

ÇOKLU ÖLÇEKLİ GÖRÜNTÜ İŞLEME

- Görüntülerin ölçek-uzay gösterimi
- Çok ölçekli öznitelik algılama
- Gaus ve Laplace piramidleri
- Bazı Laplace piramidi uygulamaları
- Ayrık dalgacık dönüşümü
- Dalgacık kuramı
- Dalgacık görüntü sıkıştırma

Görüntülerin çok ölçekli gösterimleri

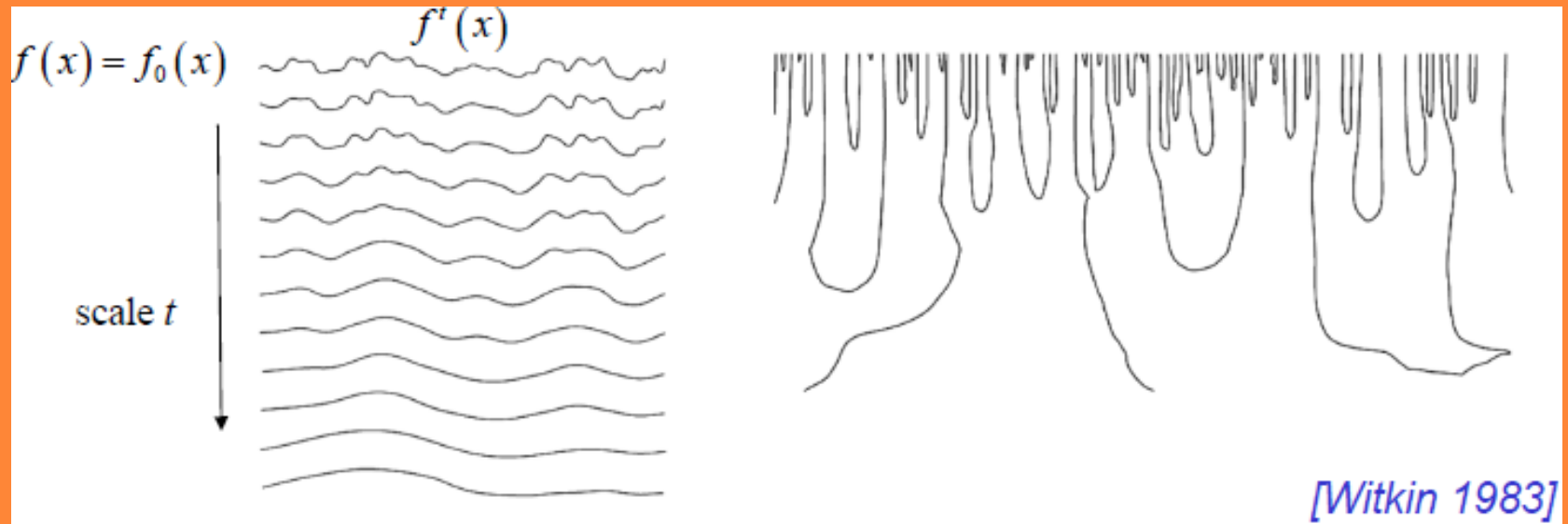
-Görüntü öznitelikleri tüm ölçeklerde benzer görünür



- Yön değişmezliğinin yanında, **ölçek değişmezliği** görüntü işleme algoritmalarında istenen bir özelliktir.
- Çok ölçekli gösterimler hem yön değişmezliği, hem de ölçek değişmezliği algoritmalarının temelini oluşturur

Bir sinyalin ölçek-uzay gösterimi

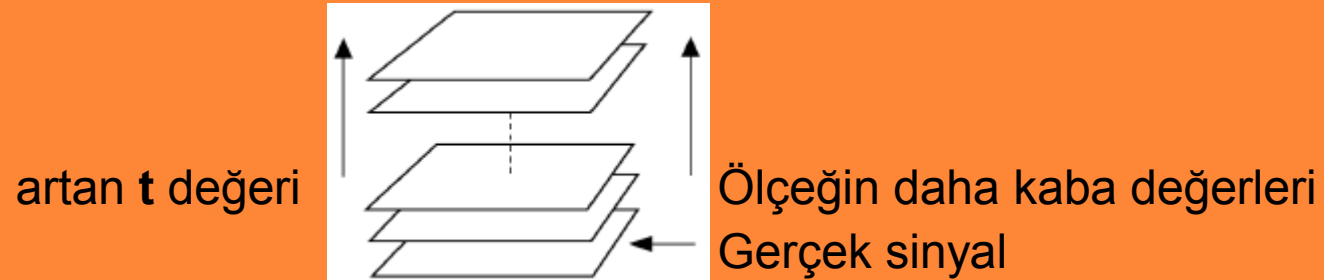
Bir $f(x)$ sinyalinden, en iyi ölçek(fine-scale) bilgisinin başarılı biçimde bastırıldığı parametrik sinyaller grubu türetilir



Gaus filtresiyle başarılı bir düzleştirme sonucu oluşan sinyaller grubu

2nci türevin sıfır geçişleri: daha kaba ölçeklerde daha az öznitelik

Görüntülerin ölçek uzay gösterimi



-Gaus filtresiyle düzleştirilen görüntülerin parametrik grubu

$$f^t(x, y) = g^t(x, y) * f(x, y); t \geq 0 \quad \text{with} \quad g^t(x, y) = \frac{1}{2\pi t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right)$$

$$F^t(\omega_x, \omega_y) = G^t(\omega_x, \omega_y) F(\omega_x, \omega_y) \quad \text{with} \quad G^t(\omega_x, \omega_y) = \exp\left(-\frac{t}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)\right)$$

-Ölçek değişmezliği

$$f^t(x - \Delta x, y - \Delta y) = g^t(x, y) * f(x - \Delta x, y - \Delta y)$$

-Rotasyon(Dönü) değişmezliği

$$f^t(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) = g^t(x, y) * f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

Görüntülerin ölçek uzay gösterimi

-Sırabagimsiz yarıgrup özelliği

$$\begin{aligned}f^{t1+t2}(x,y) &= g^{t1}(x,y) * f^{t2}(x,y) \\&= g^{t2}(x,y) * f^{t1}(x,y) \\&= g^{t1}(x,y) * g^{t2}(x,y) * f(x,y)\end{aligned}$$

-Ayrıştırılabilirlik

$$\begin{aligned}g^t(x,y) &= \frac{1}{2\pi t} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \\G^t(\omega_x, \omega_y) &= \exp\left(-\frac{t}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)\right) = \exp\left(-\frac{t}{2}\omega_x^2\right) \exp\left(-\frac{t}{2}\omega_y^2\right)\end{aligned}$$

Görüntülerin ölçek uzay gösterimi

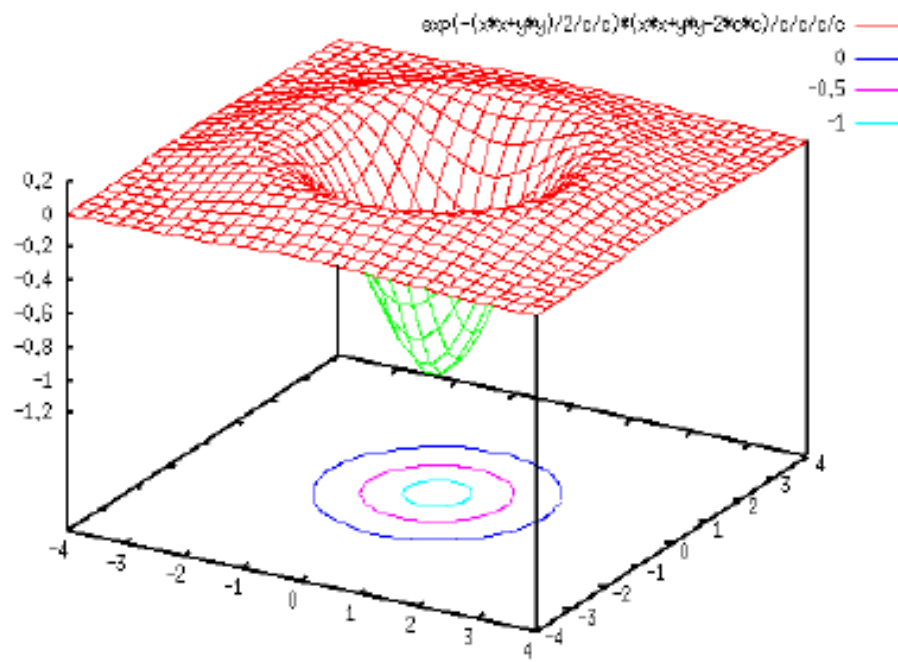
- $g^t(x, y) \geq 0$ ve tek doruklu olduğundan yerel eksteremumun ($f(x, y)$ ve tüm kısmi türevlerinin) oluşmaması (non-creation)
- Difüzyon eşitliğine çözüm

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(x, y) = \frac{1}{2} \nabla^2 f^t(x, y)$$

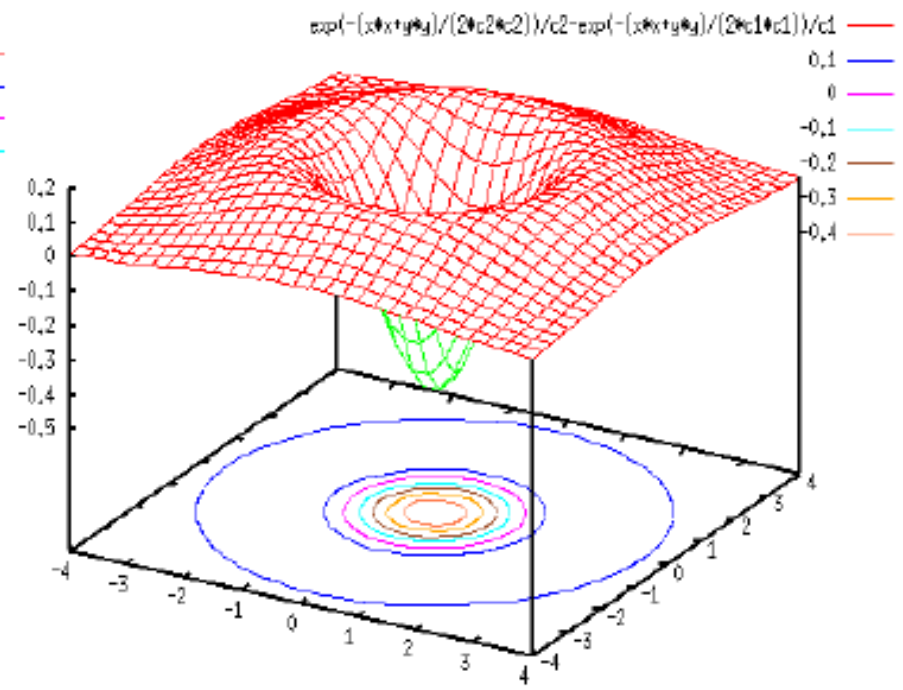
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F^t(\omega_x, \omega_y) &= \frac{\partial}{\partial t} G^t(\omega_x, \omega_y) F(\omega_x, \omega_y) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \exp\left(-\frac{t}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)\right) F(\omega_x, \omega_y) \\ &= -\frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) \exp\left(-t(\omega_x^2 + \omega_y^2)\right) F(\omega_x, \omega_y) \\ &= -\frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) F^t(\omega_x, \omega_y) \end{aligned}$$

