



دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

ارزیابی کارایی سیستم‌های و شبکه‌های کامپیوتری تمرین دوم

پرهام الوانی

۴ تیر ۱۳۹۷

۱ سوال اول

$$\begin{aligned}
 f_{11}^{(1)} &= p_{11}^{(1)} = a \\
 f_{11}^{(2)} &= p_{11}^{(2)} - f_{11}^{(1)} p_{11}^{(1)} = a^2 - a * a = 0 \\
 &\dots \\
 f_{11}^{(n)} &= 0 \quad \forall n \geq 2
 \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

بنابراین state اول transient است.

$$\begin{aligned}
 f_{22}^{(1)} &= p_{22}^{(1)} = 0 \\
 f_{22}^{(2)} &= p_{22}^{(2)} - f_{22}^{(1)} p_{22}^{(1)} = p_{22}^{(2)} = 1 * 1 = 1 \\
 f_{22}^{(3)} &= p_{22}^{(3)} - f_{22}^{(1)} p_{22}^{(2)} - f_{22}^{(2)} p_{22}^{(1)} = p_{22}^{(3)} = 0 \\
 &\dots \\
 f_{22}^{(n)} &= 0 \quad \forall n \geq 3 \\
 \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} &= f_{22}^{(2)} = 1 \\
 \sum_{n=1}^{\infty} n f_{22}^{(n)} &= 2 * f_{22}^{(2)} = 2 < \infty
 \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

بنابراین state دوم positive recurrent است.

با همین روند state سوم نیز positive recurrent است.

با توجه به این موضوع که:

$$f_{21}^{(n)} = f_{31}^{(n)} = 0 \quad n \geq 1 \tag{۳.۱}$$

از وضعیت‌های ۲ و ۳ نمی‌توان به وضعیت ۱ رسید.

۲ سوال دوم

از آنجایی که:

$$\frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

و در نهایت توزیع حدی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} q/(p+q) & p/(p+q) \\ q/(p+q) & p/(p+q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q/(p+q) & p/(p+q) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

از آنجایی که توزیع حدی از وضعیت اولیه مستقل است، این مقادیر حالت پایه نیز می‌باشند.

۳ سوال سوم

اگر فرض کنیم وضعیت صفر تسک‌های کاربر و وضعیت یک تسک‌های سیستمی را نمایش می‌دهد، ماتریس تغییر حالت این زنجیره‌ی مارکف به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

برای برآورده شدن شرط دوم داریم:

$$1 - q = 0.01 \rightarrow q = 0.99 \quad (۲.۳)$$

با توجه به وضعیت پایدار این زنجیره‌ی مارکف برای برآورده شدن شرط اول داریم:

$$\begin{aligned} q &= 0.99 \\ p &= 0.11 \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

در ادامه میزان اسلات‌هایی که در یک وضعیت باقی می‌مانیم برابر است با:

$$(1 - p)^k \quad (۴.۳)$$

برای قسمت آخر سوال کافی است که در رابطه بالا احتمال زمانی که مقدار k برابر با ۵۰ یا بیشتر می‌باشد از یک دهم کمتر باشد.

۴ سوال چهارم

$$\begin{bmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} \quad (۱.۴)$$

اگر $0 < p < 1$ و $0 < \alpha < 1$ در این صورت تمامی وضعیت‌ها از یکدیگر قابل دسترس می‌باشند و زنجیره کاهش‌پذیر نخواهد بود.

با فرض اینکه مقدار α و p برابر با 0.5 باشند بردار حدی uniform می‌گردد.