



دانشکده مهندسی  
کامپیوتر و فناوری اطلاعات



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

---

# بهینه‌سازی و کاربرد آن در شبکه‌های کامپیوتری تمرین دوم

---

پرهام الوانی

۲۴ آذر ۱۳۹۶

۱ سوال اول

۱.۱ الف

این مجموعه یک مجموعه محدب نیست و برای نشان دادن این موضوع از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 x_2 &= \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix} \\
 \frac{1}{2} * x_1 + \frac{1}{2} * x_2 &= \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} \notin A
 \end{aligned}
 \tag{۱.۱}$$

## ۲.۱ ب

این مجموعه محدب است زیرا تابع:

$$\begin{cases} \lambda_1^3 & \lambda_1 \geq 2 \\ -\lambda_1 + 10 & \lambda_1 < 2 \end{cases}
 \tag{۲.۱}$$

یک تابع محدب بوده بنابراین مجموعه  $B$  که epi-graph این تابع می باشد یک مجموعه محدب خواهد بود. برای اثبات محدب بودن این تابع می توان از hessian آن استفاده کرده که در تمام نقاط دامنه یک ماتریس PD می باشد.

## ۲ سوال دوم

### ۱.۲ الف

یکی از راه ها برای بررسی محدب بودن توابع بررسی ماتریس hessian آنها است. اگر این ماتریس یک ماتریس نیمه مثبت معین یا مثبت معین باشد تابع محدب بوده و در غیر این صورت محدب نخواهد بود.

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

برای بررسی مثبت معین بودن ماتریس فوق از تعریف استفاده کرده و خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$= 2x_3ab + 2x_2ac + 2x_1bc$$

اگر رابطه‌ی فوق  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$  و  $a = 1, b = 1, c = -1$  حاصل منفی می‌گردد پس ماتریس hessian یک ماتریس مثبت معین نیست و تابع محدب نمی‌باشد.

## ۲.۲ ب

یکی از راه‌ها برای بررسی محدب بودن توابع بررسی ماتریس hessian آن‌ها است. اگر این ماتریس یک ماتریس نیمه مثبت معین یا مثبت معین باشد تابع محدب بوده و در غیر این صورت محدب نخواهد بود.

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2 x_3} & \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3} & \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3} & \frac{2}{x_1 x_2^3 x_3} & \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2} & \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^2} & \frac{2}{x_1 x_2 x_3^3} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

برای بررسی مثبت معین بودن ماتریس فوق از تعریف استفاده کرده و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2 x_3} & \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3} & \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3} & \frac{2}{x_1 x_2^3 x_3} & \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2} & \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^2} & \frac{2}{x_1 x_2 x_3^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left( \frac{a}{x_1} + \frac{c}{x_3} \right)^2 + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left( \frac{a}{x_1} + \frac{b}{x_2} \right)^2 + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left( \frac{b}{x_2} + \frac{c}{x_3} \right)^2
\end{aligned} \quad (۴.۲)$$

عبارت فوق به صورت مجموع تعدادی مربع کامل با ضرایب مثبت نوشته شده است. بنابراین این عبارت همواره یک مقدار مثبت خواهد داشت و تابع محدب خواهد بود.

## ۳.۲ ج

این تابع محدب نیست و برای اثبات این موضوع از مثال نقض زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, y_1 = 2^1 + 1^2 = 3 \\
x_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, y_2 = 1^2 + 2^1 = 3 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}, f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) = 1.5^{1.5} + 1.5^{1.5} = 3.67 \\
\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) &= 3 \\
f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) &= 1.5^{1.5} + 1.5^{1.5} = 3.67 > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = 3
\end{aligned} \quad (۵.۲)$$

### ۳ سوال سوم

الف ۱.۳

از حل مساله با ابزار cvx نتایج زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} x^* &= \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \lambda^* &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ب ۲.۳

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ &+ \lambda_1(3 - x_1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 8) + \lambda_3(x_1 - x_2) \\ l(\lambda) &= \min_x L(x, \lambda) \\ &= 1/4(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)^2 + 1/4(\lambda_3 + \lambda_2)^2 \\ &+ 1/2(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 6)\lambda_1 + 1/2(\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4)\lambda_2 \\ &+ 1/2(\lambda_1 + 2\lambda_3 - 4)\lambda_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