Gaus Laplace'ı ve Gaus Farkı

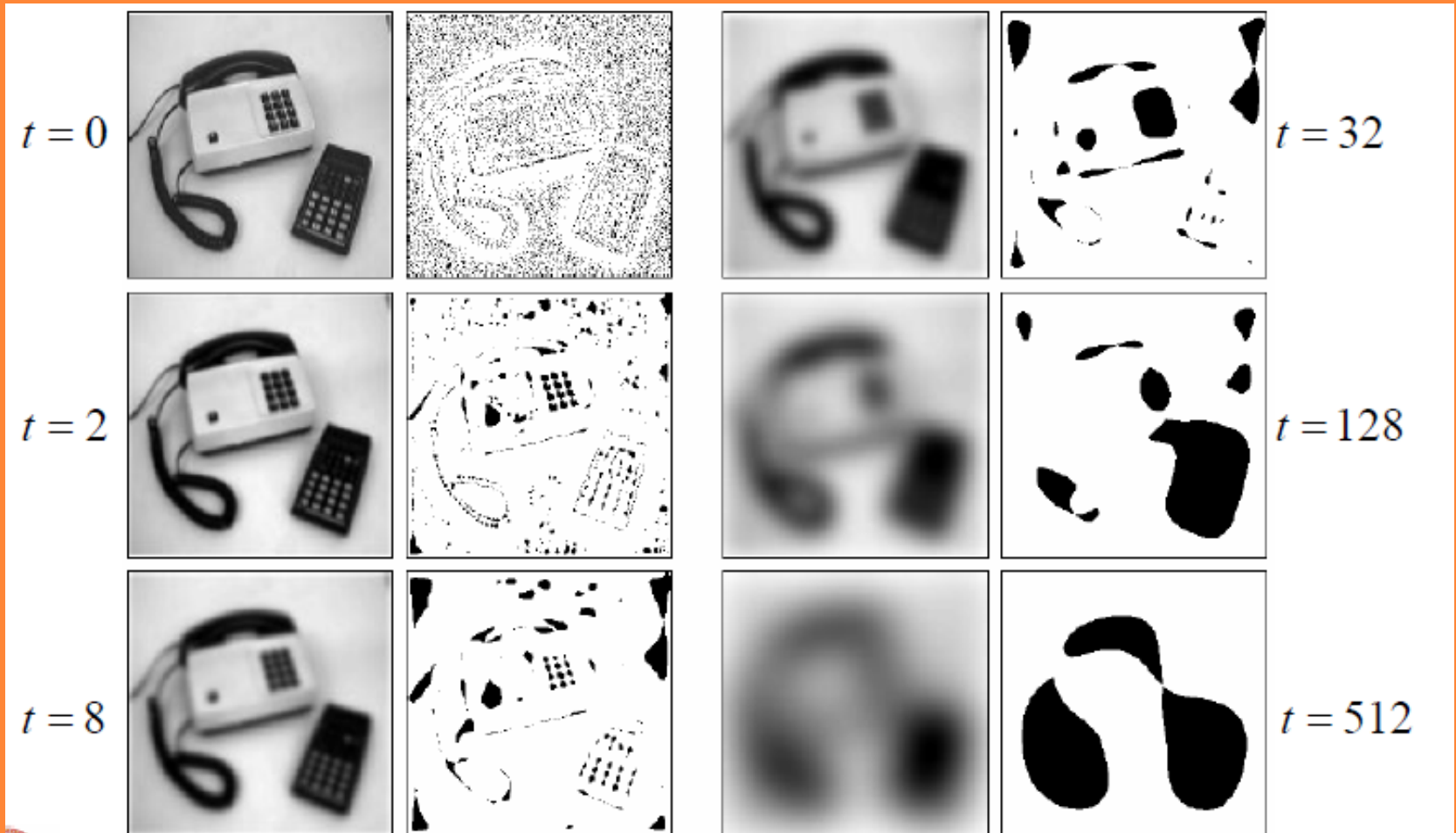
Laplacian of Gaussian



Difference of Gaussians

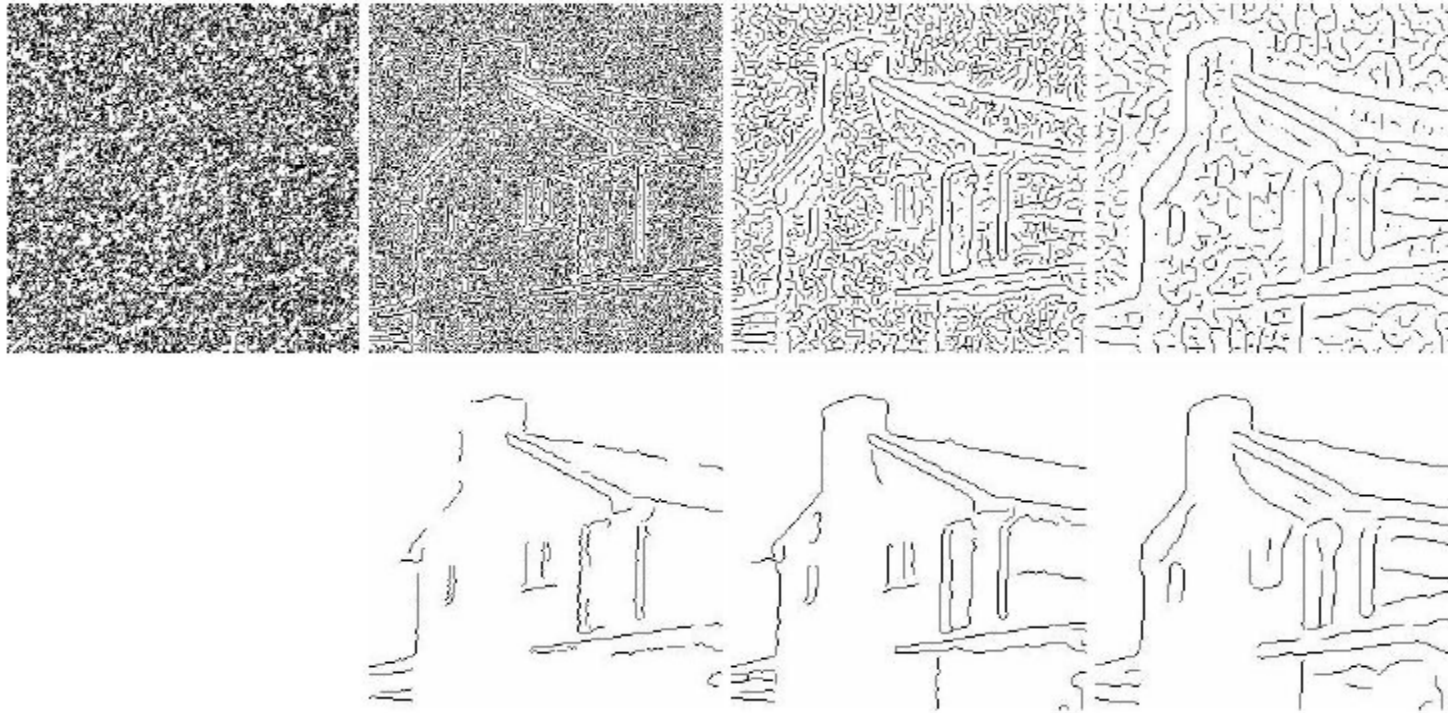


Ölçek uzay ve yerel minimum



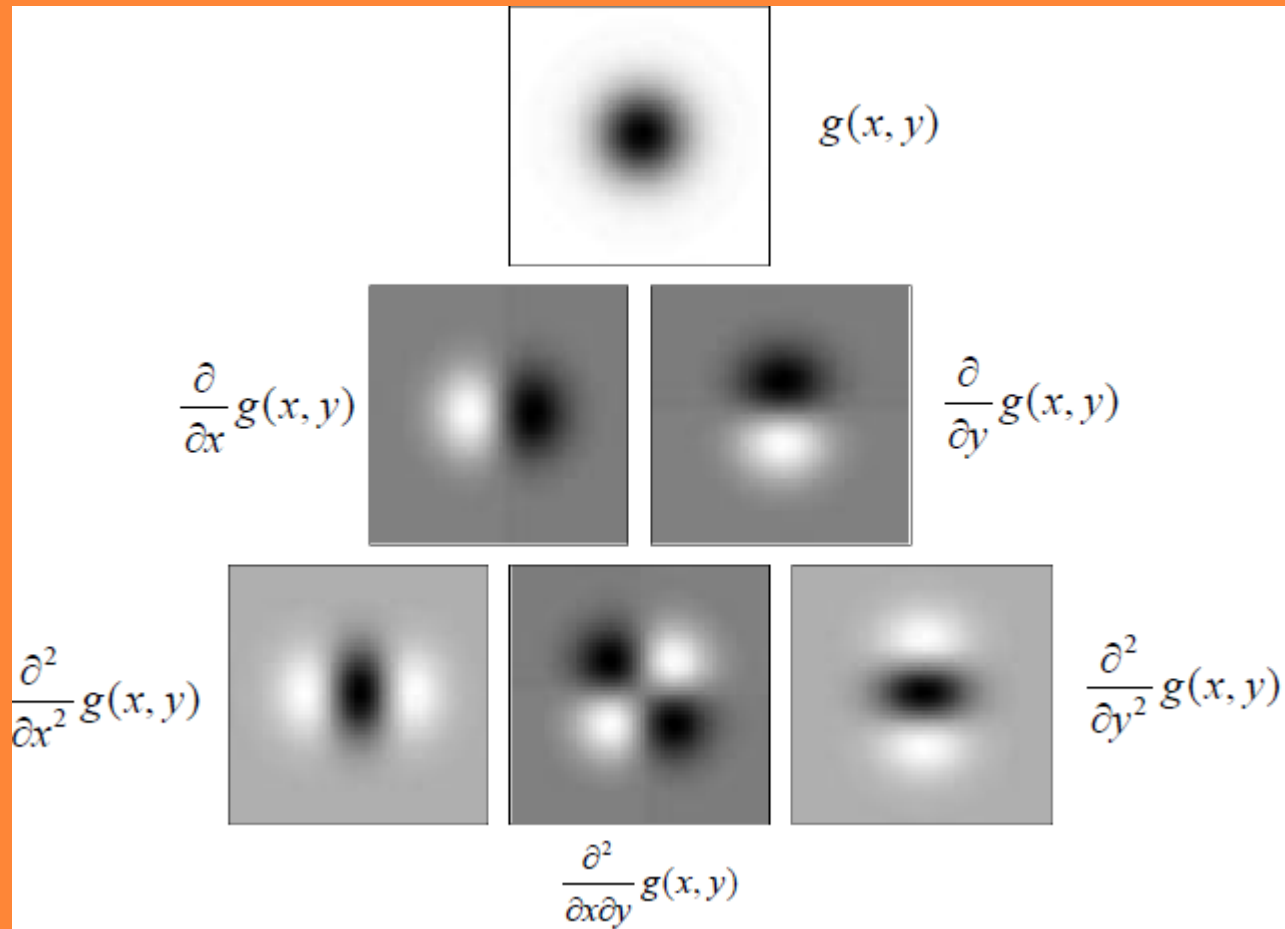
Çok ölçekli kenar algılama

Farklı ölçekli Laplace görüntülerinin sıfır geçişleri



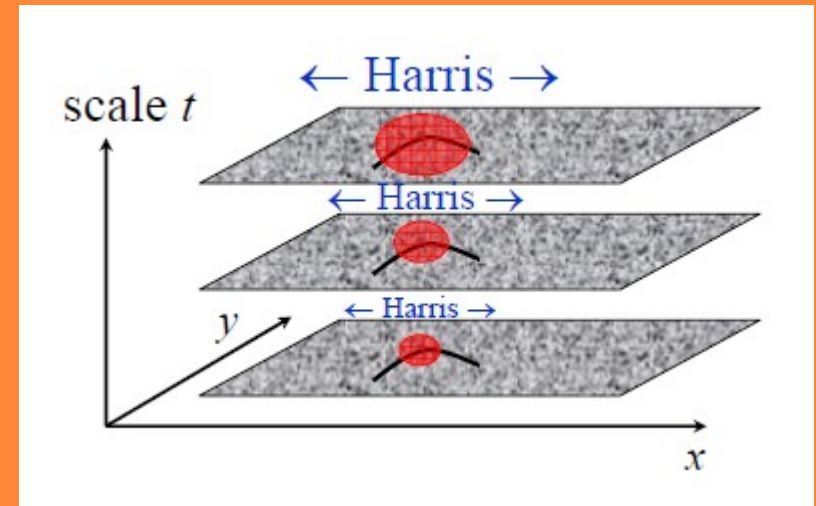
İstenmeyen kenarlar kaldırılmış

Gaus türevleri



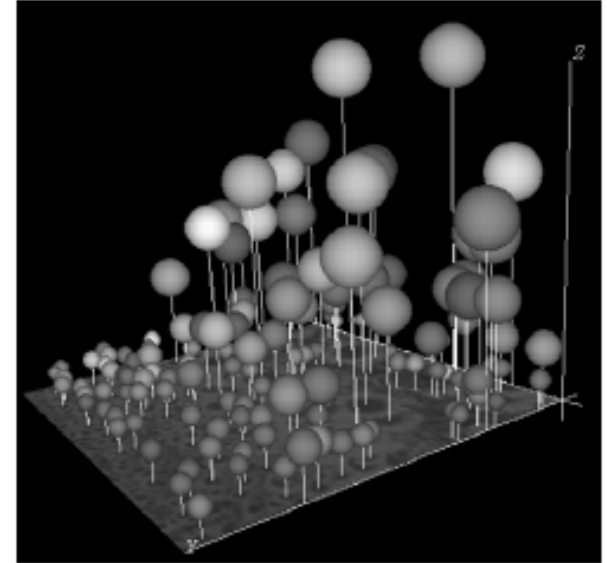
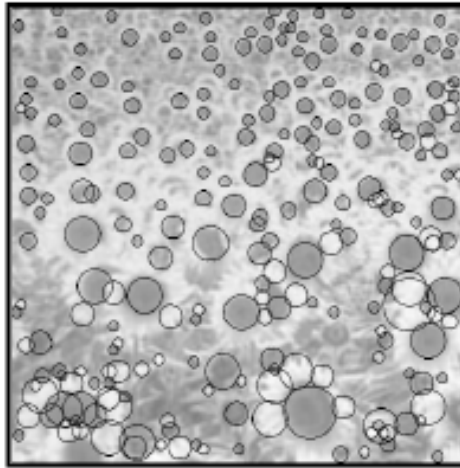
Otomatik ölçek seçimi ile imge bölgesi (Blob) algılama

