1、当 $n=2$ 时，区间 $[2,n-1]$ 为空，所以当 $n=2$ 时不能证明 2 匹马颜色相同。

2、三根柱子 ABC。假设 n 个盘子的答案为 $f(n)$. 最后一个盘子一定是 A->C->B，所以整个过程分为 5 步:
(1) 将上面 $n-1$ 个盘子从 A->C->B, 即 $f(n-1)$;
(2) 将第 n 个盘子放到 C 上；
(3) 将 B 上的 $n-1$ 个盘子通过 C 移动到 A, 即 $f(n-1)$;
(4) 将 C 上的第 n 个盘子移动到 B；
(5) 最后将 A 上的 $n-1$ 个盘子移动到 B，即 $f(n-1)$。
所以 $f(n)=3f(n-1)+2, f(1)=2$, 所以 $f(n)=3^n-1$.

3、三根柱子的证明是类似的。下面只证明第一根柱子。数学归纳法：(1) 当 $n=1$ 时，很明显，第一个柱子上出现过 $2^1=2$ 种一个盘子的排列。
(2) 假设 $[1,n-1]$ 时，都满足情况；
(3) 对于 n 个盘子的情况，在第二题的第一步开始到第一步结束过程中，第一根柱子上出现过 $n-1$ 个盘子的所有排列，此时有第 n 个盘子；在第二题的第五步开始到结束，第一根柱子上仍然出现过 $n-1$ 个盘子的所有排列，此时没有第 n 个盘子。所以所有 n 个盘子的排列都出现过。

4、数学归纳法：
(1) $n=1$ 时显然有 $g(1)\le 2^1-1=1$
(2) 假设 $[1,n-1]$ 个都满足
(3) 对于 n 个盘子，假设它在第三根上，那么 $g(n)=g(n-1)$; 否则假设它在第二根柱子上，那么可以将其他的 $n-1$ 个先移动到第一根柱子上，需要 $g(n-1)$，然后将第 n 个盘子移动到第三根上，然后再把第一根柱子上的 $n-1$ 个盘子移动到第三根上，需要 $2^{n-1}-1$ 步，所以 $g(n)=g(n-1)+1+2^{n-1}-1\le 2^{n-1}-1+1+2^{n-1}-1=2^n-1$
所以不存在这样的排列。

5、不能。两个圆最多两个交点，所以第四个圆最多跟前面的三个圆有 6 个交点，每个交点增加一个区域，所以最多有 14 个区域。

6、三条直线组成三角形，有一个封闭区域。后面第 i 条直线与前面 $i-1$ 条有 $i-1$ 个交点，增加 $i-2$ 个区域，所以答案为 $\sum_{i=3}^{n}(i-2)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

7、$H(1)=J(2)-J(1)=0\ne 2$。所以用归纳法的话，初始条件不成立。

8、$Q_2=\frac{1+\beta}{\alpha}$,$Q_3=\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}$,$Q_4=\frac{1+\alpha}{\beta}$,$Q_5=\alpha$,$Q_6=\beta$。所以会构成一个循环。

9、(1) 将 x_n 带入，明显等式成立。
(2) 由于 $P(n)$ 成立，即 $\prod_{i=1}^{n}x_i\le(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n})^n$，所以有 $\prod_{i=n+1}^{2n}x_i\le(\frac{\sum_{i=n+1}^{2n}x_i}{n})^n$。将两个式子相乘得到：$\prod_{i=1}^{2n}x_i\le(\frac{\sum_{i=1}^{2n}x_i}{n}\frac{\sum_{i=n+1}^{2n}x_i}{n})^n$ 而 $xy\le(\frac{x+y}{2})^2$, 所以 $\frac{\sum_{i=1}^{2n}x_i}{n}\frac{\sum_{i=n+1}^{2n}x_i}{n}\le\left(\frac{\sum_{i=1}^{2n}x_i}{2n}\right)^2$, 从而得到 $P(2n)$ 成立
(3) $P(2)$->$P(4)$->$P(3)$->$P(6)$->... (这是基于第一个条件)

下面假设没有条件 1 的特殊情况，关于这个不等式的证明：

- 设 $f(x)=e^{x-1}-x$, 通过求导可以看出 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取得最小值 0，所以 $f(x)\ge 0$，即 $x\le e^{x-1}$。
- 对于要证明的式子，如果存在某个 $x_i=0$，那么显然成立. 下面假设都大于 0
- 令 $a=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}>0$，那么对任意的 x_i 有 $\frac{x_i}{a}\le e^{\frac{x_i}{a}-1}$
- 所有式子相乘得到：$\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{a^n}\le e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a}-n}=e^{n-n}=1$, 所以 $\prod_{i=1}^{n}x_i\le a^n=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^n$

