1 、下面的是下界，上面的是上界，所以这个取值范围为空，答案应该是 0

2 、$|x|$

3 、$\sum_{0\le k\le 5} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
$\sum_{0\le k^2\le 5} a_{k^2} = \sum_{k=-2}^{2} a_{k^2} = a_4 + a_1 + a_0 + a_1 + a_4$

4、$\sum_{1\le i<j<k\le 4} a_{ijk} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4} a_{ijk} = ((a_{123} + a_{124}) + a_{134}) + a_{234}$
$\sum_{1\le i<j<k\le 4} a_{ijk} = \sum_{k=3}^{4}\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ijk} = a_{123} + (a_{124} + (a_{134} + a_{234}))$

5、两个求和符号用了同样的下标符号，其实它们是不同的，所以不能约分。

6、$[1 \le j \le n](n - j + 1)$

7、$mx^{\overline{m-1}}$

8、当 $m > 0$ 时，为 0; 当 $m = 0$ 为 1; 当 $m < 0$ 时为 $\frac{1}{|m|!}$

9、$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$。令 $m = -n$ 可以得到:$x^{\overline{-n}} = \frac{1}{(x-n)^{\overline{n}}} = \frac{1}{(x-1)^{\underline{b}}}$

10、$u\Delta v + E_v\Delta u = v\Delta u + E_u\Delta v$, 这样就对称了。

11、$a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{0\le k<n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k)$
$= a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{0\le k<n} a_{k+1}b_{k+1} + \sum_{0\le k<n} a_{k+1}b_k$
$= a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{1\le k\le n} a_kb_k + \sum_{0\le k<n} a_{k+1}b_k$
$= -\sum_{0\le k<n} a_kb_k + \sum_{0\le k<n} a_{k+1}b_k$
$= \sum_{0\le k<n}(a_{k+1} - a_k)b_k$

12、从两点证明:

- 对于两个不同的 k_1, k_2,$p(k_1) \ne p(k_2)$
- 对于一个整数 n, 一定存在一个整数 k, 满足 $p(k) = n$. 如果 k 是奇数，那么 $p(2t+1) = 2t+1-c$, 和跟 c 的奇偶性相反; 如果 k 是偶数，那么 $p(2t) = 2t - c$，和跟 c 的奇偶性相同。这两个里面一定会存在一个等于 n

13、令 $R_0 = \alpha, R_n = R_{n-1} + (-1)^n(\beta + \gamma n + \delta n^2)$, 所以 $R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C_n\gamma + D_n\delta$
(1) 令 $R_n = 1$ 可以得到:$\alpha = 1, \beta = \gamma = \delta = 0$, 所以 $A_n = 1$
(2) 令 $R_n = (-1)^n$，可以得到:$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = \delta = 0$, 所以 $A(n) + 2B(n) = (-1)^n$
(3) 令 $R_n = (-1)^n n$, 可以得到:$-B(n) + 2C(n) = (-1)^n n$
(4) 令 $R_n = (-1)^n n^2$，可以得到:$B(n) - 2C(n) + 2D(n) = (-1)^n n^2$.
令 $\alpha = \beta = \gamma = 0, \delta = 1, R_n = (-1)^n n^2$, 那么有:

- $R_n = D(n)$
- $R_0 = 0$
- $R_1 = (-1)^1 1^2$
- $R_2 = R_1 + (-1)^2 2^2 = (-1)^1 1^2 + (-1)^2 2^2$
- 所以 $D(n) = R_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$

因此 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = D(n) = \frac{(-1)^n n^2 - B(n) + 2C(n)}{2}$
$= \frac{(-1)^n n^2 + (-1)^n n}{2} = \frac{(-1)^n(n^2+n)}{2}$

14、$\sum_{1\le j\le k\le n} 2^k$
$= \sum_{1\le j\le n}\sum_{j\le k\le n} 2^k$
$= \sum_{1\le j\le n}(2^{n+1} - 2^j)$
$= n2^{n+1} - \sum_{1\le j\le n} 2^j$
$= n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2)$
$= (n-1)2^{n+1} + 2$

