

## Метод коллокации и наименьших квадратов (МКНК)

**Выполнила:** Ворончихина Елизавета Вячеславовна, группа 24151.

**Описание задания:** рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения четвертого порядка на отрезке  $[0, 1]$  в одномерном случае.

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = f(x), \quad (1)$$

$$w(0) = g_1(0), \quad (2)$$

$$w(l) = g_1(l), \quad (3)$$

$$w_x(0) = g_2(0), \quad (4)$$

$$w_x(l) = g_2(l), \quad (5)$$

где  $w(x)$  — искомая функция,  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  — заданные функции.

В каждой  $j$ -ой ячейке сетки приближенное решение ищется в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами полиномов Чебышева 4 степени. В МКНК для определения неизвестных  $N + 1$  коэффициентов в каждой ячейке выписывается переопределенная «локальная» СЛАУ. Уравнения коллокации в каждой  $j$ -ой ячейке,  $j = 1, \dots, K$ , выписываются в  $N + 1$  точке — корнях полинома Чебышева  $N + 1$  степени. Глобальная СЛАУ решалась методом итераций по подобластям.

Программа написана на языке C++.

### Результаты.

**Таблица 1.** Результаты численных экспериментов в случае реализации метода итераций по подобластям.

| $K$        | $\ E_a\ _\infty$ | $R$  | $\ E_r\ _\infty$ | $R$  | $N_{iter}$ | $\mu(A_b)$ | $\mu(A_i)$ | $t_{sol}$ |
|------------|------------------|------|------------------|------|------------|------------|------------|-----------|
| <b>5</b>   | 6.90e-03         | —    | 6.50e-02         | —    | 78         | 4.7e+02    | 7.9e+02    | 0.12      |
| <b>10</b>  | 1.70e-03         | 2.02 | 1.60e-02         | 2.02 | 261        | 4.7e+02    | 7.9e+02    | 0.48      |
| <b>20</b>  | 4.20e-04         | 2.02 | 4.00e-03         | 2.00 | 1004       | 4.7e+02    | 7.9e+02    | 3.6       |
| <b>40</b>  | 1.10e-04         | 1.98 | 9.90e-04         | 2.01 | 4032       | 4.7e+02    | 7.9e+02    | 28.2      |
| <b>80</b>  | 2.60e-05         | 2.08 | 2.50e-04         | 1.99 | 16144      | 4.7e+02    | 7.9e+02    | 220.2     |
| <b>160</b> | 6.60e-06         | 1.98 | 6.20e-05         | 2.01 | 60672      | 4.7e+02    | 7.9e+02    | 1211.8    |

Приведены графики точного и приближённого решений в зависимости от количества ячеек.

