

Интегральное уравнение первого рода типа Фредгольма.

Выполнила: Ворончихина Елизавета, группа 24151.

Постановка задачи:

Требуется решить интегральное уравнение первого рода типа Фредгольма:

$$\int_0^3 K(t, s) q(s) ds = f(t), \quad t \in (0, 1)$$

По заданным функциям $K(t, s) = e^{\frac{ts}{2}}$ и $f(t)$ необходимо найти $q(s)$,

$$q_{exact}(s) = \begin{cases} \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2, & s \in [0, 2]; \\ \left(\frac{s}{2} - 1\right)^3, & s \in (2, 3]; \end{cases}$$

Решение.

Обозначим: $S = 3, T = 1$.

Дискретизируем область $[0, S] \times [0, T]$, построив на каждом интервале равномерную сетку для узлов $N = N_t = N_S = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096$.

Для вычисления интеграла используем квадратурную формулу Симпсона.

Для каждого t_i :

$$\sum_{j=0}^{N_s-1} K(t_i, s_j) q(s_j) w_j = f(t_i), i = 0, \dots, N_t - 1$$

Обозначим:

- $A_{ij} = K(t_i, s_j) w_j$
- $q_j = q(s_j)$
- $f_i = f(t_i)$

Получаем СЛАУ: $Aq = f$

1. Сходимость вычисленного решения к точному решению при увеличении числа узлов сетки. Изучение поведения сингулярных чисел СЛАУ, аппроксимирующей уравнение для разного количества узлов сетки.

Для решения СЛАУ использовался метод SVD к матрице $A = U\Sigma V^T$. Столбцы матрицы U являются собственными векторами матрицы AA^T . Столбцы матрицы V являются собственными векторами матрицы A^TA , а квадраты сингулярных чисел являются ее собственными числами.

Таблица 1. Зависимость относительной ошибки для полученного решения и числа обусловленности от числа узлов сетки. SVD

N	Relative error	Cond(A)
8	1.10e-05	2.30e+11
16	4.78e+00	5.00e+18
32	9.26e-01	1.66e+16
64	1.96e+00	2.70e+16
128	3.60e+00	4.41e+16
256	4.58e+00	4.30e+16
512	7.83e+00	4.08e+16
1024	4.83e+00	3.20e+16
2048	5.97e+00	4.18e+16
4096	5.46e+00	4.29e+16