- Ölçek uzay gösterimi tüm ölçekleri sağlar; anahtar nokta algılama için hangi ölçek en iyidir?
- Harris Laplace: Ölçeği normalize edilmiş Laplace'ın yerel $t \cdot \nabla^2 f^t(x, y)$ (x,y,t) maksimumunu algıla

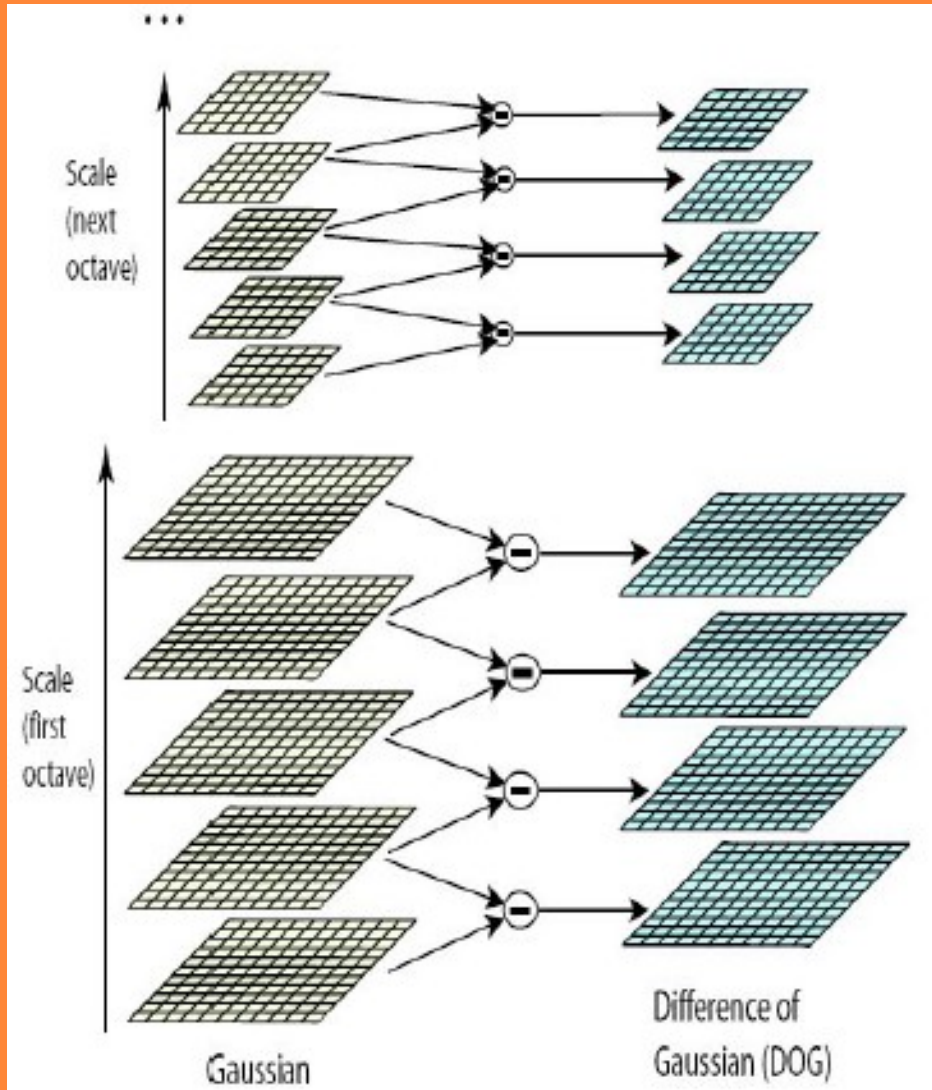


Otomatik ölçek seçimi ile imge bölgesi (Blob) algılama

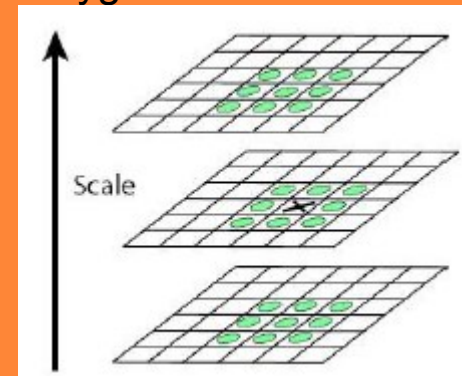
Harris Laplace örneği (200 en güçlü nokta)



SIFT imge bölgesi (Blob) algılama

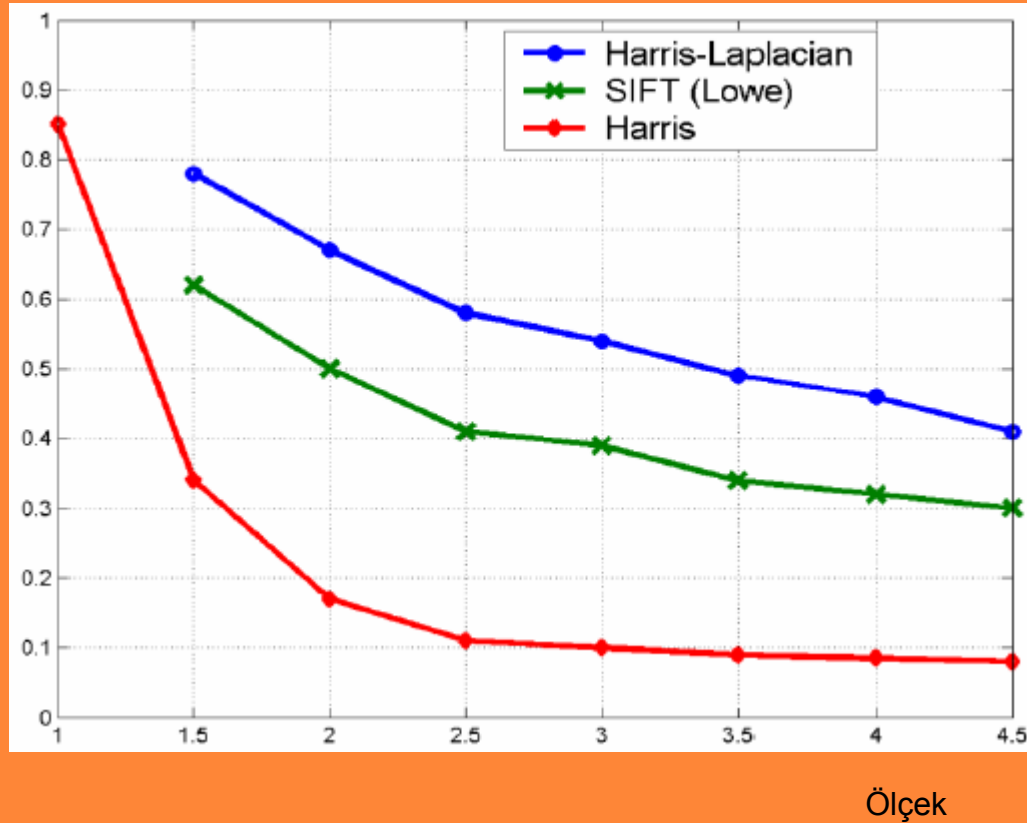


- SIFT(Ölçek Değişmezliği
ÖznitelikDönüşümü
- Görüntüyü ölçek uzay
gösterimine parçala
Maksimum yerel ve
yatay ölçekleri tespit et
- Karesel fonksiyonu , alt
piksel / alt ölçek
doğruluğunu maksimum
belirlemek için 3 boyutlu
uygula



Ölçeklemeye dayanıklılık

Tekrarlanabilme
Oranı



SURF imge bölgesi (Blob) algılama

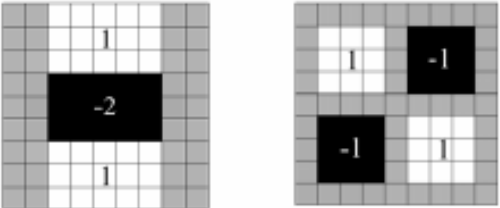
-SURF :Hızlandırılmış güçlü öznitelikler

-Hessian matrisine dayanır

$$\mathbf{H}^t(x, y) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f^t(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f^t(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f^t(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f^t(x, y) \end{bmatrix}$$