10、对于一个环 A->B->C->A,Q_n 表示 A->B 或者 B->C 或者 C->A，而 R_n 表示 A->B->C 或者 B->C->A 或者 C->A->B。
(1) 对于 Q_n 来说，分三步：(1) 将上面 $n-1$ 个从 A->B->C; (2) 将第 n 个从 A 到 B, (3) 将剩下的 $n-1$ 个从 C->A->B。所以 $Q_n=2R_{n-1}+1$

(2) 对于 R_n 来说，分五步：（1）将上面 $n-1$ 个从B->C->A;（2）将第 n 个从 B 到 C,（3）将 A 上的 $n-1$ 个从A->B,（4）将C上的第 n 个放到 A;（5）将B上的 $n-1$ 个从 B->C->A. 所以 $R_n = R_{n-1}+1+Q_{n-1}+1+R_{n-1} = Q_n+Q_{n-1}+1$

11、(1) 令 P_n 表示 $2n$ 个圆盘从 A 移动到 C 的解. 分为三步：(1) 将上面的 $2(n-1)$ 个从 A 挪到 B, 需要 P_{n-1}; (2) 将 A 上剩下的两个移动到 C, 需要 2 步; (3) 将 B 上的盘子移动到 C, 需要 P_{n-1}。所以 $P_n = 2P_{n-1}+2, P_1 = 2$, 所以 $P_n = 2^{n+1}-2$
(2) 设 Q_n 表示 $2n$ 个盘子的答案，分为 7 步：(1) 将上面 $2(n-1)$ 个盘子移动到 C, 需要 P_{n-1};(2) 第大小为 n 的上面一个盘子移动到 B;(3) 将 C 上的 $2(n-1)$ 个盘子移动到 B，需要 P_{n-1};(4) 将最后一个盘子移动到 C;(5) 将 B 的上面 $2(n-1)$ 个盘子移动到 A, 需要 P_{n-1}; (6) 将 B 上的剩下的一个盘子移动到 C;(7) 将 A 的 $2(n-1)$ 个盘子移动到 C, 需要 P_{n-1}, 所以 $Q_n = 4P_{n-1}+3 = 2^{n+2}-5$. 上面的 $2(n-1)$ 个盘子一共挪动了四次。每一次两个相同的会反一下，所以四次会跟开始的时候的顺序一样。所以所有的盘子跟开始的顺序都是一样的。

12、$A(m_1,m_2,..,m_n) = 2A(m_1,..,m_{n-1})+m_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}m_i$

13、令 $F(n)$ 表示 n 个 Z 型线的答案。$L(n)$ 表示 n 条直线的答案。$L(n) = \frac{n(n+1)}{2}+1$. 首先将一个 Z 型线看作三条直线. 但是一个 Z 型线比三条互不平行的直线少了 5 个区域，所以 $F(n) = L(3n)-5n = \frac{9n^2-7n}{2}+1$. 少的 5 个区域包括：

- 两条平行的直线之间少了 1 个，由 4 个变为 3 个
- 中间的那条跟每个平行的线之间少了 2 个，由 4 个变为 2 个，共少了 2*2=4 个

14、$L(n)$ 表示 n 条直线在二维平面划分的区域的个数。$L(n) = \frac{n(n+1)}{2}+1$. 那么在三维空间中，第 n 次切割所增加的块的个数就是这一次切割处的面上的区域数，所以 $P(n) = P(n-1)+L(n-1), P(1) = 2$, 所以 $P(n) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$

15、首先 $I(2) = 2, I(3) = 1$. 对于 $n >= 4$ 来说，

- 如果 n 是偶数，那么第一轮将删掉 2,4,6,...,n。下面重新从 1 开始计数，所以此时 $I(n) = 2I(\frac{n}{2})-1$
- 如果 n 是奇数，那么第一轮可以删掉 2,4,6,...,$n-1$,1, 接下来从 3 开始计数，所以此时 $I(n) = 2I(\frac{n-1}{2})+1$

