思考题 9-1♡

1. 是。因为 $\mathbf{PAP}^T=\mathbf{B}$ 可写成 $(\mathbf{P}^T)^T\mathbf{AP}^T=\mathbf{B}$，记 $\mathbf{M}=\mathbf{P}^T$，则 $\mathbf{M}^T\mathbf{AM}=\mathbf{B}$.

2. 是。设 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}=\mathbf{B},\mathbf{Q}^T\mathbf{BQ}=\mathbf{C}$，则 $\mathbf{Q}^T\mathbf{P}^T\mathbf{APQ}=\mathbf{C},(\mathbf{PQ})^T\mathbf{A}(\mathbf{PQ})=\mathbf{C}$.

■ 3.两个实对称矩阵合同的充要条件是它们同阶且正、负惯性指数相同。

■ 4.参考第 3 题

5.**证:**设实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则 $\mathbf{A}$ 有 p 个正特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ 和 q 个负特征值 $\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}$。于是，存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q},0,\cdots,0),$$

即
$$\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,-\left|\lambda_{p+1}\right|,\cdots,-\left|\lambda_{p+q}\right|,0,\cdots,0).$$

取 $\mathbf{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{-\frac{1}{2}},\cdots,\lambda_p^{-\frac{1}{2}},\left|\lambda_{p+1}\right|^{-\frac{1}{2}},\cdots,\left|\lambda_{p+q}\right|^{-\frac{1}{2}},1\cdots,1)$，则

$$\mathbf{DQ}^T\mathbf{AQ}D=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0),$$

即
$$(\mathbf{QD})^T\mathbf{A}(\mathbf{QD})=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0).$$

记 $\mathbf{P}=\mathbf{QD}$，则 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)$.

习题 9-1

1.**解**：（1）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}$，该二次型的秩为 3.

■ (2) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$，该二次型的秩为 3.

■ 2.（1）所求正交变换为 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy},\mathbf{Q}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&2\\-1&2&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$，标准形为 $g(\mathbf{y})=3y_1^2-3y_2^2$，正惯性指数为 1，负惯性指数为 1.

■ (2) 所求正交变换为 $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{y},\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, 标准形为

$g(\mathbf{y})=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2$，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1.

■ 3.（1） $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2)^2-2(x_2+x_3)^2+5x_3^2$，

标准形为 $g(\mathbf{y})=y_1^2-2y_2^2+5y_3^2$，

所作变换为 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y},\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

■ (2)**解：**由于该二次型中不含平方项，但含有混合项 x_1x_2,故令

□ $$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases},$$

可得含有平方项的二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2+2y_2y_3$.

对含有 y_2 的项配方，得 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-(y_2-y_3)^2+y_3^2$.

■ 令 $\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=y_2-y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$，则把所给二次型化为标准形

$h(z_1,z_2,z_3)=z_1^2-z_2^2+z_3^2$.

■ 所做的可逆变换为 $\begin{cases} x_1=z_1+z_2+z_3 \\ x_2=z_1-z_2-z_3 \\ x_3=z_3 \end{cases}$，其系数矩阵为 □

$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

■ 4.规范形为 $h(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，所做的可逆变换为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

5. $a = 4, b = \pm 1.$

6. $a = 1, b = 0.$

■ 7.证：存在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$ 将该二次型化为标准形

$$g(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \text{即} \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

因为 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$，所以

$$\lambda_1(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \le g(\mathbf{y}) \le \lambda_n(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

由 $\mathbf{x}$ 为单位列向量及正交变换保持长度不变可知，$\mathbf{y}$ 也是单位向量，因而 $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1$，所以 $\lambda_1 \le \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} \le \lambda_n$.

■ 8.证：因为对于任何 n 元列向量 $\mathbf{x}$，都有 $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T\mathbf{Bx}$，所以 $\mathbf{e}_i^T\mathbf{Ae}_i = \mathbf{e}_i^T\mathbf{Be}_i$，即 $a_{ii} = b_{ii}.$

同样也有 $(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)^T\mathbf{A}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)^T\mathbf{B}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)$，即 $a_{ii} + a_{jj} + a_{ij} + a_{ji} = b_{ii} + b_{jj} + b_{ij} + b_{ji}$.

因为 $a_{ii} = b_{ii}$, 所以 $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$.

