

Практическая работа 7. Принятие решений в условиях неопределенности

В условиях неопределенности лицо, принимающее решение, не знает вероятностей наступления того или иного состояния природы.

Рассмотрим следующие критерии:

- 1) критерий Лапласа;
- 2) критерий Сэвиджа;
- 3) критерий Гурвица;
- 4) минимаксный критерий.

Основное различие между указанными критериями определяется стратегией поведения ЛПР в условиях большой неопределенности. Перечисленные критерии, несмотря на их количественную природу, отражают субъективную оценку ситуации, в которой приходится принимать решение. Не существует общих правил оценки применимости того или иного критерия, так как поведение (часто меняющееся) ЛПР, обусловленное неопределенностью ситуации, по всей видимости, является наиболее важным фактором при выборе подходящего критерия.

Критерий Лапласа

Великий математик Лаплас рассуждал следующим образом: “Я не знаю ничего о будущих состояниях природы, поэтому я могу считать их равновероятными”. Если согласиться с приведенными доводами, то исходную задачу можно рассматривать как задачу принятия решений в условиях риска, когда выбирается действие d_i , дающее наиболее ожидаемый выигрыш. Другими словами, находится действие d_i^* , соответствующее

$$\max_{d_i} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_{ij} \right\}$$

где $\frac{1}{m}$ - вероятность реализации состояния θ_j , $j = \overline{1, m}$

Пример: В модели газетного киоска из предположения о равной вероятности всех состояний природы следует, что вероятности всех четырех событий (соответствующих разным величинам спроса) будут одинаковыми и равными 0,25. Далее можно пересчитать модель принятия решения в условиях риска с этими вероятностями и получить ожидаемые значения доходов. После такого перерасчета оптимальным будет решение 2, в соответствии с которым следует закупить два экземпляра газеты (рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Цена продажи	75					
2	Цена покупки	40					
3	Упущенная выгода	50					
4							
5		Состояние природы					
6	Решение	0	1	2	3	Ожидаемый платеж	
7	0	0	-50	-100	-150	-75	
8	1	-40	35	-15	-65	-21,25	
9	2	-80	-5	70	20	1,25	
10	3	-120	-45	30	105	-7,5	
11							
12	Вероятности	0,25	0,25	0,25	0,25		
13							

Рис. 1

Минимаксный (максиминный) критерий

Этот критерий является наиболее осторожным (критерий осторожного наблюдателя (критерий Вальда)), так как основывается на выборе наилучшей из наихудших возможностей.

Если результат r_{ij} представляет потери ЛПР, для действий d_i наибольшие потери независимо от

возможного состояния θ_j будут равны $\max_{\theta_j} \{r_{ij}\}$. По минимаксному критерию должно

выбираться действие d_i , дающее $\min_{d_i} \max_{\theta_j} \{r_{ij}\}$.

Аналогично, в том случае, если r_{ij} представляет выигрыш, согласно минимаксному критерию,

выбирается действие d_i , дающее $\max_{d_i} \min_{\theta_j} \{r_{ij}\}$. В этом случае критерий называется максиминным.

Пример: В модели газетного киоска каждому решению ставится в соответствие минимальное значение в его строке в матрице доходов. В качестве искомого решения выбираем то решение, которому будет соответствовать максимум минимального значения дохода. В нашем случае продавец газетного киоска должен купить только один экземпляр газеты (решение 1) (рис. 2).

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г
1	Цена продажи	75					
2	Цена покупки	40					
3	Упущенная выгода	50					
4							
5		Состояние природы					
6	Решение	0	1	2	3	Минимальный доход	Максимум минимального дохода
7	0	0	-50	-100	-150	-150	-65
8	1	-40	35	-15	-65	-65	
9	2	-80	-5	70	20	-80	
10	3	-120	-45	30	105	-120	
11							

Рис. 2

Максиминный критерий часто используется в ситуациях, когда принимающий решение менеджер не может допустить самого худшего исхода. (Примерами таких ситуаций могут служить планирование оборонных мероприятий или ситуации в медицине, когда речь идет о сохранении человеческой жизни.) В этом случае менеджер выбирает решение, которое заведомо избегает наихудшего исхода.

Критерий Сэвиджа

Критерий минимакса настолько “пессимистичен”, что иногда может приводить к нелогичным выводам. Рассмотрим следующую матрицу потерь, которая обычно приводится в качестве классического примера для обоснования необходимости использования “менее пессимистичного” критерия Сэвиджа.

