دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

ارزیابی کارآیی سیستم‌های و شبکه‌های کامپیوتری
تمرین اول

پرهام الوانی

۲۷ فروردین ۱۳۹۷

۱ سوال اول

$$Prob\{X = n\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\eta^k e^{-\eta}}{k!} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \tag{۱.۱}$$

۲ سوال دوم

متغیر تصادفی زمانی که یک ماشین منتظر می‌ماند را به صورت گسسته مدل می‌کنیم و داریم:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{60+x}{90} & 0 < x < 30 \\ 1 & x > 30 \end{cases} \tag{۱.۲}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{60}{90} & x = 0 \\ \frac{1}{90} & 0 < x <= 30 \end{cases} \tag{۲.۲}$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{30} i * P(X = i) = \frac{1}{90} * \frac{30 * 31}{2} = \frac{31}{6} \tag{۳.۲}$$

۳ سوال سوم

$$\int_0^\infty P(X > x)dx = \int_0^\infty (1 - F(x))dx \tag{۱.۳}$$

از روش جز به جز در انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^\infty (1 - F(x))dx = x(1 - F(x)) - \int_0^\infty -xf(x)dx \tag{۲.۳}$$

سمت راست این رابطه از دو قسمت تشکیل شده است، قسمت انتگرالی برابر با امید ریاضی X می‌باشد و قسمت بدون انتگرال می‌بایست در دو نقطه صفر و بی‌نهایت محاسبه گردد که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1-F(x))dx &= x(1-F(x)) + E[x] \\ &= 0 + E[x] = E[x]\end{aligned} \tag{۳.۳}$$

۴ سوال چهارم

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}(x+y)dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3}(x+y)dy = \frac{1}{3}(2x+2)\end{aligned} \tag{۱.۴}$$

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}(x+y)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(x+y)dx = \frac{1}{3}(y+\frac{1}{2})\end{aligned} \tag{۲.۴}$$

$$\begin{aligned}E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}x(2x+2)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(2x^2+2x)dx = \frac{5}{9}\end{aligned} \tag{۳.۴}$$

$$\begin{aligned}E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}y(y+\frac{1}{2})dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3}(y^2+\frac{y}{2})dy = \frac{11}{9}\end{aligned} \tag{۴.۴}$$

$$\begin{aligned}E[XY] &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{3}xy(x+y)dydx \\ &= \int_0^1 \frac{2x^2}{3} + \frac{8x}{9}dy \\ &= \frac{6}{9}\end{aligned} \tag{۵.۴}$$

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{6}{9} - \frac{5}{9} * \frac{11}{9} = -\frac{1}{81} \tag{۶.۴}$$

۵ سوال پنجم

ابتدا پارامترهای توزیع را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{E[x]^2}{Var[x]} = \frac{12*12}{48} = 3 \\ \beta &= \frac{Var[X]}{E[x]} = \frac{48}{12} = 4 \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

$$\begin{gathered} Prob\{X > 12\} = 1 - Prob\{X \leq 12\} = \\ 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{(12/4)^i}{i!} e^{-12/4} = 1 - Poisson(\lambda = 3, X \leq 2) = 1 - 0.4232 \end{gathered} \tag{۲.۵}$$

$$\begin{gathered} Prob\{X \leq 6\} = \sum_{i=0}^{2} \frac{(6/4)^i}{i!} e^{-6/4} = Poisson(\lambda = 1.5, X \leq 2) = \\ 1/2(Poisson(\lambda = 1.4, X \leq 2) + Poisson(\lambda = 1.6, X \leq 2)) = 1/2(0.8335 + 0.7834) \end{gathered} \tag{۳.۵}$$

۶ سوال ششم

$$\begin{aligned} E[Y|X=x] &= \int_x^1 \frac{y}{1-x} dy = \frac{x+1}{2} \\ E[Y|X] &= \int_x^1 \frac{y}{1-x} dy = \frac{x+1}{2} \end{aligned} \tag{۱.۶}$$

مقدار $\mathrm{E[Y|X]}$ به مقدار x وابسته بوده و یک متغیر تصادفی خواهد بود.

۷ سوال هفتم

مکان شی بعد از n حرکت مجموع n متغیر تصادفی برنولی می‌باشد که در صورت موفقیت امتیاز یک و در صورت شکست امتیاز منفی یک دارند.

$$E[X_b] = 1 * P + -1 * (1 - P) = 1 + 2P$$
$$Var[X_b] = E[X_b^2] - E[X_b]^2 = 1 - (1 + 2P)^2 = -4P - 4P^2 = 4P(1 + P) \quad (۱.۷)$$

$$E[X_n] = n * (1 + 2P)$$
$$Var[X_n] = n * 4P(1 + P) \quad (۲.۷)$$

۸ سوال هشتم

$$z = \frac{168 - 168}{\sqrt{10}/10} = 0 \quad (۱.۸)$$

$$P(\bar{X} > 168) = P(z > 0) = 1 - P(z \leq 0) = 0.5 \quad (۲.۸)$$

۹ سوال نهم

$$E[X] = 1, Var[X] = 1$$
$$E[Y] = n * E[X] = 100 * 1 = 100 \quad (۱.۹)$$
$$Var[Y] = n * Var[X] = 100 * 1 = 100$$

$$ProbY < 90 = ProbY^* < \frac{90-100}{\sqrt{100}} = ProbY^* < -1 = Normal(0,1,X<-1) = 0.15866 \tag{۲.۹}$$

۱۰ سوال دهم

تابع درست نمایی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) &= f(x_1,p).f(x_2,p).\ldots.f(x_n,p) \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i} * (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned} \tag{۱.۱۰}$$

برای یافتن مقدار بیشینه تابع درست نمایی نسبت به پارامتر p از آن مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)}{\partial p} &= 0 \\ &= (\sum_{i=0}^{n} x_i) p^{\sum_{i=1}^n x_i - 1} * (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i} \\ &- (p)^{\sum_{i=1}^n x_i} * (\sum_{i=0}^{n} x_i)(1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - 1} = 0 \end{aligned} \tag{۲.۱۰}$$

در نهایت با حل رابطه بالا مقدار p برابر با 0.5 بدست می‌آید.

۱۱ سوال یازدهم

۱۲ سوال دوازدهم

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \qquad (۱.۱۲)$$