دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

بهینه‌سازی و کاربرد آن در شبکه‌های کامپیوتری
تمرین اول

پرهام الوانی

۱۹ آبان ۱۳۹۶

۱ مدل‌سازی

در ابتدا مساله را مدل‌سازی می‌کنیم، در این مدل‌سازی محدودیت‌های لینک‌ها و اولویت‌های کاربران را نیز مدنظر قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & \sum_{i=1}^{3} x_i \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 30 \\ & x_2 \leq 20 \\ & x_2 + x_3 \leq 30 \\ & x_3 \leq 25 \\ & x_2 \leq \log(x_1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

مدل حاصل را به فرم استاندارد بازنویسی می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & -\sum_{i=1}^{3} x_i \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 - 20 \leq 0 \\
& x_1 + x_2 - 30 \leq 0 \\
& x_2 - 20 \leq 0 \\
& x_2 + x_3 - 30 \leq 0 \\
& x_3 - 25 \leq 0 \\
& x_2 - \log(x_1) \leq 0
\end{aligned}
\tag{۲.۱}
$$

۲ حذف محدودیت‌ها

از آنجایی که مدل حاصل تنها محدودیت‌های نامساوی دارد از barrier استفاده می‌کنیم و مدل را بازنویسی می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & -\sum_{i=1}^{3} x_i \\
& -\mu \frac{1}{x_1 - 20} \\
& -\mu \frac{1}{x_1 + x_2 - 30} \\
& -\mu \frac{1}{x_2 - 20} \\
& -\mu \frac{1}{x_2 + x_3 - 30} \\
& -\mu \frac{1}{x_3 - 25} \\
& -\mu \frac{1}{x_2 - \log(x_1)}
\end{aligned}
\tag{۱.۲}
$$

۳ جستجوی خطی

الگوریتم جستجوی خطی مبتنی بر backtracking و steepest descent با زبان go پیاده‌سازی شد. در ادامه ورودی‌ها و خروجی برنامه را مرور می‌کنیم.

ورودی‌ها

x_0	$(11, 1, 1)$
α	1
β	0.5
c	0.5
ϵ	0.001
μ	1

نتایج اولین اجرا

تعداد مراحل اجرا	۲۸
جواب بهینه	-۴۱.۵۳

در صورتی که مقدار μ را کاهش دهیم جواب‌های بهتری بدست خواهد آمد که در ادامه تعدادی از آن‌ها را می‌بینیم.

ورودی‌ها

x_0	$(11, 1, 1)$
α	1
β	0.5
c	0.5
ϵ	0.001
μ	0.5

نتایج دومین اجرا

تعداد مراحل اجرا	۷۵
جواب بهینه	-۴۳.۴۹

ورودی‌ها

x_0	$(11, 1, 1)$
α	1
β	0.5
c	0.5
ϵ	0.001
μ	0.3

نتایج سومین اجرا

تعداد مراحل اجرا	۸۸
جواب بهینه	-۴۴.۵۳

۴ مشکلات

در ابتدا به دنبال تابعی بودم که بتوان به وسیله‌ی آن گرادیان را محاسبه کرد ولی نتوانستم آن را برای زبانی که می‌خواستم پیاده‌سازی را برای آن انجام دهم، پیدا کنم.بنابراین گرادیان را به صورت دستی محاسبه کردم و آن را در کد قرار دادم.

۵ حل مساله با ktt

ابتدا شرایط kkt را برای مساله می‌نویسیم، از آنجایی که مساله بهینه‌سازی محدب است پس شرایط ktt برای آن لازم و کافی است. بنابراین با حل ktt نقطه‌ی بهینه بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned}
&\exists\lambda_i\\
&\text{s.t.}\\
&\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\\
&+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_6\begin{pmatrix}-\frac{1}{x_1^*}\\1\\0\end{pmatrix}=0\\
&\text{feasibility conditions}\\
&x^*1-20\le 0\\
&x_1^*+x_2^*-30\le 0\\
&x_2^*-20\le 0\\
&x_2^*+x_3^*-30\le 0\\
&x_3^*-25\le 0\\
&x_2^*-\log(x_1^*)\le 0\\
&\text{dual feasibility}\\
&\lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0,\lambda_3\ge 0\\
&\lambda_4\ge 0,\lambda_5\ge 0,\lambda_6\ge 0\\
&\text{complementary slackness}\\
&\lambda_1(x_1^*-20)=0\\
&\lambda_2(x_1^*+x_2^*-30)=0\\
&\lambda_3(x_2^*-20)=0\\
&\lambda_4(x_2^*+x_3^*-30)=0\\
&\lambda_5(x_3^*-25)=0\\
&\lambda_6(x_2^*-\log(x_1^*))=0
\end{aligned} \tag{۱.۵}$$

برای حل فرض می‌کنیم که مقدار x_1^* و x_3^* به ترتیب برابر با 20 و 25 می‌باشند. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&x_1^* = 20, x_2 = \log(x_1^*) = 2.99, x_3^* = 25\\
&\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0\\
&\lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0\\
&\lambda_5 = 1, \lambda_6 = 0\\
&f(x^*) = -20 + -25 + -2.99 = -47.99
\end{aligned}
\tag{۲.۵}
$$

بدیهی است بردارهای گرادیان برای نامساوی‌هایی که فعال هستند مستقل خطی است. بنابراین نقطه‌ای که پیشتر معرفی شد یک نقطه‌ی regular است. با توجه به آنچه در حل شرایط kkt دیده شد نقطه‌ای که با روش جستجوی خطی نیز بدست آمده است در این شرایط صدق نمی‌کند.