#第2讲压轴客观题

(本讲对应学生用书第79页)

---



平面向量的综合性问题

关键是掌握平面向量的运算法则(线性运算、数量积运算)、选取基向量和建立平面直角坐标系*.*

例1(1) (2016·安庆二模)已知△*ABC*是边长为1的等边三角形,且向量*a*,*b*满足*=a+b*,*=a-b*,则下列结论错误的是()

A. *=* B. *=*

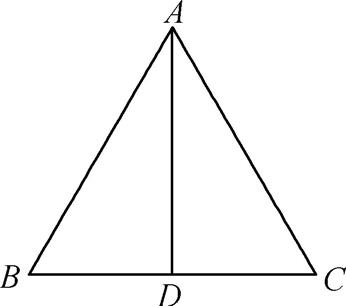
C. (*a+b*)·*a=-* D. *a*⊥*b*

(2) (2016·益阳调研)已知菱形*ABCD*的边长为2,∠*BAD=*60°,*M*为*CD*的中点,若*N*为该菱形内任意一点(含边界),则·的最大值为*.*

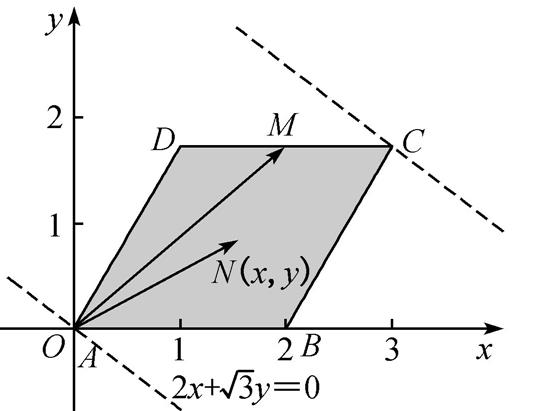
【分析】(1) 根据平面向量的线性运算确定*a*,*b*后分析判断;(2) 根据已知几何图形可以建立平面直角坐标系,使用点*N*的坐标(*x*,*y*)表达所求的数量积,再结合点*N*在菱形的边界及其内部确定其在何种情况下取得最大值*.*

【答案】(1) C(2) 9

【解析】(1) 如图,在正三角形*ABC*中,*D*为*BC*的中点*.+=*2*=*2*a*,所以*=a.-=*,所以*=*2*b.*所以*=*,*=*,*a*⊥*b*均正确*.*(*a+b*)·*a=*,选项C中的结论不正确*.*故选C*.*



(例1(1))



(例1(2))

(2) 建立如图所示的平面直角坐标系,则*B*(2,0),*C*(3,),*D*(1,),*M*(2,),设*N*(*x*,*y*),则·*=*2*x+y*,其中(*x*,*y*)所在的区域即为菱形及其内部的区域*.*设*z=*2*x+y*,则的几何意义是直线系*z=*2*x+y*在*y*轴上的截距,结合图形可知,在点*C*处目标函数取得最大值,最大值为2*×*3*+×=*9*.*

【点评】平面向量基本的运算是线性运算和数量积运算,两种运算都可以有几何运算、坐标运算两种形式,解题时要根据具体情况确定运算的形式,其中把平面向量坐标化后使用坐标方法,可以解决一些条件众多、求解目标较复杂的问题*.*

变式(1) (2016·蚌埠模拟)在梯形*ABCD*中,*AB*∥*CD*,*AB=*6,*AD=DC=*2,若⊥,则·*=　　　　.*

(2) (2016·泉州质检)已知四边形*ABCD*的对角线相交于一点,*=*(1,),*=*(*-*,1),则·的取值范围是()

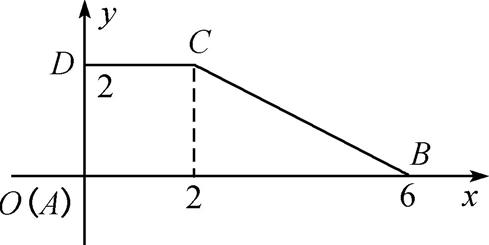
A. (0,2) B. (0,4]

C. [*-*2,0) D. [*-*4,0)

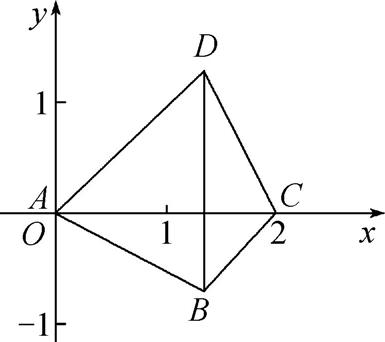
【答案】(1) *-*8(2) C

【解析】(1) 方法一:(几何运算方法)根据已知*=*,*=+=+*,*=-*,·*=*·(*-*)*=-=*4*-*12*=-*8*.*

方法二:(坐标运算方法)建立如图所示的平面直角坐标系,则*A*(0,0),*B*(6,0),*C*(2,2),*D*(0,2),则*=*(2,2),*=*(*-*6,2),所以·*=-*12*+*4*=-*8*.*