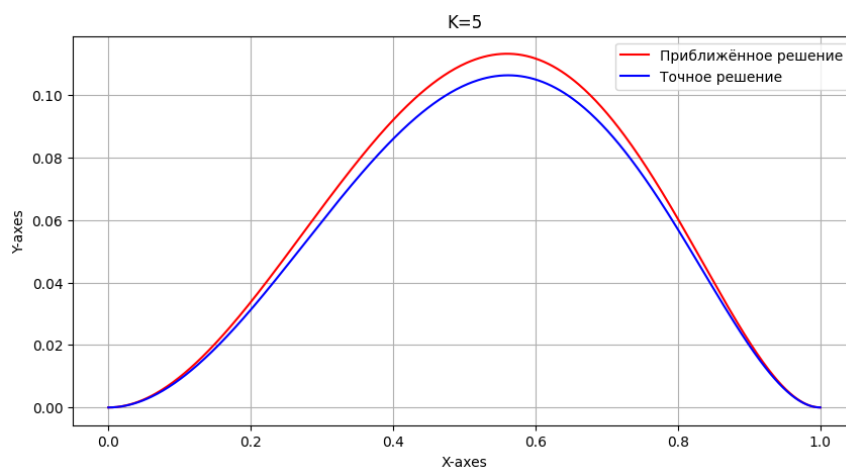


Рисунок 1. График данных и их приближений для  $K=5$

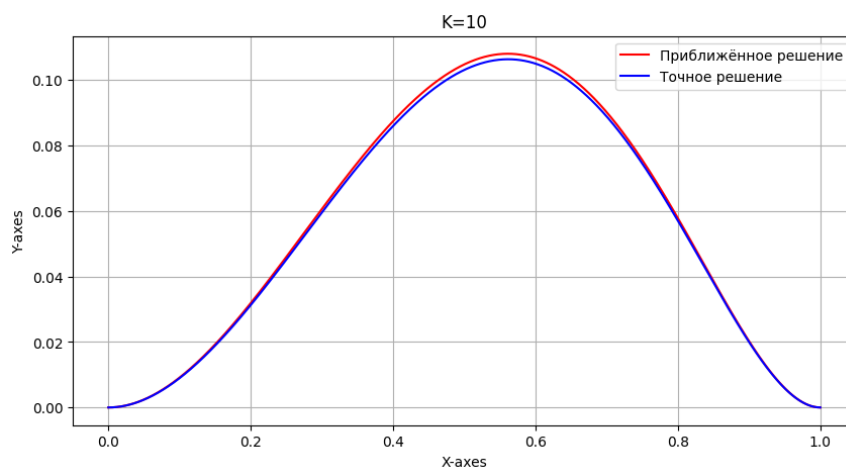


Рисунок 2. График данных и их приближений для  $K=10$

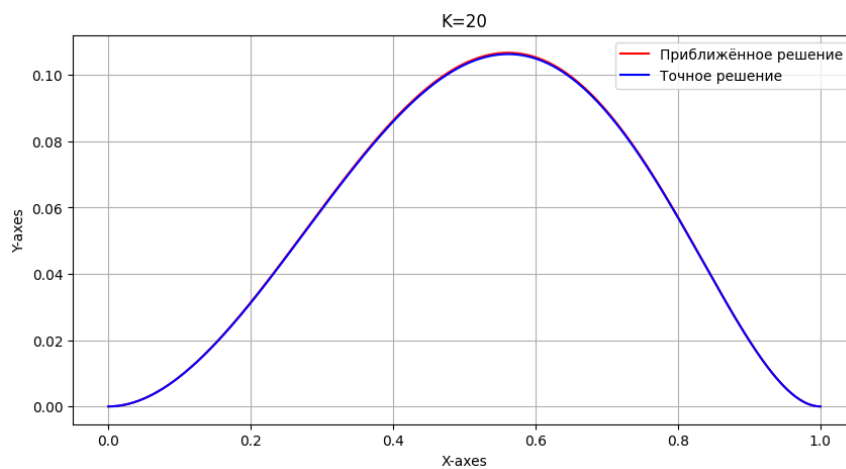


Рисунок 3. График данных и их приближений для  $K=20$

## Вывод:

Арифметическая сложность метода итераций по подобластям: в данном алгоритме используется QR-декомпозиция методом Гивенса, трудоёмкость которого  $3(N + 1)^2(N + 5) - (N + 1)^3 = O(N^3)$ . Рассмотрим некоторую итерацию. Для каждой ячейки строим локальную матрицу, выполняем QR-декомпозицию, далее используется метод Гаусса, трудоёмкость которого  $O(N^2)$ . Следовательно, общая трудоёмкость  $N_{iter} * O(KN^2) + O(N^3)$ .

Число обусловленности внутренних СЛАУ на каждой сетке одинакова, так как матрица СЛАУ одинакова на каждой сетке, отличаются только правые части.