	θ_1	θ_2
d_1	11000\$	90\$
d_2	10000\$	10000\$

Применение минимаксного критерия приводит к выбору d_2 . Но интуитивно мы согласны выбрать d_1 , поскольку не исключено, что θ будет равно θ_2 и потери составят только 90\$, тогда как выбрав d_2 всегда приводит к потерям в 10000\$ при любом θ .

Критерий Сэвиджа “исправляет” положение введением новой матрицы потерь, в которой r_{ij} заменяют на v_{ij} , определяемые следующим образом:

$$v_{ij} = \begin{cases} \max_{d_k} \{r_{kj}\} - r_{ij}, & \text{если } r - \text{доход} \\ r_{ij} - \min_{d_k} \{r_{kj}\}, & \text{если } r - \text{потери} \end{cases}$$

Это означает, что v_{ij} есть разность между наилучшим значением в столбце θ_j и значением r_{ij} при том же θ_j . По существу v_{ij} выражает “сожаление” ЛПР, по поводу того, что он не выбрал наилучшего действия относительно состояния θ_j . Функция v_{ij} называется матрицей сожаления. Чтобы показать, как введение величины v_{ij} помогает прийти к логическому выводу в выше приведенном примере, рассмотрим матрицу сожаления

$v_{ij} =$		θ_1	θ_2	
	d_1	1000\$	0\$	1000\$
	d_2	0\$	9910\$	9910\$

Как и ожидалось, исходя из минимаксного критерия, следует выбирать d_1 .

Отметим, что независимо от того, является ли r_{ij} доходами или потерями, v_{ij} - функция сожаления, в обоих случаях определяющая потери. Следовательно, можно применять к v_{ij} только минимаксный, а не максиминный критерий.

Пример: Для модели газетного киоска на основе матрицы сожаления построим таблицу максимальных потерь, выбрав для каждого решения максимальное значение в его строке в матрице сожаления (рис. 3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Цена продажи	75						
2	Цена покупки	40						
3	Упущенная выгода	50						
4								
5		Состояние природы						
6	Решение	0	1	2	3			
7	0	0	-50	-100	-150			
8	1	-40	35	-15	-65			
9	2	-80	-5	70	20			
10	3	-120	-45	30	105			
11								
12								
13								
14	Матрица сожаления							
15								
16		Состояние природы						
17	Решение	0	1	2	3	Максимум потерь		
18	0	0	85	170	255	255		
19	1	40	0	85	170	170		
20	2	80	40	0	85	85	Минимальное	
21	3	120	80	40	0	120		
22								

Рис. 3

Теперь выбираем решение, которое минимизирует максимум потерь. В данном случае критерий минимаксных потерь укажет на решение 2.

Критерий Гурвица

Этот критерий охватывает ряд различных подходов к принятию решений: от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. При наиболее оптимистичном подходе можно

$$\max_{d_i} \max_{\theta_j} \{r_{ij}\}$$

выбрать действие, дающее , так называемая стратегия “здорового оптимиста”. (Предполагается, что r_{ij} представляет выигрыш или доход). Аналогично при наиболее

пессимистичных предположениях выбираемое действие соответствует $\max_{d_i} \min_{\theta_j} \{r_{ij}\}$ (критерий Вальда). Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего оптимизма и крайнего пессимизма взвешиванием обоих способов поведения с соответствующими весами α и $\alpha-1$, где $0 \leq \alpha \leq 1$.

То есть критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях:

- ✓ среда может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $1-\alpha$ и
- ✓ в самом выгодном - с вероятностью α , где α - коэффициент доверия (или показатель оптимизма).

Если r_{ij} - прибыль, то выбирается действие (стратегия), дающее

$$\max_{d_i} \left\{ \alpha \cdot \max_{\theta_j} r_{ij} + (1-\alpha) \cdot \min_{\theta_j} r_{ij} \right\}$$

В том случае, когда r_{ij} представляет затраты, критерий выбирает действие, дающее

$$\min_{d_i} \left\{ \alpha \cdot \min_{\theta_j} r_{ij} + (1-\alpha) \cdot \max_{\theta_j} r_{ij} \right\}$$

При $\alpha=1$ критерий слишком оптимистичный, при $\alpha=0$ он слишком пессимистичный. Значение α между 0 и 1 может определяться в зависимости от склонности ЛПР к пессимизму или оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности $\alpha=1/2$ представляется наиболее разумным.