(变式(1))



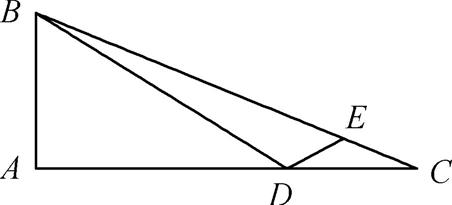
(变式(2))

(2) 由*=*(1,),*=*(*-*,1),得*||=||=*2,且⊥*.*由,的坐标知,其与点*A*,*C*和*B*,*D*的起点、终点有关,与其在坐标系中的具体位置无关,据此建立如图所示的平面直角坐标系,则*A*(0,0),*C*(2,0),*B*(*x*,*y*),*D*(*x*,*y+*2),其中0*<x<*2,*-*2*<y<*0*.*此时·*=*(*x*,*y*)·(*x-*2,*y+*2)*=*(*x-*1)2*+*(*y+*1)2*-*2,0≤(*x-*1)2*<*1,0≤(*y+*1)2*<*1,所以*-*2≤(*x-*1)2*+*(*y+*1)2*-*2*<*0,所以所求的取值范围为[*-*2,0)*.*故选C*.*

三角函数与解三角形

三角函数问题的核心是其图象与性质,解三角形问题的基本思想是方程思想*.*

例2(1) (2016·中原名校联盟)如图,在Rt△*ABC*中,*D*,*E*分别是*AC*,*BC*上一点,满足∠*ADB=*∠*CDE=*30°,*BE=*4*CE*,若*CD=*,则△*BDE*的面积为*.*

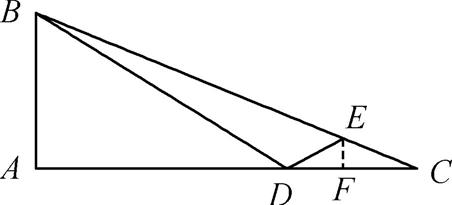


(例2(1))

(2) (2016·衡水中学)已知函数*f*(*x*)*=m*sin*x+*2*n*cos2 *-n*在*x=*时取得最小值(*m+n*)(*m*≠0),将函数*f*(*x*)图象上各点的横坐标变为原来的倍(*ω>*0,纵坐标不变)得到函数*g*(*x*)的图象,若*g*(*x*)在区间内单调递减,则*ω*的取值范围为*.*

【答案】(1) (2)

【解析】(1) 过点*E*作*EF*⊥*AC*于*F*,如图所示*.*由∠*A=*90°,知*EF*∥*AB*,再由*BE=*4*CE*,得*EF=AB.*设*EF=x*,则*AB=*5*x.*又∠*ADB=*∠*CDE=*30°,得*BD=*10*x*,*AD=*5*x*,∠*BDE=*120°*.*由勾股定理,得*BC*2*=*(*+*5*x*)2*+*25*x*2*=*100*x*2*+*30*x+*3*.*又由余弦定理,得*BE*2*=*(10*x*)2*+*(2*x*)2*-*2·2*x*·10*x*cos120°*=*124*x*2*.*又*BE=*4*CE*,所以*BC=BE*,所以100*x*2*+*30*x+*3*=×*124*x*2,解得*x=*或*x=-*(舍去),所以*S*△*BDE=BD*·*DE*sin120°*=*5*x*2*=.*



(例2(1))

(2) *f*(*x*)*=*sin(*x+φ*),由题意得*f=*(*m+n*)*=-<*0,平方得*m=n<*0,所以*f*(*x*)*=-*·sin,*g*(*x*)*=-*sin*ωx+**.*因为*g*(*x*)在区间内是减函数,所以*y=*sin在区间内是增函数,≥2*×*,所以*ω*≤2,所以*-+*2*k*π≤*ωx+*≤*+*2*k*π(*k*∈Z),即*-+*≤*x*≤*+*,则有

解得(*k*∈Z),所以0*<ω*≤*.*

变式(2016·山西质检)在△*ABC*中,角*A*,*B*,*C*所对的边分别为*a*,*b*,*c.*若*a*cos*A=b*sin*A*,且*B>*,则sin*A+*sin*C*的最大值是()

A. B. C. 1 D.

【答案】B

【解析】由正弦定理,得sin*A*cos*A=*sin*B*sin*A*,所以cos*A=*sin*B=*cos,因为*B>*,所以*A=B-.*又*C=*π*-A-B=-*2*B*,sin*A+*sin*C=*sin*+*sin*=-*cos*B-*cos2*B=-*2cos2*B-*cos*B+*1*.*因为*-*1*<*cos*B<*0,上式当cos*B=-*时取得最大值,所以其最大值为*-++*1*=.*故选B*.*

