



دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

بهینه‌سازی و کاربرد آن در شبکه‌های کامپیوتری تمرین دوم

پرهام الوانی

۲۳ آذر ۱۳۹۶

۱ سوال اول

۱.۱ الف

این مجموعه یک مجموعه محدب نیست و برای نشان دادن این موضوع از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 x_2 &= \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix} \\
 \frac{1}{2} * x_1 + \frac{1}{2} * x_2 &= \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} \notin A
 \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

۲.۱ ب

این مجموعه محدب است زیرا تابع:

$$\begin{cases} \lambda_1^3 & \lambda_1 \geq 2 \\ -\lambda_1 + 10 & \lambda_1 < 2 \end{cases} \tag{۲.۱}$$

یک تابع محدب بوده بنابراین مجموعه B که epi-graph این تابع می باشد یک مجموعه محدب خواهد بود. برای اثبات محدب بودن این تابع می توان از hessian آن استفاده کرده که در تمام نقاط دامنه یک ماتریس PD می باشد.

۲ سوال دوم

۱.۲ الف

یکی از راه ها برای بررسی محدب بودن توابع بررسی ماتریس hessian آنها است. اگر این ماتریس یک ماتریس نیمه مثبت معین یا مثبت معین باشد تابع محدب بوده و در غیر این صورت محدب نخواهد بود.

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

برای بررسی مثبت معین بودن ماتریس فوق از تعریف استفاده کرده و خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$= 2x_3ab + 2x_2ac + 2x_1bc$$

اگر رابطه‌ی فوق $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ و $a = 1, b = 1, c = -1$ حاصل منفی می‌گردد پس ماتریس hessian یک ماتریس مثبت معین نیست و تابع محدب نمی‌باشد.

۲.۲ ب

یکی از راه‌ها برای بررسی محدب بودن توابع بررسی ماتریس hessian آن‌ها است. اگر این ماتریس یک ماتریس نیمه مثبت معین یا مثبت معین باشد تابع محدب بوده و در غیر این صورت محدب نخواهد بود.

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2 x_3} & \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3} & \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3} & \frac{2}{x_1 x_2^3 x_3} & \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2} & \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^2} & \frac{2}{x_1 x_2 x_3^3} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

برای بررسی مثبت معین بودن ماتریس فوق از تعریف استفاده کرده و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2 x_3} & \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3} & \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3} & \frac{2}{x_1 x_2^3 x_3} & \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2} & \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^2} & \frac{2}{x_1 x_2 x_3^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left(\frac{a}{x_1} + \frac{c}{x_3} \right)^2 + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left(\frac{a}{x_1} + \frac{b}{x_2} \right)^2 + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left(\frac{b}{x_2} + \frac{c}{x_3} \right)^2
\end{aligned} \quad (۴.۲)$$

عبارت فوق به صورت مجموع تعدادی مربع کامل با ضرایب مثبت نوشته شده است. بنابراین این عبارت همواره یک مقدار مثبت خواهد داشت و تابع محدب خواهد بود.

۳.۲ ج

این تابع محدب نیست و برای اثبات این موضوع از مثال نقض زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, y_1 = 2^1 + 1^2 = 3 \\
x_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, y_2 = 1^2 + 2^1 = 3 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}, f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) = 1.5^{1.5} + 1.5^{1.5} = 3.67 \\
\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) &= 3 \\
f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) &= 1.5^{1.5} + 1.5^{1.5} = 3.67 > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = 3
\end{aligned} \quad (۵.۲)$$

۳ سوال سوم

۱.۳ الف

۲.۳ ب

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ &\quad + \lambda_1(3 - x_1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 8) + \lambda_3(x_1 - x_2) \\ l(\lambda) &= \min_x L(x, \lambda) \\ &= 1/4(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)^2 + 1/4(\lambda_3 - \lambda_2)^2 \\ &\quad + 1/2(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 6)\lambda_1 + 1/2(\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4)\lambda_2 \\ &\quad + 1/2(\lambda_1 - 2\lambda_3 + 4)\lambda_3 \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

در نهایت مساله‌ی dual به شکل زیر درمیآید.

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & l(\lambda) \\ &= 1/4(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)^2 + 1/4(\lambda_3 - \lambda_2)^2 \\ &\quad + 1/2(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 6)\lambda_1 + 1/2(\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4)\lambda_2 \\ &\quad + 1/2(\lambda_1 - 2\lambda_3 + 4)\lambda_3 \\ \text{s.t.} \quad & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

۳.۳ ج

قضیه weak duality بیان می‌کند به ازای هر دو نقطه تابع dual مقدار کمتری از تابع primal دارد.

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = 9 + 1 = 10$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳.۳)$$

$$l(\lambda) = 0 + 0 + 1/2(-6)0 + 1/2(4)0 + 1/2(4)0 = 0$$

$$l(\lambda) < f(x)$$

۴ سوال چهارم

۱.۴ الف

x_i پهنای باند اختصاص یافته به تقاضای i ام
 $f_i(u, v)$ میزان جریانی که از تقاضای i ام از لینک u, v می‌گذرد

$$\max_x \sum_{i=1}^3 \log(x_i)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^3 f_i(u, v) \leq c(u, v), \forall (u, v) \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$\sum_v f_1 u, v - \sum_v f_1 v, u = \begin{cases} 0 & \forall u \in 2, 3, 4, 6, 7 \\ x_1 & u = 1 \\ -x_1 & u = 5 \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\sum_v f_2 u, v - \sum_v f_2 v, u = \begin{cases} 0 & \forall u \in 1, 3, 4, 5, 7 \\ x_2 & u = 2 \\ -x_2 & u = 6 \end{cases}$$

$$\sum_v f_3 u, v - \sum_v f_3 v, u = \begin{cases} 0 & \forall u \in 1, 2, 3, 5, 7 \\ x_3 & u = 4 \\ -x_3 & u = 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$f_i(u, v) \geq 0, \forall (u, v) \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \forall i \in 1, 2, 3$$

۲.۴ ب