也可以这样写 $I(2) = 2, I(3) = 1, I(2n) = 2I(n)-1, I(2n+1) = 2I(n)+1, n \geq 2$

16、

- 令 $n = 2^m+t, 0 \leq t < 2^m$，即 $n = (1b_{m-1}b_{m-2}...b_2b_1b_0)_2$
- 令 $g(n) = A_n\alpha + B_n\gamma + C_n\beta_0 + D_n\beta_1$
- 设 $\alpha = 1, \beta_0 = \beta_1 = \gamma = 0$, 那么可以得到 $g(1) = 1, g(2n) = g(2n+1) = 3g(n)$, 所以 $g(n) = 3^m = A_n\alpha + B_n\gamma + C_n\beta_0 + D_n\beta_1 = A_n$
- 令 $g(n) = n$ 可以得到 $g(1) = \alpha = 1, 2n = 3n+\gamma n+\beta_0, 2n+1 = 3n+\gamma(n+1)+\beta_1$, 所以 $\alpha = 1, \gamma = -1, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$, 可以得到 $n = A_n - B_n + D_n$, 所以 $B_n - D_n = 3^m - n$
- 令 $\alpha = 1, \beta_0 = 1, \beta_1 = \gamma = 0$, 即 $g(1) = 1, g(2n) = 3g(n)+1, g(2n+1) = 3g(n)$，可以得到 $g(n) = 3^m + \sum_{i=0}^{m-1} 3^i(1-b_i) = A_n + C_n$，所以 $C_n = \sum_{i=0}^{m-1} 3^i(1-b_i)$
- 令 $\alpha = 1, \beta_1 = 1, \beta_0 = \gamma = 0$, 即 $g(1) = 1, g(2n) = 3g(n), g(2n+1) = 3g(n)+1$，同理可以得到 $D_n = \sum_{i=0}^{m-1} 3^ib_i$

所以 $g(n) = 3^m\alpha + \left(3^m - n + \sum_{i=0}^{m-1} 3^ib_i\right)\gamma + \left(\sum_{i=0}^{m-1} 3^i(1-b_i)\right)\beta_0 + \left(\sum_{i=0}^{m-1} 3^ib_i\right)\beta_1$

17、

- 对于 $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}+n$ 个盘子来说，假设四根柱子为 ABCD, 最后将所有盘子从 A 移动到 D, 那么分为五步：(1) 将上面的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 移动到 B, 需要 $W_{\frac{n(n-1)}{2}}$ 步;(2) 将接下来的 $n-1$ 个盘子移动到 C，需要 T_{n-1}; (3) 将第 n 个盘子移动到 D, 需要一步;(4) 将 C 上的 $n-1$ 个盘子移动到 D, 需要 T_{n-1} 步;(5) 将 B 上的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个盘子移动到 D, 需要 $W_{\frac{n(n-1)}{2}}$ 步。所以最优的策略不会比这个差，因此 $W_{\frac{n(n+1)}{2}} \leq W_{\frac{n(n-1)}{2}} + T_{n-1} + 1 + T_{n-1} + W_{\frac{n(n-1)}{2}} = 2W_{\frac{n(n-1)}{2}} + T_n$

- 根据这个递推公式，依次展开每一项:
  $W_{\frac{n(n+1)}{2}} \le 2W_{\frac{n(n-1)}{2}} + T_n$
  $\le 2(2W_{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} + T_{n-1}) + T_n = 2^2 W_{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} + 2T_{n-1} + T_n$
  $\le 2^{n-1} W_{\frac{2*1}{2}} + 2^{n-2}T_2 + 2^{n-3}T_3 + ... + 2^2 T_{n-2} + 2T_{n-1} + T_n$
  $= 2^{n-1} + 2^{n-2}(2^2-1) + 2^{n-3}(2^3-1) + ... + 2^2(2^{n-2}-1) + 2(2^{n-1}-1) + (2^n-1)$
  $= 2^n(n-1) + 1$

所以 $f(n) = 2^n(n-1)+1$

18、设第 j 条线左边的为 x_{j1}，右边的为 x_{j2}，可以得到两条线为：$x_{j1} = -(n^j+n^{-n})y+n^{2j}, x_{j2} = -n^j y + n^{2j}$。对于两个 $i,j,i<j$ 来说，可以求出四个交点的 y 坐标分别为：$C_{ij22} = C_{ij11} = n^i+n^j, C_{ij12} = \frac{n^{2i}-n^{2j}}{n^i+n^{-n}-n^j}, C_{ij21} = \frac{n^{2j}-n^{2i}}{n^j+n^{-n}-n^i}$。可以得到任意两个都有四个交点。还要证明一点就是任意三条线都不会相交于一点。

	$ij11$	$ij22$	$ij12$	$ij21$
$ik11$	a	a	b	b
$ik22$	a	a	b	b
$ik12$	b	b	c	c
$ik21$	b	b	c	c