数列

数列在客观题中一般有一道高档题(填空题),解决的具体方法因题而异、灵活多变,是值得特别关注的一类高档客观题*.*

例3(1) (2016·洛阳冲刺)已知函数*f*(*n*)*=n*2cos(*n*π),且*an=f*(*n*)*+f*(*n+*1),则*a*1*+a*2*+a*3*+*…*+a*100*=　　　　.*

(2) (2016·惠州模拟)已知数列{*an*}满足*a*1*=*1,*an+an+*1*=*2*n+*1,*n*∈N*\**,*Sn*是数列的前*n*项和,则下列结论:*①S*2*n-*1*=*(2*n-*1)·;*②S*2*n=Sn*;*③S*2*n*≥*-+Sn*;*④S*2*n*≥*Sn+*,其中正确的是*.*(填序号)

【答案】(1) *-*100(2) *③④*

【解析】(1) *a*1*+a*2*+*…*+a*100*=*[*f*(1)*+f*(2)]*+*[*f*(2)*+f*(3)]*+*…*+*[*f*(99)*+f*(100)]*+*[*f*(100)*+f*(101)]*=*2[*f*(1)*+f*(2)*+f*(3)*+*…*+f*(100)]*-f*(1)*+f*(101)*=*2(*-*12*+*22*-*32*+*42*+*…*-*992*+*1002)*+*1*-*1012*=*2(3*+*7*+*11*+*…*+*199)*+*1*-*1012*=*2*××*50*+*1*-*1012*=*101*×*100*-*102*×*100*=-*100*.*

(2) 易知*a*2*=*2,由*an+an+*1*=*2*n+*1,得*an+*1*+an+*2*=*2*n+*3,两式相减,得*an+*2*-an=*2,即此数列每隔一项成等差数列,由*a*1*=*1,可得数列的奇数项为1,3,5,…, 由*a*2*=*2,可得其偶数项为2,4,6,…, 故*an=n.*

令*n=*2,*S*2*n-*1*=S*3*=*,(2*n-*1)·*=*,*S*2*n-*1≠(2*n-*1)·,故*①*错误;

令*n=*1,*S*2*n=S*2*=*1*+=*,*Sn=S*1*=*,*S*2*n*≠*Sn*,故*②*错误;因为*S*2*n-Sn=*1*+++*…*+*,又2*n>*2*n-*1,所以*>*,所以1*+++*…*+*≥1*+++*…*+=-*,故*③*正确;

因为*S*2*n-Sn=++*…*+*,设*f*(*n*)*=++*…*+*,因为*f*(*n+*1)*-f*(*n*)*=+-=->*0,所以*f*(*n+*1)*>f*(*n*),所以*f*(*n*)递增,所以*f*(*n*)≥*f*(1)*=*,所以*S*2*n-Sn*≥,所以*S*2*n*≥*Sn+*(*n*∈N*\**),故*④*正确*.*

【点评】数列问题的难点:(1)含有递推式的数列的通项公式;(2) 数列求和*.*递推式求通项的突破口是变换递推式,通过构造新数列,把其转化为等差、等比数列的通项公式;求和的突破口是裂项、分组、探索数列的性质(如周期性)等*.*

变式(1) (2016·漳州模拟)已知数列{*an*}中*a*1*=*2,*a*2*=*1,*an+*2*=*(*n*∈N*\**),*Sn* 是数列{*an*}的前*n*项和,则*S*2 016*=　　　　.*

(2) (2016·濮阳模拟)已知数列{*an*}的前*n*项和为 *Sn*,满足 2*Sn=an+*1*-*2*n+*1*+*1,*n*∈N*\**,且 *a*1,*a*2*+*5,*a*3成等差数列,则*an=　　　　.*

【答案】(1) 5 241(2) 3*n-*2*n*

【解析】(1) 因为*a*1*=*2,*a*2*=*1,*an+*2*=*

(*n*∈N*\**),所以*a*3*=*2,*a*4*=*4,*a*5*=*4,*a*6*=*2,*a*7*=*1,所以数列{*an*}是以5为周期的周期数列,又2 015*=*403*×*5,*a*1*+a*2*+a*3*+a*4*+a*5*=*13,所以*S*2 016*=S*2 015*+a*2 016*=*403*×*13*+*2*=*5 241*.*

(2) 由*a*1,*a*2*+*5,*a*3成等差数列可得*a*1*+a*3*=*2*a*2*+*10,由2*Sn=an+*1*-*2*n+*1*+*1,得2*a*1*+*2*a*2*=a*3*-*7,即2*a*2*=a*3*-*7*-*2*a*1,代入*a*1*+a*3*=*2*a*2*+*10,得*a*1*=*1,代入2*S*1*=a*2*-*22*+*1,得*a*2*=*5*.*