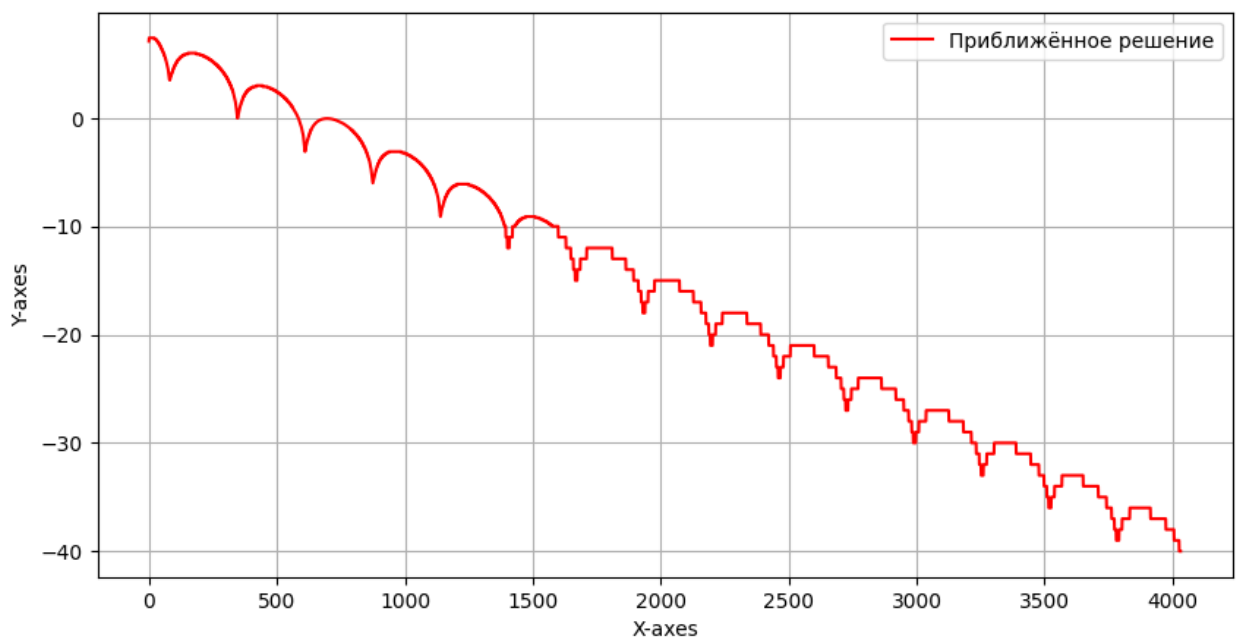


Рисунок 4. Псевдопогрешность

## Ускорение по Крылову

Исследована зависимость количества итераций от количества невязок в методе ускорения Крылова для МКНК.

Число невязок  $k = 5$ :

| $K$ | $\ E_a\ _\infty$ | $R$  | $\ E_r\ _\infty$ | $R$  | $N_{iter}$<br>(Крылов) | $N_{iter}$ | $t_{sol}$ |
|-----|------------------|------|------------------|------|------------------------|------------|-----------|
| 5   | 6.90e-03         | —    | 6.50e-02         | —    | 25                     | 78         | 0.04      |
| 10  | 1.70e-03         | 2.02 | 1.60e-02         | 2.02 | 139                    | 261        | 0.3       |
| 20  | 4.20e-04         | 2.02 | 4.00e-03         | 2.00 | 21961                  | 1004       | 77.00     |

Число невязок  $k = 10$ :

| $K$       | $\ E_a\ _\infty$ | $R$  | $\ E_r\ _\infty$ | $R$  | $N_{iter}$<br>(Крылов) | $N_{iter}$ | $t_{sol}$ |
|-----------|------------------|------|------------------|------|------------------------|------------|-----------|
| <b>5</b>  | 6.90e-03         | —    | 6.50e-02         | —    | 12                     | 78         | 0.015635  |
| <b>10</b> | 1.70e-03         | 2.02 | 1.60e-02         | 2.02 | 56                     | 261        | 0.136799  |
| <b>20</b> | 4.20e-04         | 2.02 | 4.00e-03         | 2.00 | 1596                   | 1004       | 5.67449   |

Число невязок  $k = 20$ :

| $K$       | $\ E_a\ _\infty$ | $R$  | $\ E_r\ _\infty$ | $R$  | $N_{iter}$<br>(Крылов) | $N_{iter}$ | $t_{sol}$ |
|-----------|------------------|------|------------------|------|------------------------|------------|-----------|
| <b>5</b>  | 6.90e-03         | —    | 6.50e-02         | —    | 22                     | 78         | 0.027311  |
| <b>10</b> | 1.70e-03         | 2.02 | 1.60e-02         | 2.02 | 22                     | 261        | 0.059162  |
| <b>20</b> | 4.20e-04         | 2.02 | 4.00e-03         | 2.00 | 211                    | 1004       | 0.794954  |
| <b>40</b> | 1.10e-04         | 1.98 | 9.90e-04         | 2.01 | 95887                  | 4032       | 660.282   |

Число невязок  $k = 40$ :

| $K$       | $\ E_a\ _\infty$ | $R$  | $\ E_r\ _\infty$ | $R$  | $N_{iter}$<br>(Крылов) | $N_{iter}$ | $t_{sol}$ |
|-----------|------------------|------|------------------|------|------------------------|------------|-----------|
| <b>5</b>  | 6.90e-03         | —    | 6.50e-02         | —    | 42                     | 78         | 0.054165  |
| <b>10</b> | 1.70e-03         | 2.02 | 1.60e-02         | 2.02 | 42                     | 261        | 0.094845  |
| <b>20</b> | 4.20e-04         | 2.02 | 4.00e-03         | 2.00 | 83                     | 1004       | 0.31936   |
| <b>40</b> | 1.10e-04         | 1.98 | 9.90e-04         | 2.01 | 985                    | 4032       | 6.92237   |

