Nokta İşlemleri

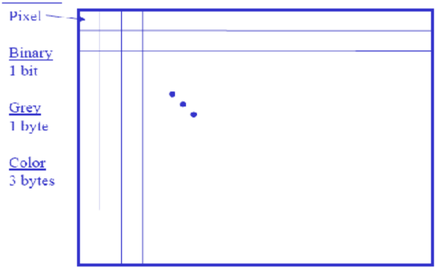
Nurettin Şenyer

19/x

Şubat, 2011

İçindekiler

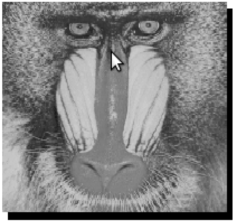
Resim Temsili

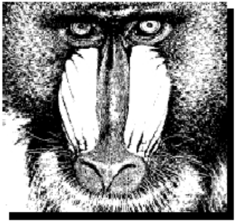


- Resim == Matris; Piksel == Eleman == Calc:hücre
- :: Matrisler vektörlerden oluşur-Cebir
- Her bir piksel parlaklık değeriyle ölçülür
- :: sensör üzerine düşen ışık miktarı
- :: demo: *ccd_anim.gif*

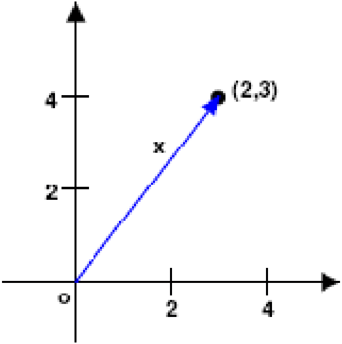
Resim Temsili


RGB


Greyscale

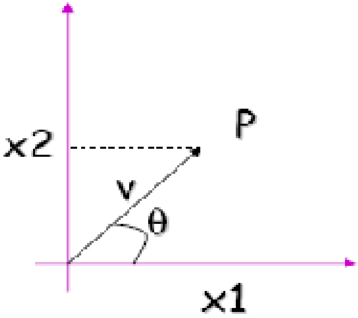

Binary

Sayılar kümesi: $x \in R^n$, $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$

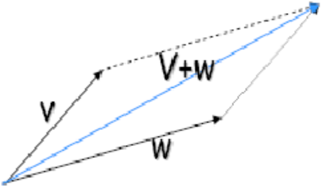


Örnek: noktanın koordinat gösterimi

- 2D Vektör: $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$
- Genlik: $||v|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- Eğer $||v|| = 1$ ise, **BİRİM** vektör
- Açı değeri $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$

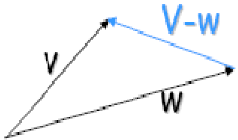


$v + w = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) =$
$(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$



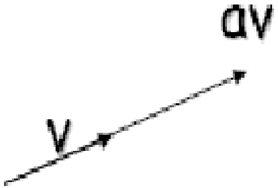
Vektörler: Çıkartma

$$v - w = (x_1, x_2) - (y_1, y_2) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$$



Vektörler: Çarpma

$$a \cdot v = a \cdot (x_1, x_2) = (a \cdot x_1, b \cdot x_2)$$



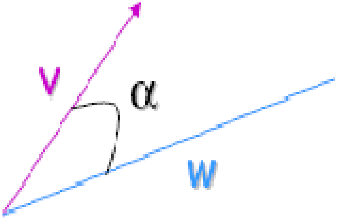
Vektörler: İç (nokta) çarpımı

$v \cdot w = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) =$
$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

İç çarpım sonucu **SKALAR**

$v \cdot w = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) =$
$||v|| \cdot ||w|| \cdot cos\alpha$

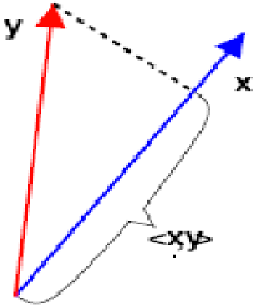
$v \cdot w = 0 \Leftrightarrow v \perp w$



