Метод конечных элементов.

Выполнила: Ворончихина Елизавета Вячеславовна, группа 24151.

Описание задания: рассматривается смешанная краевая задача для уравнения второго порядка на отрезке $[0, 1]$:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0, \qquad x \in [0,1],$$

$$u(0) = 0, \qquad \frac{du}{dx}(1) = 1.$$

Точное решение задачи задаётся формулой:

$$u(x) = \frac{2\cos(1-x) - \sin(x)}{\cos(1)} + x^2 - 2.$$

Для решения задачи используется ***метод конечных элементов.***

Обозначим $f(x) = x^2$. Умножим уравнение на функцию $v \in H^1([0, 1])$ и проинтегрируем полученное равенство на отрезке [0, 1]. Слабая постановка задачи:

$$\int_0^1 (u'(x)v'(x) - u(x)v(x)) = -\int_0^1 f(x)v(x) + v(1).$$

Разбиваем отрезок $[0,1]$ на N равных отрезков – конечных элементов. Решение на каждом элементе u_e задаётся квадратичной функцией:

$$u_e^h = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ,$$

где a_0, a_1, a_2 — неизвестные коэффициенты. Три узла квадратичного элемента располагаются на правом крае и по центру. Для этого введем координаты левой x_i , правой x_{i+1} границ и центрального узла x_c для i-го элемента.

Функции формы для i-ого элемента:

$$N_i^1(x) = \frac{(x - x_c)(x - x_{i+1})}{(x_i - x_c)(x_i - x_{i+1})},$$

$$N_i^2(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_c - x_i)(x_c - x_{i+1})},$$

$$N_i^3(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_c)}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_c)}.$$

Решение на i-ом элементе:

$$u_e^h = N_i^1(x)u_i + N_i^2(x)u_c + N_i^3(x)u_{i+1}$$

Вывод локальной матрицы жесткости. Матрица жёсткости на элементе выглядит следующим образом:

$$[K^e]\{u^e\} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} N_i^1 \\ N_i^2 \\ N_i^3 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}(N_i^1 N_i^2 N_i^3) - \begin{pmatrix} N_i^1 \\ N_i^2 \\ N_i^3 \end{pmatrix}(N_i^1 N_i^2 N_i^3)\right)\begin{pmatrix} u_i \\ u_c \\ u_{i+1} \end{pmatrix} dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3L_e}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} - \frac{L_e}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u_i \\ u_c \\ u_{i+1} \end{pmatrix}$$

$L_e = x_{i+1} - x_i$- длина элемента. Для интегрирования вектора правой части используются функции формы N_i^1, N_i^2, N_i^3:

$$\{P^e\} = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} N_i^1 \\ N_i^2 \\ N_i^3 \end{pmatrix}(N_i^1 N_i^2 N_i^3)\begin{pmatrix} f_i \\ f_c \\ f_{i+1} \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} N_i^1(1) \\ N_i^2(1) \\ N_i^3(1) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{L_e}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_i \\ f_c \\ f_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_i^1(1) \\ N_i^2(1) \\ N_i^3(1) \end{pmatrix}$$

Программа написана на языке C++.

Таблица 2. Результаты численных экспериментов.

N	$\|E_r\|_\infty$	R	$\|E_r\|_{L_2}$	R	$\mu([K])$	t_sol
2	6.60e-04	–	6.48e-04	–	8.93e+01	2.00e-02
4	1.11e-04	2.93e+00	8.76e-05	2.96 e+00	3.13e+02	3.71e-02
8	1.56e-05	2.96 e+00	1.11e-05	2.98e+00	1.11e+03	5.63e-02
16	2.06e-06	2.98e+00	1.40e-06	2.99e+00	4.10e+03	8.88e-02
32	2.64e-07	2.99e+00	1.75e-07	3.00e+00	1.57e+04	1.75e-01
64	3.34e-08	3.00e+00	2.18e-08	3.00e+00	6.11e+04	6.14e-01
128	4.20e-09	3.00e+00	2.73e-09	3.00e+00	2.41e+05	2.91e+00

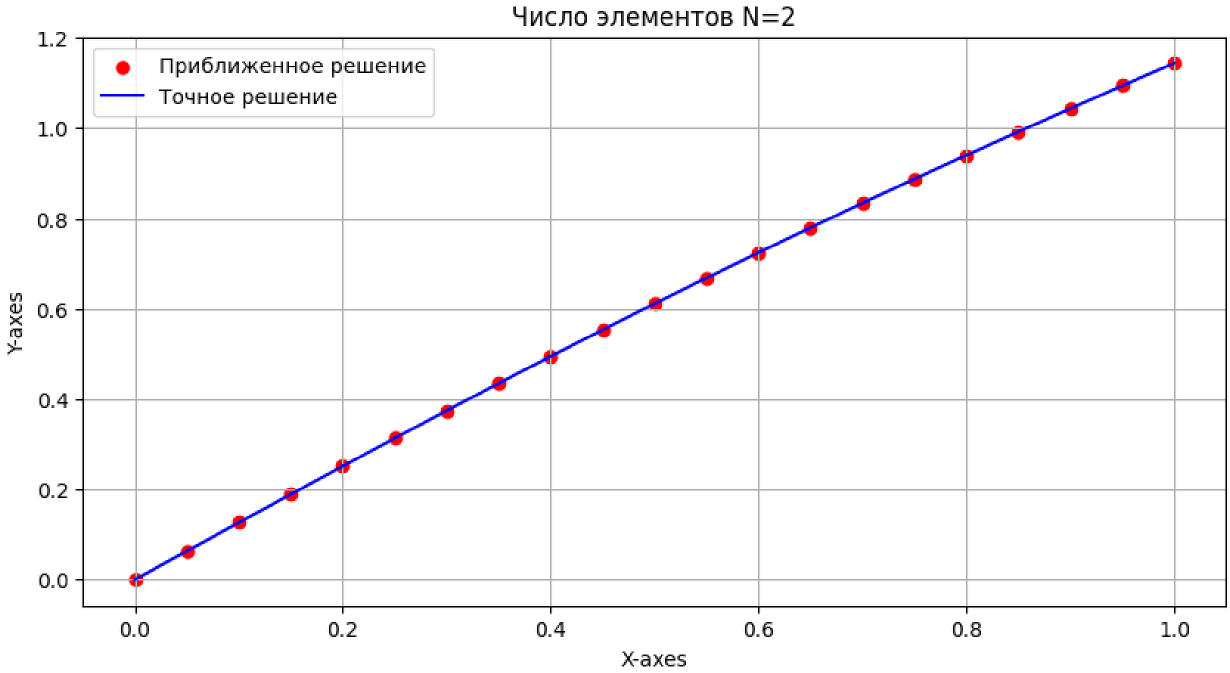

Рисунок 1. График данных и приближенного решения для N=2 при использовании квадратичной аппроксимации