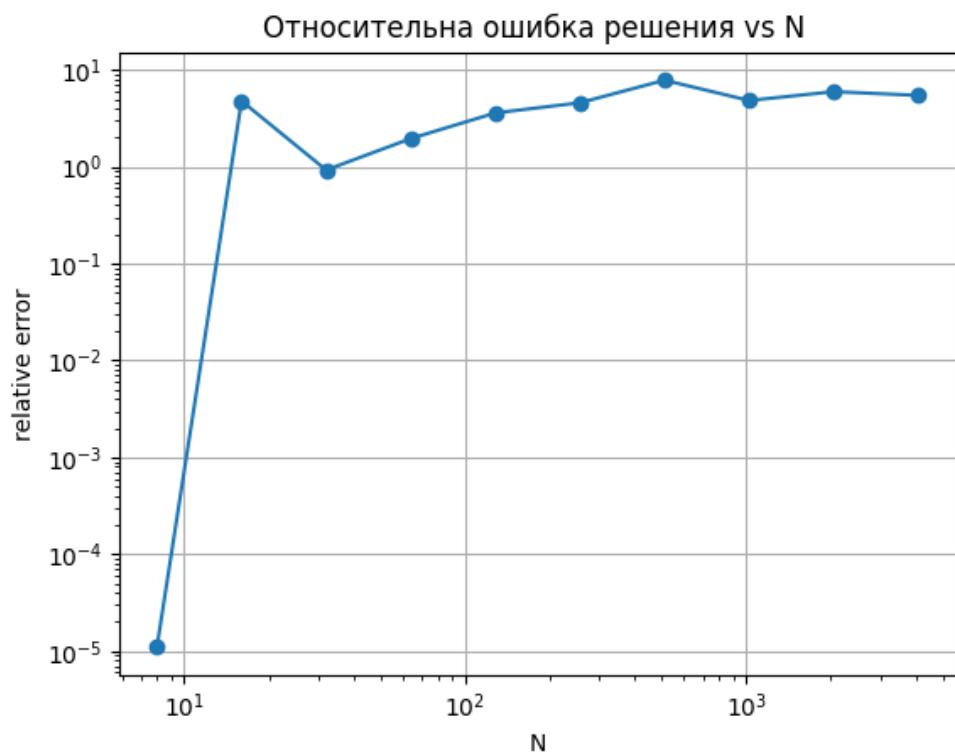


Рисунок 2. Зависимость относительной ошибки от числа узлов сетки SVD

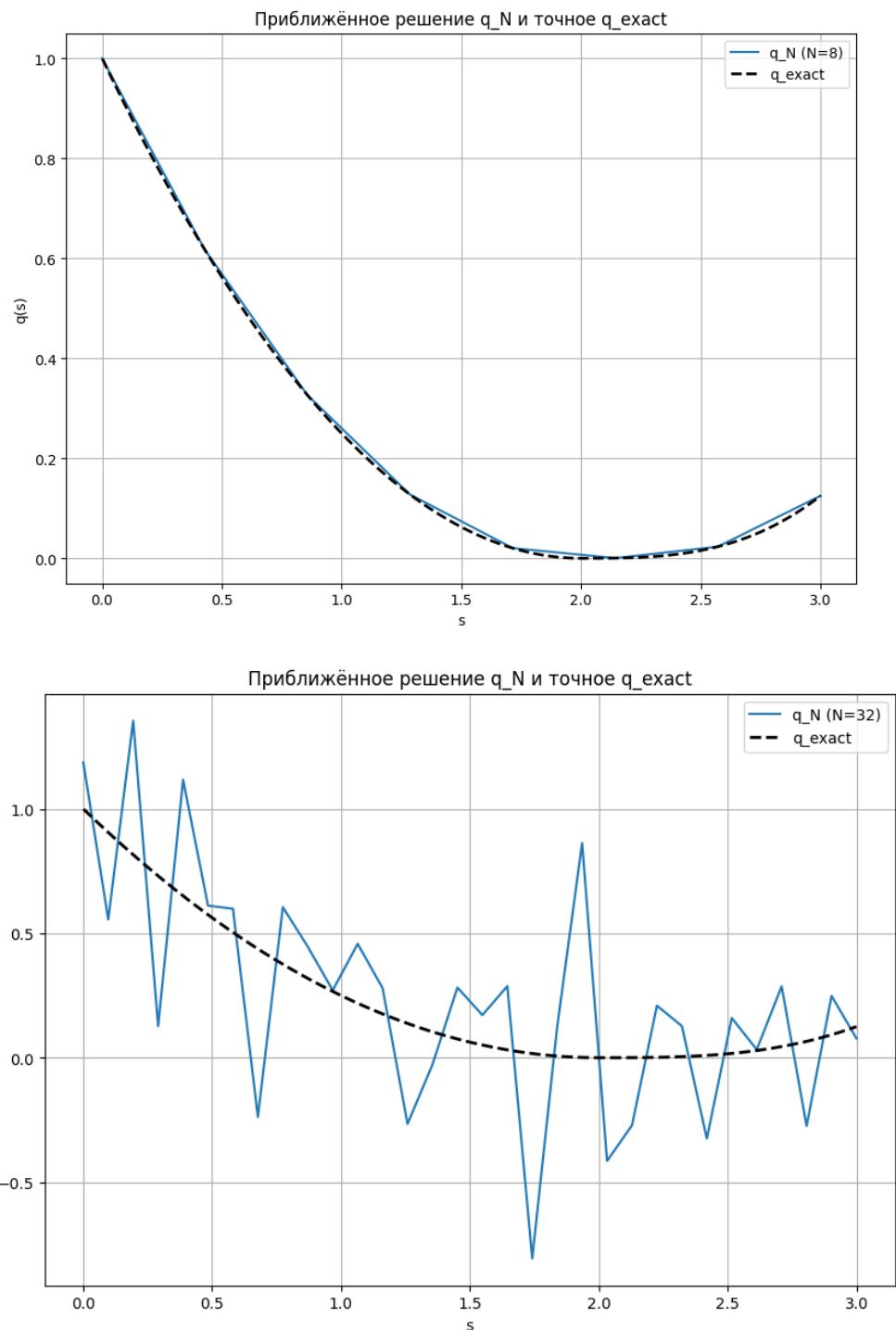


Рисунок 2. Приближённое решение и точное решение для $N = 8, 32$

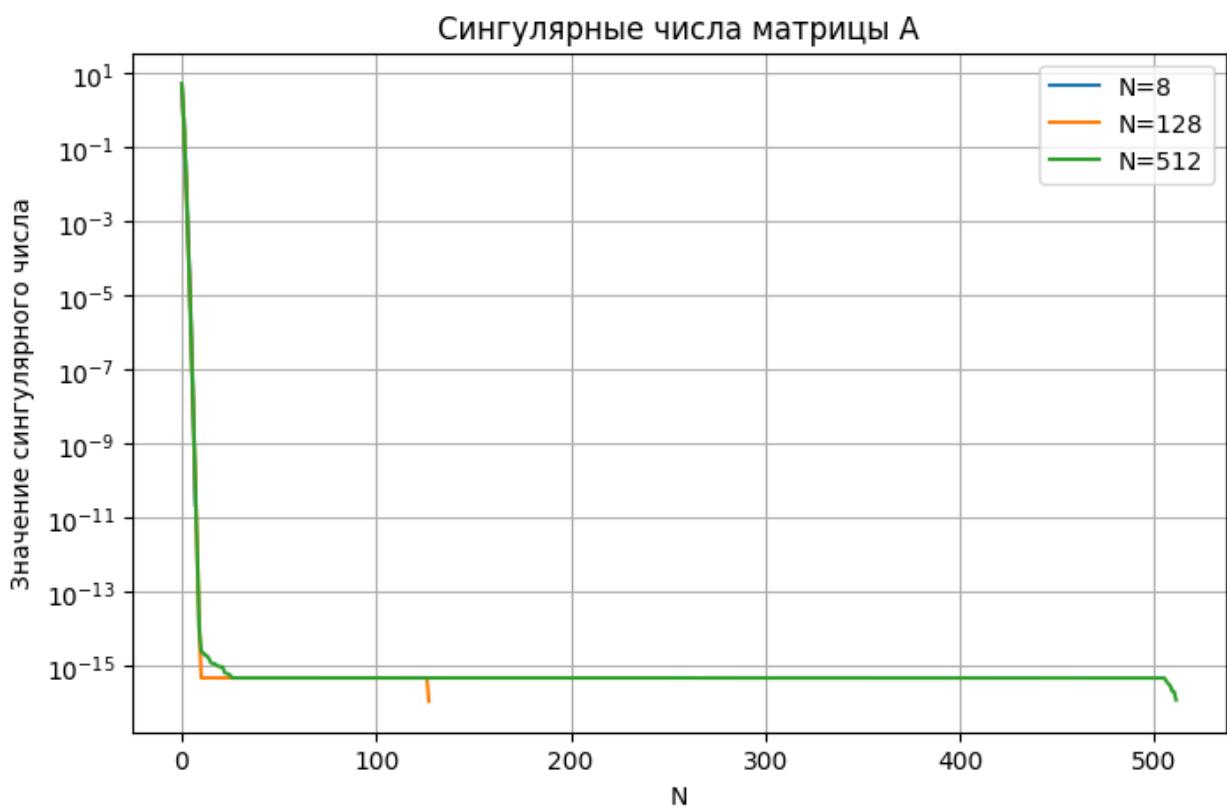


Рисунок 3. Сингулярные числа матрицы для $N = 8, 128, 512$

Таблица 2. Зависимость относительной ошибки для полученного решения и числа обусловленности от числа узлов сетки. TSVD. Граница отсечения 10^{-15}