又因为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是实对称矩阵，$a_{ij} = a_{ji}, b_{ij} = b_{ji}$, 所以 $a_{ij} = b_{ij}, \mathbf{A} = \mathbf{B}.$

思考题 9-2 ♡

1. n 元正定二次型的规范形为 $y_1^2 + \cdots + y_n^2$.

■ 2. 不一定。与它的阶数的奇偶性有关。

3.负定矩阵的对角元一定小于零。■

4.不一定。与 k 的奇偶性有关。

■ 5.当 $k > -\lambda_1$ 时，$\mathbf{A}$ 为正定矩阵。当 $k < -\lambda_n$ 时，$\mathbf{A}$ 为负定矩阵。

■ 6. 正确。因为 $\mathbf{C}$ 的特征值为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的特征值之并。

■ 7.等价变换只保持秩不变；相似变换保持行列式、秩、特征值、特征值的符号不变；相合变换保持秩、特征值的符号及正定性不变；正交相似变换保持行列式、秩、特征值、特征值的符号及正定性都不变.

习题 9-2♡

■ 1.（1）为正定矩阵；　　（2）为负定矩阵.

■ 2.（1）是正定二次型;■♡ (2) 是正定二次型;♡■　(3) 是正定二次型.■

3.（1）$0<k<2$；■　（2）$1<k<2$；■　（3）$1<k<2$；

■ （4）$k<-4$；■　（5）$k<-2$.

■ 4.证：设 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$.

因为 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，所以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于 0，从而 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$ 全大于 1.

$$|\mathbf{A}+\mathbf{E}|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

■ 5. 证：设 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.由 $\mathbf{A}$ 为负定矩阵可知，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全小于 0.

$|\mathbf{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，$\mathbf{A}^*$ 的特征值为 $|\mathbf{A}|\lambda_1^{-1},|\mathbf{A}|\lambda_2^{-1},\cdots,|\mathbf{A}|\lambda_n^{-1}$.

当 n 为奇数时，$|\mathbf{A}|<0$, $\mathbf{A}^*$ 的特征值全大于 0，$\mathbf{A}^*$ 为正定矩阵.

当 n 为偶数时，$|\mathbf{A}|>0$, $\mathbf{A}^*$ 的特征值全小于 0，$\mathbf{A}^*$ 为负定矩阵.

6. 证：对任意 k 元非零实向量 $\mathbf{x}$，由 $r(\mathbf{P})=k$ 可得，$\mathbf{Px}\neq\mathbf{0}$.由 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，得 $(\mathbf{Px})^T\mathbf{A}(\mathbf{Px})>0$.于是，有

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Bx}=\mathbf{x}^T\mathbf{P}^T\mathbf{APx}=(\mathbf{Px})^T\mathbf{A}(\mathbf{Px})>0,$$

故 $\mathbf{B}$ 是正定矩阵.

■ 7.证：$(\Rightarrow)$ 由 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 为正定矩阵，得 $|\mathbf{A}^T\mathbf{A}|>0, r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=n$. 因为 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$，所以 $r(\mathbf{A})=n$.

$(\Leftarrow)$ 显然 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 是对称矩阵。

对任意 n 元非零实向量 $\mathbf{x}$，由 $r(\mathbf{A})=n$ 可得，$\mathbf{Ax}\neq\mathbf{0}$.于是，有

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=(\mathbf{Ax})^T(\mathbf{Ax})=\|\mathbf{Ax}\|^2>0,$$

故 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 是正定矩阵.

■ 8.证：由 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，得 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

由$\mathbf{A}$是正定矩阵可知，$\mathbf{A}$也是对称矩阵，$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$. 于是，$\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$.

设λ为$\mathbf{A}$的特征值，则$\lambda^2=\lambda, \lambda=1$或$0$.

由于$\mathbf{A}$是正定矩阵，而正定矩阵的特征值全大于0，所以$\lambda=1$, $\mathbf{A}$的特征值全为1.
由$\mathbf{A}$是对称矩阵可知，存在正交矩阵$\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}=\mathbf{E},$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{E}.$$

提高题 9-2

1.证：由$\mathbf{B}$是正定矩阵及定理 9-3 的(4)可知，存在可逆矩阵$\mathbf{P}_1$，使得$\mathbf{P}_1^T\mathbf{B}\mathbf{P}_1=\mathbf{E}$.