又由2*Sn=an+*1*-*2*n+*1*+*1得,当*n*≥2时,2*Sn-*1*=an-*2*n+*1,两式相减,得2*an=an+*1*-an-*2*n*,即*an+*1*=*3*an+*2*n.*当*n=*1时,5*=*3*×*1*+*21也适合*an+*1*=*3*an+*2*n*,所以对任意正整数*n*,*an+*1*=*3*an+*2*n.*

上式两端同时除以2*n+*1,得*=*·*+*,两端同时加1,得*+*1*=*·*+=*,则数列是首项为,公比为的等比数列,所以*+*1*=*,所以*=-*1,所以*an=*3*n-*2*n.*

圆锥曲线

圆锥曲线主要考点为定义的应用、几何性质(离心率)、直线与圆锥曲线的位置关系等,解题的核心是把几何条件转化为代数条件,利用代数计算得出结果*.*

例4(1) (2016·黄冈中学)设直线*l*与抛物线*y*2*=*4*x*相交于*A*,*B*两点,与圆(*x-*4)2*+y*2*=r*2(*r>*0)相切于点*M*,且*M*为线段*AB*的中点,若这样的直线*l*恰有4条,则*r*的取值范围是()

A. (2,3) B. (2,4)

C. [2,2] D. (2,2)

(2) (2016·广州质检) 已知点*O*为坐标原点,点*M*在双曲线*C*:*x*2*-y*2*=λ*(*λ*为正常数)上,过点*M*作双曲线*C*的某一条渐近线的垂线,垂足为*N*,则*ON+*2*MN*的最小值为*.*

【分析】(1) 根据直线与抛物线、圆的位置关系,可得点*M*的轨迹方程为*x=*2,点*M*在抛物线内可得其纵坐标的取值范围,进而可得*r*的取值范围;(2) 以点*M*的坐标表达点*N*的坐标,进而表达*ON*,*MN*,然后证明*ON*·*MN*为定值后使用基本不等式求的*ON+*2*MN*最小值、或者直接使用点*M*的坐标表达求解目标后,再利用点*M*在双曲线上,使用点*M*的横坐标表达*ON+*2*MN*后使用函数方法求最值*.*

【答案】(1) D(2) 2

【解析】(1) 设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),*M*(*x*0,*y*0),直线*l*的斜率设为*k*,则*=*4*x*1,*=*4*x*2,两式相减,得(*y*1*+y*2)(*y*1*-y*2)*=*4(*x*1*-x*2),当*l*的斜率存在时,得*ky*0*=*2*.*因为直线与圆相切,所以*=-*,所以*x*0*=*2,即*M*的轨迹是直线*x=*2*.*将*x=*2代入*y*2*=*4*x*,得*y*2*=*8,所以*-*2*<y*0*<*2*.*因为*M*在圆上,所以*+=r*2,所以*r*2*=+*4*<*12*.*因为直线*l*恰有4条,所以*y*0≠0,所以4*<r*2*<*12,故2*<r<*2时,直线*l*有2条;当*l*的斜率不存在时,只需满足*r*2*<*42,即0*<r<*4,则直线*l*有2条,所以直线*l*恰有4条时,2*<r<*2*.*故选D*.*

(2) 取双曲线*C*:*x*2*-y*2*=λ*的渐近线*y=x.*设*M*(*x*0,*y*0),根据对称性,设点*M*在双曲线的右支上*.*直线*MN*的方程为*y-y*0*=-*(*x-x*0),与方程*y=x*联立得*x=*,即*N.*

方法一:根据直线上两点间的距离公式,得*ON=*·,*MN=*·*=*·*.*

所以*ON*·*MN=*(*-*)*=*,所以*ON+*2*MN*≥2*=*2,即所求的最小值为2*.*

方法二: *ON+*2*MN=*·*+*2*=*(3*x*0*-y*0)*.*

因为*x*0*=*,所以3*x*0*-y*0*=*3*-y*0*.*令*f*(*t*)*=*3*-t*,

则*f'*(*t*)*=-*1*=*,得*t=*为其极小值点,也是唯一的极小值点,即为最小值点,所以*f*(*t*)min*=f=*3*-=*,所以(3*x*0*-y*0)的最小值为2*.*

【点评】解圆锥曲线客观题需注意:(1) 圆锥曲线定义的应用;(2) 数形结合的思想方法;(3) “设而不求、整体代入”的方法;(4) 基本不等式、函数、三角函数、平面向量知识的运用*.*

变式(2016·武汉调研)已知椭圆*E*:*+=*1(*a>b>*0)的离心率为,过右焦点*F*且斜率为*k*(*k>*0)的直线与椭圆*E*相交于*A*,*B*两点*.*若*=*3,则*k*等于()