N	Relative error	Cond(A)
8	1.10e-05	2.30e+11
16	3.07e-02	5.00e+18
32	9.99e-02	1.66e+16
64	1.26e-01	2.70e+16
128	1.10e-01	2.76e+16
256	8.36e-02	4.30e+16
512	6.05e-02	4.08e+16
1024	6.12e-02	3.20e+16
2048	3.03e-02	4.18e+16
4096	1.64e-01	4.29e+16

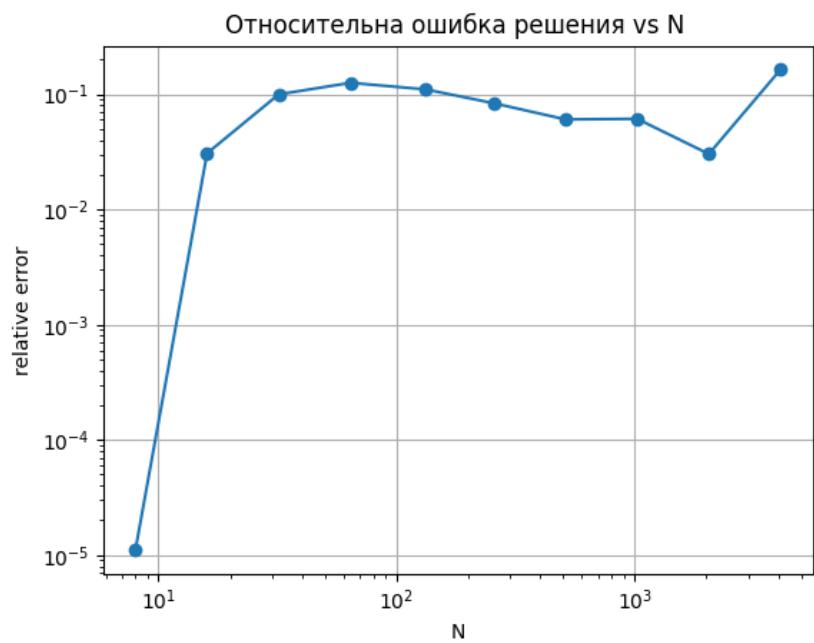
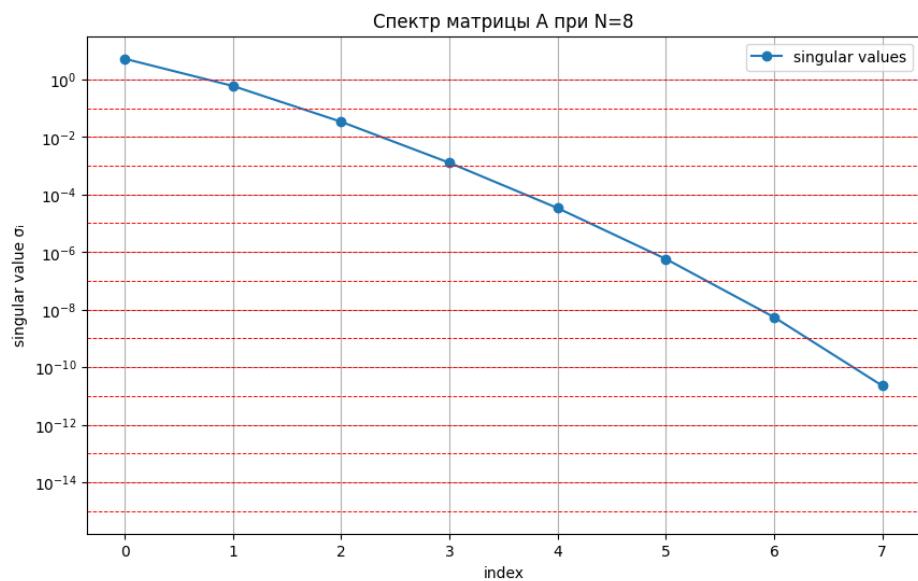


Рисунок 4. Зависимость относительной ошибки от числа узлов сетки TSVD

Спектр матрицы A

Сингулярные числа матрицы A для $N = 8$:

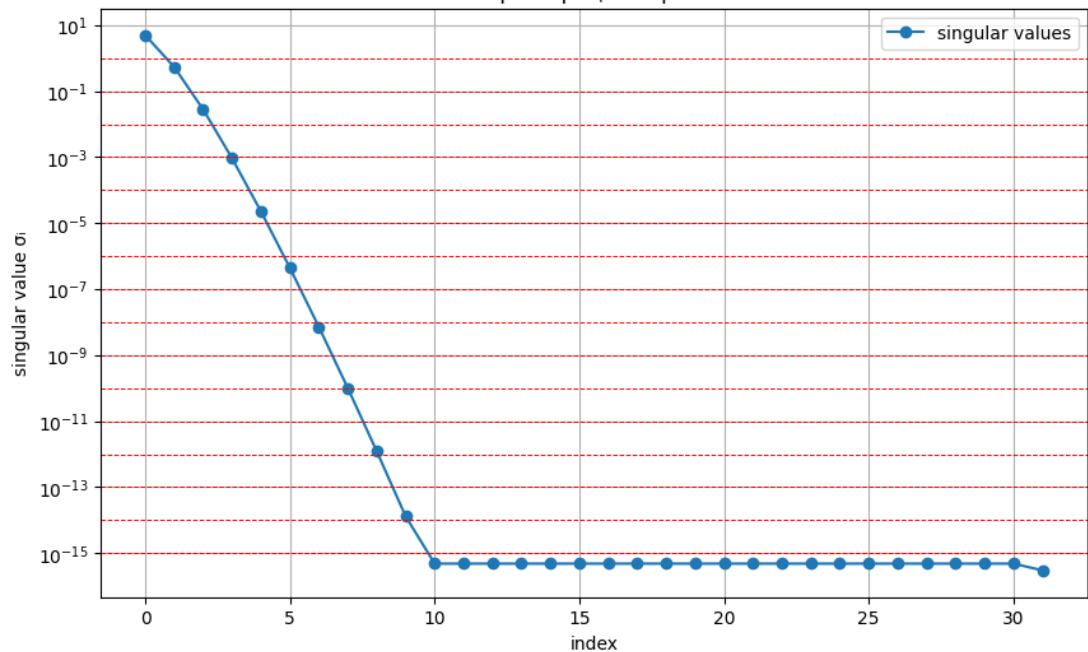
5.165e+00
5.855e-01
3.335e-02
1.253e-03
3.343e-05
5.699e-07
5.402e-09
2.247e-11