Число невязок  $k = 80$ :

| $K$       | $\ E_a\ _\infty$ | $R$  | $\ E_r\ _\infty$ | $R$  | $N_{iter}$<br>(Крылов) | $N_{iter}$ | $t_{sol}$ |
|-----------|------------------|------|------------------|------|------------------------|------------|-----------|
| <b>5</b>  | 6.90e-03         | —    | 6.50e-02         | —    | 78                     | 78         | 0.085784  |
| <b>10</b> | 1.70e-03         | 2.02 | 1.60e-02         | 2.02 | 82                     | 261        | 0.387516  |
| <b>20</b> | 4.20e-04         | 2.02 | 4.00e-03         | 2.00 | 105                    | 1004       | 0.392877  |
| <b>40</b> | 1.10e-04         | 1.98 | 9.90e-04         | 2.01 | 487                    | 4032       | 3.74108   |
| <b>80</b> | 2.60e-05         | 2.08 | 2.50e-04         | 1.99 | 71853                  | 16144      | 1014.66   |

Число невязок  $k = 160$ :

| $K$       | $\ E_a\ _\infty$ | $R$  | $\ E_r\ _\infty$ | $R$  | $N_{iter}$<br>(Крылов) | $N_{iter}$ | $t_{sol}$ |
|-----------|------------------|------|------------------|------|------------------------|------------|-----------|
| <b>5</b>  | 6.90e-03         | —    | 6.50e-02         | —    | 78                     | 78         | 0.076389  |
| <b>10</b> | 1.70e-03         | 2.02 | 1.60e-02         | 2.02 | 162                    | 261        | 0.362185  |
| <b>20</b> | 4.20e-04         | 2.02 | 4.00e-03         | 2.00 | 162                    | 1004       | 0.630355  |
| <b>40</b> | 1.10e-04         | 1.98 | 9.90e-04         | 2.01 | 323                    | 4032       | 2.51622   |
| <b>80</b> | 2.60e-05         | 2.08 | 2.50e-04         | 1.99 | 3221                   | 16144      | 47.3428   |