Example

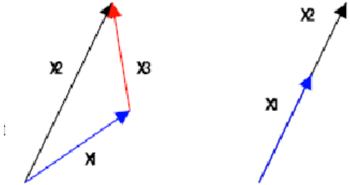
v=[1 2 3]; w=[4 5 6]; dot(v,w), v * w'

Bir noktanın diğerine yansıtılması (iz düşürülmesi),

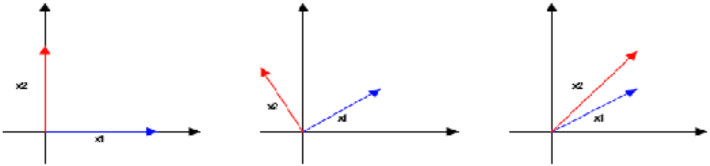


farklı gösterimler vardır:
$< x, y >$, $x^T y$, xy veya $x \cdot y$

Eğer x_3, x_1 ve x_2'nin doğrusal kombinasyonuyla elde edilebiliyorsa **doğrusal bağımlıdır** denilir.



- tüm uzayı tarayan, doğrusal bağımsız vektörler kümesi **baz** olarak adlanır.
- bu uzayda ki her vektör, bu bazların doğrusal kombinasyonuyla yazılabilir
- R^n'de n doğrusal bağımsız vektör kümesi, R^n'nin bazıdır
- Eğer $dot(x, y) = 0$ ise x ve y **orthogonaldir**
- aynı zamanda $||x|| = ||y|| = 1$ ise **orthonormaldir**
- baz vektörleri orthogonaldir ve eğer birim uzunlukluysalar orthonormaldir



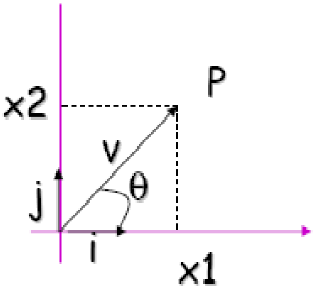
Baz

- R^n'deki standart bazları (birim vektörler)
- :: $e_i \in R^n : e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$
- :: yani i. elemanı hariç 0'dır
- herhangi bir vektörü standart bazlar cinsinden şöyle yazarız
- :: $[473]^T = 4 \cdot e_1 + 7 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$
- kısaca: $x_i = dot(x, e_i)$ yani vektörü baza yansıt
- Benzer kavram: FFT:sinüslere ayrıştırma
- Benzer kavram: DCT bazları

Example

x = [4 7 3]; e1 = [1 0 0]; e2 = [0 1 0]; e3 = [0 0 1]; dot(x, e1)

Baz



$$i = (1, 0), ||i|| = 1$$

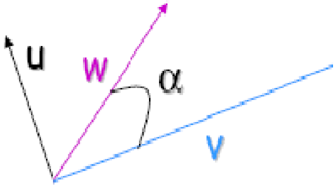
$$j = (0, 1), ||j|| = 1$$

$$dot(i, j) = 0$$

$$v = (x_1, x_2) = x_1 \cdot i + x_2 \cdot j$$

$$v \cdot i = ... = x_1$$

$$v \cdot j = ... = x_2$$



$u = v \times w$

Çapraz çarpım **VEKTÖR** üretir.

- Genlik: $||u|| = ||v \cdot w|| = ||v|| \cdot ||w|| \cdot sin\alpha$
- Yön: $u \perp v \Rightarrow u \cdot v = (v \times w) \cdot v = 0$
- Yön: $u \perp w \Rightarrow u \cdot w = (v \times w) \cdot w = 0$
- Yani u, hem v hem de w'ye diktir.

Dikkat

$x \times y$ ile $y \times x$ birbirinden farklıdır!