Сингулярные числа матрицы A для $N = 32$:

5.000e+00	1.216e-12	4.802e-16	4.802e-16
5.435e-01	1.295e-14	4.802e-16	4.802e-16
2.826e-02	4.802e-16	4.802e-16	4.802e-16
9.279e-04	4.802e-16	4.802e-16	4.802e-16
2.261e-05	4.802e-16	4.802e-16	4.802e-16
4.402e-07	4.802e-16	4.802e-16	4.802e-16
7.164e-09	4.802e-16	4.802e-16	4.802e-16
1.001e-10	4.802e-16	4.802e-16	4.802e-16

Спектр матрицы A при $N=32$



2. Исследовать зависимость численного решения при добавлении шума в данные (рассмотреть уровни шума 0.5, 1, 3 процента) (при фиксированном количестве узлов сетки)

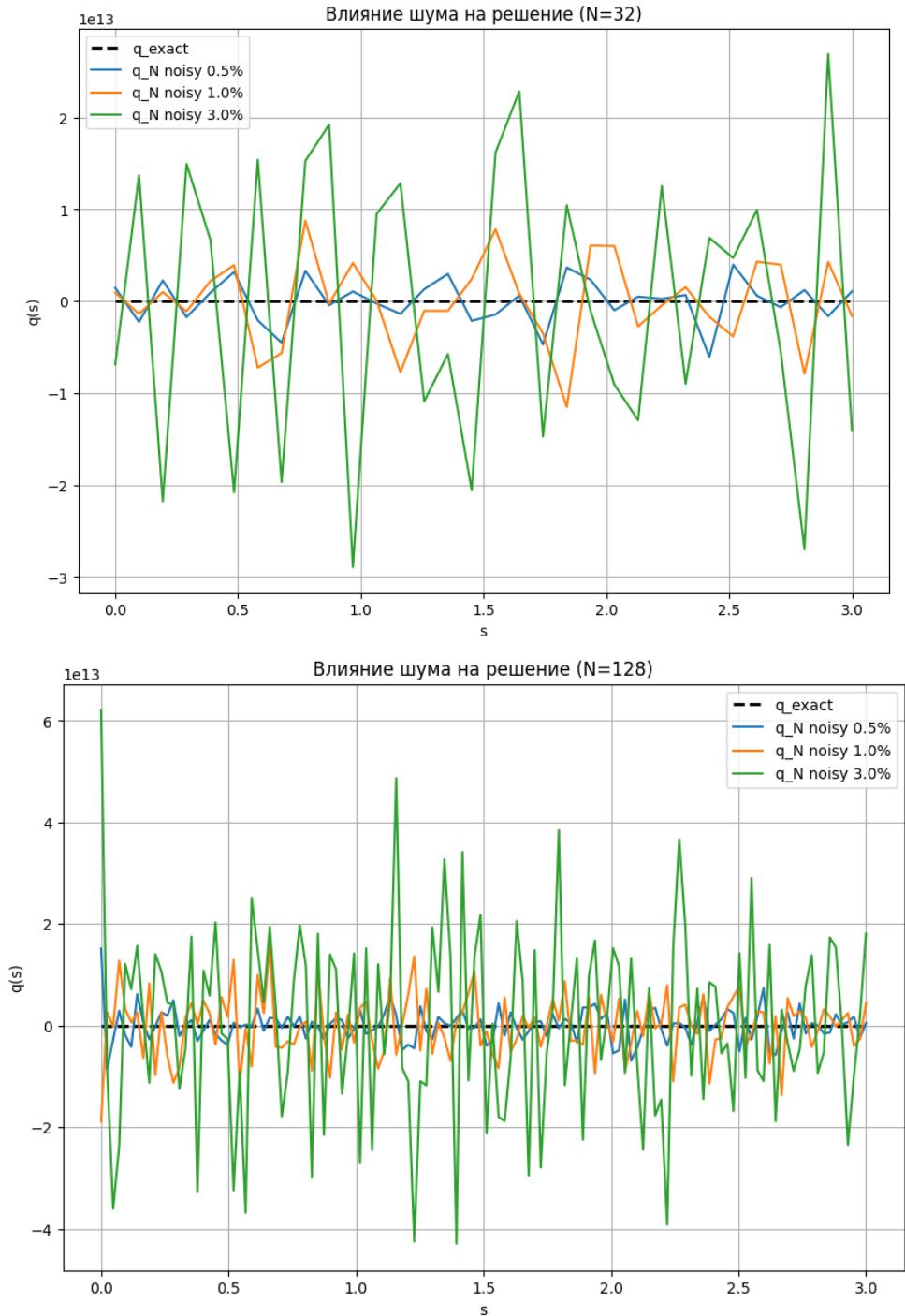


Рисунок 5. Влияние шума (0.5%, 1%, 3%) в данных на решение при $N = 8, 32, 128$

Таблица 3. Зависимость относительной ошибки от уровня шума в данных при количестве узлов $N = 8, 128$

Noisy level	Relative error $N = 8$	Relative error $N = 128$
0.5 %	2.06e+07	8.50e+12
1 %	3.31e+06	1.62e+13
3 %	7.48e+06	5.02e+13

3. Показать результат применения метода усечённого сингулярного разложения (рассмотреть для уровней шума в 0.5 и 3 процента). Изучить поведение решение и ошибки в зависимости от параметра, отвечающего за границу отсечения сингулярных значений.



Рисунок 6. Относительная ошибка TSVD в зависимости от границы отсечения сингулярных значений при $N = 32$

Значение границы отсечения сингулярных чисел при минимальной относительной ошибке $N = 32$ для данных без шума, данных с шумом 0.5% и 3%.