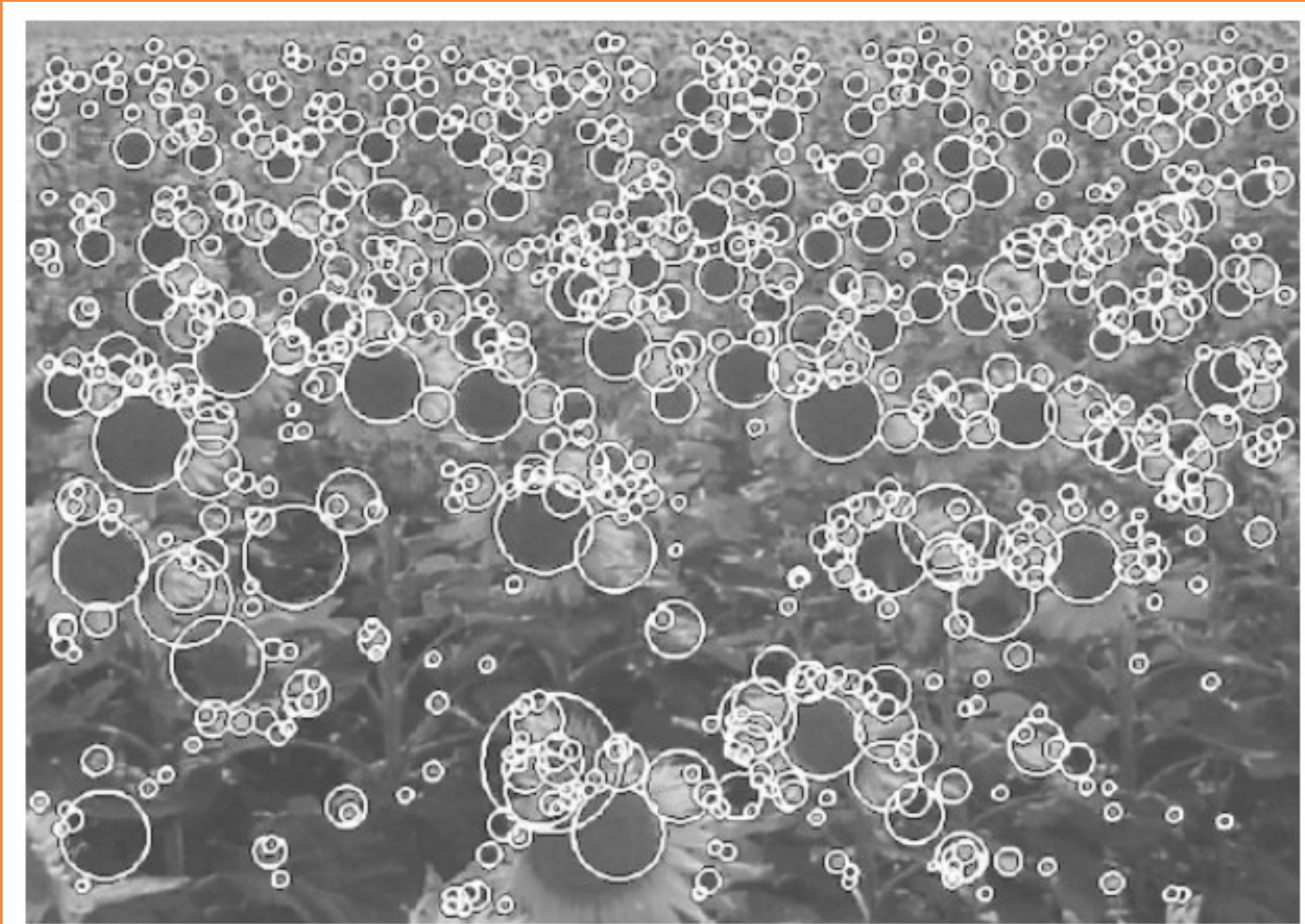
-Gaus türevleri basit yaklaşıklığı


$$\det(\mathbf{H}) \approx D_{xx}D_{yy} - (0.9D_{xy})^2$$

-3x3x3 komşulukta maksimum olmayan bastırma

-Det(H)'ın x,y görüntü uzayı ve t ölçeğindeki maksimumunun aradeğerlemesi

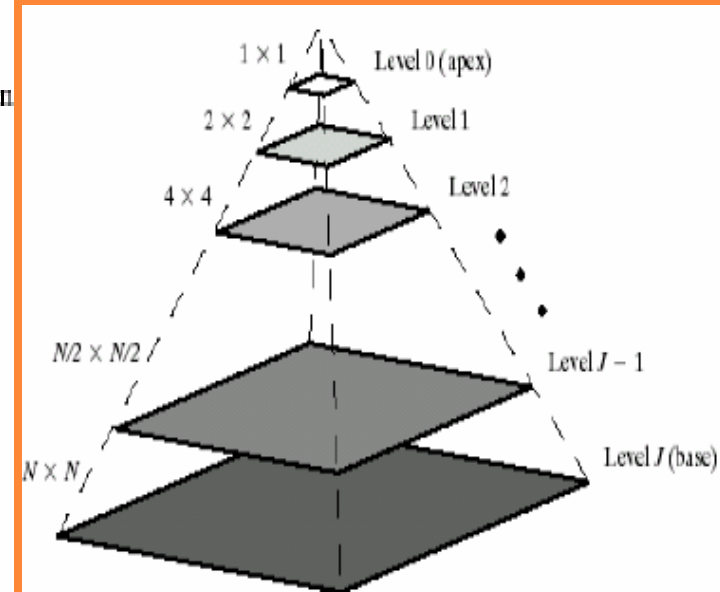
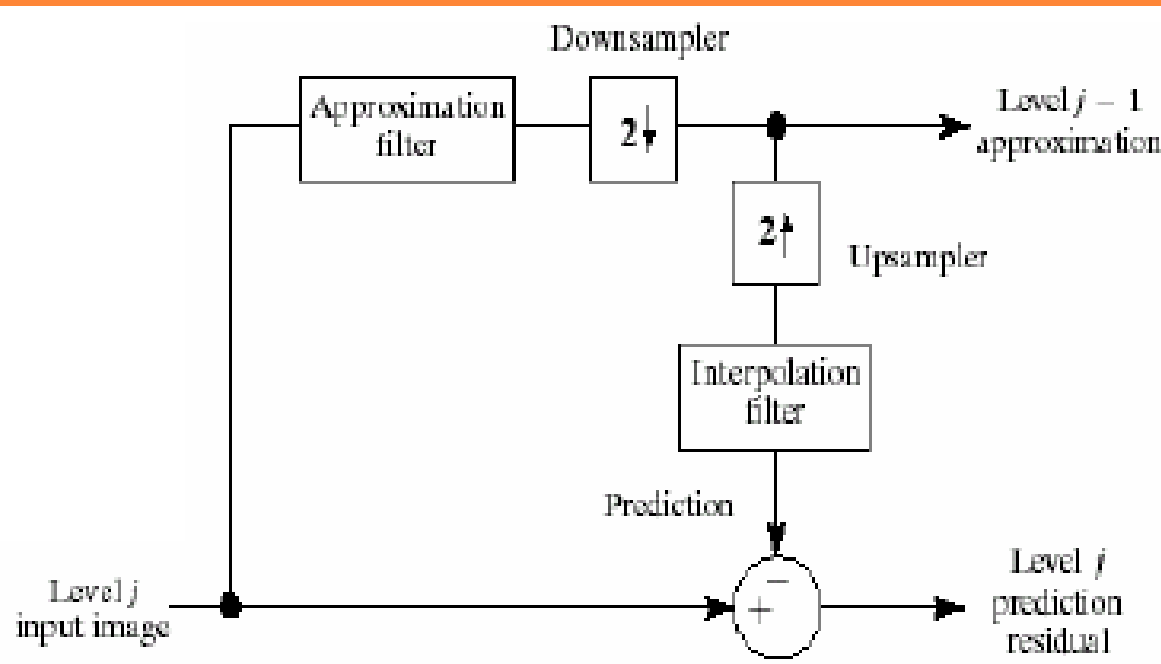
SURF imge bölgesi (Blob) algılama



Görüntü piramitleri

Yaklaşıklaama filtresi

Örnek seyreltici



[Burt, Adelson, 1983]

upsampler: örnek çoğaltıcı

interpolation: örnek çoğaltma

Grüntü piramidi örneği



Gaus piramidi
pramidi



Laplace

Aşkın tam gösterim

Laplace ya da Gaus piramidi örneklerinin sayısı=

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^P} \right) \leq \frac{4}{3}$$

X Gerçek görüntü
örneği sayısı

Laplace piramidiyle görüntü analizi

Girdi resim

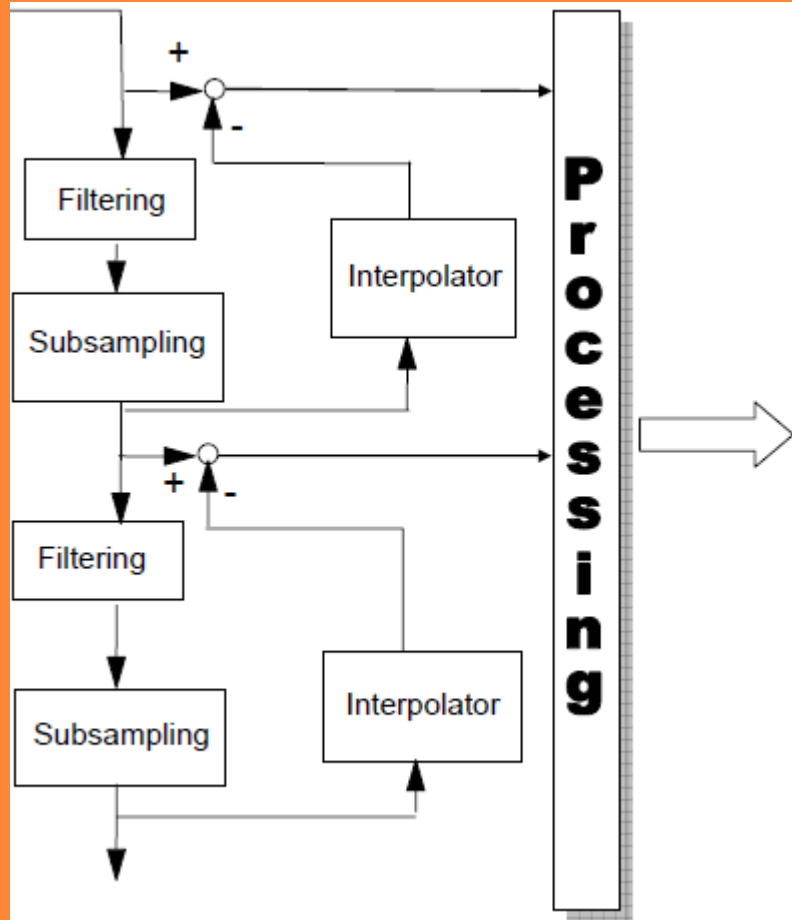
Filtreleme

Analysis

Örnek
seyrelt

Filtreleme

Örnek
seyreltme



Tanımlama/
Algılama/
Bölütleme
Sonuç

interpolator: örnek çoğaltıcı işleme

Gaus piramdi yüz algılama

girdi görüntü piramidi

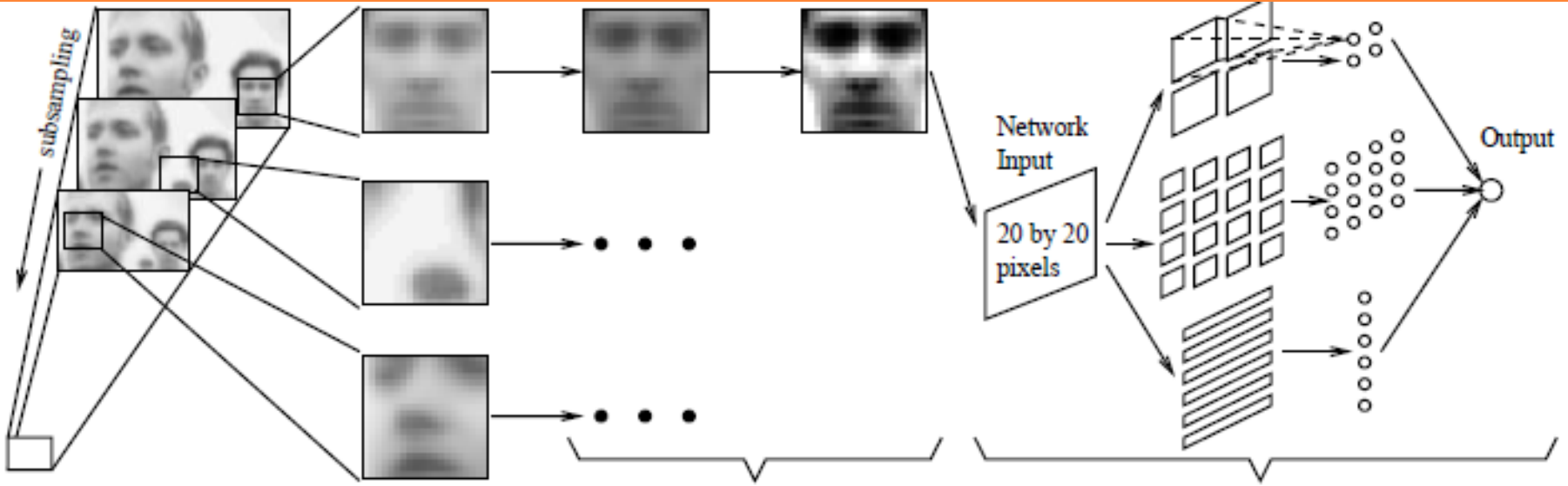
çıkarılan pencere
(20 by 20 piksel)