A. 1 B. C. D. 2

【答案】B

【解析】由题设得*=*,则*a*2*=*4*b*2,*c=b*,所以椭圆方程为*x*2*+*4*y*2*-*4*b*2*=*0,右焦点为*F*(*b*,0)*.*设过右焦点的直线方程为*x=ty+b*,代入椭圆方程,得(4*+t*2)*y*2*+*2*tby-b*2*=*0*.*设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),则*y*1*+y*2*=-　①*,*y*1*y*2*=　②.=*(*b-x*1,*-y*1),*=*(*x*2*-b*,*y*2),因为*=*3,所以*y*1*=-*3*y*2*③.*将*③*代入*①*,得*y*2*=　④*,将*③*代入*②*,得*=　⑤*,将*④*代入*⑤*,得*=*,解得*t*2*=.*设直线*x=ty+b*的斜率为*k*,则*k*2*==*2,*k>*0,所以*k=.*故选B*.*

函数性质及其应用

函数的单调性、奇偶性和周期性是函数的主要性质,其应用是命题的热点,基本思路是导出函数性质,利用函数性质实现问题的转化*.*

例5(1) (2016·衡阳一联)已知函数*f*(*x*)的定义域为[*-*1,1],图象如图1所示;函数*g*(*x*)的定义域为[*-*2,2],图象如图2所示,方程*f*(*g*(*x*))*=*0有*m*个实数根,方程*g*(*f*(*x*))*=*0有*n*个实数根,则*m+n*等于()

A. 14 B. 12 C. 10 D. 8

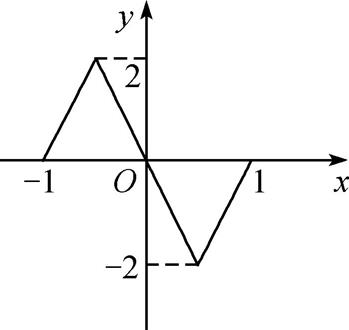


图1

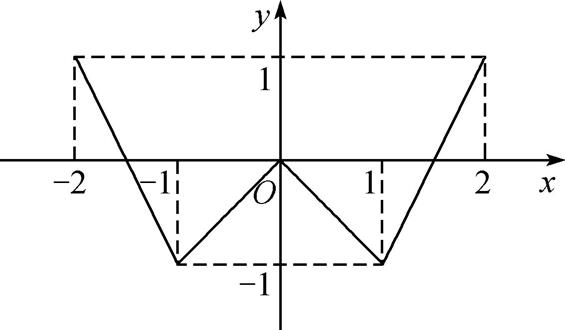


图2

(例5(1))

(2) (2016·广州名校联考)已知*f*(*x*)是定义在R上的函数,且*f*(*x+*3)≤*f*(*x*)*+*3,*f*(*x+*2)≥*f*(*x*)*+*2,*f*(0)*=*0,则*f*(2 016)*=　　　　.*

【分析】(1) 由于函数*g*(*x*)的值域为函数*f*(*x*)的定义域,所以*f*(*g*(*x*))*=*0时,只要*g*(*x*)*=-*1,0,1,根据*y=g*(*x*)的图象分析其实根的个数,得出*m.*同理得出*n.*(2)使用已知不等式建立*f*(2 016)与*f*(0)的不等关系,利用两个不等关系得出*f*(2 016)的值*.*

【答案】(1) A(2) 2 016

【解析】(1)由方程*f*(*g*(*x*))*=*0可知*g*(*x*)*=-*1,0,1,此时*x*有7个实根,即*m=*7;由方程*g*(*f*(*x*))*=*0可知*n=*7,所以*m+n=*14*.*故选A*.*

(2) 由题得*f*(2 016)≤*f*(2 013)*+*3≤*f*(2 010)*+*6≤…≤*f*(0)*+*2 016*=*2 016,*f*(2 016)≥*f*(2 014)*+*2≥*f*(2 012)*+*4≥…≥*f*(0)*+*2 016*=*2 016*.*所以*f*(2 016)*=*2 016*.*

【点评】(1)本例(1)中函数*f*(*g*(*x*))称为复合函数,其中*g*(*x*)的值域必须在*f*(*x*)的定义域之内,在此前提下,*g*(*x*)类似与函数*f*(*x*)中的自变量*x*,可以利用函数*f*(*x*)的性质解决问题,注意方程*f*(*g*(*x*))*=*0的实数根是使方程成立的*x*值,不是*g*(*x*)的值;(2) 可以利用*a*≥*b*且*a*≤*b*推出*a=b*,这也是证明两式相等的一个方法*.*

变式 (1) (2016·山西质检)若函数*f*(*x*)*=-m*存在零点,则实数*m*的取值范围是()

A. (0,1] B. (0,0) C. (*-*1,1) D. (*-*1,1]

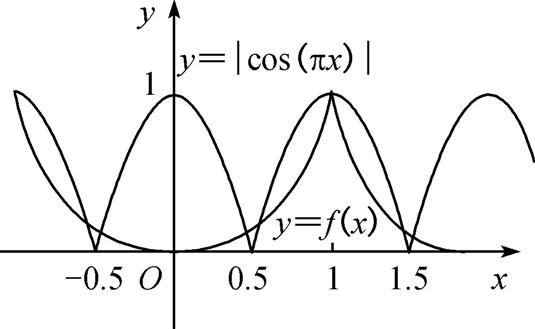
(2) (2016·广州质检)已知函数*f*(*x*)的定义域为R, *f*(*-x*)*=f*(*x*),*f*(*x*)*=f*(2*-x*), 当*x*∈[0,1]时,*f*(*x*)*=x*3, 则函数*g*(*x*)*=-f*(*x*)在区间上的所有零点的和为()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【答案】(1) C(2) B