Граница отсечения сингулярных чисел	Относительная ошибка
$1.000\text{e-}15$	$9.987\text{e-}02$
$1.374\text{e-}05$	$2.291\text{e-}01$
$3.857\text{e-}04$	$2.755\text{e-}01$

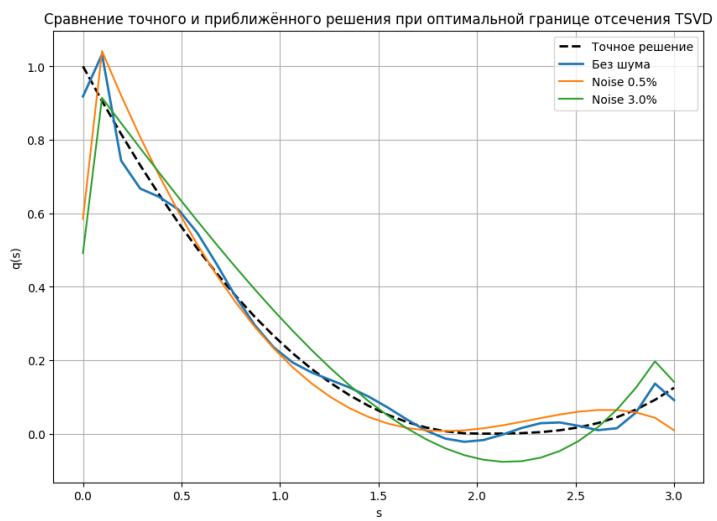


Рисунок 7. Сравнение точного и приближённого решения при оптимальной границе отсечения TSVD при $N = 32$

4. Показать результат применения метода регуляризации А.Н.Тихонова при разных значениях параметра регуляризации.

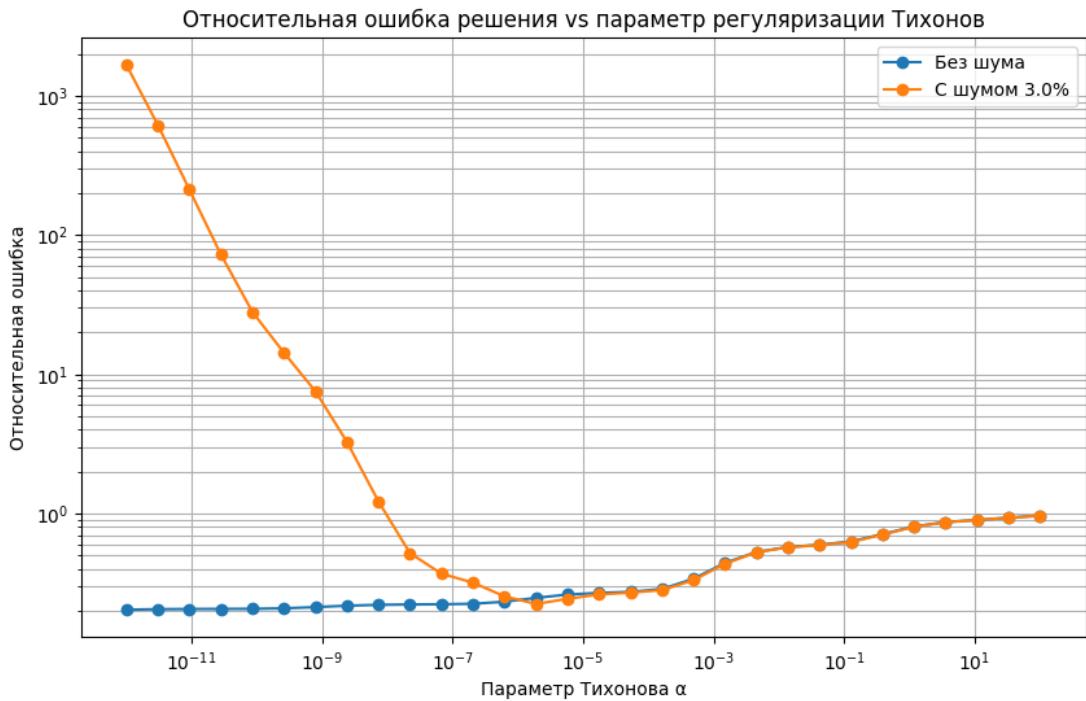


Рисунок 8. Относительная ошибка для данных с шумом и без шума для $N = 32$

Выбор параметра регуляризации в соответствии с минимальной относительной ошибкой:
 Оптимальный α (без шума): $1\text{e-}12$
 Оптимальный α (с шумом): 0.0003486365227678088

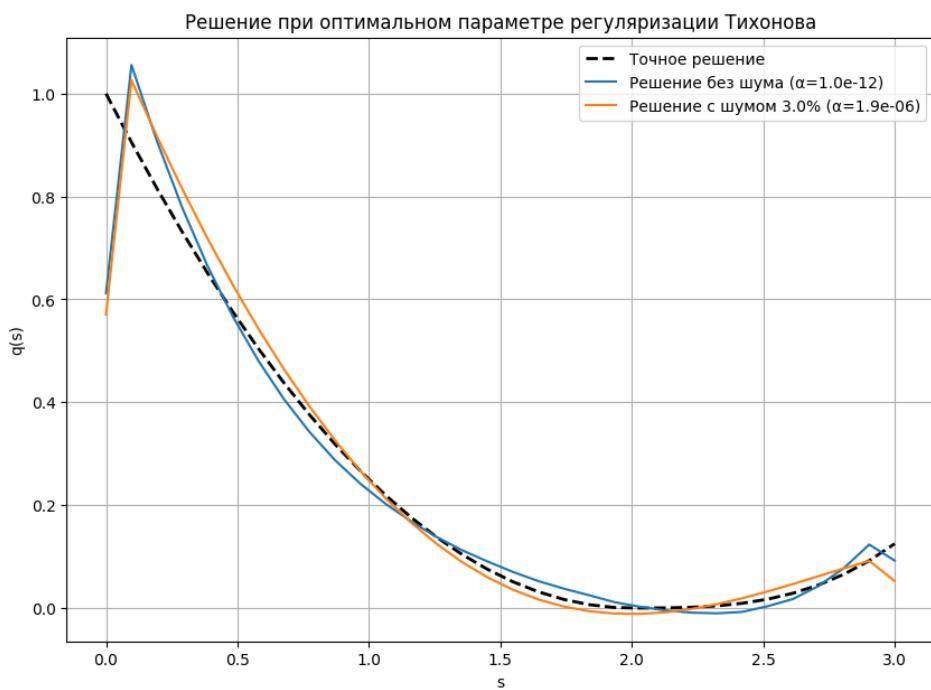


Рисунок 9. Решение точное и для данных с шумом, без шума для $N = 32$

5. Для уровней шума 0.5, 1 процента построить график невязки и график ошибки решения в зависимости от параметра регуляризации (рассмотреть диапазон $\alpha \in (10^{-8}, 10^{-1})$ с шагом в 5 или 10 точек в каждом подинтервале $10^{-(i+1)}, 10^i$.) Сравнить решение с наименьшей ошибкой, наименьшей невязкой, а также решение, выбранное согласно принципу невязки (Морозова)