doğru
aydınlatma

histogram
denkleştirme

alıcı
sahalar

saklı üniteler



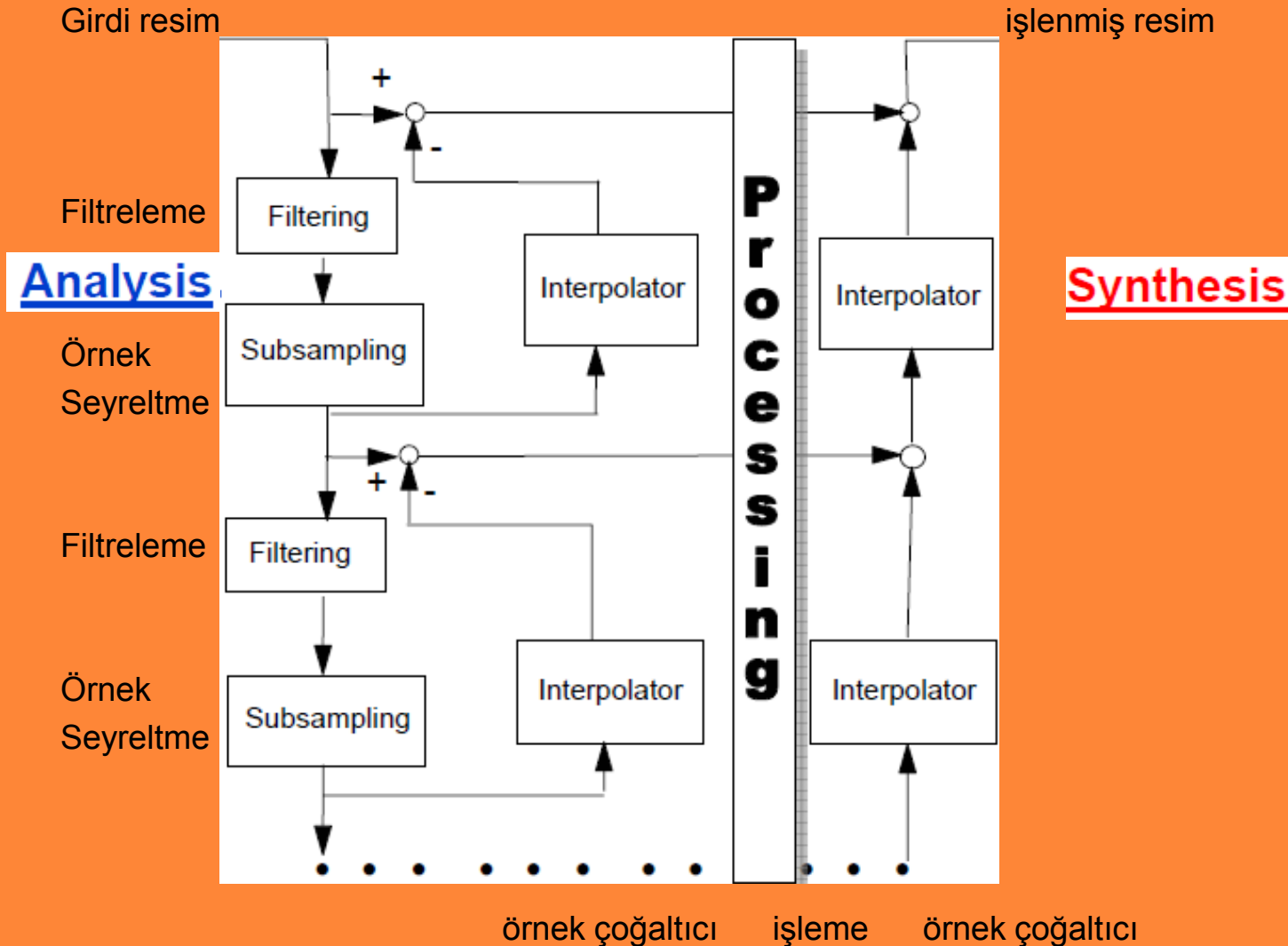
Örnek seyreltme

işleme

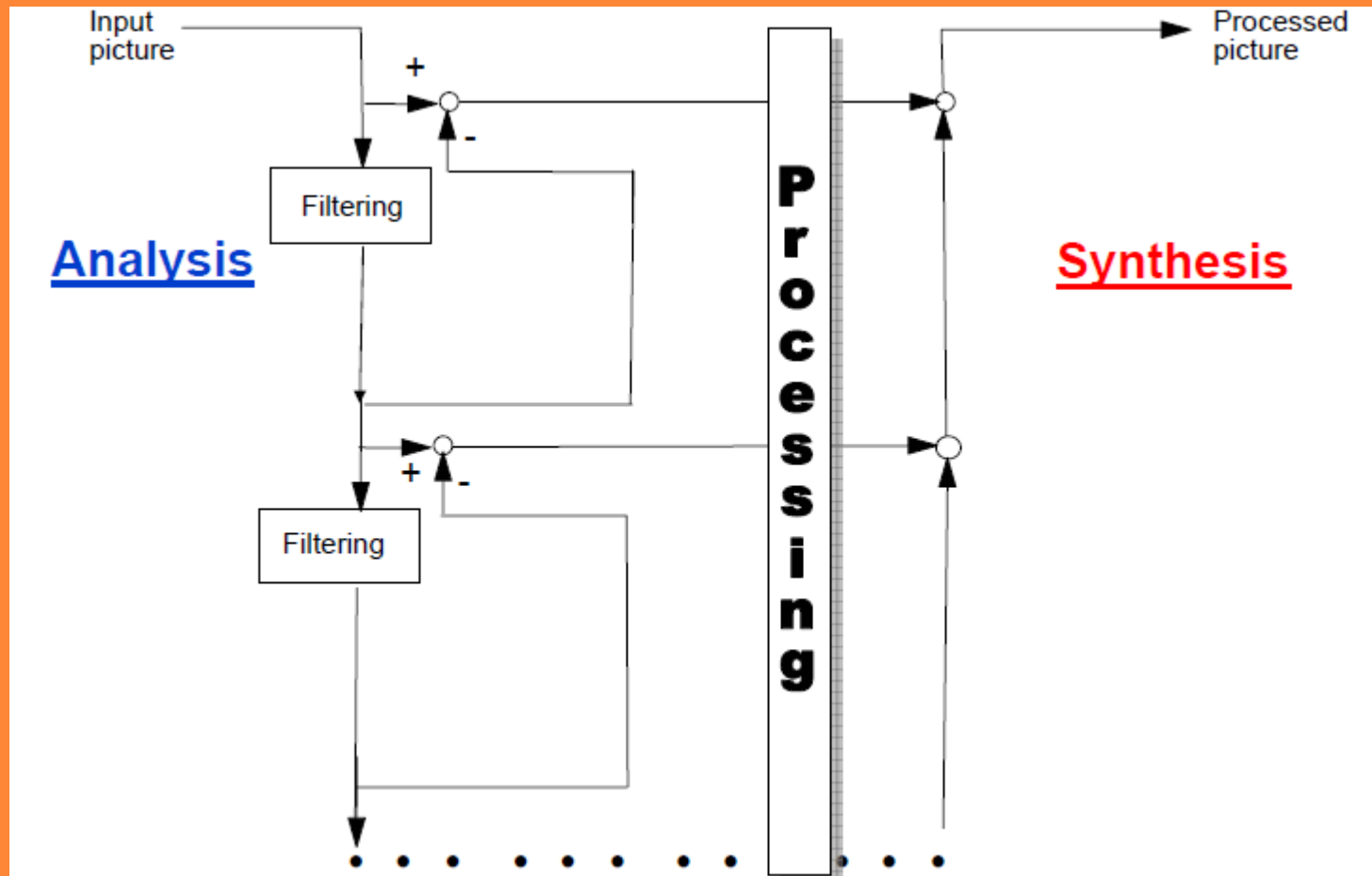
yapay sinir ağı

[Rowley, Baluja, Kanade, 1995]

Laplace piramidiyle görüntü işleme



Genişletilmiş Laplace piramidi



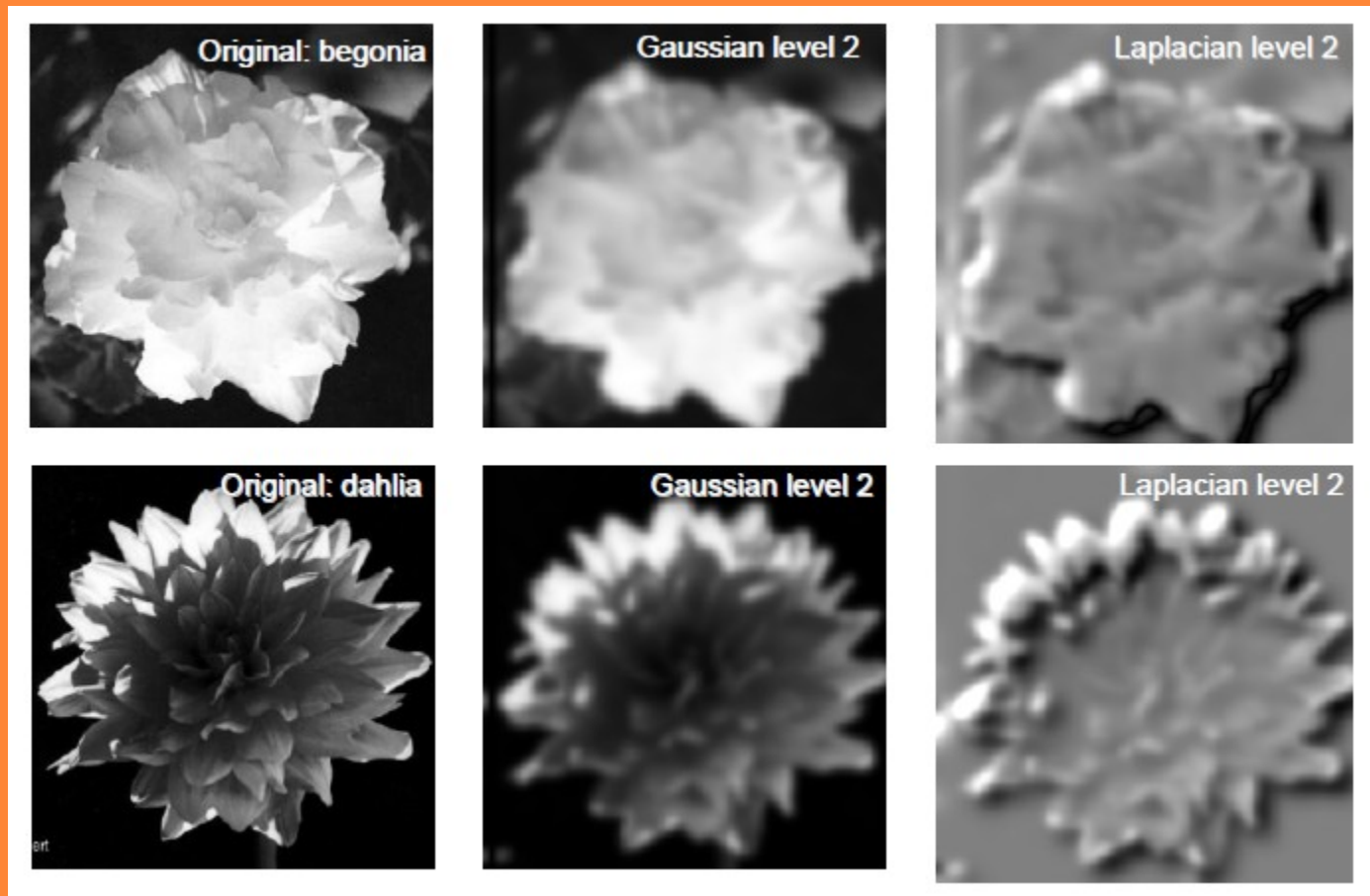
Görüntü alanında (domain) mozaikleme (mosaicing)



