1 $m=\lfloor lg(n)\rfloor$,$l=n-2^m=n-2^{\lfloor lg(n)\rfloor}$

2 (1) 如果规定 $x=n.5$ 时向上取整，那么距离实数 x 最近的整数为 $\lfloor x+0.5\rfloor$
(2) 如果规定 $x=n.5$ 时向下取整，那么距离实数 x 最近的整数为 $\lceil x-0.5\rceil$

3 $\left\lfloor \frac{\lfloor m\alpha\rfloor n}{\alpha}\right\rfloor$
$=\left\lfloor \frac{(m\alpha-\{m\alpha\})n}{\alpha}\right\rfloor$
$=\left\lfloor mn-\frac{\{m\alpha\}n}{\alpha}\right\rfloor=mn-1$
其中 $0<\{m\alpha\}<1$

4 不清楚

5 将 $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ 代入:
右侧 $=\lfloor n\lfloor x\rfloor+n\{x\}\rfloor=n\lfloor x\rfloor+\lfloor n\{x\}\rfloor$
左侧 $=n\lfloor\lfloor x\rfloor+\{x\}\rfloor=n\lfloor x\rfloor$
所以 $\lfloor n\{x\}\rfloor=0$，所以 $\{x\}<\frac{1}{n}$

6 $\lfloor f(x)\rfloor=\lfloor f(\lceil x\rceil)\rfloor$
$\lceil f(x)\rceil=\lceil f(\lfloor x\rfloor)\rceil$

7 $n\%m+\lfloor\frac{n}{m}\rfloor$

8 (1) 假设都小于 $\lceil\frac{n}{m}\rceil$，那么有 $n\le(\lceil\frac{n}{m}\rceil-1)m$，即 $\frac{n}{m}+1\le\lceil\frac{n}{m}\rceil$，恒不成立。
(2) 假设都大于 $\lfloor\frac{n}{m}\rfloor$, 那么有 $n\ge(\lfloor\frac{n}{m}\rfloor+1)m$, 即 $\frac{n}{m}-1\ge\lfloor\frac{n}{m}\rfloor$, 恒不成立。

9 如果 $n\%m$=0，则显然成立。
否则，令 $n=m(q-1)+t, 0<t<m$, 那么有 $\frac{m}{n}-\frac{1}{q}=\frac{m-t}{nq}$, 可以看到分子严格减少 1.

10 令 $0\le p<1$。分两种情况考虑:
(1) $x=2k+1+p$, 此时可以得到：如果 $p<0.5$，那么答案为 $2k+1$, 否则为 $2k+2$
(2) $x=2k+p$, 此时可以得到：如果 $p\le0.5$，那么答案为 $2k$, 否则为 $2k+1$
综上所述: 如果 $x\in(2k+0.5,2k+1.5)$，答案为 $2k+1$, 否则 $x\in[2k-0.5,2k+0.5]$，答案为 $2k$

11 当 $\alpha=\beta=$ 整数时不成立。

12 令 $n=km+t, 0\le t<m$, 当 $t=0$ 时显然成立。否则 $\lceil\frac{n}{m}\rceil=k+1$,$\lfloor\frac{n+m-1}{m}\rfloor=k+\lfloor\frac{t+m-1}{m}\rfloor=k+1$

13(1) 由后面向前证明比较简单，即若 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ 且都为无理数，那么构成一个划分。
(2) 由前向后证明：先讨论 $\frac{n+1}{\alpha}+\frac{n+1}{\beta}-\left\{\frac{n+1}{\alpha}\right\}-\left\{\frac{n+1}{\beta}\right\}=n$ 是否在 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\ne1$ 的时候成立。
假设 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=0.999$，那么当 n 足够大比如 $n=100000$, 这个等式必然不成立；
假设 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}==1.001$，那么当 n 足够大比如 $n=100000$, 这个等式必然也不成立。
所以假设失败。
假设 α,β 为有理数是必然是不行的，因为那样的话必然会存在两个整数 n_1,n_2 使得 $n_1\alpha=n_2\beta$. 如果一个是有理数一个是无理数，那么不能满足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}==1$

14 首先，如果 $ny=0$ 时显然成立。
否则，$((x)mod(ny))mod(y)=(x-ny\left\lfloor\frac{x}{ny}\right\rfloor)mod(y)=(x)mod(y)$
所以恒成立。

15 $\lceil mx\rceil=\sum_{i=0}^{m-1}\lceil x-\frac{i}{m}\rceil$

16 根据 $n\%3$ 等于 0,1,2 列三个方程然后计算出 a,b,c 的值，$a=1,b=\frac{w-1}{3},c=-\frac{w+2}{3}$

17 $\sum_{0\le k<m}[x+\frac{k}{m}]$
$=\sum_{j,k}[0\le k<m][1\le j\le x+\frac{k}{m}]$
$=\sum_{j,k}[0\le k<m][1\le j\le\lceil x\rceil]-\sum_k[0\le k<m(\lceil x\rceil-x)]$
$=m\lceil x\rceil-\lceil m(\lceil x\rceil-x)\rceil$
$=\lfloor mx\rfloor$

