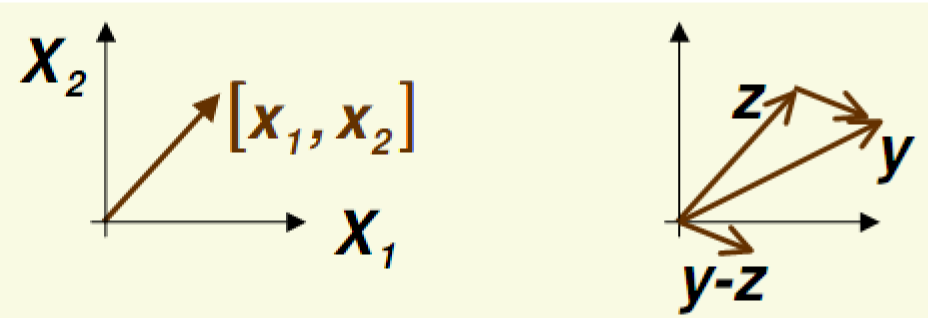
Doğrusal Cebir

Samsun – 2011

Neden Doğrusal Cebir?

- Her bir veri noktası, öznitelik kümesi
  - data_i ➔ feature_i
  - [uzunluk, ağırlık, renk, ...]
- Toplanan veri, öznitelik vektör koleksiyonuyla temsil edilir
  - [l1,w1,c1,...], [l2,w2,c2,...],...
- Doğrusal model, basittir ve hesaplanabilirdir

Vektörler



- N-boyutlu satır vektörü $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$
- Transpoz et

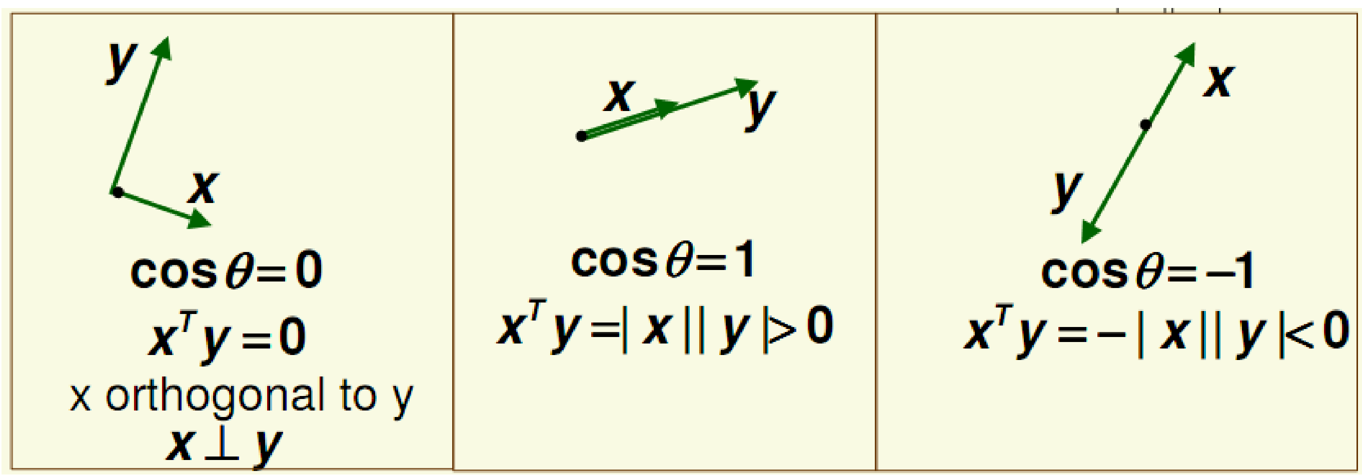
$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Vektör/iç/nokta çarpımı

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1..k} x_i y_i$$

Vektörler +

- Euclid normu/uzunluğu $\left| x \right| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1\ldots n} x_i^2}$
- Eğer |x|=1 ise, normalize/birim uzunluk
- x ve y vektörleri arasındaki açı theta ise $\cos\theta = \dfrac{x^T y}{|x||y|}$