Пример: Для модели газетного киоска примем $\alpha=1/2$ (рис. 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Цена продажи	75	$\alpha = 0,5$							
2	Цена покупки	40								
3	Упущенная выгода	50								
4										
5	Состояние природы					$\left\{ \alpha \cdot \max_{\theta_j} r_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \min_{\theta_j} r_{ij} \right\}$				
6	Решение	θ	1	2	3	Минимальный доход	Максимальный доход			
7		0	-50	-100	-150	-150	0	-7,5		
8		1	-40	35	-15	-65	-65	35	-15	
9		2	-80	-5	70	20	-80	70	-5	максимальное
10		3	-120	-45	30	105	-120	105	-7,5	
11										

Рис. 4

Оптимальное решение заключается в выборе решения 2.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине может составлять 100, 150, 200, 250 или 300 шт.

Если булочка не продана в тот же день, она может быть реализована за 15 центов к концу дня. С другой стороны, свежие булочки продаются по 49 центов за штуку. Затраты магазина на одну булочку составляют 25 центов. Используя каждое из правил для решения задач в условиях неопределенности, определите, какое наибольшее число булочек необходимо заказывать ежедневно, если предположить, что величина запаса может принимать одно из возможных значений спроса.

Задание 2. Издатель обратился в отдел маркетинга, чтобы выяснить предполагаемый спрос на книгу. Исследования отдела маркетинга показали, что спрос на книгу в ближайшие три года может составлять 2000, 3000, 4000 или 5000 экз.

Прибыль составляет 9 ф.ст. за книгу. Если книга не продается, убытки составляют 4 ф.ст. за штуку.

Если издатель не удовлетворяет спрос, убытки по неудовлетворенному спросу составят 1 ф.ст. (для поддержания репутации фирмы и будущего спроса).

Используя каждое из правил для решения задач в условиях неопределенности, определите, сколько книг должно быть издано в расчете на трехлетний период.

Задание 3. Пекарня печет хлеб на продажу магазинам. Себестоимость одной булки составляет 30 пенсов, ее продают за 40 пенсов. В таблице приведены данные о спросе за последние 50 дней:

<i>Спрос в день, тыс. шт.</i>	<i>10</i>	<i>12</i>	<i>14</i>	<i>16</i>	<i>18</i>
-------------------------------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Если булка испечена, но не продана, то убытки составят 20 пенсов за штуку.

Найдите решение, которое максимизирует ожидаемый доход, используя каждое из правил (критерий Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и минимаксный критерий). Проанализируйте полученные результаты.

Задание 4. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине может составлять 120, 160, 200, 240 или 280 шт.

Если булочка не продана в тот же день, она может быть реализована за 14 центов к концу дня. С другой стороны, свежие булочки продаются по 48 центов за штуку. Затраты магазина на одну булочку составляют 26 центов.

Используя каждое из правил для решения задач в условиях неопределенности (критерии Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и минимаксный критерий), определите, какое наибольшее число булочек необходимо заказывать ежедневно, если предположить, что величина запаса может принимать одно из возможных значений спроса.

Задание 5. Сеть магазинов Shop-Quik Supermarkets приобретает большие партии белого хлеба для дальнейшей продажи в течение недели. Магазин покупает хлеб по 0,70 долл. за буханку, а продает – за 1,10 долл. Все буханки, не проданные до конца недели, могут быть проданы местным магазинам по 0,40 долл. Спрос может составлять 6000, 8000, 10000 или 12000 буханок.

Создайте таблицу выигрышей.

Для того чтобы определить, что нужно предпринять, используйте каждое из правил для решения задач в условиях неопределенности (критерии Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и минимаксный критерий).

Задание 6. Компания «Kilroy» выпускает очень специфичный безалкогольный напиток, который упаковывается в 40-пинтовые бочки. Напиток готовится в течение недели, и каждый понедельник очередная партия готова к употреблению. Однако в одно из воскресений всю готовую к продаже партию пришлось выбросить. Секретный компонент, используемый для приготовления напитка, покупается в небольшой лаборатории, которая может производить каждую неделю в течение полугода (так налажено производство) только определенное количество этого компонента. Причем он должен быть использован в кратчайший срок.