18 不清楚

19 首先若 b 不是整数，那么等式在 $x=b$ 时一定不成立。若 b 为整数，则 $log_b(x)$ 取整数时必定有 x 为整数。那么根据公式 3.10, 恒成立。

20 $x\sum_k k[\lceil\frac{\alpha}{x}\rceil \le k \le \lfloor\frac{\beta}{x}\rfloor] = \frac{x(p+q)(q-p+1)}{2}$
其中 $p=\lceil\frac{\alpha}{x}\rceil, q=\lfloor\frac{\beta}{x}\rfloor$

21 如果 $10^n \le 2^M < 10^{n+1}$, 那么有 $n+1$ 个 m 满足要求。假设 $n=4, M=15$,
那么满足要求的有 $2^0=1\in[10^0,10^1-1], 2^4=16\in[10^1,10^2-1], 2^7=128\in[10^2,10^3-1], 2^{10}=1024\in[10^3,10^4-1], 2^{14}=16384\in[10^4,10^5-1]$. 所以答案为 $1+\lfloor Mlog_{10}^2\rfloor$

22 假设 $n=2^{t-1}q, t\ge 1$，其中 q 为奇数。

- 那么当 $k=t$ 时，$\lfloor\frac{n}{2^t}+\frac{1}{2}\rfloor=\frac{q+1}{2}, \lfloor\frac{n-1}{2^t}+\frac{1}{2}\rfloor=\frac{q-1}{2}$
- 如果 $k\ne t$，$\lfloor\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{n-1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor$(下面会证明这个)

所以 $S_n=S_{n-1}+1$(这里 S_{n-1}, 是 $k\ne t$ 的部分，1 是 $k=t$ 的部分), 所以 $S_n=n$.
所以 $T_n=T_{n-1}+2^t((\frac{q+1}{2})^2-(\frac{q-1}{2})^2)=T_{n-1}+2n$, 所以 $T_n=n(n+1)$.
下面正面上面 $k\ne t$ 的部分。
(1) $1\le k\le t-1$: 那么，$\lfloor\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=2^{t-1-k}q, \lfloor\frac{n-1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=2^{t-1-k}q+\lfloor-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=2^{t-1-k}q$
(2) $k\ge t+1$:$\lfloor\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{q}{2^{k-t+1}}+\frac{1}{2}\rfloor, \lfloor\frac{n-1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{q}{2^{k-t+1}}-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\rfloor$. 不妨令 $1\le q<2^{k-t+1}$. 因为大于的部分可以作为整数单独拿出来。此时分两种情况。第一种 $0<\frac{q}{2^{k-t+1}}<\frac{1}{2}$, 那么两边都等于 0. 第二种, $\frac{1}{2}\le\frac{q}{2^{k-t+1}}<1$, 那么只需要证明 $\frac{q}{2^{k-t+1}}-\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2^k}$。因为 q 是奇数，所以可以 $q\ge 2^{k-t}+1$. 所以 $\frac{q}{2^{k-t+1}}-\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2^{k-t+1}}\ge\frac{1}{2^k}$。此时两边都等于 1

23 假设第 n 个数字是 t，那么 $[1,t-1]$ 一共有 $\frac{t(t-1)}{2}$ 个数字，所以 $\frac{t(t-1)}{2}<n\le\frac{t(t+1)}{2}\leftrightarrow t^2-t<2n\le t^2+t$, 进而得到 $t^2-t+\frac{1}{4}<2n<t^2+t+\frac{1}{4}\leftrightarrow t-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<t+\frac{1}{2}\leftrightarrow\sqrt{2n}-\frac{1}{2}<t<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\Rightarrow t=\lfloor\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\rfloor$

24 $N(\alpha,n)=\lceil\frac{n+1}{\alpha}\rceil-1$
$N(\frac{\alpha}{\alpha+1},n)=\left\lceil\frac{(n+1)(\alpha+1)}{\alpha}\right\rceil-1=(n+1)+\lceil\frac{n+1}{\alpha}\rceil-1=N(\alpha,n)+n+1$
所以数字 m，其在 $Spec(\frac{\alpha}{\alpha+1})$ 出现的次数比在 $Spec(\alpha)$ 出现的次数多 1.

25 数学归纳法：对所有 $n, K_0\ge n+1$, 对于 $n=3p+1, K_n\ge n+2$,
首先对 $n=0,1,2,3,4,5$ 都满足
假设 $[0,n-1]$ 都满足，现在证明 K_n. 按照 n 模 6 的余数分六种情况

n	$2K_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$	$3K_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}$	min	$min+1$	$target$	$compare$
$6p$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+1$	ok
$6p+1$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+2$	$6p+3$	$6p+3$	ok
$6p+2$	$6p+6$	$6p+3$	$6p+3$	$6p+4$	$6p+3$	ok
$6p+3$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+7$	$6p+4$	ok
$6p+4$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+7$	$6p+6$	ok
$6p+5$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+6$	$6p+7$	$6p+6$	ok