【解析】(1) 由题知,只要*m*在函数*y=*的值域内取值即可*.*函数*y=*为奇函数,当*x*≥0时,*y=*∈[0,1),故当*x*≤0时,*y*∈(*-*1,0],所以*y=*的值域为(*-*1,1),即为*m*的取值范围*.*故选C*.*

(2) 由*f*(*-x*)*=f*(*x*)得*f*(*x*)为偶函数,再由*f*(2*-x*)*=f*(*x*)得*f*(*x-*2)*=f*(*x*),所以函数*f*(*x*)是周期函数,2为其一个周期*.*由*f*(2*-x*)*=f*(*x*),得函数*y=f*(*x*)的图象关于直线*x=*1对称*.*函数*y=*是最小正周期为1的偶函数*.*在同一坐标系中画出函数*y=f*(*x*),*y=*的大致图象,由图象知在区间上两函数图象共有五个交点,即函数*g*(*x*)有五个零点*.*按从小到大顺次设为*x*1,*x*2,*x*3,*x*4,*x*5,则*x*1*+x*2*=*0,*x*3*+x*5*=*2,*x*4*=*1,所以函数*g*(*x*)在区间上的所有零点的和为3*.*故选B*.*



(变式)

导数及其应用

导数及其应用是最重要的高频命题点,解题的关键是利用导数的几何意义研究函数的性质,通过数形结合实现问题的转化*.*

例6(1) (2016·合肥二模)设定义在R上的偶函数*f*(*x*)的导函数为*f'*(*x*),若对任意的实数*x*,都有2*f*(*x*)*+xf'*(*x*)*<*2恒成立,则使*x*2*f*(*x*)*-f*(1)*<x*2*-*1成立的实数*x*的取值范围为()

A. {*x|x*≠*±*1} B. (*-∞*,*-*1)∪(1,*+∞*)

C. (*-*1,1) D. (*-*1,0)∪(0,1)

(2) (2016·南平模拟)设函数*f*(*x*)*=*e*x*(*x*3*-*3*x+*3)*-a*e*x-x*,若不等式*f*(*x*)≤0有解,则实数*a*的最小值为()

A. *-*1 B. 2*-* C. 1*+*2e2 D. 1*-*

(3) (2016·邯郸模拟)在平面直角坐标系*xOy*中,已知*-*ln*x*1*-y*1*=*0,*x*2*-y*2*-*2*=*0,则*+*的最小值为()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】(1) 不等式*x*2*f*(*x*)*-f*(1)*<x*2*-*1,即*x*2*f*(*x*)*-x*2*<f*(1)*-*1,构造函数*F*(*x*)*=x*2*f*(*x*)*-x*2,使用导数研究其单调性;(2) 由*f*(*x*)≤0可得*a*≥*x*3*-*3*x+*3*-*,令*F*(*x*)*=x*3*-*3*x+*3*-*,不等式有解等价于*a*≥*F*(*x*)min,确定*F*(*x*)的最小值即可;(3)设点*M*(*x*1,*y*1),*N*(*x*2,*y*2),则点*M*在函数*y=x*2*-*ln*x*的图象上,点*N*在直线*y=x-*2上*.+*几何意义是点*M*,*N*距离的平方*.*问题转化为只要求出直线*y=x-*2上点与曲线*y=x*2*-*ln*x*上的点的最近距离就即可*.*作曲线*y=x*2*-*ln*x*的斜率为1的切线,则切点到直线*y=x-*2的距离即为所求*.*

【答案】(1) B(2) D(3) B

【解析】(1) 当*x>*0时,2*xf*(*x*)*+x*2*f'*(*x*)*<*2*x*,设*F*(*x*)*=x*2*f*(*x*)*-x*2,则*F'*(*x*)*=*2*xf*(*x*)*+x*2*f'*(*x*)*-*2*x<*0,故*F*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递减,且*F*(1)*=f*(1)*-*1*.*不等式*x*2*f*(*x*)*-f*(1)*<x*2*-*1,即*x*2*f*(*x*)*-x*2*<f*(1)*-*1,即*F*(*x*)*<F*(1),故只需*>*1即可,解得*x<-*1或*x>*1,故使*x*2*f*(*x*)*-f*(1)*<x*2*-*1成立的实数*x*的取值范围为(*-∞*,*-*1)∪(1,*+∞*)*.*故选B*.*

