



دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

ارزیابی کارآیی سیستم‌های و شبکه‌های کامپیوتری تمرین اول

پرهام الوانی

۲۵ فروردین ۱۳۹۷

۱ سوال اول

$$Prob\{X = n\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\eta^k e^{-\eta}}{k!} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \quad (1.1)$$

۲ سوال دوم

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{60+x}{90} & 0 < x < 30 \\ 1 & x > 30 \end{cases} \quad (1.2)$$

۳ سوال سوم

$$\int_0^{\infty} P(X > x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx \quad (1.3)$$

از روش جز به جز در انتگرال گیری استفاده می کنیم:

$$\int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx = x(1 - F(x)) - \int_0^{\infty} -xf(x) dx \quad (2.3)$$

سمت راست این رابطه از دو قسمت تشکیل شده است، قسمت انتگرالی برابر با امید ریاضی X می باشد و قسمت بدون انتگرال می بایست در دو نقطه صفر و بی نهایت محاسبه گردد که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx &= x(1 - F(x)) + E[x] \\ &= 0 + E[x] = E[x] \end{aligned} \quad (3.3)$$

۴ سوال چہارم

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}(x+y)dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3}(x+y)dy = \frac{1}{3}(2x+2) \end{aligned} \quad (1.۴)$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}(x+y)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(x+y)dx = \frac{1}{3}(y + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (۲.۴)$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}x(2x+2)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(2x^2+2x)dx = \frac{5}{9} \end{aligned} \quad (۳.۴)$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}y(y + \frac{1}{2})dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3}(y^2 + \frac{y}{2})dy = \frac{11}{9} \end{aligned} \quad (۴.۴)$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{3}xy(x+y)dydx \\ &= \int_0^1 \frac{2x^2}{3} + \frac{8x}{9}dy \\ &= \frac{6}{9} \end{aligned} \quad (۵.۴)$$

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{6}{9} - \frac{5}{9} * \frac{11}{9} = -\frac{1}{81} \quad (۶.۴)$$

۵ سوال پنجم

ابتدا پارامترهای توزیع را بدست می‌آوریم.

$$\alpha = \frac{E[x]^2}{Var[x]} = \frac{12 * 12}{48} = 3$$

$$\beta = \frac{Var[X]}{E[x]} = \frac{48}{12} = 4 \quad (1.5)$$

$$Prob\{X > 12\} = 1 - Prob\{X \leq 12\} =$$

$$1 - \sum_{i=0}^2 \frac{(12/4)^i}{i!} e^{-12/4} = 1 - Poisson(\lambda = 3, X \leq 2) = 1 - 0.4232 \quad (2.5)$$

$$Prob\{X \leq 6\} = \sum_{i=0}^2 \frac{(6/4)^i}{i!} e^{-6/4} = Poisson(\lambda = 1.5, X \leq 2) =$$

$$1/2(Poisson(\lambda = 1.4, X \leq 2) + Poisson(\lambda = 1.6, X \leq 2)) = 1/2(0.8335 + 0.7834) \quad (3.5)$$

۶ سوال ششم

$$E[Y|X = x] = \int_x^1 \frac{y}{1-x} dy = \frac{x+1}{2}$$

$$E[Y|X] = \int_x^1 \frac{y}{1-x} dy = \frac{x+1}{2} \quad (1.6)$$

مقدار $E[Y|X]$ به مقدار x وابسته بوده و یک متغیر تصادفی خواهد بود.

۷ سوال هفتم

مکان شی بعد از n حرکت مجموع n متغیر تصادفی برنولی می‌باشد که در صورت موفقیت امتیاز یک و در صورت شکست امتیاز منفی یک دارند.

$$E[X_b] = 1 * P + -1 * (1 - P) = 1 + 2P \quad (1.7)$$

$$Var[X_b] = E[X_b^2] - E[X_b]^2 = 1 - (1 + 2P)^2 = -4P - 4P^2 = 4P(1 + P)$$

$$E[X_n] = n * (1 + 2P) \quad (2.7)$$

$$Var[X_n] = n * 4P(1 + P)$$

۸ سوال هشتم

$$z = \frac{168 - 168}{\sqrt{10}/10} = 0 \quad (1.8)$$

$$P(\bar{X} > 168) = P(z > 0) = 1 - P(z \leq 0) = 0.5 \quad (2.8)$$

۹ سوال نهم

$$E[X] = 1, Var[X] = 1$$

$$E[Y] = n * E[X] = 100 * 1 = 100 \quad (1.9)$$

$$Var[Y] = n * Var[X] = 100 * 1 = 100$$

$$ProbY < 90 = ProbY^* < \frac{90 - 100}{\sqrt{100}} = ProbY^* < -1 = Normal(0, 1, X < -1) = 0.15866$$

(۲.۹)

۱۰ سوال دهم

تابع درست نمایی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, p) &= f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \dots \cdot f(x_n, p) \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i} * (1 - p)^{\sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned} \quad (1.10)$$

برای یافتن مقدار بیشینه تابع درست نمایی نسبت به پارامتر p از آن مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, p)}{\partial p} &= 0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) p^{\sum_{i=1}^n x_i - 1} * (1 - p)^{\sum_{i=1}^n x_i} \\ &\quad - (p)^{\sum_{i=1}^n x_i} * \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) (1 - p)^{\sum_{i=1}^n x_i - 1} = 0 \end{aligned} \quad (۲.۱۰)$$

در نهایت با حل رابطه بالا مقدار p برابر با 0.5 بدست می‌آید.

۱۱ سوال یازدهم

۱۲ سوال دوازدهم

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \quad (۱.۱۲)$$