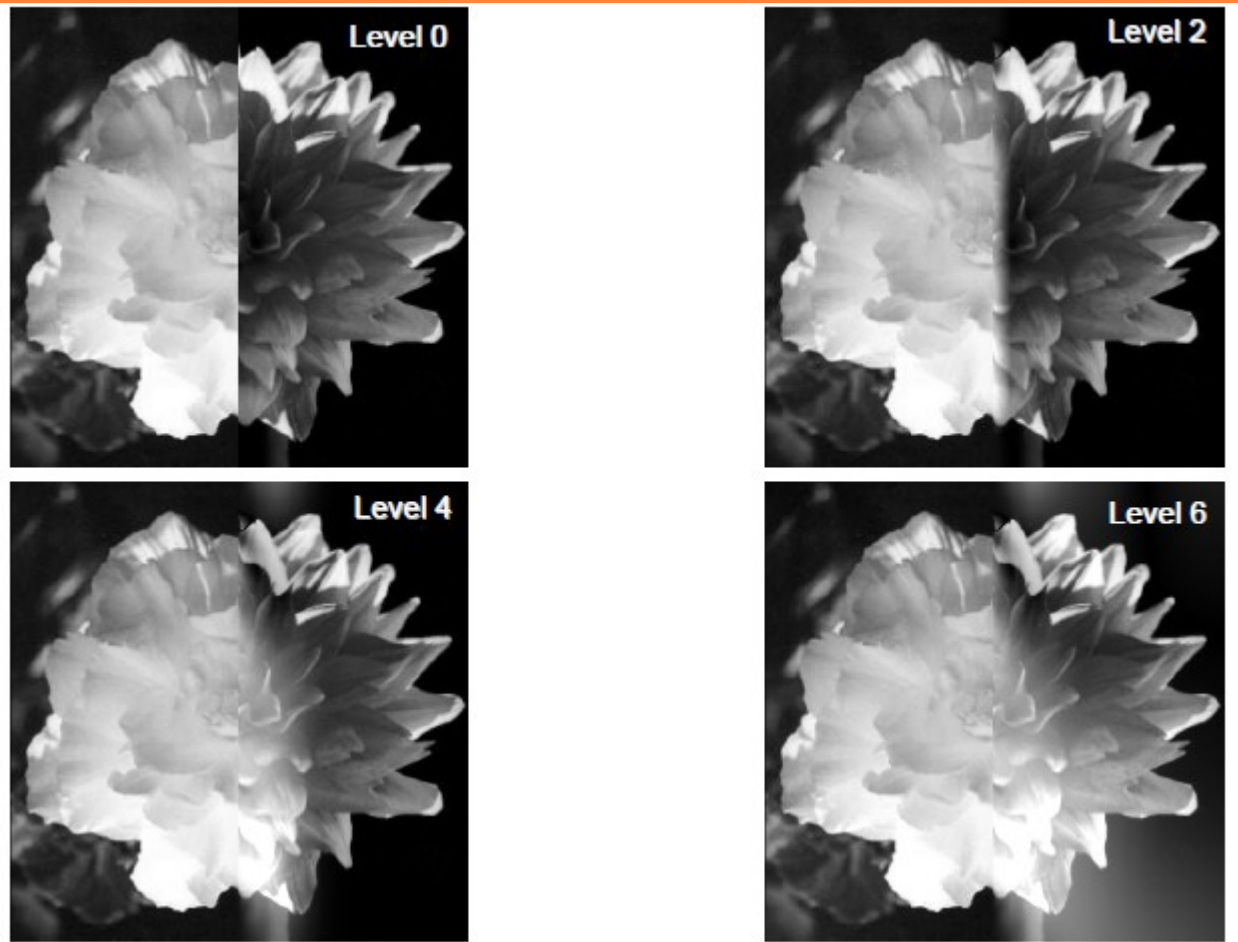
Laplace piramitlerini harmanlayarak mozaikleme



Genişletilmiş Laplace piramitleri

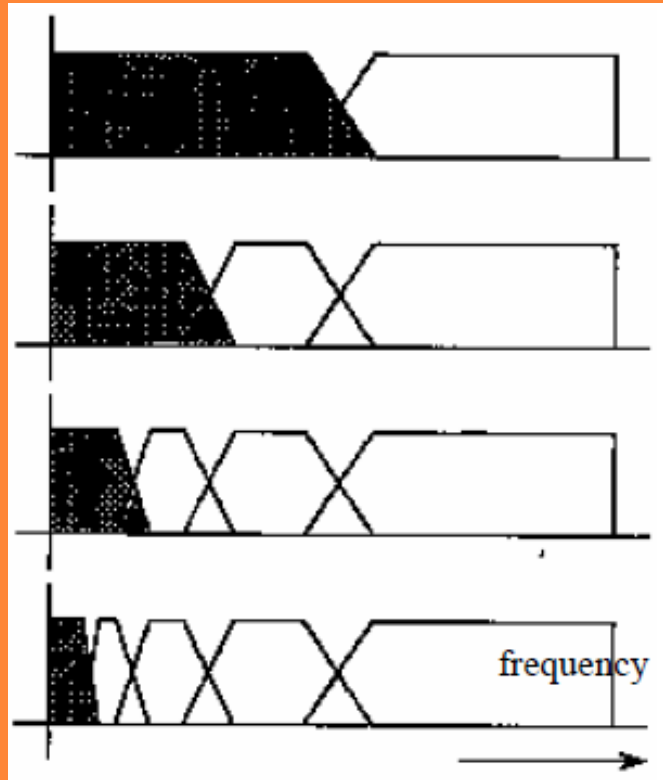


Laplace piramitlerinin harmanlanması

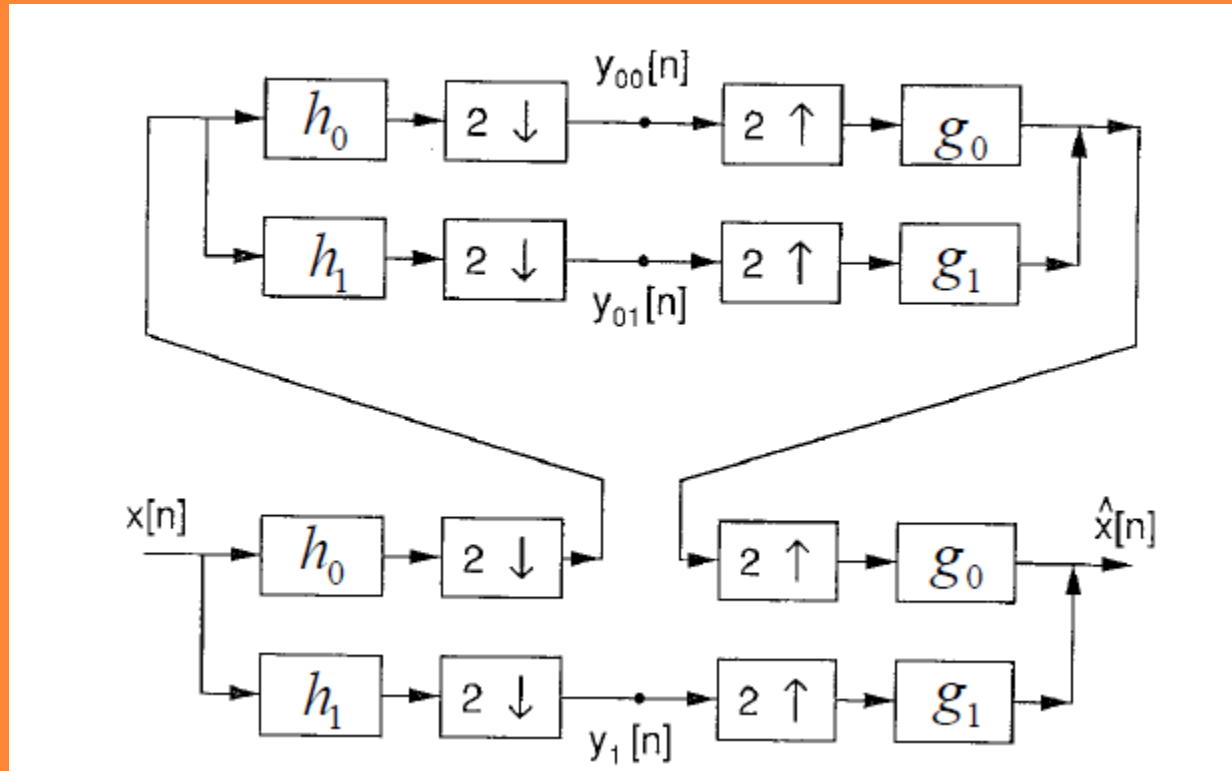


Tek boyutlu ayırık dalgacık dönüşümü

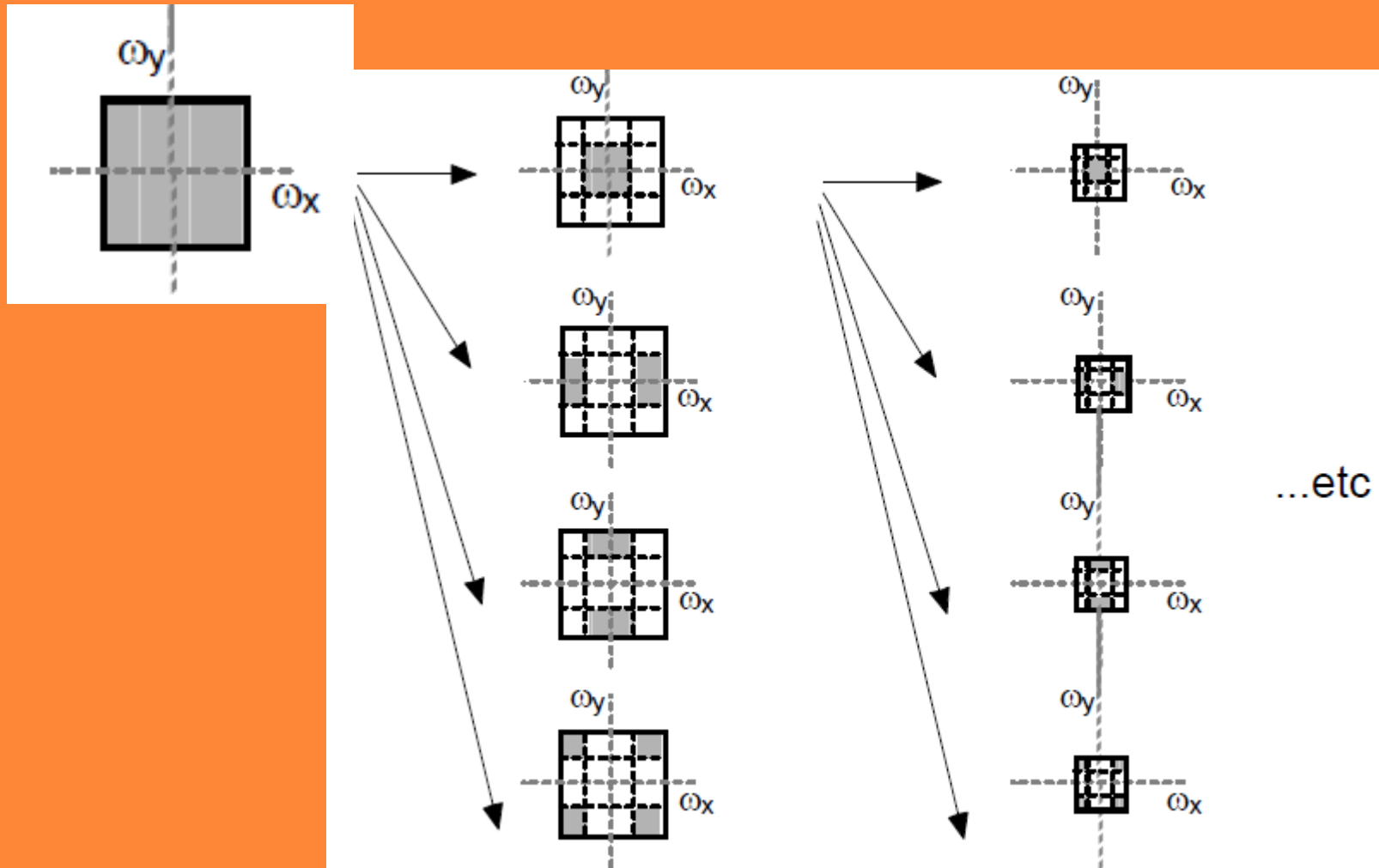
-Çift band süzgeç takımının, bir önceki seviyenin alçak geçiren bandına tekrarlı uygulaması 2 kat band bölüşümü sağlar