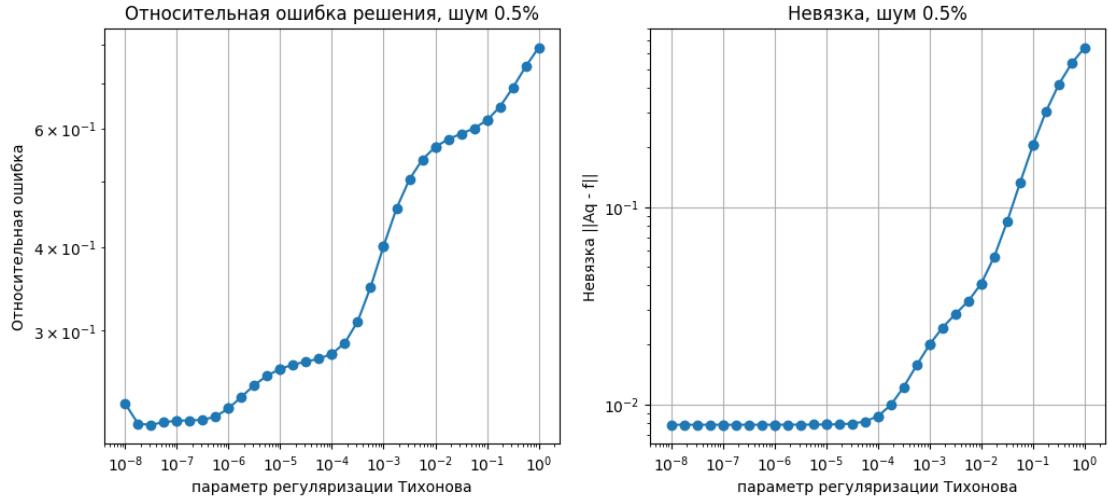


Рисунок 10. Относительная ошибка и невязка для данных с шумом 0.5% при $N = 32$

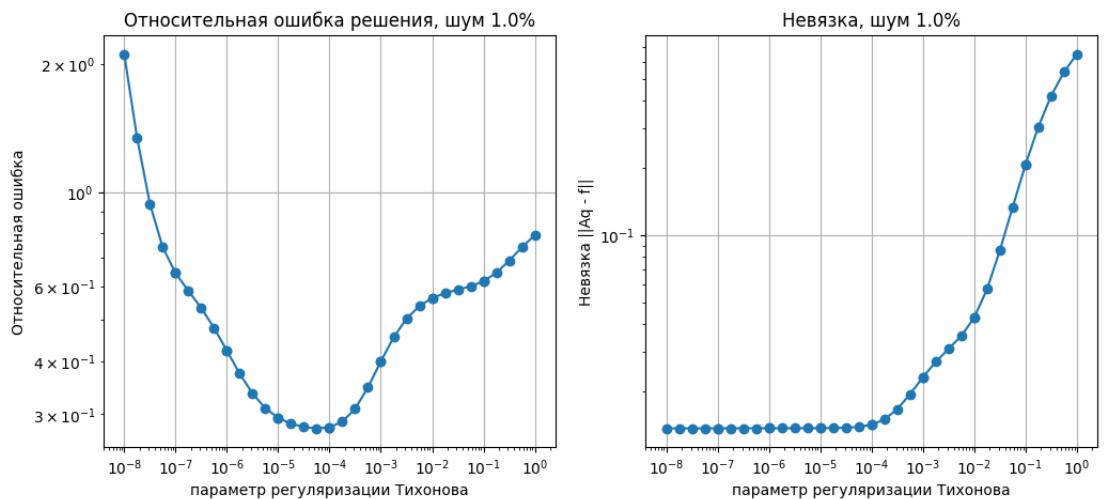


Рисунок 11. Относительная ошибка и невязка для данных с шумом 1.0% при $N = 32$

Таблица 5.1. Шум 0.5%

α минимальной ошибки	3.162e-08
α минимальной невязки	1.000e-08
α по Морозову	1.778e-03

Таблица 5.2. Шум 1.0%

α минимальной ошибки	5.623e-05
α минимальной невязки	1.000e-08
α по Морозову	1.000e-02