26 前半部分很明显成立：$(\frac{q}{q-1})^n\le D_n^q$
对于后半部分，由于 $(q-1)((\frac{q}{q-1})^{n+1}-1)=\frac{q^{n+1}}{(q-1)^n}-(q-1)<\frac{q^{n+1}}{(q-1)^n}=q(\frac{q}{q-1})^n$
所以现在证明 $D_n^q\le(q-1)((\frac{q}{q-1})^{n+1}-1)$
当 $n=0,1$ 时成立，假设对于 $[0,n-1]$ 均成立
那么 $D_n^q=\left\lceil\frac{q}{q-1}D_{n-1}^q\right\rceil\le\left\lceil\frac{q}{q-1}(q-1)((\frac{q}{q-1})^n-1)\right\rceil$
$=\left\lceil\frac{q^{n+1}}{(q-1)^n}\right\rceil-q<\frac{q^{n+1}}{(q-1)^n}+1-q$
$=(q-1)((\frac{q}{q-1})^{n+1}-1)$

27 首先若第 n 项为偶数，即 $D_n^3=2^tq$，q 为奇数，那么 $D_{n+t}^3=3^tq$ 为奇数；
若第 n 项为奇数，设为 $D_n^3=2^mq-1, q$ 为奇数。那么 $D_{n+1}^3=D_n^3+\left\lceil\frac{D_n^3}{2}\right\rceil=2^mq-1+2^{m-1}q=2^{m-1}*3q-1$, 所以 $D_{n+m}^3=3^mq-1$ 为偶数。

28 $a_n=m^2\rightarrow a_{n+2k+1}=(m+k)^2+m-k, a_{n+2k+2}=(m+k)^2+2m, 0\le k\le m$

$\to a_{n+2m+1} = (2m)^2$

29 不清楚

30 可以用数学归纳法证明:$X_n = \alpha^{2^n} + \frac{1}{\alpha^{2^n}}$. 而 $\frac{1}{\alpha^{2^n}} < 1$，同时 X_n 是整数，所以 $X_n = \lceil \alpha^{2^n} \rceil$

31 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x + \lfloor y \rfloor \rfloor + \lfloor x+y \rfloor$
(1)$\lfloor y \rfloor \le \frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor$，可以分别假设 y 是整数，y 是小数且小数部分小于 0.5 以及小数部分大于等于 0.5 三种情况讨论，可以得到这个式子总是成立；
(2) $y \le \frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor + \frac{1}{2}$ 这个的证明也可以像上面一样分三种情况讨论
所以 $\lfloor x + \lfloor y \rfloor \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \le \left\lfloor x + \frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor + \frac{1}{2} \right\rfloor$
此时,令 $p = \lfloor 2y \rfloor$。可以看出,不管 p 是奇数还是偶数,都有 $\left\lfloor x + \frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor 2y \rfloor$
最后可以发现，同样将 x 像上面一样分三种情况讨论有 $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$
所以结论是给出的关系恒成立

32 设 $f(x) = \sum_k 2^k||\frac{x}{2^k}||^2$, 那么有 $f(x) = f(-x)$，所以只需要考虑 $x \ge 0$ 的部分。
设 $l(x) = \sum_{k\le 0} 2^k||\frac{x}{2^k}||^2, r(x) = \sum_{k>0} 2^k||\frac{x}{2^k}||^2$
对于 $l(x)$ 来说，由于 $\frac{1}{2^k}$ 是整数, 所以 $l(x+1) = l(x)$, 由于 $||x|| \le \frac{1}{2}$, 所以 $l(x) \le \frac{1}{2}(\sum_{k\le 0} 2^k) = 1$
对于 $r(x)$ 来说，假设 $0 \le x < 1$,$r(x) = \sum_{k>0} \frac{x^2}{2^k} = x^2$,$r(x+1) = \frac{(x-1)^2}{2} + \sum_{k>1} \frac{(x+1)^2}{2^k} = x^2 + 1 = f(x) + 1$
所以对于 $0 \le x < 1$, 来说，有 $f(x+1) = f(x) + 1$. 接下去可以证明，对于所有的 n 都有 $f(x+n) = f(x) + n$
下面考虑 x 是任意的非负数的情况。
首先有一个性质，$f(2x) = \sum_k 2^k||\frac{2x}{2^k}||^2 = 2\sum_k 2^{k-1}||\frac{x}{2^{k-1}}||^2 = 2f(x)$
所以 $f(x) = 2^{-m}f(2^m x)$. 然后利用上面的性质 $f(x+n) = f(x) + n$，有 $f(x) = 2^{-m}f(2^m x) = 2^{-m}(\lfloor 2^m x \rfloor + f(\{2^m x\}))$
而 $f(\{2^m x\}) = l(\{2^m x\}) + r(\{2^m x\}) \le 1 + 1 = 2$
所以 $|f(x) - x| \le |2^{-m}\lfloor 2^m x \rfloor - x| + 2^{-m} * 2 = 2^{-m}|\lfloor 2^m x \rfloor - 2^m x| + 2^{-m} * 2 \le 2^{-m} * 3$
这个式子对于所有的整数 m 成立，所以 $f(x) = x$