1 令 $n=2^a3^b5^c$，它的因子个数为 $k=(a+1)(b+1)(c+1)$。所以 $k=1,2,3,4,5,6$ 时对应的 $n=1,2,4,6,16,12$

2 $Gcd(n,m)*Lcm(n,m)=n*m$. 因为对于某个素数 $p$，$m,n$ 中 $p$ 的个数的最小值最大值分别在最大公约数和最小公倍数中
$Gcd((n)mod(m),m)*Lcm((n)mod(m),m)=(n)mod(m)*m$
$Gcd(n,m)=Gcd((n)mod(m),m)$
$\Rightarrow Lcm(n,m)=Lcm((n)mod(m),m)*\frac{n}{(n)mod(m)}$

3 $x$ 是整数时满足，$x$ 为实数时 $\pi(x)-\pi(x-1)=[\lfloor x\rfloor\ is\ prime]$

4 depth1: $\frac{1}{1},\frac{1}{-1},\frac{-1}{-1},\frac{-1}{1}$
depth2: $\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{2}{-1},\frac{-1}{-2},\frac{-2}{-1},\frac{-2}{1},\frac{-1}{2}$
如果把分子分母看作一个二维向量的话，每一层都是顺时针排列的。

5
$L^k=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
$R^k=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$

6 $(x)mod(0)=x\rightarrow a=b$

7 $m$ 需要满足 $(m)mod(10)=0,(m)mod(9)=k,(m)mod(8)=1$
$(m)mod(10)=0$ 说明 $m$ 是偶数，$(m)mod(8)=1$ 说明 $m$ 是奇数。这是矛盾的。

8 $9x+y=3k,10x=5p$. 这说明 $y$ 可以取 0,3，$x$ 可以取 0,1.

9 $3^{2t+1}mod(4)=3$。所以 $3^{2t+1}=4k+3$. 所以 $\frac{3^{2t+1}-1}{2}=2k+1$ 是奇数。
另外 $\frac{3^{77}-1}{2}$ 可以被 $\frac{3^7-1}{2}$ 整除。因为 $3^{77}-1=(3^7-1)(3^{70}+3^{63}+..+3^7+3^0)$

10 $999=3^3 37^1\rightarrow\varphi(999)=999(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{37})=648$

11 $f(n)=g(n)-g(n-1)\rightarrow\sigma(0)=1,\sigma(1)=-1,\sigma(n)=0,n>1$

12 $\sum_{d|m}\sum_{k|d}\mu(k)g(\frac{d}{k})=\sum_{d|m}\sum_{k|d}\mu(\frac{d}{k})g(k)=\sum_{k|m}\sum_{d|\frac{m}{k}}\mu(d)g(k)=\sum_{k|m}g(k)*[\frac{m}{k}=1]=g(m)$

13 $n$ 的每个质因子个数都是 1.（1）$n_p\leq 1$ (2) $\mu(n)\neq 0$

14 $k>0$ 时两个都成立。

15 很明显 5 不是任何 $e_n$ 的因子。首先对于模 5 来说，$e_1=2,e_n=e_{n-1}^2-e_n+1$, 所以这个模的结果依次是 2,3,2,3, 不会出现 0.

16 $\frac{1}{e_1}=\frac{1}{2},\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{5}{6},\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}=\frac{41}{42}$，由此猜测 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{e_i}=\frac{e_{k+1}-2}{e_{k+1}-1}$

假设前 $n$ 项都成立，即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}=\frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1}$

那么 $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{e_i}=\frac{e_{n+1}-2}{e_{n+1}-1}+\frac{1}{e_{n+1}}=\frac{(e_{n+1}-1)e_{n+1}-1}{(e_{n+1}-1)e_{n+1}}=\frac{e_{n+2}-2}{e_{n+2}-1}$

17 $Gcd(f_m,f_n)=Gcd(f_m,(f_n)mod(f_m))=Gcd(f_m,2)=1$

18 如果 $n=rm$ 且 $r$ 为奇数，那么有 $2^n+1=(2^m+1)(2^{n-m}-2^{n-2m}+2^{n-3m}-...+1)$，比如 $2^{12}+1=(2^4+1)(2^8-2^4+1)$

19 $\left\lfloor\frac{\varphi(k+1)}{k}\right\rfloor=1$ 当且仅当 $k+1$ 为素数。所以第一个式子表示 $[2,n]$ 中素数的个数，即 $\pi(n)$
第二个式子 $\sum_{1\leq k<m}\left\lfloor\frac{\frac{m}{k}}{\lceil\frac{m}{k}\rceil}\right\rfloor$ 当且仅当 $m$ 为素数时等于 1, 否则大于 1。所以也表示 $\pi(n)$
$((k-1)!+1)mod(k)=0$ 当且仅当 $k$ 为素数。所以也表示 $\pi(n)$

20 $p_1=2$。令 $p_n$ 是满足大于 $2^{p_{n-1}}$ 的最小素数，那么有 $2^{p_{n-1}}<p_n<2^{1+p_{n-1}}$, 那么 $b=lim_{n\rightarrow oo}lg^{(n)}p_n$

21 由上面的题目 20 可以得到 $p_n < 10^n$. 证明如下

- 首先 $n = 1$ 时满足，有 $2 < 10$
- 在 $(10^n, 2*10^n]$ 之间一定存在一个素数，所以 $p_{n+1} \leq 2*10^n < 10^{n+1}$