(2) *f*(*x*)≤0可化为e*x*(*x*3*-*3*x+*3)*-a*e*x-x*≤0,*a*≥*x*3*-*3*x+*3*-*,令*F*(*x*)*=x*3*-*3*x+*3*-*,则*F'*(*x*)*=*3*x*2*-*3*+=*(*x-*1)(3*x+*3*+*e*-x*)*.*令*G*(*x*)*=*3*x+*3*+*e*-x*,则*G'*(*x*)*=*3*-*e*-x*,故当e*-x=*3,即*x=-*ln3时,*G*(*x*)*=*3*x+*3*+*e*-x*有最小值*G*(*-*ln3)*=-*3ln3*+*6*=*3(2*-*ln3)*>*0*.*故当*x*∈(*-∞*,1)时,*F'*(*x*)*<*0;当*x*∈(1,*+∞*)时,*F'*(*x*)*>*0*.*故*F*(*x*)有最小值*F*(1),*F*(1)*=*1*-*3*+*3*-=*1*-*,故实数*a*的最小值为1*-.*故选D*.*

(3) 令*y=x*2*-*ln*x*,则*y'=*2*x-*,令*y'=*1,解得*x=*1,此时*y=*1,即曲线*y=x*2*-*ln*x*上斜率为1的切线的切点坐标为(1,1),该点到直线*x-y-*2*=*0的距离为,所以所求的最小值为2*.*故选B*.*

【点评】(1)导数方法研究函数最基本的思想方法是函数思想(构造函数)和数形结合思想,通过构造函数后研究函数性质(单调性、极值、最值等)探究问题成立满足的条件、利用数形结合探究问题成立时满足的条件;(2) 不等式恒成立、不等式有解求参数范围时,如果能够分离参数,则分离参数后,再构造函数,求出函数的最值后即可确定参数取值范围,若*f*(*x*)≤*a*恒成立⇔*f*(*x*)max≤*a*,*f*(*x*)≤*a*有解⇔*f*(*x*)min≤*a*等;(3) 利用导数的几何意义求解直线上的点与曲线上的点的最近距离,可以作与已知直线平行的曲线的切线,则切点到直线的距离即为所求*.*

变式(1) (2016·江西师大附中)已知偶函数*f*(*x*)是定义在{*x*∈R*|x*≠0}上的可导函数,其导函数为*f'*(*x*)*.*当*x<*0时,*f'*(*x*)*>*恒成立*.*设*m>*1,记*a=*,*b=*2*f*(2),*c=*(*m+*1)*f*,则*a*,*b*,*c*的大小关系为()

A. *a<b<c* B. *a>b>c*

C. *b<a<c* D. *b>a>c*

(2) (2016·益阳调研)若曲线*C*1:*y=ax*2(*a>*0)与曲线*C*2:*y=*e*x*存在公共切线,则实数*a*的取值范围是()

A. B.

C. D.

【答案】(1) A(2) C

【解析】(1) 当*x<*0时,*f'*(*x*)*>*⇔*xf'*(*x*)*-f*(*x*)*<*0*.*构造函数*g*(*x*)*=*,则*g'*(*x*)*=<*0,即*g*(*x*)在(*-∞*,0)上单调递减*.*又函数*f*(*x*)为偶函数,故*g*(*x*)为奇函数,得*g*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递减*.*

*b=*4*m*,*c=*4*m.*

因为*m>*1,所以*m+*1*>*2,*<=*2,所以*m+*1*>*2*>.*

所以*g*(*m+*1)*<g*(2)*<g*,所以可得4*mg*(*m+*1)*<*4*mg*(2)*<*4*mg*,即*a<b<c.*故选A*.*

(2) 设曲线*C*1上点(*x*1,*y*1)处的切线为*l*1,则*l*1:*y=*2*ax*1*x-a*;设曲线*C*2上点(*x*2,*y*2)处的切线为*l*2,则*l*2:*y=x-*(*x*2*-*1)*.*根据题意,*l*1,*l*2表示同一条直线,故有2*ax*1*=*,*a=*(*x*2*-*1)*.*消去*a*,得*x*1*=*2(*x*2*-*1),即*x*2*=x*1*+*1,代入2*ax*1*=*,得2*ax*1*=.*

因为*a>*0,可得*x*1*>*0,所以2*a=.*构造函数*f*(*x*)*=*,*x>*0,则*f'*(*x*)*==*,可得*x=*2为函数*f*(*x*)在(0,*+∞*)内唯一的极小值点,也是最小值点,所以*f*(*x*)min*=f*(2)*=*,故只需*a*≥,方程2*a=*即存在实数根,也即曲线*C*1,*C*2存在公共切线,所以实数*a*的取值范围是*.*故选C*.*



1*.* (2016·晋中模拟)已知函数*y=f*(*x*)是R上的偶函数,且对任意的*x*1,*x*2∈(0,*+∞*),都有(*x*1*-x*2)[*f*(*x*1)*-f*(*x*2)]*<*0,设*a=*ln,*b=*(lnπ)2,*c=*ln,则()

