1 令 $n=2^a3^b5^c$，它的因子个数为 $k=(a+1)(b+1)(c+1)$。所以 $k=1,2,3,4,5,6$ 时对应的 $n=1,2,4,6,16,12$

2 $Gcd(n,m)*Lcm(n,m)=n*m$. 因为对于某个素数 $p$，$m,n$ 中 $p$ 的个数的最小值最大值分别在最大公约数和最小公倍数中
$Gcd((n)mod(m),m)*Lcm((n)mod(m),m)=(n)mod(m)*m$
$Gcd(n,m)=Gcd((n)mod(m),m)$
$\Rightarrow Lcm(n,m)=Lcm((n)mod(m),m)*\frac{n}{(n)mod(m)}$

3 $x$ 是整数时满足，$x$ 为实数时 $\pi(x)-\pi(x-1)=[\lfloor x\rfloor\ is\ prime]$

4 depth1: $\frac{1}{1},\frac{1}{-1},\frac{-1}{-1},\frac{-1}{1}$
depth2: $\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{2}{-1},\frac{-1}{-2},\frac{-2}{-1},\frac{-2}{1},\frac{-1}{2}$
如果把分子分母看作一个二维向量的话，每一层都是顺时针排列的。

5
$L^k=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$
$R^k=\begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}$

6 $(x)mod(0)=x\rightarrow a=b$

7 $m$ 需要满足 $(m)mod(10)=0,(m)mod(9)=k,(m)mod(8)=1$
$(m)mod(10)=0$ 说明 $m$ 是偶数，$(m)mod(8)=1$ 说明 $m$ 是奇数。这是矛盾的。

8 $9x+y=3k,10x=5p$. 这说明 $y$ 可以取 0,3，$x$ 可以取 0,1.

9 $3^{2t+1}mod(4)=3$。所以 $3^{2t+1}=4k+3$. 所以 $\frac{3^{2t+1}-1}{2}=2k+1$ 是奇数。
另外 $\frac{3^{77}-1}{2}$ 可以被 $\frac{3^7-1}{2}$ 整除。因为 $3^{77}-1=(3^7-1)(3^{70}+3^{63}+..+3^7+3^0)$

10 $999=3^3 37^1\rightarrow\varphi(999)=999(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{37})=648$

11 $f(n)=g(n)-g(n-1)\rightarrow\sigma(0)=1,\sigma(1)=-1,\sigma(n)=0,n>1$

12 $\sum_{d|m}\sum_{k|d}\mu(k)g(\frac{d}{k})=\sum_{d|m}\sum_{k|d}\mu(\frac{d}{k})g(k)=\sum_{k|m}\sum_{d|\frac{m}{k}}\mu(d)g(k)=\sum_{k|m}g(k)*[\frac{m}{k}=1]=g(m)$

13 $n$ 的每个质因子个数都是 1.（1）$n_p\leq 1$ (2) $\mu(n)\neq 0$

14 $k>0$ 时两个都成立。

15 很明显 5 不是任何 $e_n$ 的因子。首先对于模 5 来说，$e_1=2,e_n=e_{n-1}^2-e_n+1$, 所以这个模的结果依次是 2,3,2,3, 不会出现 0.

16 $\frac{1}{e_1}=\frac{1}{2},\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{5}{6},\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}=\frac{41}{42}$，由此猜测 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{e_i}=\frac{e_{k+1}-2}{e_{k+1}-1}$

假设前 $n$ 项都成立，即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}=\frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1}$

那么 $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{e_i}=\frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1}+\frac{1}{e_{n+1}}=\frac{(e_{n+1}-1)e_{n+1}-1}{(e_{n+1}-1)e_{n+1}}=\frac{e_{n+2}-2}{e_{n+2}-1}$

17 $Gcd(f_m,f_n)=Gcd(f_m,(f_n)mod(f_m))=Gcd(f_m,2)=1$

18 如果 $n=rm$ 且 $r$ 为奇数，那么有 $2^n+1=(2^m+1)(2^{n-m}-2^{n-2m}+2^{n-3m}-...+1)$，比如 $2^{12}+1=(2^4+1)(2^8-2^4+1)$

19 $\left\lfloor\frac{\varphi(k+1)}{k}\right\rfloor=1$ 当且仅当 $k+1$ 为素数。所以第一个式子表示 $[2,n]$ 中素数的个数，即 $\pi(n)$
第二个式子 $\sum_{1\leq k<m}\left\lfloor\frac{\frac{m}{k}}{\lceil\frac{m}{k}\rceil}\right\rfloor$ 当且仅当 $m$ 为素数时等于 1, 否则大于 1。所以也表示 $\pi(n)$
$((k-1)!+1)mod(k)=0$ 当且仅当 $k$ 为素数。所以也表示 $\pi(n)$

20 $p_1=2$。令 $p_n$ 是满足大于 $2^{p_{n-1}}$ 的最小素数，那么有 $2^{p_{n-1}}<p_n<2^{1+p_{n-1}}$, 那么 $b=lim_{n\rightarrow oo}lg^{(n)}p_n$

21 由上面的题目 20 可以得到 $p_n < 10^n$. 证明如下

- 首先 $n = 1$ 时满足，有 $2 < 10$
- 在 $(10^n, 2 * 10^n]$ 之间一定存在一个素数，所以 $p_{n+1} \leq 2 * 10^n < 10^{n+1}$

因此 $K = \sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{10^{k^2}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^4} + \frac{5}{10^9} + ....$