由于相合变换保持对称性，所以$\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1$仍为对称矩阵。于是，存在正交矩阵$\mathbf{Q}$，

使得$\mathbf{Q}^T(\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1)\mathbf{Q}$为对角矩阵（注：$\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^T$）.

这时，$\mathbf{Q}^T(\mathbf{P}_1^T\mathbf{B}\mathbf{P}_1)\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^T\mathbf{E}\mathbf{Q}=\mathbf{E}$.

取$\mathbf{P}=\mathbf{P}_1\mathbf{Q}$即可。

■ 2.证：($\Rightarrow$) 由$\mathbf{AB}$为正定矩阵可知，$\mathbf{AB}$也是对称矩阵,$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{AB}$, 即$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{AB}$，也即$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$（注：由$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$都是正定矩阵可知，它们也是对称矩阵）.

($\Leftarrow$) 由$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$可知，$\mathbf{AB}$为对称矩阵

由$\mathbf{A}$是正定矩阵及定理 9-3 的(5)可知，存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{A}=\mathbf{P}^T\mathbf{P}$. 于是，有

$$(\mathbf{P}^T)^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{P}^T=(\mathbf{P}^T)^{-1}(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{B})\mathbf{P}^T=\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^T.$$

可见，$\mathbf{AB}$与$\mathbf{PBP}^T$相似，特征值相同。

由$\mathbf{B}$是正定矩阵及相合变换保持正定性可知，$\mathbf{PBP}^T$也是正定矩阵，特征值全大于 0，从而$\mathbf{AB}$的特征值也全大于 0，所以$\mathbf{AB}$为正定矩阵。

思考题 9-3

1．可以。球面的母线是它上面最大的圆，旋转轴为最大圆的直径。
圆柱面的母线是它上面平行于对称轴的直线，旋转轴就是它的对称轴.

2．圆柱面。

3．（1）是平面 $x=3$ 上的圆。　　（2）是平面 $y=1$ 上的椭圆。

（3）是平面 $z=-4$ 上的双曲线。　　（4）是平面 $y=2$ 上的双曲线。

习题 9-3

1．球心为 $(0,1,0)$，半径为 2.

2．图略.

（1）表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面。

（2）表示母线平行于 x 轴的双曲柱面。

（3）表示母线平行于 z 轴的抛物柱面。

（4）表示母线平行于 y 轴的双曲柱面。

3（1）$y^2+z^2=4x$；　　（2）$\dfrac{x^2+z^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

4．图略。

（1）旋转轴为 y 轴，母线为 $\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2y^2+z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$

（2）旋转轴为 x 轴，母线为 $\begin{cases} z^2=x \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y^2=x \\ z=0 \end{cases}$

（3）旋转轴为 z 轴，母线为 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1 \\ y=0 \end{cases}$

5．（1）$x^2+y^2=1$ 在平面直角坐标系下表示圆，在空间直角坐标系中表示圆柱面。

（2）$z=y^2$ 在平面直角坐标系下表示抛物线，在空间直角坐标系中表示抛物柱面。

6．母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面的方程为 $3y^2-z^2=16$.

母线平行于 y 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面的方程为 $3x^2+2z^2=16$.

7．球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 Oxy 面上的投影的方程为

$$\begin{cases} 2(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{17}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

思考题 9-4

1. 提示：看系数同号的平方项何时系数能相同。

2．椭球面的二次项部分所对应的实对称阵的特征值同号，单叶双曲面的二次项部分所对应的实对称阵的特征值都不为 0 且异号，椭圆抛物面的二次项部分所对应的实对称阵的特征值有一个为 0 且同号。

3．不能。因为二次锥面、单叶双曲面和双叶双曲面的二次项部分所对应的实对称阵的特征值的特点相同，都是异号的。

习题 9-4

1．略。

2．略。

3．（1）$x_2^2+4y_2^2-4z_2^2=1$，为单叶双曲面；

（2）$5x_2^2-y_2^2=1$，为双曲柱面；

（3）$2x_2^2+y_2^2-z_2^2=0$，为二次锥面；

（4）$4x_2^2-4y_2^2-8z_2^2=5$，为双叶双曲面；

（5）$x_1^2-y_1^2=1$，为双曲柱面；

（6）$x_1^2+y_1^2-2z_1^2=1$，为旋转单叶双曲面

（7）$2x_1^2+4y_1^2+4z_1^2=1$，为旋转椭球面.