Akan analiz/sentez süzgeç takımı



2 boyutlu ayrik dalgacik dönüşümü



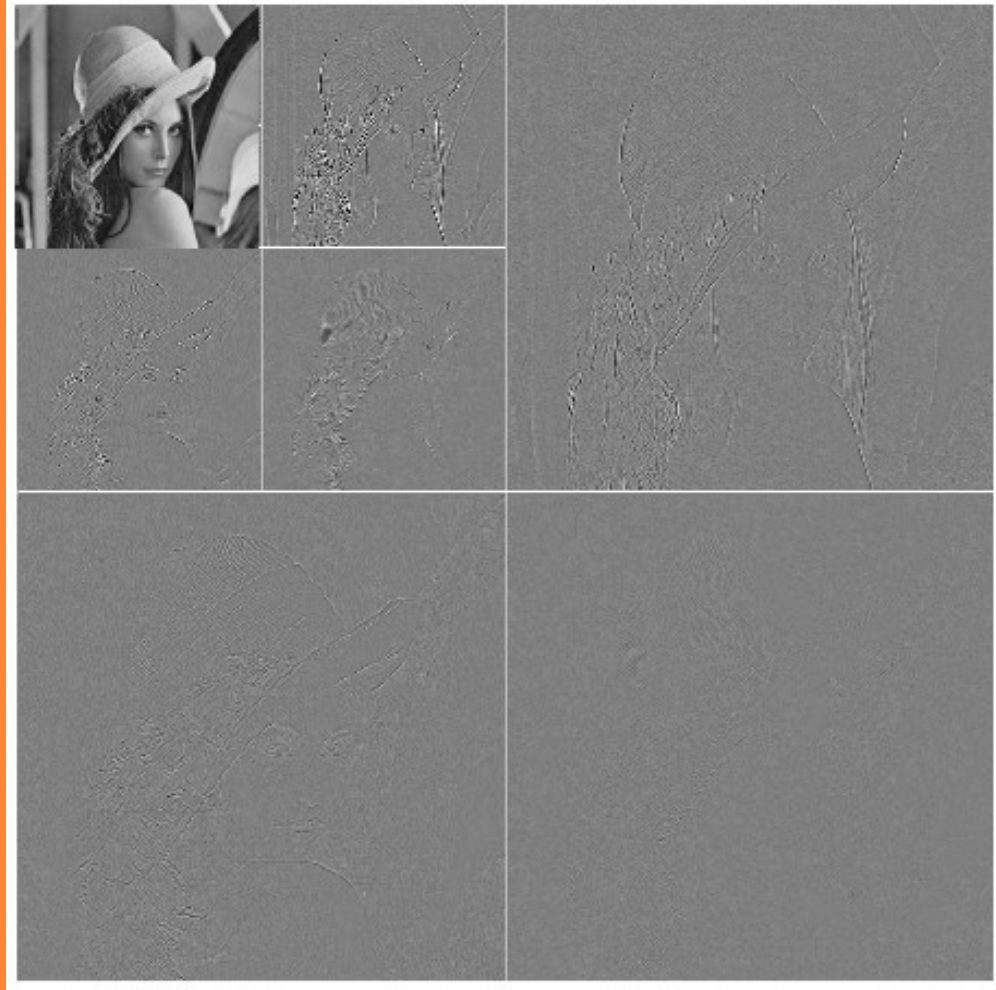
2 boyutlu ayırık dalgacık dönüşümü örneği



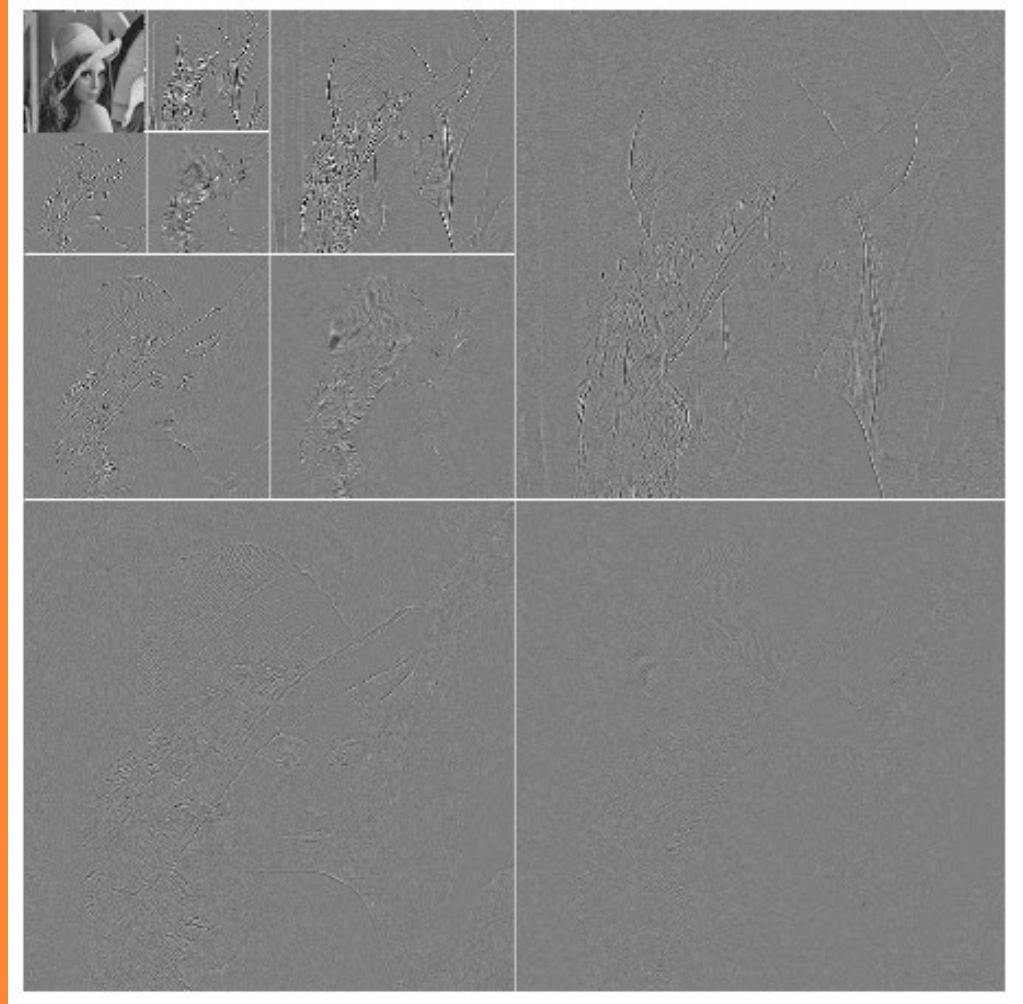
2 boyutlu ayrik dalgacık dönüşümü örneği



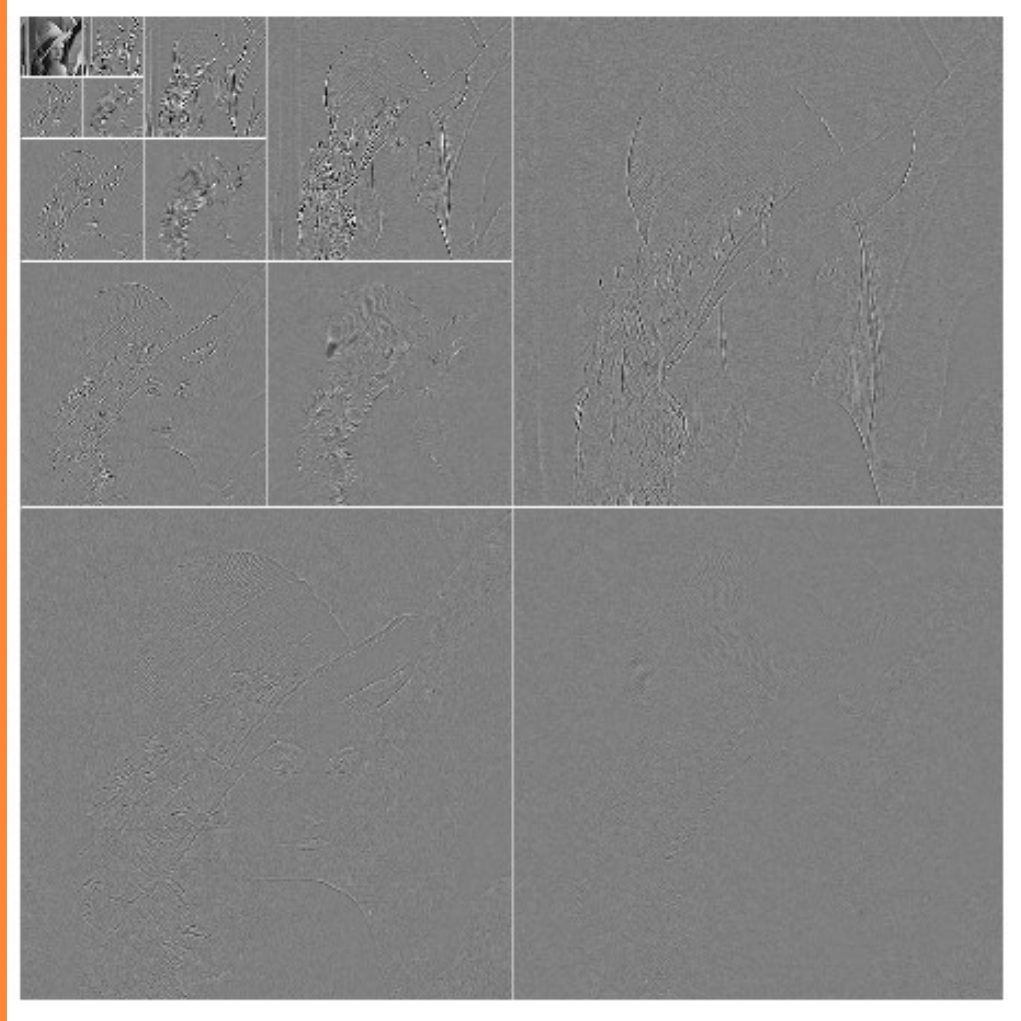
2 boyutlu ayrik dalgacık dönüşümü örneği



2 boyutlu ayrik dalgacık dönüşümü örneği



2 boyutlu ayrik dalgacık dönüşümü örneği



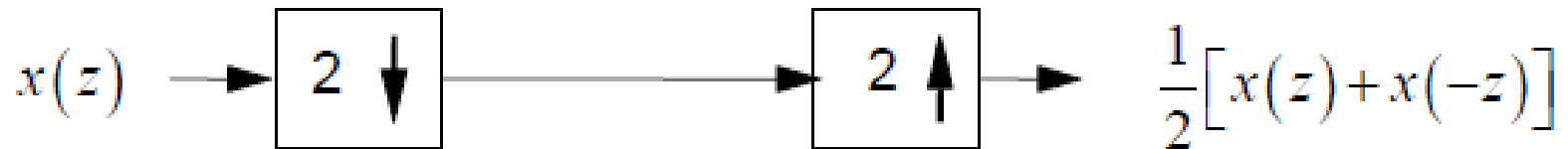
Tekrarlama: Z dönüşümü ve ölçek seyreltme

-Ayrık zamanlı fourier dönüşümünün genel ifadesi

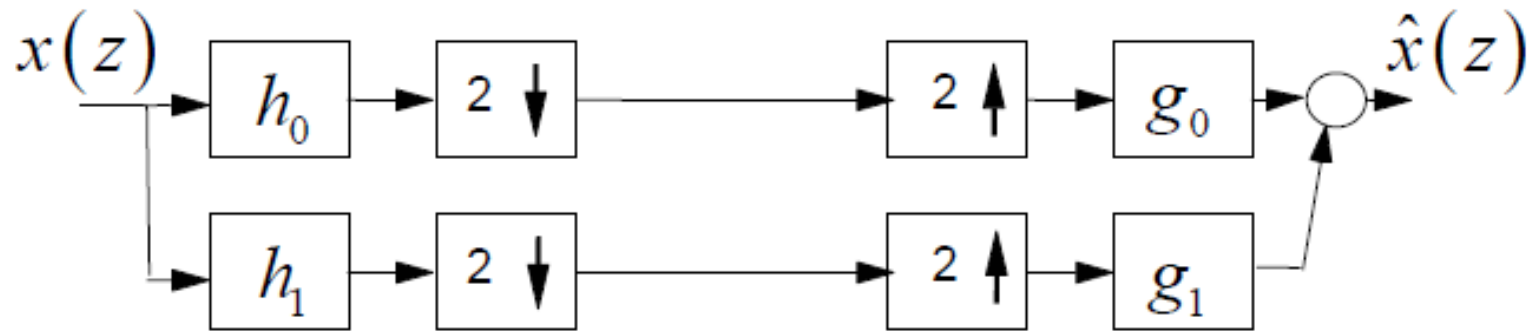
$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} ; \quad z \in \mathbb{C} ; r^{-} < |z| < r^{+}$$

-Birim çemberde Fourier dönüşümü:
yerine (substitute) $z = e^{j\omega}$

-Faktör 2 ile örnek seyreltme ve örnek



Çift-kanal süzgeç takımı



$$\begin{aligned}\hat{x}(z) &= \frac{1}{2} g_0(z) [h_0(z)x(z) + h_0(-z)x(-z)] + \frac{1}{2} g_1(z) [h_1(z)x(z) + h_1(-z)x(-z)] \\ &= \frac{1}{2} [h_0(z)g_0(z) + h_1(z)g_1(z)]x(z) + \frac{1}{2} [h_0(-z)g_0(z) + h_1(-z)g_1(z)]x(-z)\end{aligned}$$