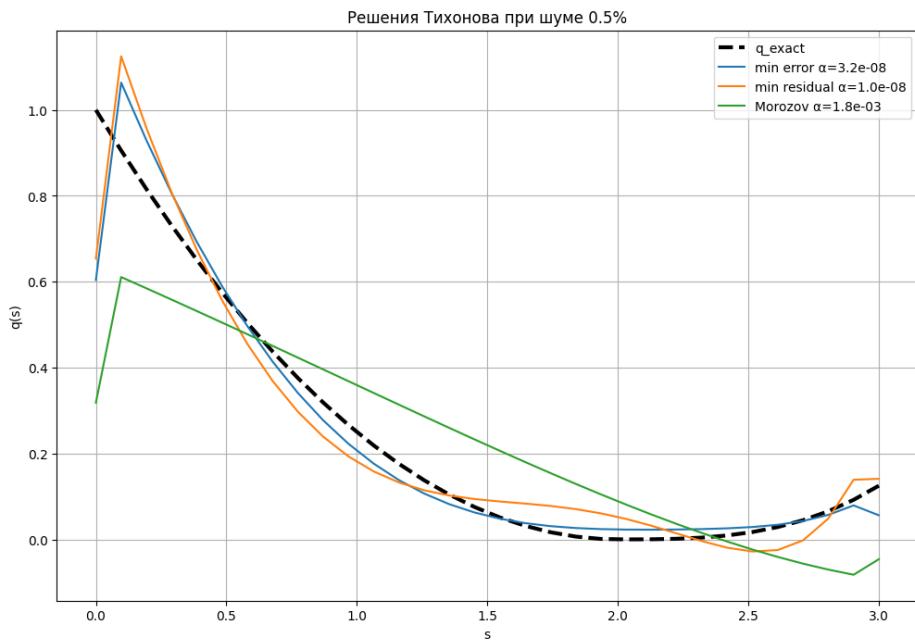


Рисунок 12. Точное решение, решения при данных параметра α из **Таблица 5.1**

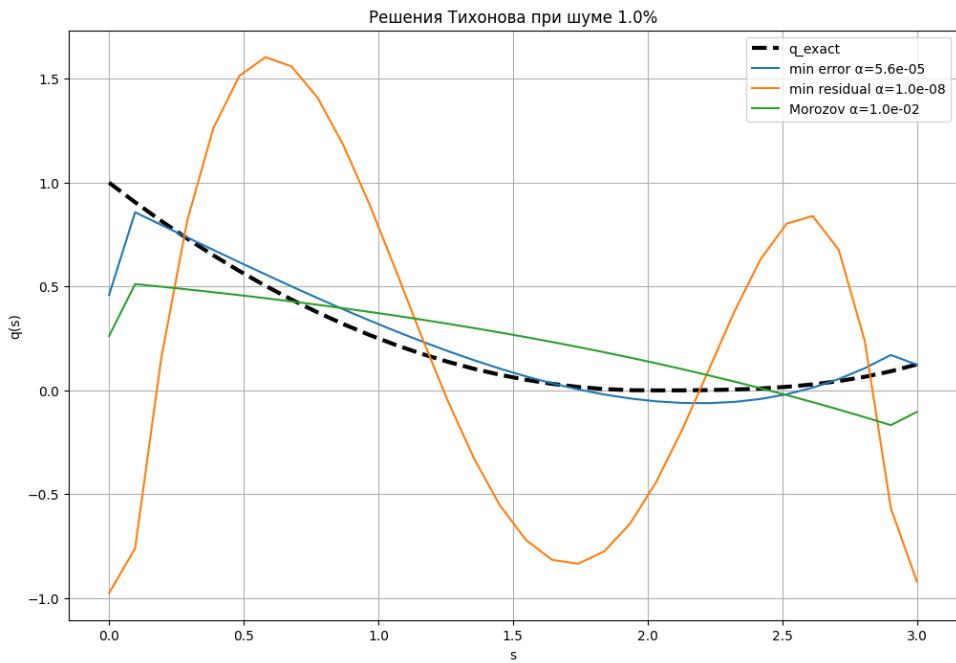


Рисунок 13. Точное решение, решения при данных параметра α из **Таблица 5.2**

6. В функционале Тихонова используется вторая производная. Для уровней шума 0.5, 1 процента построить график невязки и график ошибки решения в зависимости от параметра регуляризации (рассмотреть диапазон $\alpha \in (10^{-8}, 10^{-1})$ с шагом в 5 или 10 точек в каждом подинтервале $10^{-(i+1)}, 10^i$). Сравнить решение с наименьшей ошибкой, наименьшей невязкой, а также решение, выбранное согласно принципу невязки (Морозова)

