1 $11^4=(10+1)^4=C_4^0 10^0+C_4^1 10^1+C_4^2 10^2+C_4^3 10^3+C_4^4 10^4=1+40+600+4000+10000=14641$

2 $\frac{C_b^{k+1}}{C_n^k}=\frac{n-k}{k+1}$. 令 $\frac{n-k}{k+1}\ge 1$ 得到 $k\le\frac{n+1}{2}$，所以 $k\in[1,\frac{n+1}{2})$ 时，$C_n^{k+1}>C_n^k$. 同理在大于 $\frac{n}{2}$ 的时候逐渐减小。所以在中间位置最大。所以结论为：n 为偶数时，最大值为 $k=\frac{n}{2}$; 奇数时，在 $k=\frac{n-1}{2}$ 和 $k=\frac{n+1}{2}$ 时最大

3 $\binom{n-1}{k-1}/\binom{n-1}{k}=\frac{k}{n-k}$
$\binom{n}{k+1}/\binom{n}{k-1}=\frac{(n-k+1)(n-k)}{k(k+1)}$
$\binom{n+1}{k}/\binom{n+1}{k+1}=\frac{k+1}{n+1-k}$
相乘得 1. 随意相等

4 当 $k\ge 0$ 时，由公式 5.14，令 $r=-1$ 得到 $\binom{-1}{k}=(-1)^k\binom{k-(-1)-1}{k}=(-1)^k$ ；$k<0$ 时结果为 0

5 $\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)(p-2)..(p-k+1)}{k!}$ 是个整数。但是 $k!$ 不能整除 p，所以 p 可以整除 $\binom{p}{k}$
令 $a=\binom{p-1}{k}=\frac{(p-1)(p-2)...(p-k)}{k!}$，所以 $a*k!=(p-1)(p-2)..(p-k)$, 两边模 p 得到 $a*k!\equiv(-1)^k k!(\mod p)$, 由于 $k!$ 不能整除 p，所以 $a \mod p=(-1)^k$

6 $\sum_{k\ge 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$
$=\sum_{k\ge 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$(根据公式 5.21)
由于 $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$, 所以 $\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}\frac{1}{n+1}$
那么上面的式子 $=\frac{1}{n+1}\sum_{k\ge 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k$
$=\frac{1}{n+1}\sum_{k\ge 0}\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k$
$=\frac{1}{n+1}\sum_{k}\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k-\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}\binom{n+1}{0}(-1)^{-1}$ (后面这一部分是 $k=-1$,$k<-1$ 时都是 0)
$\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}\binom{n+1}{0}(-1)^{-1}$ 仅当 $n=0$ 时为-1，其他值结果都是 0
对于 $\frac{1}{n+1}\sum_k\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k$ 可利用公式 5.24,$(s,n,l,m)\to(n,n,n+1,1)$ 得到
$\frac{1}{n+1}\sum_k\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k=\frac{1}{n+1}(-1)^{n+2}\binom{n-1}{-1}=0$
所以最后的答案是 $[n=0]$

7 当 $k>0$ 时，$x^{\underline{-k}}=\frac{(-1)^k}{(-x-1)^{\underline{k}}}$
所以当 $k>0$ 时，$r^{\underline{-k}}(r-\frac{1}{2})^{\underline{-k}}=\frac{(-1)^k}{(-r-1)(-r-2)..(-r-k)}\frac{(-1)^k}{(-r-\frac{1}{2})(-r-\frac{3}{2})..(-r-k+\frac{1}{2})}$
$=\frac{2^{2k}}{(-2r-1)(-2r-2)(-2r-3)...(-2r-2k)}$
同理，右侧 $=\frac{(-1)^{2k}}{(-2r-1)^{\underline{2k}}}\frac{1}{2^{-2k}}$
$==\frac{2^{2k}}{(-2r-1)(-2r-2)...(-2r-2k)}$
因此，$k<0$ 时仍成立

8 $\sum_k\binom{n}{k}(-1)^k(1-\frac{k}{n})^n$
$=\sum_k\binom{n}{k}(-1)^{-k}(1-\frac{k}{n})^n$
$=\sum_k\binom{n}{k}(-1)^{-k}(-1)^n(\frac{k}{n}-1)^n$
$=\sum_k\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(\frac{k}{n}-1)^n$
令 $f(k)=(\frac{k}{n}-1)^n$ 并在公式 5.40 中令 $x=0$ 可以得到:
$\Delta^n f(0)=\sum_k\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(k)=\sum_k\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(\frac{k}{n}-1)^n$
所以结果就是 $\Delta^n f(0)$
将 $f(x)=(\frac{x}{n}-1)^n$ 展开成 $f(x)=\sum_{d=0}^{d=n}a_d x^d$ 所以 $a_n=n^{-n}$, 再换算成牛顿级数的系数 $c_n=n^{-n}n!$, 所以 $\Delta^n f(0)=c_n=n^{-n}n!$
n 无穷大时，根据斯特林近似，得到 $\frac{n!}{n^n}\approx\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$