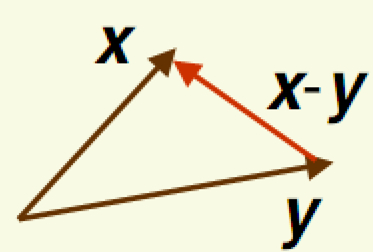


- Bu iç çarpım x ve y arasındaki yönü yakalar

Vektör ++

- Orthogonal ve |x|=|y|=1 ise orthonormal vektörlerdir
- x ve y vektörleri arasındaki Euclid mesafesi

$$\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right| = \sqrt{\sum_{i=1\ldots n}\left(x_i - y_i\right)^2}$$



Doğrusal bağımlılık/bağımsızlık

- Herhangi birisi diğerleri cinsinden ifade edilebiliyorsa doğrusal bağımlıdır denilir

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0$$

- Eşitlik tüm katsayıların sıfır olmasıyla sağlanabiliyorsa doğrusal bağımsızdır denilir

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Vektör uzayları ve bazlar

- n-boyutlu vektör kümesi V-vektör uzayı olarak adlanır
- Bu uzaydaki herhangi bir vektörü ifade etmede kullanılan [u1,u2,...,un] vektör kümesine baz vektörler denilir $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n$
- u1,u2,...,un doğrusal bağımsızdır
- Birbirilerine dik ve genlikleri bir ise orthonormaldir

Matrisler

- nXm matris ve onun transpozu

$$
A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1m} & x_{2m} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}
$$

Matris çarpımı

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nd} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ b_{31} & \cdots & b_{3m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{d1} & \cdots & b_{dm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}=C$$

$$c_{ij}=\left\langle a^i, b_j \right\rangle$$

a^i is row i of A
b_j is column j of B

- A2nın sütun sayısı = B’nin satır sayısı
- AB <> BA

Matrisler

- Matrisin rankı, doğrusal bağımsız satır/sütun sayısıdır
- Rank=satır sayısı ise kare matris tekil olmayandır. Rank daha düşükse, tekil olarak adlanır.
- Birim matris-I
- Transpozu kendisine eşit matris simetriktir: A=A’

matrisler

- Şartı sağlayan matris pozitif tanımlıdır

$$x^T A x = \sum_{i,j} A_{i,j} x_i x_j > 0$$

- Pozitif-yarı tanımlıdır

$$x^T A x = \sum_{i,j} A_{i,j} x_i x_j \geq 0$$

- A-kare matrisinin izi, köşegen üzerindeki elemanlar toplamıdır

$$tr[A] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

matrisler

- Matrisin tersiyle çarpımı birim matristir
- Tekil ve karesel olmayan matrisin tersi yoktur. Sözde tersinden ise A'A tekil değilse söz edilebilir

- $A^{\dagger} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$
- $A^{\dagger}A = (A^{T}A)^{-1}A^{T}A = I$

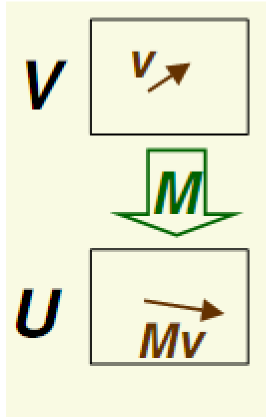
Matrisler

- nXn kare matrisin determinantı

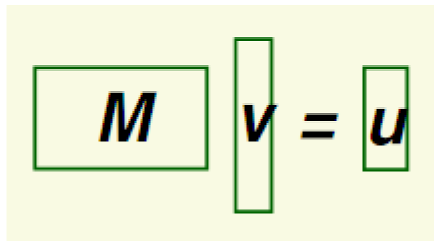
$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(A_{ik})$$