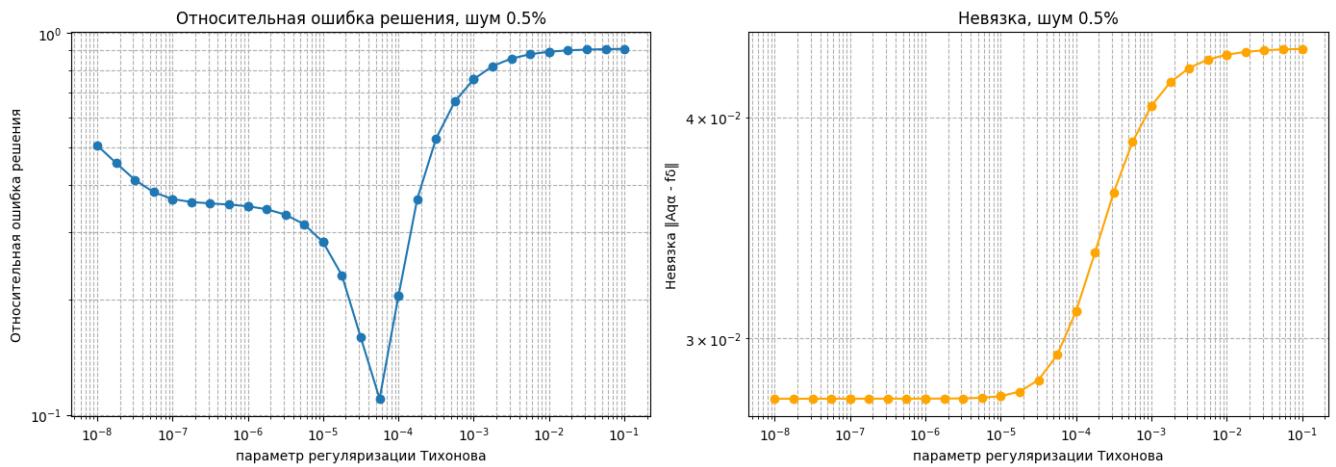


Рисунок 14. Относительная ошибка и невязка для данных с шумом 0.5% при $N = 32$

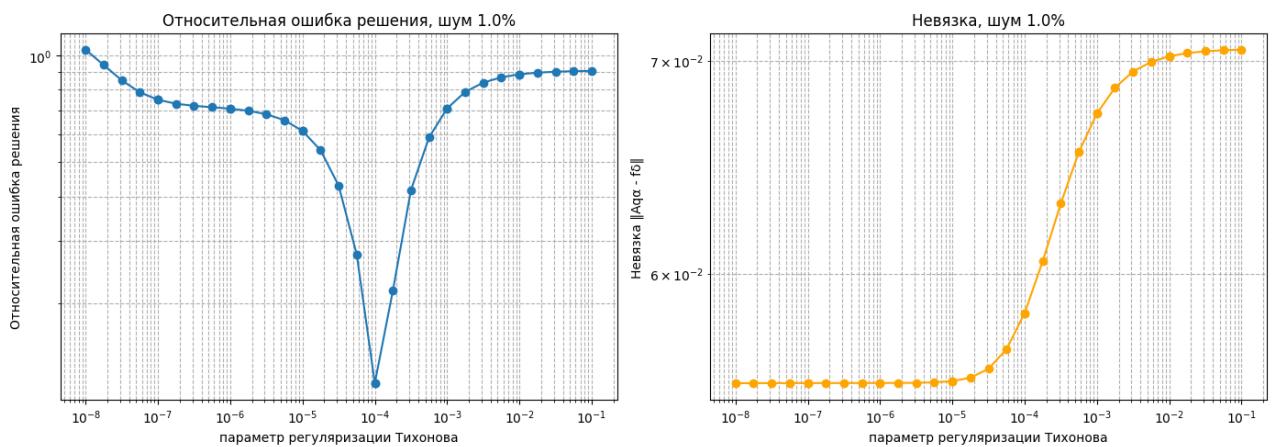


Рисунок 15. Относительная ошибка и невязка для данных с шумом 1.0% при $N = 32$

Таблица 6.1. Шум 0.5% для $N = 32$

α минимальной ошибки	5.62e-05
α минимальной невязки	1e-08
α по Морозову	0.1

Таблица 6.2. Шум 1.0% $N = 32$

α минимальной ошибки	0.0001
α минимальной невязки	1e-08
α по Морозову	0.1

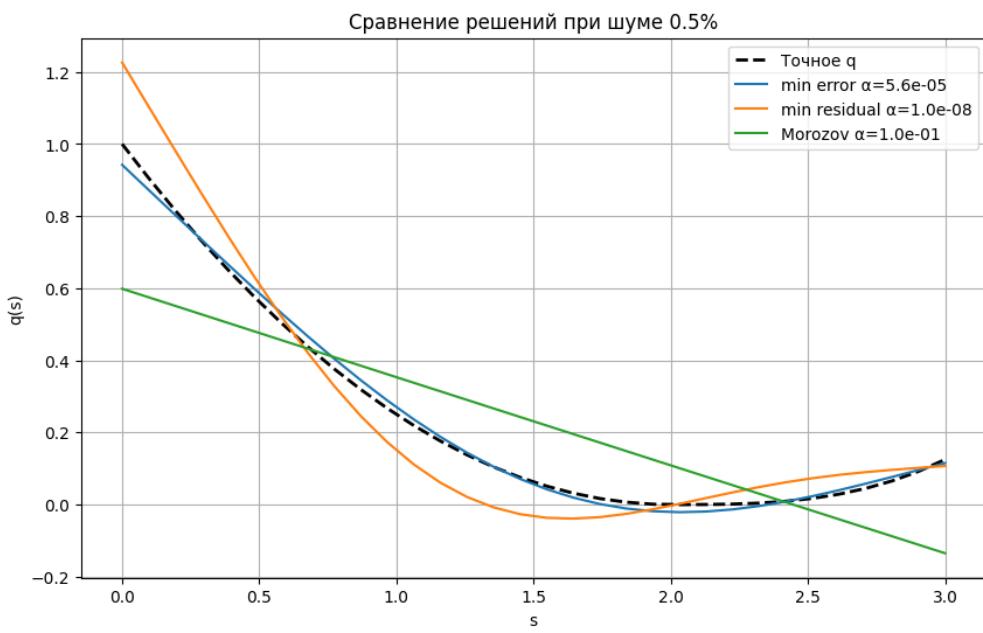


Рисунок 16. Точное решение, решения при данных параметра α из **Таблица 6.1**

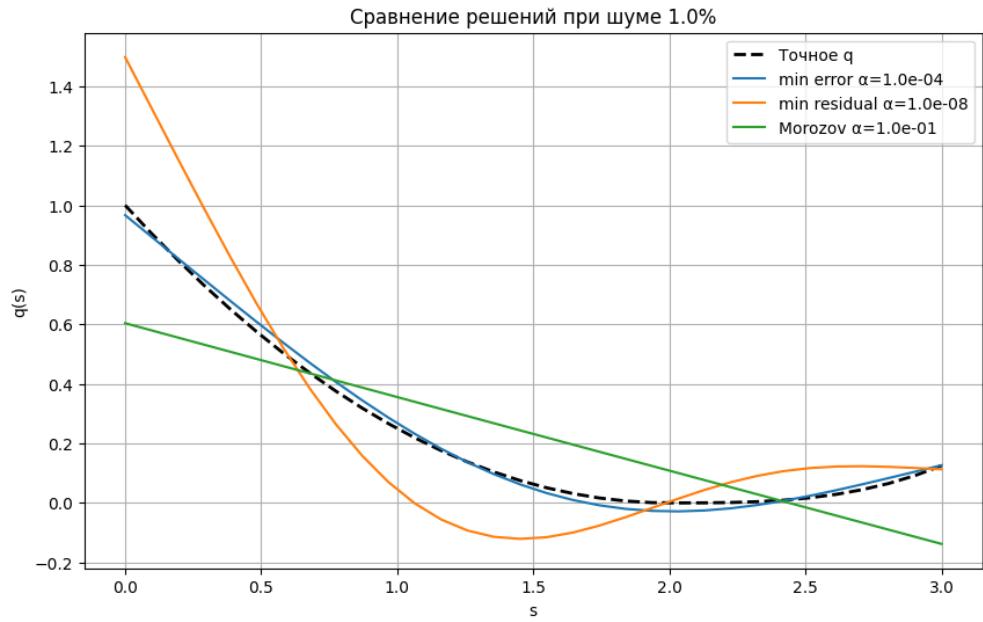


Рисунок 17. Точное решение, решения при данных параметра α из **Таблица 6.2**