Example

v = [1 2 3]; w = [4 5 6]; u = cross(v, w)

Toplama: $C_{nxm} = A_{nxm} + B_{nxm}$

Example (2 5; 3 1)

$+$ [6 2; 1 5]

Çarpma: $C_{nxp} = A_{nxm} + B_{mxp}$

Görüntülerde genelde nokta çarpımı kullanılır ve A resimse, B maskedir

Example (2 5; 3 1)

.* [6 2; 1 5]

Ayrıca: transpoze, determinant (det), ters hesaplaması (inv)

- matrisin rankı, doğrusal bağımsız satır veya sütun sayısıdır
- Ör. $rank([11; 01])$ matrisi 2 rankına sahipken, $rank([21; 42])$ matrisi 1 rankına sahiptir
- matris tam ranklıysa, **non-singular** (tekil olmayan) adlanır
- tekil matrisin determinantı 0'dır

- $\lambda \in R$ olmak koşuluyla
- :: $A \cdot x = \lambda \cdot x$
- eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı tüm x vektörlerine A'nın özvektörü denir
- λ ise ilişkili özdeğerdir
- burada özvektörün, Matrisi bir skalarla eşleştirdirdiğine/indirgediğine dikkat edin
- :: $MATRIS \cdot x = SKALAR \cdot x \Leftrightarrow MATRIS == SKALAR$

- Eşitliği düzenlersek,
- :: $(A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$
- buna karakteristik polinom denir
- burada $x \neq 0$ olduğundan ve $A - \lambda \cdot I$ tam ranklı olması mümkün olmadığından, $det(A - \lambda \cdot I) = 0$ olmalıdır
- Eğer $B = T\{A\}$ ise (aralarında doğrusal ilişki varsa) karakteristik polinomları **aynıdır**
- bu polinomun kökleri özdeğerleri verir
- özdeğerler yerine konulduğunda özvektör elde edilir

Example

A = [2 3; 2 1]; [V, D] = eig(A)

Özdeğer Ayrıştırma

- Her gerçel, kare, simetrik A matrisi,
- :: $A = V \cdot D \cdot V^T$
- biçiminde ayrıştırılabilir. Burada V özvektörleri, D özdeğerleridir
- Özdeğer Ayrıştırma, Tekil Değer Ayrıştırmanın (SVD), kısıtlı versiyonudur

Example

A = [2 3; 2 1]; [V, D] = eig(A); V * D * V'

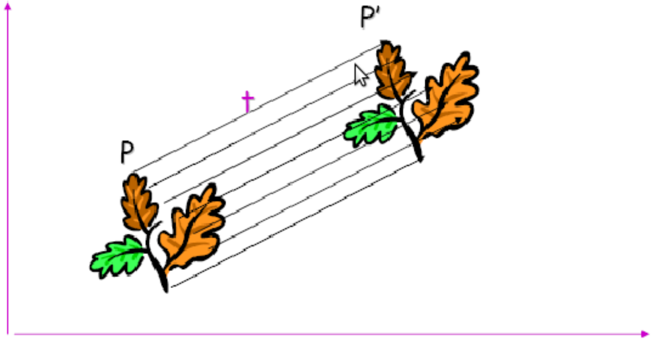
Tekil Değer ($\approx$ özdeğer) Ayrıştırma (SVD)

- $A \in R^{nxm}$ iken,
- :: $A \cdot v = \lambda \cdot u$ ve $A^T \cdot u = \lambda \cdot v$
- şartını sağlayan (burada $u \in R^n$ ve $v \in R^m$) u ve v varsa,
- $\lambda \leq 0$'a A'nın **tekil değeri** denilir
- Herhangi bir $A \in R^{nxm}$ matrisi
- :: $A = U \cdot \sum \cdot V^T$
- biçiminde ayrıştırılabilir burada $U \in R^{mxm}$ ve $V \in R^{nxn}$ ve orthonormaldir.
- $\sum$ ise tekil değerler matrisidir

