1、当 $n=2$ 时，区间 $[2,n-1]$ 为空，所以当 $n=2$ 时不能证明 2 匹马颜色相同。

2、三根柱子 ABC。假设 n 个盘子的答案为 $f(n)$. 最后一个盘子一定是 A->C->B，所以整个过程分为 5 步:
(1) 将上面 $n-1$ 个盘子从 A->C->B, 即 $f(n-1)$;
(2) 将第 n 个盘子放到 C 上；
(3) 将 B 上的 $n-1$ 个盘子通过 C 移动到 A, 即 $f(n-1)$;
(4) 将 C 上的第 n 个盘子移动到 B；
(5) 最后将 A 上的 $n-1$ 个盘子移动到 B，即 $f(n-1)$。
所以 $f(n)=3f(n-1)+2, f(1)=2$, 所以 $f(n)=3^n-1$.

3、三根柱子的证明是类似的。下面只证明第一根柱子。数学归纳法：(1) 当 $n=1$ 时，很明显，第一个柱子上出现过 $2^1=2$ 种一个盘子的排列。
(2) 假设 $[1,n-1]$ 时，都满足情况；
(3) 对于 n 个盘子的情况，在第二题的第一步开始到第一步结束过程中，第一根柱子上出现过 $n-1$ 个盘子的所有排列，此时有第 n 个盘子；在第二题的第五步开始到结束，第一根柱子上仍然出现过 $n-1$ 个盘子的所有排列，此时没有第 n 个盘子。所以所有 n 个盘子的排列都出现过。

4、数学归纳法：
(1) $n=1$ 时显然有 $g(1)\le 2^1-1=1$
(2) 假设 $[1,n-1]$ 个都满足
(3) 对于 n 个盘子，假设它在第三根上，那么 $g(n)=g(n-1)$; 否则假设它在第二根柱子上，那么可以将其他的 $n-1$ 个先移动到第一根柱子上，需要 $g(n-1)$，然后将第 n 个盘子移动到第三根上，然后再把第一根柱子上的 $n-1$ 个盘子移动到第三根上，需要 $2^{n-1}-1$ 步，所以 $g(n)=g(n-1)+1+2^{n-1}-1\le 2^{n-1}-1+1+2^{n-1}-1=2^n-1$
所以不存在这样的排列。