دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

ارزیابی کارآیی سیستم‌های و شبکه‌های کامپیوتری
تمرین اول

پرهام الوانی

۲۵ فروردین ۱۳۹۷

۱ سوال اول

$$Prob\{X = n\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\eta^k e^{-\eta}}{k!} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \tag{۱.۱}$$

۲ سوال دوم

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{60+x}{90} & 0 < x < 30 \\ 1 & x > 30 \end{cases} \tag{۱.۲}$$

۳ سوال سوم

$$\int_0^\infty P(X > x)dx = \int_0^\infty (1 - F(x))dx \tag{۱.۳}$$

از روش جز به جز در انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^\infty (1 - F(x))dx = x(1 - F(x)) - \int_0^\infty -xf(x)dx \tag{۲.۳}$$

سمت راست این رابطه از دو قسمت تشکیل شده است، قسمت انتگرالی برابر با امید ریاضی X می‌باشد و قسمت بدون انتگرال می‌بایست در دو نقطه صفر و بی‌نهایت محاسبه گردد که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - F(x))dx &= x(1 - F(x)) + E[x] \\ &= 0 + E[x] = E[x] \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

۴ سوال چهارم

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}(x+y)dy \\ &= \int_{0}^{2} \frac{1}{3}(x+y)dy = \frac{1}{3}(2x+2) \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}(x+y)dx \\ &= \int_{0}^{1} \frac{1}{3}(x+y)dx = \frac{1}{3}(y+\frac{1}{2}) \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}x(2x+2)dx \\ &= \int_{0}^{1} \frac{1}{3}(2x^2+2x)dx = \frac{5}{9} \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}y(y+\frac{1}{2})dy \\ &= \int_{0}^{2} \frac{1}{3}(y^2+\frac{y}{2})dy = \frac{11}{9} \end{aligned} \tag{۴.۴}$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{0}^{1}\int_{0}^{2} \frac{1}{3}xy(x+y)dydx \\ &= \int_{0}^{1} \frac{2x^2}{3} + \frac{8x}{9}dy \\ &= \frac{6}{9} \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{6}{9} - \frac{5}{9} * \frac{11}{9} = -\frac{1}{81} \tag{۶.۴}$$

۵ سوال پنجم

ابتدا پارامترهای توزیع را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{E[x]^2}{Var[x]} = \frac{12*12}{48} = 3 \\ \beta &= \frac{Var[X]}{E[x]} = \frac{48}{12} = 4 \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

$$\begin{gathered} Prob\{X > 12\} = 1 - Prob\{X \leq 12\} = \\ 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{(12/4)^i}{i!} e^{-12/4} = 1 - Poisson(\lambda = 3, X \leq 2) = 1 - 0.4232 \end{gathered} \tag{۲.۵}$$

$$\begin{gathered} Prob\{X \leq 6\} = \sum_{i=0}^{2} \frac{(6/4)^i}{i!} e^{-6/4} = Poisson(\lambda = 1.5, X \leq 2) = \\ 1/2(Poisson(\lambda = 1.4, X \leq 2) + Poisson(\lambda = 1.6, X \leq 2)) = 1/2(0.8335 + 0.7834) \end{gathered} \tag{۳.۵}$$

۶ سوال ششم

۷ سوال هفتم

مکان شی بعد از n حرکت مجموع n متغیر تصادفی برنولی می‌باشد که در صورت موفقیت امتیاز یک و در صورت شکست امتیاز منفی یک دارند.

$$\begin{aligned} E[X_b] &= 1*P + -1*(1-P) = 1 + 2P \\ Var[X_b] &= E[X_b^2] - E[X_b]^2 = 1 - (1+2P)^2 = -4P - 4P^2 = 4P(1+P) \end{aligned} \tag{۱.۷}$$

$$E[X_n] = n * (1 + 2P)$$
$$Var[X_n] = n * 4P(1 + P) \quad (۲.۷)$$

۸ سوال هشتم

$$z = \frac{168 - 168}{\sqrt{10}/10} = 0 \quad (۱.۸)$$

$$P(\bar{X} > 168) = P(z > 0) = 1 - P(z \leq 0) = 0.5 \quad (۲.۸)$$

۹ سوال نهم

$$E[X] = 1, Var[X] = 1$$
$$E[Y] = n * E[X] = 100 * 1 = 100 \quad (۱.۹)$$
$$Var[Y] = n * Var[X] = 100 * 1 = 100$$

$$ProbY < 90 = ProbY^* < \frac{90 - 100}{\sqrt{100}} = ProbY^* < -1 = Normal(0, 1, X < -1) = 0.15866 \quad (۲.۹)$$

۱۰ سوال دهم

تابع درست نمایی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) &= f(x_1, p).f(x_2, p).\ldots.f(x_n, p) \\
&= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} * (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}
\end{aligned} \tag{۱.۱۰}
$$

برای یافتن مقدار بیشینه تابع درست نمایی نسبت به پارامتر p از آن مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)}{\partial p} &= 0 \\
&= (\sum_{i=0}^{n} x_i) p^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} * (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \\
&- (p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} * (\sum_{i=0}^{n} x_i)(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} = 0
\end{aligned} \tag{۲.۱۰}
$$

در نهایت با حل رابطه بالا مقدار p برابر با 0.5 بدست می‌آید.

۱۱ سوال یازدهم

۱۲ سوال دوازدهم