=\frac{e_{n+2}-2}{e_{n+2}-1}$

17 $Gcd(f_m,f_n)=Gcd(f_m,(f_n)mod(f_m))=Gcd(f_m,2)=1$

18 如果 $n=rm$ 且 r 为奇数，那么有 $2^n+1=(2^m+1)(2^{n-m}-2^{n-2m}+2^{n-3m}-...+1)$，比如 $2^{12}+1=(2^4+1)(2^8-2^4+1)$