در نهایت مساله‌ی dual به شکل زیر درمی آید.

$$\begin{aligned}
\max_{\lambda} \quad & l(\lambda) \\
& = 1/4(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)^2 + 1/4(\lambda_3 + \lambda_2)^2 \\
& + 1/2(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 6)\lambda_1 + 1/2(\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4)\lambda_2 \\
& + 1/2(\lambda_1 + 2\lambda_3 - 4)\lambda_3 \\
\text{s.t.} \quad & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{۳.۳}$$

### ج ۳.۳

قضیه weak duality بیان می‌کند به ازای هر دو نقطه تابع dual مقدار کمتری از تابع primal دارد.

$$\begin{aligned}
x &= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
f(x) &= 9 + 1 = 10 \\
\lambda &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
l(\lambda) &= 0 + 0 + 1/2(-6)0 + 1/2(4)0 + 1/2(4)0 = 0 \\
l(\lambda) &< f(x)
\end{aligned} \tag{۴.۳}$$

### د ۴.۳

مسالهی dual به فرمت quadratic نبوده و به وسیلهی SDPT3 حل نمی‌شود ولی اگر متغیرهای قسمت اول را در آن جایگذاری کنیم حاصل آن با حاصل بهینهی مسالهی primal یکی می‌شود.

### ۵.۳ د

این قضیه برقرار است زیرا متغیرهای  $\lambda_1, \lambda_3$  متناظر با نامساوی‌هایی که active نیستند برابر با صفر است و مقدار  $\lambda_2$  در نامساوی دوم غیر صفر می‌باشد که یک نامساوی active می‌باشد.

### ۴ سوال چهارم

#### ۱.۴ الف

$x_i$  پهنای باند اختصاص یافته به تقاضای  $i$ ام  
 $f_i(u, v)$  میزان جریانی که از تقاضای  $i$ ام از لینک  $u, v$  می‌گذرد

$$\max_x \sum_{i=1}^3 \log(x_i)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^3 f_i(u, v) \leq c(u, v), \forall (u, v) \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$\sum_v f_1 u, v - \sum_v f_1 v, u = \begin{cases} 0 & \forall u \in 2, 3, 4, 6, 7 \\ x_1 & u = 1 \\ -x_1 & u = 5 \end{cases}$$

$$\sum_v f_2 u, v - \sum_v f_2 v, u = \begin{cases} 0 & \forall u \in 1, 3, 4, 5, 7 \\ x_2 & u = 2 \\ -x_2 & u = 6 \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\sum_v f_3 u, v - \sum_v f_3 v, u = \begin{cases} 0 & \forall u \in 1, 2, 3, 5, 7 \\ x_3 & u = 4 \\ -x_3 & u = 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$f_i(u, v) \geq 0, \forall (u, v) \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \forall i \in 1, 2, 3$$

در ادامه مساله را از طريق نرم افزار cvx حل کرده و متغیرهای dual برای نامساوی‌های مربوط به ظرفیت لینک‌ها را بدست می‌آوریم.

6.6666  $x_1$   
 6.6666  $x_2$   
 6.6668  $x_3$   
 5.6914  $z$

## ۲.۴ ب

لینک‌های زیر از تمام ظرفیت خود استفاده می‌کنند و افزایش ظرفیت آن‌ها بیشترین تاثیر بر روی کاهش ازدحام را خواهد داشت.

۵ ۴  
 ۷ ۵  
 ۶ ۲

## ۳.۴ ج

لینک از ۴ به ۵ با ظرفیت ۱۰ را در نظر می‌گیریم.

$\hat{z}$	$z$	$\alpha$
-	5.6914	1
4.2214	3.6713	0.02
4.3114	3.8428	0.08
5.6164	5.6154	0.95
5.6764	5.6763	0.99
5.7664	5.7654	1.05
5.8418	5.8377	1.1
7.1914	6.9078	2
26.6914	8.5208	15



#### ۴.۴ د

هر چقدر ضریب تغییر ظرفیت از ۱ دورتر می‌شود میزان تغییر بزرگتر شده و تخمینی که با استفاده از تحلیل حسایت محلی زده می‌شود خطای بیشتری پیدا می‌کند. در همه‌ی حالات نامساری تحلیل حساسیت کلی برقرار است ولی گپی که در آن وجود دارد تغییر می‌کند.