Переменные затраты на производство одной пинты напитка составляют 60 пенсов, продается она за 1,40 ф.ст. Однако компания предвидит, что срыв поставок приведет к потере части покупателей в долгосрочной перспективе, а следовательно, придется снизить цену на 20 пенсов. За последние 50 недель каких-либо явных тенденций в спросе выявлено не было:

<i>Спрос на бочки в неделю</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
--------------------------------	----------	----------	----------	----------	----------

Для того чтобы определить, что нужно предпринять, используйте каждое из правил для решения задач в условиях неопределенности.

Задание 7. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине может принимать одно из следующих значений: 100, 120 или 130 с вероятностями 0,2, 0,3 и 0,5. Владелец магазина

ограничен в выборе величины запаса одним из указанных уровней. Если он закупает больше, чем может продать, то должен реализовать оставшиеся булочки со скидкой 55 центов на каждую булочку.

Найдите с помощью каждого из правил для решения задач в условиях неопределенности оптимальный уровень запаса при условии, что булочки закупаются по цене 60 центов и продаются за 1 долл. 5 центов.

Задание 8. Производитель джинсов решает, какую фабрику строить в указанном месте: большую, среднюю или маленькую. Доход, который приносит одна пара джинсов, равен 10 долл. Размер амортизационных отчислений на маленькой фабрике равен 200 тыс. долл. В год, а мощность производства – 30 тыс. пар в год. Размер амортизационных отчислений на средней фабрике равен 300 тыс. долл. В год, а мощность производства – 50 тыс. пар в год. Размер амортизационных отчислений на большой фабрике равен 400 тыс. долл. В год, а мощность производства – 100 тыс. пар в год. Производитель рассматривает пять вариантов производственных мощностей – 10, 20, 30, 50 и 100 тыс. пар джинсов в год.

Найдите решение, которое максимизирует ожидаемый доход, используя каждое из правил (критерий Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и минимаксный критерий). Проанализируйте полученные результаты.

Задание 9. Автор нового романа решает, какому из трех издательств отдать права на издание своей рукописи. Компания А предлагает автору гонорар в размере 10 тыс. долл. и 2 долл. с каждой проданной книги. Компания Б предлагает автору гонорар в размере 2 тыс. долл. и 4 долл. с каждой проданной книги. Компания В предлагает автору гонорар в размере 5 тыс. долл. и 2,5 долл. с каждой проданной книги. Автор рассматривает пять вариантов тиража: 1000, 2000, 5000, 10000 и 50000 экземпляров.

Каким будет оптимальное решение, если использовать критерии Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и минимаксный критерий.

Задание 10. Владелец топливной компании должен решить, стоит ли предлагать свои клиентам солнечные батареи. Исходная цена такого оборудования равна 150 000 долл., причем каждый комплект приносит 2 000 долл. прибыли. Заказ может составлять 50, 100, 150 или 200 установок.

Каким будет оптимальное решение, если использовать критерии Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и минимаксный критерий.

Задание 11. Торговая сеть компании «Елочка» продает и покупает рождественские елки. Покупая елки за 10 долларов, она продает их за 20. Все елки, непроданные на Рождество, продаются за 2 долл. на дрова. Компания может удовлетворить четыре уровня запросов: 100, 200, 500 и 1000 елок.

Каким будет оптимальное решение, если использовать критерии Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и минимаксный критерий.

Задание 12. Компания «Золотая рыбка» приобретает моллюсков у рыбаков по 1,60 долл. за фунт, а затем продает их в различные рестораны Нью-Йорка по 3,50 долл. за фунт. Все моллюски, непроданные до конца недели, могут быть проданы местной компании по 0,55 долл. за фунт. Объемам заказов, поступивших от ресторанов, может составлять 1000, 2000, 3000 или 4000 фунтов.

Компания может закупить 1000, 2000, 3000 и 4000 фунтов моллюсков.

Каким будет оптимальное решение, если использовать критерии Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и минимаксный критерий.

Задание 13. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение августа – сентября на единицу продукции составили: платья – 7 ден. ед., костюмы – 28 ден. ед. Цена реализации составляет 15 и 50 ден. ед. соответственно.

По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1950 платьев и 610 костюмов, а при прохладной погоде – 630 платьев и 1050 костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции в условиях неопределенности.