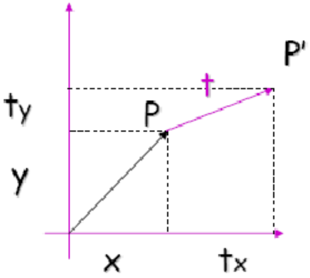
- :: $A = U \cdot \sum \cdot V^T$
- $L = AA^T$ ve $C = A^T A$ dersek
- V matrisi L'nin ve U matrisi C'nin özvektörleridir ve
- $u_i = A \cdot v_i$ ilişkisi vardır

$A = U \cdot \sum \cdot V^T$ ifadesindeki $U, \sum veV$'nin Hesap Aşamaları:

- $L = AA^T$ ve $C = A^T A$ matrislerini hesapla
- $[V, D] = eig(LveyaC)$ özdeğer/özvektörleri hesapla
- L'nin özvektörü U, C'nin özvektörü V'dir
- $\sum$'ı elde etmek için, özdeğerleri büyükten küçüğe doğru sırala (mutlak genlik olarak), karekökünü hesapla, köşegene yerleştir
- "reduced SVD" nedir? Çalışma sorusu

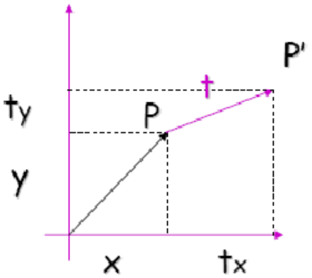


Bu işin iki yönü var: görüntüyü kaydırma, görüntüdeki kaymayı belirle



$$P = (x, y) \text{ ve } t = (t_x, t_y)$$

$$P' = (x + t_x, y + t_y) = P + t$$



$$P = (x, y) \text{ ve } t = (t_x, t_y)$$

$$P' \rightarrow \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

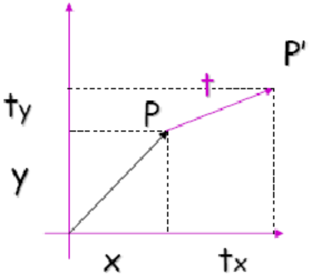
kartezyen - homojen koordinat dönüşümü

$$(x, y) \rightarrow (x \cdot z, y \cdot z, z), z \neq 0$$
$$(x, y, z) \rightarrow (x \cdot w, y \cdot, z \cdot w, w), w \neq 0$$

$$(t_x, t_y) \rightarrow (t_x, t_y, 1)$$

Ters dönüşüm

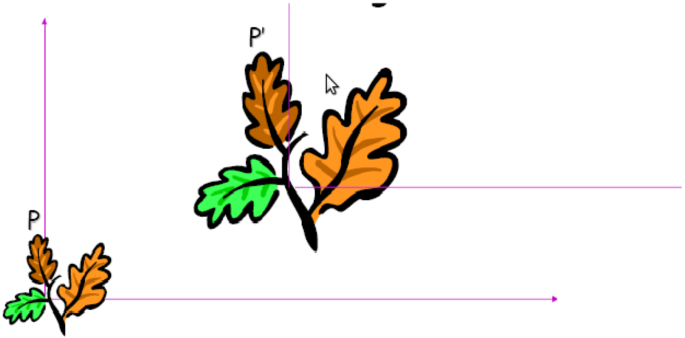
$$(x, y, z), z \neq 0 \rightarrow (x/z, y/z)$$
$$(x, y, z, w), w \neq 0 \rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

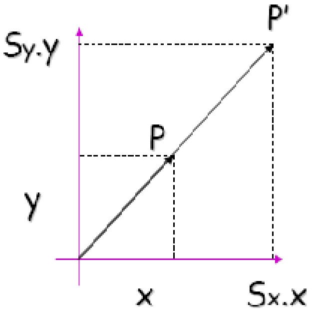


$P = (x, y) \rightarrow (x, y, 1)$ ve
$t = (t_x, t_y) \rightarrow (t_x t_y, 1)$

$$P' \rightarrow \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad P' = T \cdot P$$