因此 $K = \sum_{k\geq 1} \frac{p_k}{10^{k^2}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^4} + \frac{5}{10^9} + ....$

22 假设含有 $t$ 个 1.$(111..11)_b = \frac{b^t-1}{b-1}$。如果 $t$ 不是素数，设 $t = nm$，那么 $\frac{b^t-1}{b-1} = \frac{b^{mn}-1}{b-1} = \frac{b^m-1}{b-1} * (b^{nm-m} + b^{nm-2m} + ... + 1)$

23 $\rho(2k+1) = 0, \rho(2k) = \rho(k) + 1$.
假设盘子的编号为 $0, 1, 2, ..., n-1$，第 $k$ 次移动的盘子编号为 $\rho(k)$, 可以用数学归纳法证明

24 假设 $n = \sum_{k=0}^{m-1} d_k p^k (0 \leq d_k < p)$
那么第 $k$ 位对 $\varepsilon_p(n!)$ 的贡献为 $d_k(1 + p + .. + p^{k-1}) = \frac{d_k(p^k-1)}{p-1}$, 累加所有项可以得到 $\varepsilon_p(n!) = \frac{n-\nu_p(n)}{p-1}$

25 (1)a 成立：有 $m \setminus\setminus n \leftrightarrow m_p = 0 || m_p = n_p$. 另外 $m, k$ 互质，则对应的素数因子互不影响
(2) 在 $n = 12, m = 18$ 时 b 不成立

26 是的，因为 $G_n$ 是 Stern-Brocot 的一个子树。因为如果一个 Stern-Brocot 的结点属于 $G_n$，那么这个结点的两个父节点也属于 $G_n$, 并且他们是小于和大于这个结点的结点中与这个节点最靠近的。

27 首先如果两个字符串一样长，那么只需要按照字符串比较大小即可。否则，可以在较短的一个串后面补字符 M 直到长度相等然后按照字符串大小比较即可。补 M 是因为一个结点左孩子都小于当前结点，右孩子都大于当前结点，而 M 正好满足 $L < M < R$

28 $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}$
$R^3 : \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}$，每次加上 $\frac{1}{0}$
$L^7 : \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{25}{8}$, 每次加上 $\frac{3}{1}$
就这样，下一行的分子分母的公差为上一行倒数第二个数字的分子分母, 因为那个是它的左祖先

29 对于 $[0, 1)$ 中的数字 $x$ 来说，$1 - x$ 的二进制就是 $x$ 的二进制表示中将 01 交换，因为 $1 = \sum_{k>0} \frac{1}{2^k}$. 那么对于 $(0, \infty)$ $\alpha$ 来说，交换 $LR$ 就是 $\frac{1}{\alpha}$。因为 Stern-Brocot 中对称的数字恰好是互为倒数。所以 $1 - x$ 对应于 $\frac{1}{\alpha}$

30 $[A, A + m)$ 中的数字 $x$ 模 $m$ 各不相同，所以 $r$ 元组 $((x)(mod)(m_1), (x)(mod)(m_2), .., (x)(mod)(m_r))$ 各不相同。所以总有一个元组是 $((a_1)(mod)(m_1), (a_2)(mod)(m_2), .., (a_r)(mod)(m_r))$

31 $(b)mod(d) = 1 \rightarrow (b^m)mod(d) = ((kd + 1)^m)mod(d) = 1$
所以 $((a_m a_{m-1}...a_1 a_0)_b = \sum_{k=0}^{m} a_k b^k)mod(d) = \sum_{k=0}^{m} a_k$ 也就是说，只要 $(b)mod(d) = 1$，那么一个 $b$ 进制的数字能够被 $d$ 整除当且仅当各位数字之和能够被 $d$ 整除

32 假设 $n \perp m$. 那么下面两个集合相等.
$\{(kn)mod(m) | k \perp m, 1 \leq k < m\} = \{k | k \perp m, 1 \leq k < m\}$
所以将两边的 $\varphi(m)$ 个数字乘起来，两边除以 $\prod_{k\perp m, 0\leq k<m} k$ 即可

33 $h(1) = 1$, 假设 $n \perp m$, 那么 $h(mn) = \sum_{d\perp mn} f(d)g(\frac{mn}{d}) = \sum_{x\perp m, y\perp n} f(xy)g(\frac{m}{x}\frac{n}{y}) = \sum_{x\perp m} \sum_{y\perp n} f(x)g(\frac{m}{x})f(y)g(\frac{n}{y}) = h(n)h(m)$

34 在公式 4.56 中，如果 $d$ 不是整数，那么 $f(d) = 0$, 所以 $g(m) = \sum_{d|m} f(d) = \sum_{d|m} f(\frac{m}{d}) = \sum_{d\geq 1} f(\frac{m}{d})$

35 下面使用的符号与公式 4.5 相关的符号相同。
$m' = \overline{m} - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \overline{r}, n' = \overline{r} \rightarrow I(m, n) = m' = I(m, \overline{r}) - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor I(\overline{r}, m) = I(m, (n)mod(m)) - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor I((n)mod(m), m), I(n, m) = n' = (n)mod(m)$
$I(0, n) = 0, I(m, 0) = 1$