9 (超几何函数相关) 不知道

10 (超几何函数相关) 不知道

11 (超几何函数相关) 不知道

12 (超几何函数相关) 不知道

13 P_n 中数字 $k\in[1,n]$ 出现了 $n+1-k$ 次
Q_n 中数字 $k\in[1,n]$ 出现了 k 次
将 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 代入 R_n 得到 $R_n=\frac{(n!)^{n+1}}{(1!2!3!...n!)^2}$
所以分母是 P_n^2, 分子是 P_nQ_n。因此 $R_n=\frac{Q_n}{P_n}$

14 $\sum_{k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^k$
$=\sum_{k\le l}\binom{l-k}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^k$ (这个地方 $m>l-k$ 的项都是 0)
$=\sum_{k\le l}(-1)^{l-k-m}\binom{-m-1}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^k$
$=\sum_{k\le l}\binom{-m-1}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^{l-m}$
$=\sum_{k}\binom{-m-1}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^{l-m}$ ($k>l$ 的项都是 0，$(-1)^{l-m}$ 是常数)
$=(-1)^{l-m}\binom{s-m-1}{l-m-n}$
$\sum_{-q\le k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n}$
$=\sum_{-q\le k\le l}\binom{l-k}{l-k-m}\binom{q+k}{q+k-n}$
$=\sum_{-q\le k\le l}(-1)^{l-k-m}\binom{-m-1}{l-k-m}(-1)^{q+k-n}\binom{-n-1}{q+k-n}$
$=\sum_{-q\le k\le l}\binom{-m-1}{l-k-m}\binom{-n-1}{q+k-n}(-1)^{l+q-m-n}$
$=\sum_{k}\binom{-m-1}{l-k-m}\binom{-n-1}{q+k-n}(-1)^{l+q-m-n}$ ($k>l$ 时前面一项为 0，$k<-q$ 时后面一项为 0)
$=\binom{-m-n-2}{l+q-m-n}(-1)^{l+q-m-n}$
$=\binom{l+q+1}{l+q-m-n}$
$=\binom{l+q+1}{m+n+1}$

15 (1) 若 n 是奇数，那么 k 和 $n-k$ 必是一个奇数一个偶数
那么 $\binom{n}{k}^3(-1)^k+\binom{n}{n-k}^3(-1)^{n-k}$
$=\binom{n}{k}^3((-1)^k+(-1)^{n-k})=0$
而 $\binom{n}{k}$ 一共有偶数项，$[0,1,..,n]$, 每两项得到 0，所以和是 0
(2) 若 n 时偶数，令 $n=2m$，在公式 5.29 中，令 $a=b=c=m$ 得到 $\sum_k\binom{2m}{m+k}^3(-1)^k=\frac{(3m)!}{(m!)^3}$
令 $k=-m+k$ 得到 $\sum_{-m+k}\binom{2m}{k}^3(-1)^{-m+k}=\frac{(3m)!}{(m!)^3}$
两边同时乘以 $(-1)^m$ 得到 $\sum_{-m+k}\binom{2m}{k}^3(-1)^k=(-1)^m\frac{(3m)!}{(m!)^3}$
左侧 $-m+k$ 取任意值，所以 $\sum_k\binom{2m}{k}^3(-1)^k=(-1)^m\frac{(3m)!}{(m!)^3}$

16 $\binom{2a}{a+k}\binom{2b}{(b+k)}\binom{2c}{c+k}$
$=\frac{(2a)!(2b)!(2c)!}{(a+k)!(a-k)!(b+k)!(b-k)!(c+k)!(c-k)!}$
$=\frac{(2a)!(2b)!(2c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}\frac{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}{(a+k)!(a-k)!(b+k)!(b-k)!(c+k)!(c-k)!}$
$=\frac{(2a)!(2b)!(2c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}$
所以由公式 5.29 得到 $\sum_k\binom{2a}{a+k}\binom{2b}{(b+k)}\binom{2c}{c+k}(-1)^k$
$=\frac{(2a)!(2b)!(2c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$