15、$\sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2$
$= \sum_{k=1}^n (k^3 + k^2)$
$= \sum_{k=1}^n k * k(k+1)$
$= \sum_{k=1}^n k \sum_{j=1}^k 2j$
$= 2\sum_{1\le j\le k\le n} jk$
$= \sum_{1\le j,k\le n} jk + \sum_{1\le j=k\le n} jk = \left(\sum_{1\le k\le n} k\right)^2 + \sum_{k=1}^n k^2$
$= (\frac{n(n+1)}{2})^2 + \sum_{k=1}^n k^2$
所以 $\sum_{k=1}^n k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

16、$x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} = x^{\underline{n+m}}$

17、两个式子类似，只证明第一个。首先给出一些总结:

- 当 $m > 0$ 时，有 $x^{\overline{m}} = x(x+1)(x+2)..(x+m-2)(x+m-1)$
- 当 $m = 0$ 时，有 $x^{\overline{0}} = 1$
- 当 $m < 0$ 时，有 $x^{\overline{m}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)...(x-(|m|-1))(x-|m|)}$
- 当 $m >$ 时，有 $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)..(x-(m-2))(x-(m-1))$
- 当 $m = 0$ 时，有 $x^{\underline{0}} = 1$
- 当 $m < 0$ 时，有 $x^{\underline{m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+(|m|-1))(x+|m|)}$

(1)$m = 0$ 时显然都是 1
(2)$m > 0$ 时,

- $(-1)^m(-x)^{\underline{m}} = (-1)^m(-x)(-x-1)(-x-2)...(-x-(m-1)) = x(x+1)(x+2)...(x+m-1) = x^{\overline{m}}$
- $(x+m-1)^{\underline{m}} = (x+m-1)(x+m-2)...(x+1)x = x^{\overline{m}}$
- $\frac{1}{(x-1)^{\underline{-m}}} = (x-1+1)(x-1+2)...(x-1+m) = x^{\overline{m}}$

(3) 当 $m < 0$ 时，不妨令 $m = -m$,

- $(-1)^{-m}(-x)^{\underline{-m}} = \frac{1}{(-1)^m} * \frac{1}{(-x+1)(-x+2)...(-x+m)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)..(x-m)} = x^{\overline{-m}}$
- $(x-m-1)^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x-m-1+1)(x-m-1+2)...(x-m-1+m)} = x^{\overline{-m}}$
- $\frac{1}{(x-1)^{\underline{m}}} = \frac{1}{(x-1)(x-1-1)...(x-1-(m-1))} = x^{\overline{-m}}$

18、

- p: $\sum_{k\in K} a_k$ 绝对收敛
- q: 存在有界常数 B 使得任意有限子集 $F \in K$ 有 $\sum_{k\in F} |a_k| \le B$

(1) $p \to q$:
若 $\sum_{k\in K} a_k$ 绝对收敛，那么有 $\sum_{k\in K} \Re a_k, \sum_{k\in K} \Im a_k$ 分别绝对收敛，而 $|a_k| \le (\Re a_k)^+ + (\Re a_k)^- + (\Im a_k)^+ + (\Im a_k)^-$，所以 $\sum_{k\in F} |a_k| \le \sum_{k\in F}((\Re a_k)^+ + (\Re a_k)^- + (\Im a_k)^+ + (\Im a_k)^-)$，而后者绝对收敛，所以存在有界常数 B 满足条件;

(2) $q \to p$:
由于 $(\Re a_k)^+ \le |a_k|, (\Re a_k)^- \le |a_k|, (\Im a_k)^+ \le |a_k|, (\Im a_k)^- \le |a_k|$, 所以对于任意的 F 存在有界常数 X, Y, Z, W 使得 $\sum_{k\in F}(\Re a_k)^+ \le X, \sum_{k\in F}(\Re a_k)^- \le Y, \sum_{k\in F}(\Im a_k)^+ \le Z, \sum_{k\in F}(\Im a_k)^- \le W$, 所以 $\sum_{k\in K} \Re a_k, \sum_{k\in K} \Im a_k$ 都是绝对收敛的，所以 $\sum_{k\in K} a_k$ 绝对收敛