  – Bura A_ik: i. satır ve k. sütun uzaklaştırılarak elde edilen matristir

Doğrusal Dönüşümler

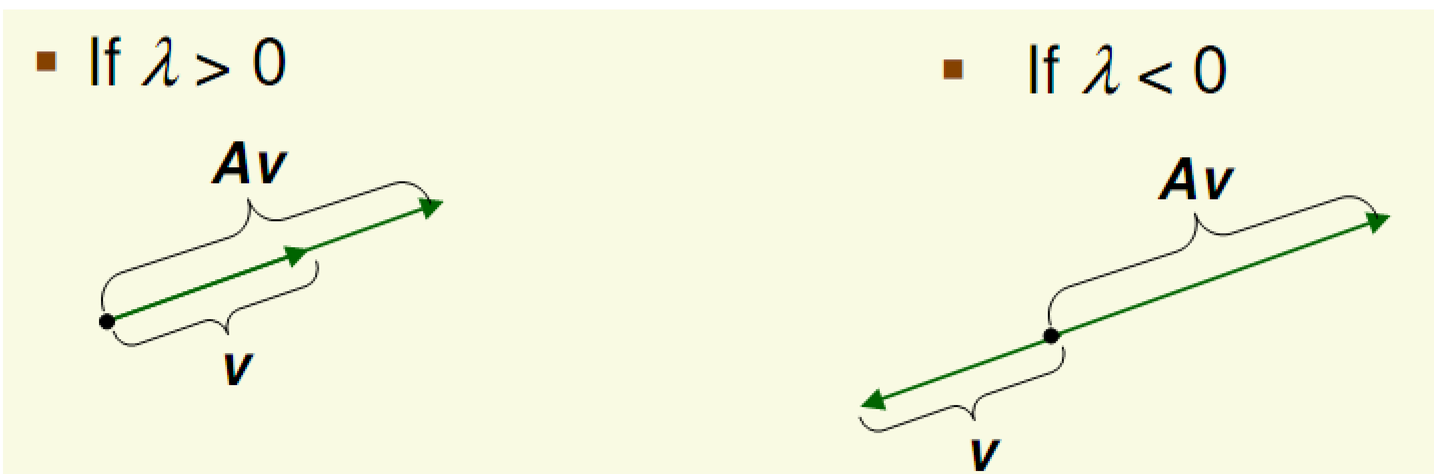


- V vektör uzayından U uzayına doğrusal dönüşüm, M-haritalama matrisiyle temsil edilebilir
  - u = M v
- U ve V aynı boyutlu ise M karedir
- Örüntü tanımada U daha küçük boyutludur. Örneğin öznitelik azaltma



Özdeğerler ve özvektörler

- nXn boyutlu A matrisi ve sıfırdan farklı x-vektörü verilsin
  - Eşitliğini sağlayan lambda varsa $\boxed{Ax = \lambda x}$
  - x, A'nın özvektörü
  - Lambda ise özdeğeri olarak adlanır
- Doğrusal dönüşüm A, v-özvektörünü haritalar. Lambda genliği ve yönü değiştirir



Özdeğerler ve özvektörler

- A gerçel ve simetrikse, tüm özdeğerler gerçeldir
- A tekil değilse, tüm özdeğerler sıfırdan farklıdır
- A pozitif tanımlıysa tüm özdeğerler pozitiftir

Matlab

- Starting matlab
  - xterm -fn 12X24
  - matlab
- Basic Navigation
  - quit
  - more
  - help general
- Scalars, variables, basic arithmetic
  - Clear
  - + - * / ^
  - help arith
- Relational operators
  - ==,&,|,~,xor
  - help relop
- Lists, vectors, matrices
  - A=[2 3;4 5]
  - A'
- Matrix and vector operations
  - find(A>3), colon operator
  - * / ^ .* ./ .^
  - eye(n),norm(A),det(A),eig(A)
  - max,min,std
  - help matfun
- Elementary functions
  - help elfun
- Data types
  - double
  - Char
- Programming in Matlab
  - .m files
  - scripts
  - function y=square(x)
  - help lang
- Flow control
  - if i== 1else end, if else if end
  - for i=1:0.5:2 … end
  - while i == 1 … end
  - Return
  - help lang
- Graphics
  - help graphics
  - help graph3d
- File I/O
  - load,save
  - fopen, fclose, fprintf, fscanf