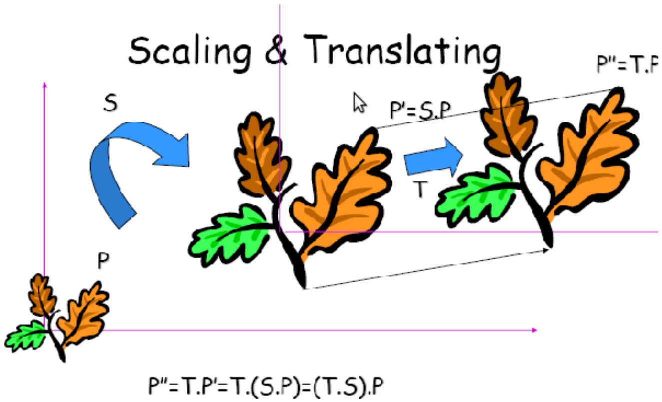
Geometrik Dönüşümler: ölçekleme





$P = (x, y) \to (x, y, 1)$ ve $P' = (s_x \cdot x, c_y \cdot y, y) \to (s_x \cdot x, s_y \cdot y, 1)$

$$P' \to \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad P' = S \cdot P$$



$$P'' = T \cdot P' = T \cdot (S \cdot P) = (T \cdot S) \cdot P$$

$$P'' = T \cdot P' = T \cdot (S \cdot P) = (T \cdot S) \cdot P$$

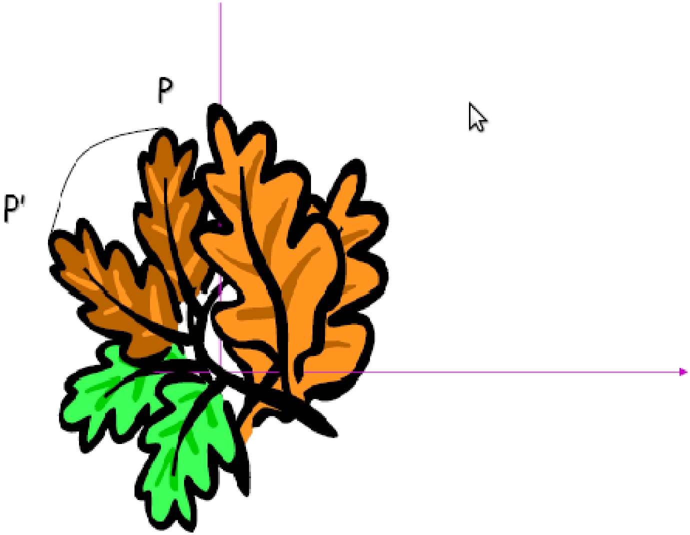
$$P'' = T \cdot S \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'' = \begin{bmatrix} s_x & 0 & t_x \\ 0 & t_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x + t_x \\ s_y \cdot y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

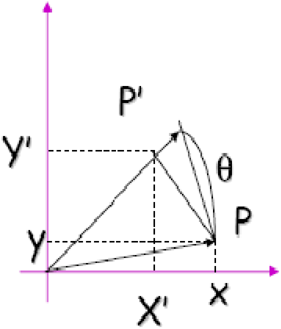
Geometrik Dönüşümler: sıra önemlidir

$$P'' = S \cdot T \cdot P \neq T \cdot S \cdot P$$

Geometrik Dönüşümler: dönme



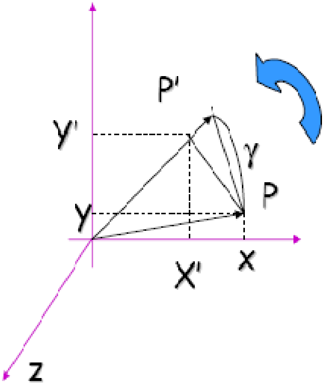
θ açısı kadar saat yönünde döndür,



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = R \cdot P$$

Koordinat ekseni etrafında, saat yönünde döndür



$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \ldots$$