A. *f*(*a*)*>f*(*b*)*>f*(*c*) B. *f*(*b*)*>f*(*a*)*>f*(*c*) C. *f*(*c*)*>f*(*b*)*>f*(*a*) D. *f*(*c*)*>f*(*a*)*>f*(*b*)

【答案】D

【解析】由题意知,函数*y=f*(*x*)在(0,*+∞*)上为减函数,且图象关于*y*轴对称,则*f*(*a*)*=f*(*-a*)*=f=f*(lnπ),*f*(*c*)*=f*(ln)*=f*,又0*<*lnπ*<*lnπ*<*(lnπ)2,所以*f>f*(lnπ)*>f*((lnπ)2)*.*故选D*.*

2*.* (2016·衡阳二联)设*f*(*x*)是定义在(*-*π,0)∪(0,π)上的奇函数,其导函数为*f'*(*x*),且*f=*0,当*x*∈(0,π)时,*f'*(*x*)sin*x-f*(*x*)cos*x<*0,则关于*x*的不等式*f*(*x*)*<*2*f*sin*x*的解集为()

A. ∪ B. ∪ C. ∪ D. ∪

【答案】B

【解析】令*g*(*x*)*=*,则*g'*(*x*)*=.*当*x*∈(0,π)时,*g'*(*x*)*<*0,故*g*(*x*)在(0,π)上单调递减*.*又函数*f*(*x*)为奇函数,则*g*(*x*)为偶函数,所以*g*(*x*)在(*-*π,0)上单调递增*.*当*x*∈(0,π)时,不等式*f*(*x*)*<*2*f*sin*x*,即*<*,即*g*(*x*)*<g*,得*<x<*π;当*x*∈(*-*π,0)时,不等式*f*(*x*)*<*2*f*sin*x*,即*>*,即*g*(*x*)*>g*,得*-<x<*0*.*故选B*.*

3*.* (2016·珠海模拟)已知直线*x-my-*8*=*0与抛物线*y*2*=*8*x*交于*A*,*B*两点,*O*为坐标原点,则△*OAB*面积的取值范围是*.*

【答案】[64,*+∞*)

【解析】联立方程得*y*2*-*8*my-*64*=*0,则*Δ>*0,*y*1*+y*2*=*8*m*,*y*1*y*2*=-*64,因为*x-my-*8*=*0过定点(8,0),*S*△*OAB=*·8*=*4*=*4,所以△*OAB*面积的取值范围为[64,*+∞*)*.*

4*.* (2016·厦门二检)在△*ABC*中,角*A*,*B*,*C*所对的边分别是*a*,*b*,*c.*若*A=*135°,*c=*1,sin*B*sin*C=*,则*b=* *.*

【答案】或

【解析】由正弦定理得*==*,所以*a=*,*b=.*根据余弦定理,得*=+*1*-*2cos135°,即1*=*2sin2*B+*2sin2*C+*2sin*B*sin*C*,所以sin2*B+*sin2*C==×=*sin*B*sin*C*,所以*-*·*+*1*=*0,解得*=*或,所以*b==*或*.*

5*.* (2016·淮北模拟)函数*f*(*x*)是定义在(0,*+∞*)上的单调函数,∀*x*∈(0,*+∞*),*f*(*f*(*x*)*-*ln*x*)*=*e*+*1,给出下列四个命题:*①f*(1)*=*e;*②*方程*f*(*x*)*+x=*0只有一个零点;*③*∀*x*1,*x*2∈(0,*+∞*),恒有*f*≥;*④*函数*h*(*x*)*=xf*(*x*)*-*e*x*的最小值为*-*(其中e为自然对数的底数)*.*其中正确的命题是*.*(填序号)

【答案】*①②③④*

【解析】令*t=f*(*x*)*-*ln*x*,则*f*(*t*)*=*e*+*1,由*f*(*x*)在(0,*+∞*)上的单调性知,*t*取值为唯一常数,由*f*(*x*)*=*ln*x+t*得*f*(*t*)*=*ln*t+t=*e*+*1*=*lne*+*e*.*又*y=*ln*x+x*在(0,*+∞*)上单调递增,则*t=*e,*f*(*x*)*=*ln*x+*e,易知:*①f*(1)*=*ln1*+*e*=*e;*②*结合*y=*ln*x+*e,*y=-x*的图象知,方程*f*(*x*)*+x=*0只有一个零点;*③f*(*x*)*=*ln*x+*e是上凸函数,恒有*f*≥;*④h*(*x*)*=xf*(*x*)*-*e*x=x*ln*x*,令*h'*(*x*)*=*ln *x+*1*=*0,得*x=*,易判断*h*(*x*)min*=-.*

温馨提示:趁热打铁,事半功倍*.*请老师布置同学们完成《配套检测与评估》中的练习第116页*.*