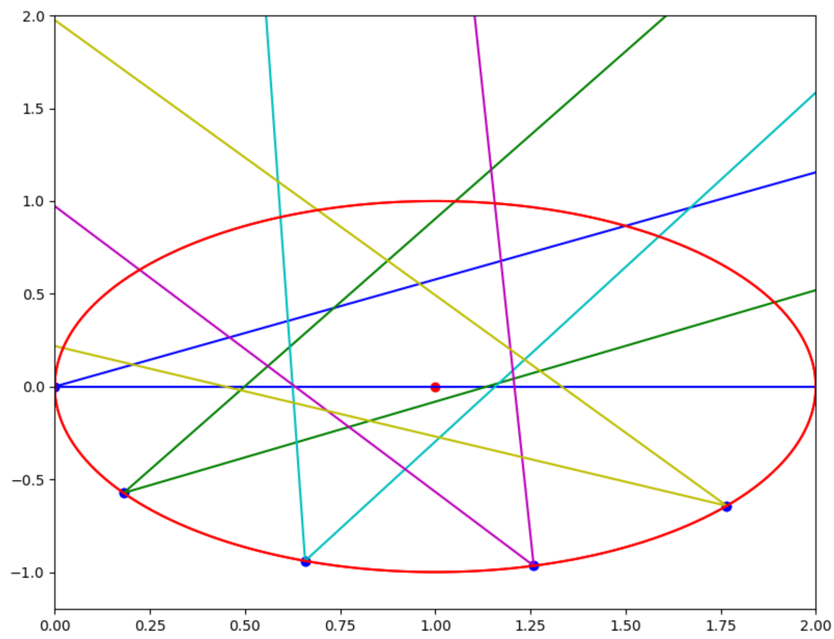
假设 $i<j<k\le n$ 来说，如上表所示，有三部分需要证明。

- a 部分，很显然，不会相等，$n^i+n^j \ne n^i+n^k$
- b 部分，也不相等，一个是整数一个是小数
- c 部分的四个证明类似。下面只证明 $C_{ij12} \ne C_{ik12}$. 假设它们相等，那么有 $\frac{n^{2i}-n^{2j}}{n^i+n^{-n}-n^j} = \frac{n^{2i}-n^{2k}}{n^i+n^{-n}-n^k}$. 令 $a=n^{2i}, b=n^i+n^{-n}$. 化简一下可以得到:$(n^j-n^k)(a-b(n^j+n^k)+n^{j+k})=0$. 后面这个式子不会等于 0，因为 $a+n^{j+k}$ 是整数，而 $b(n^j+n^k)$ 是个小数. 所以假设错误

19、

- 第一个 Z 线：θ_1 和 θ_1+30^o
- 第二个 Z 线：θ_2 和 θ_2+30^o

如果能有四个交点，需要满足 $30^o < |\theta_1-\theta_2| < 150^o$. 所以最多能选出 5 个 θ_1,θ_2,θ_3,θ_4,θ_5 两两之间满足这个条件。



如上图所示，五个顶点是在以 (1,0) 为圆心半径为 1 的圆上。它们与圆心的角度分别是 180, 215, 240, 275, 310 度。每个 Z 型的两个边中与 x 轴夹角较小的角度分别是 $0,31,62,93,124$

20、令 $h(n)=A(n)\alpha+B(n)\gamma_0+C(n)\gamma_1+D(n)\beta_0+E(n)\beta_1$,$n=(1b_{m-1}b_{m-2}...b_2b_1b_0)_2$

- 令 $\gamma_0=\gamma_1=0$，跟第 16 题类似，可以得到:$A(n)=4^m, D(n)=\sum_{i=0}^{m-1}4^i(1-b_i), E(n)=\sum_{i=0}^{m-1}4^ib_i$
- 令 $h(n)=n$ 可以得到:$\alpha=1,\gamma_0=-2,\beta_0=0,\gamma_1=-2,\beta_1=1$, 所以 $n=A(n)-2B(n)-2C(n)+E(n)$
- 令 $h(n)=n^2$ 可以得到 $n^2=A(n)+4C(n)+E(n)$
- 由上面两个可以求得 $B(n)=\frac{3A(n)+3E(n)-2n-n^2}{4}, C(n)=\frac{n^2-A(n)-E(n)}{4}$

21、如果删除的序列是确定的话，那么可以得到若干个模方程。假设 $n=3$:
(1) 删除的序列是 4,5,6，那么有 m%6=4, m%5=1, m%4=3，可以看出满足这样的 m 是不存在的，因为 m%6=4 要求 m 是偶数，而 m% 4 = 3 要求 m 是奇数。
(2) 删除的序列是 5,4,6，那么有 m%6=5, m%5=0, m%4=1，可以看出满足 $m=5$ 可以满足要求，其实所有的 $60k+5$ 都是满足的;
这么算可能有很多种答案。但一定有一个答案是 $m=LCM(n+1,n+2,...,2n)$。因为可以从 $2n$ 到 $n+1$ 逆序删掉. 这时候要求 m 是 $n+1,n+2,..,2n$ 的最小公倍数。