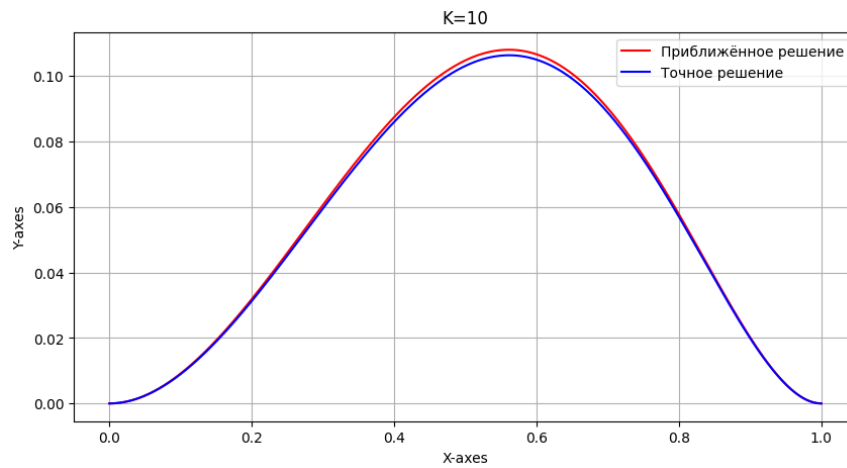


Рисунок 4. График данных и их приближений для числа ячеек  $K=10$

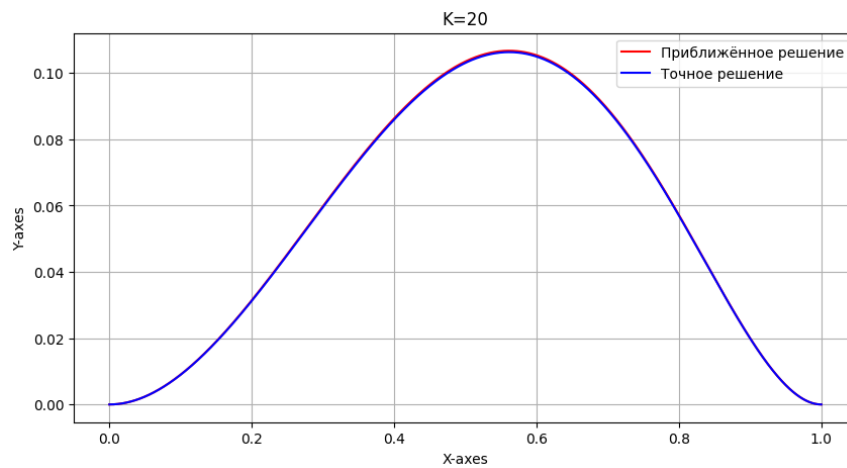


Рисунок 5. График данных и их приближений для числа ячеек  $K=20$

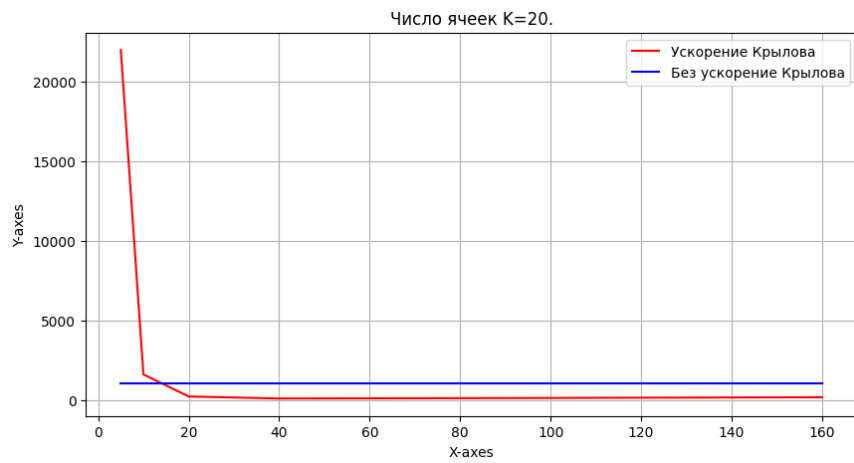


Рисунок 6. График зависимости числа невязок от числа итераций для числа ячеек  $K=20$

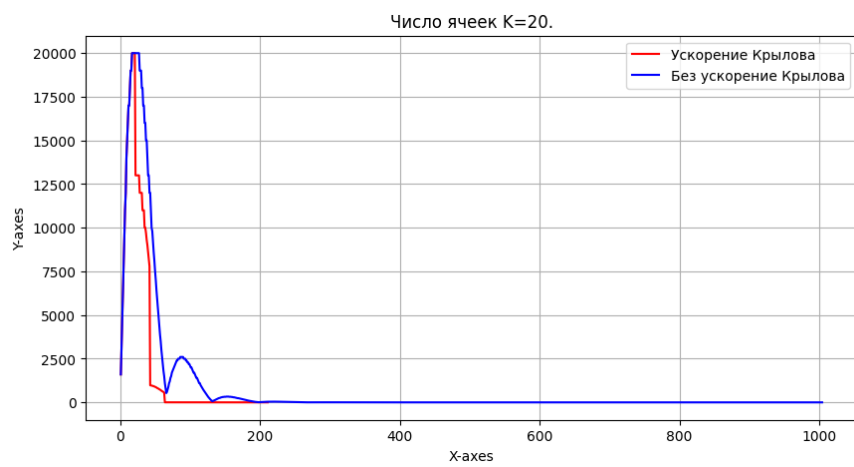


Рисунок 7. График зависимости ошибки от числа итераций для числа ячеек  $K=20$

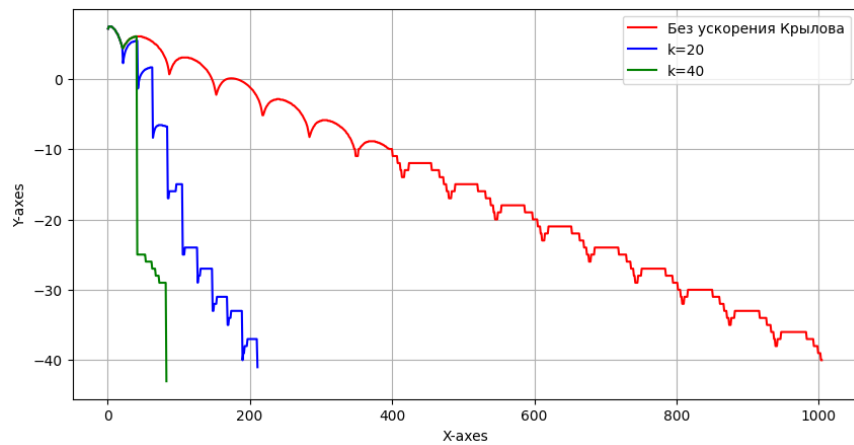


Рисунок 8. Псевдопогрешность

**Выводы:**

Из таблиц для числа невязок  $k=5, \dots, 160$  видно, что при выборе определенного числа невязок для каждого числа ячеек  $K$  можно уменьшить количество итераций.