Aliasing

$$\begin{aligned}g_0(z) &= h_1(-z) \\ -g_1(z) &= h_0(-z)\end{aligned}$$

ise : katlanma ihmali

Örnek: Kusursuz yeniden oluşturma ile çift kanal süzgeç takımı

-itme tepkileri, analiz filtreleri:

düşük geçiş yüksek geçiş

$$\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4} \right) \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

-itme tepkileri, sentez filtreleri:

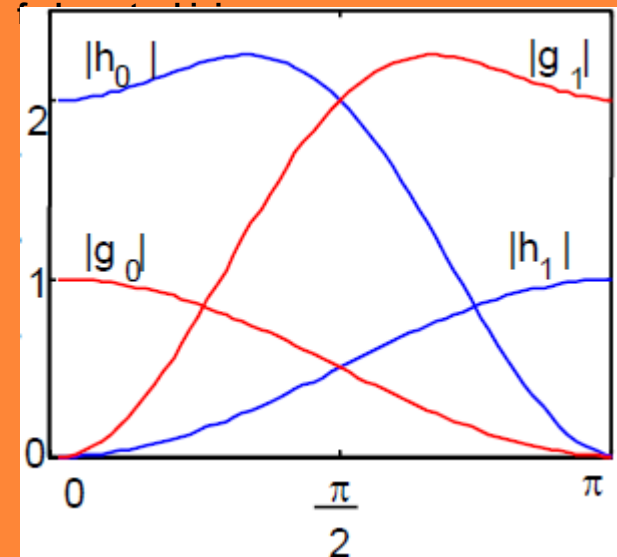
düşük geçiş yüksek geçiş

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

“Biorthogonal 5/3 filters”
“LeGall filters”

-JPEG2000 şartı

-Frekans tepkileri

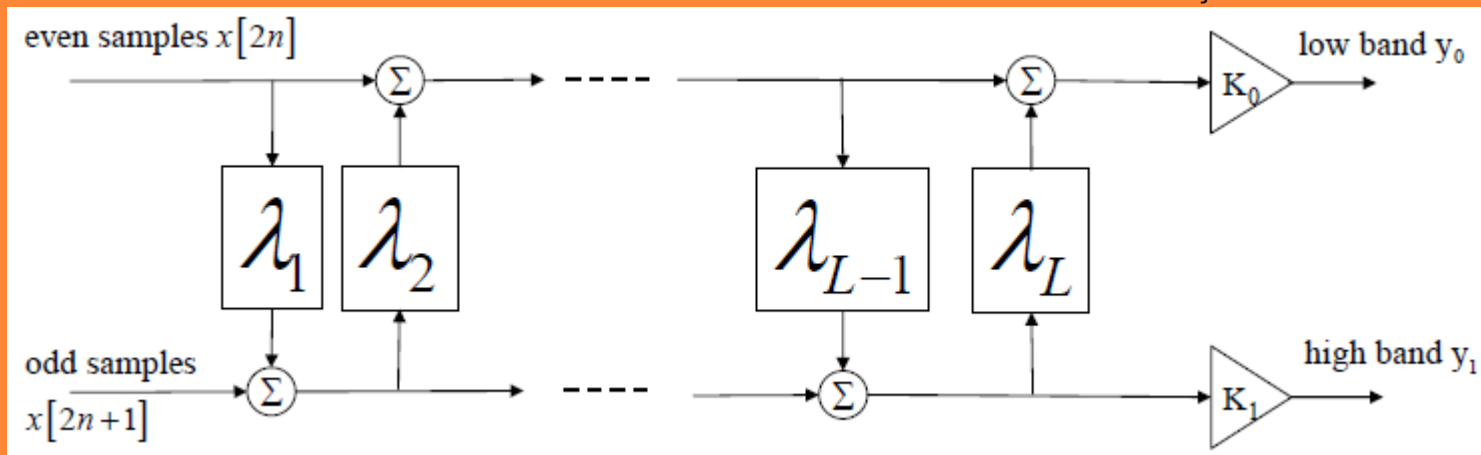


Kaldırma(Lifting)

-Analiz filtreleri

çift örnekler

düşük band



tek örnekler

yüksek band

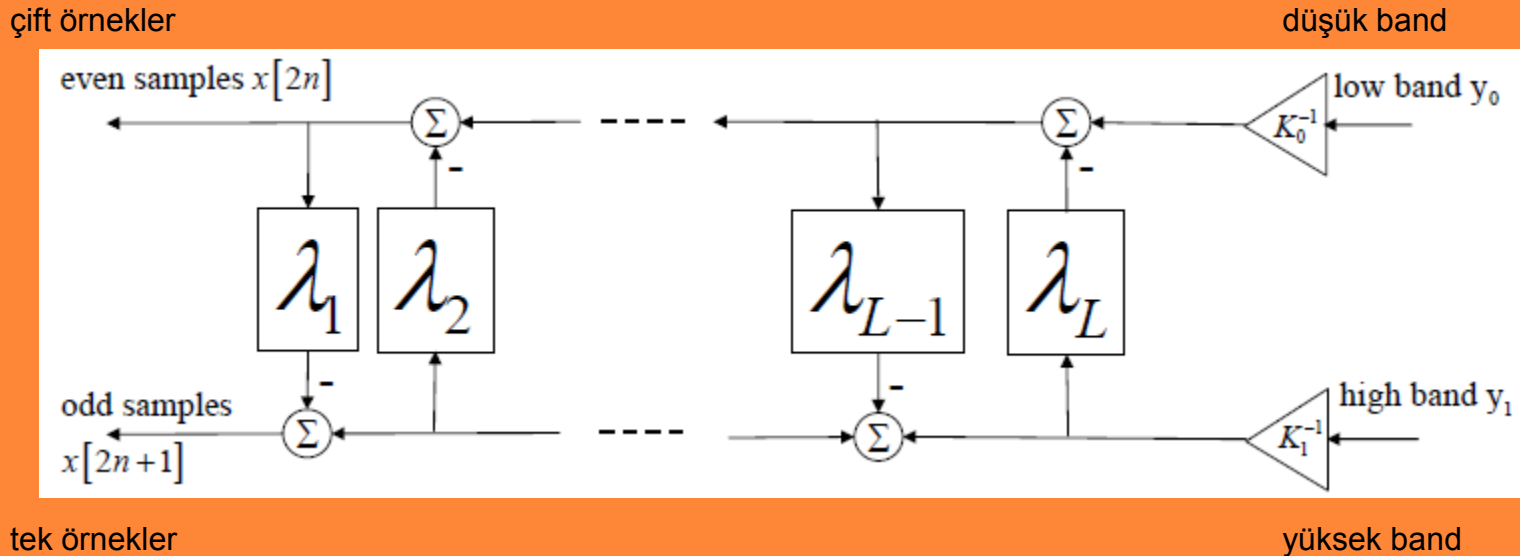
[Sweldens 1996]

-L “Kaldırma(Lifting) adımları”

-İlk adım, çift örneklerden tek örneklerin tahmin edilmesi olarak yorumlanabilir

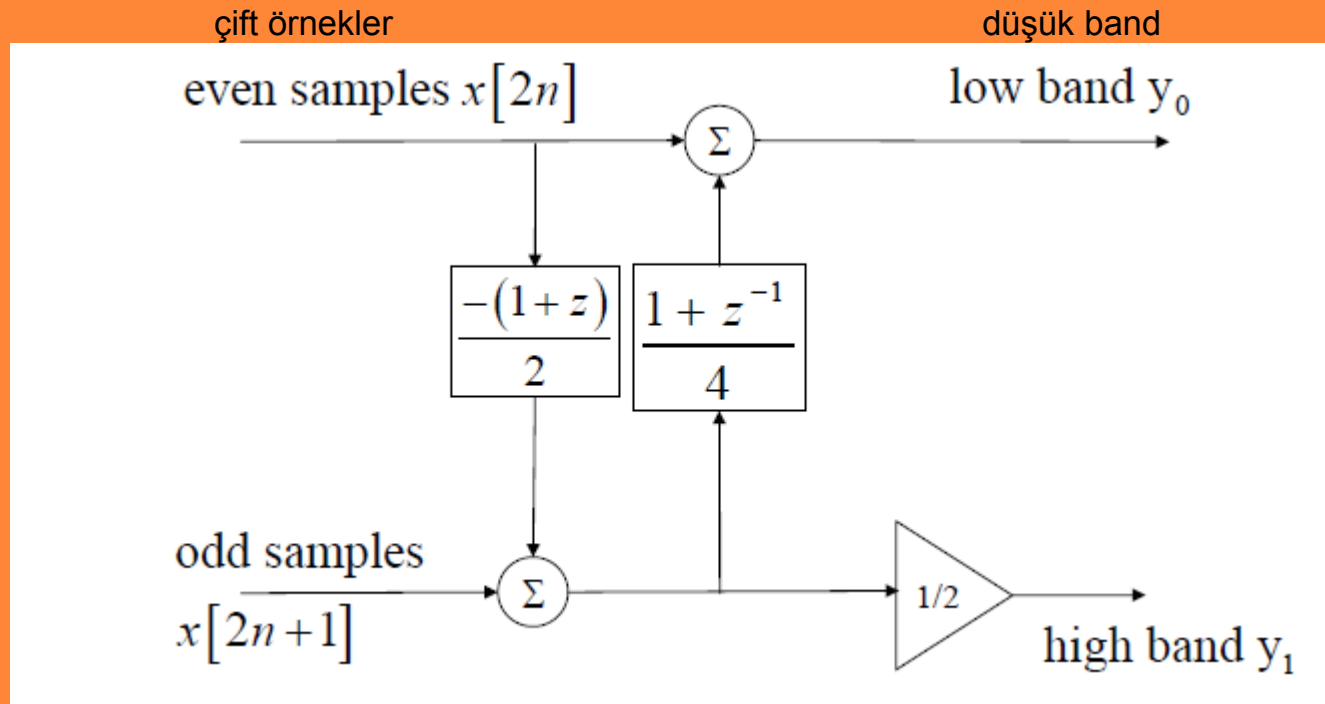
Kaldırma

-Sentez filtreleri



- Kusursuz yeniden yapılandırma (biorthogonality) direkt, kaldırma yapısı içerisine inşa edilir
- Hem uygulama hem de filtre/dalgacık tasarımı için güçlü

Örnek: 5/3 filtrelerin kaldırma uygulamaları



-Çift ve tek giriş kanalındaki birim dürtüye tepki (çıkış işareti)ni hesaplayarak doğrula

Eşlenik dördün filtreler

-Katlanma ihmalini aşağıdaki formül ile gerçekleştir

prototip filtresi

$$\begin{aligned} h_0(z) &= g_0(z^{-1}) \equiv f(z) \\ h_1(z) &= g_1(z^{-1}) = zf(-z^{-1}) \end{aligned} \quad [Smith, Barnwell, 1986]$$

-İtme(dürtü) tepkileri

$$\begin{aligned} h_0[k] &= g_0[-k] = f[k] \\ h_1[k] &= g_1[-k] = (-1)^{k+1} f[-(k+1)] \end{aligned}$$

-Kusursuz yeniden yapılandırma ile: ortonormal altband dönüşümü

-Kusursuz yeniden yapılandırma: güç tamamlayıcı prototip filtreyi bul

$$\left| F(e^{j\omega}) \right|^2 + \left| F(e^{j(\omega \pm \pi)}) \right|^2 = 2$$

Dalgacık esasları

- Sonlu enerji fonksiyonları $x=x(t)$ 'nin Hilbert uzayı $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 'yi hesaba kat
- $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ için dalgacık esası: doğrusal bağımsız fonsiyonlar grubu ana dalgacık

$$\psi_n^{(m)}(t) = \sqrt{2^{-m}} \psi(2^{-m}t - n)$$

- Bu $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 'yi kapsar . Öyleyse $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\mathbf{x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^{(m)}[n] \psi_n^{(m)}$$

Çoklu kararlılık(multi-resolution) analizi

Yuvalanan alt uzaylar $\dots \subset V^{(2)} \subset V^{(1)} \subset V^{(0)} \subset V^{(-1)} \subset V^{(-2)} \subset \dots \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

*Yukarı tamlık

*Aşağı tamlık

*Öz benzeşlik (self-similarity)

*Öteleme değişmezliği

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V^{(m)} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

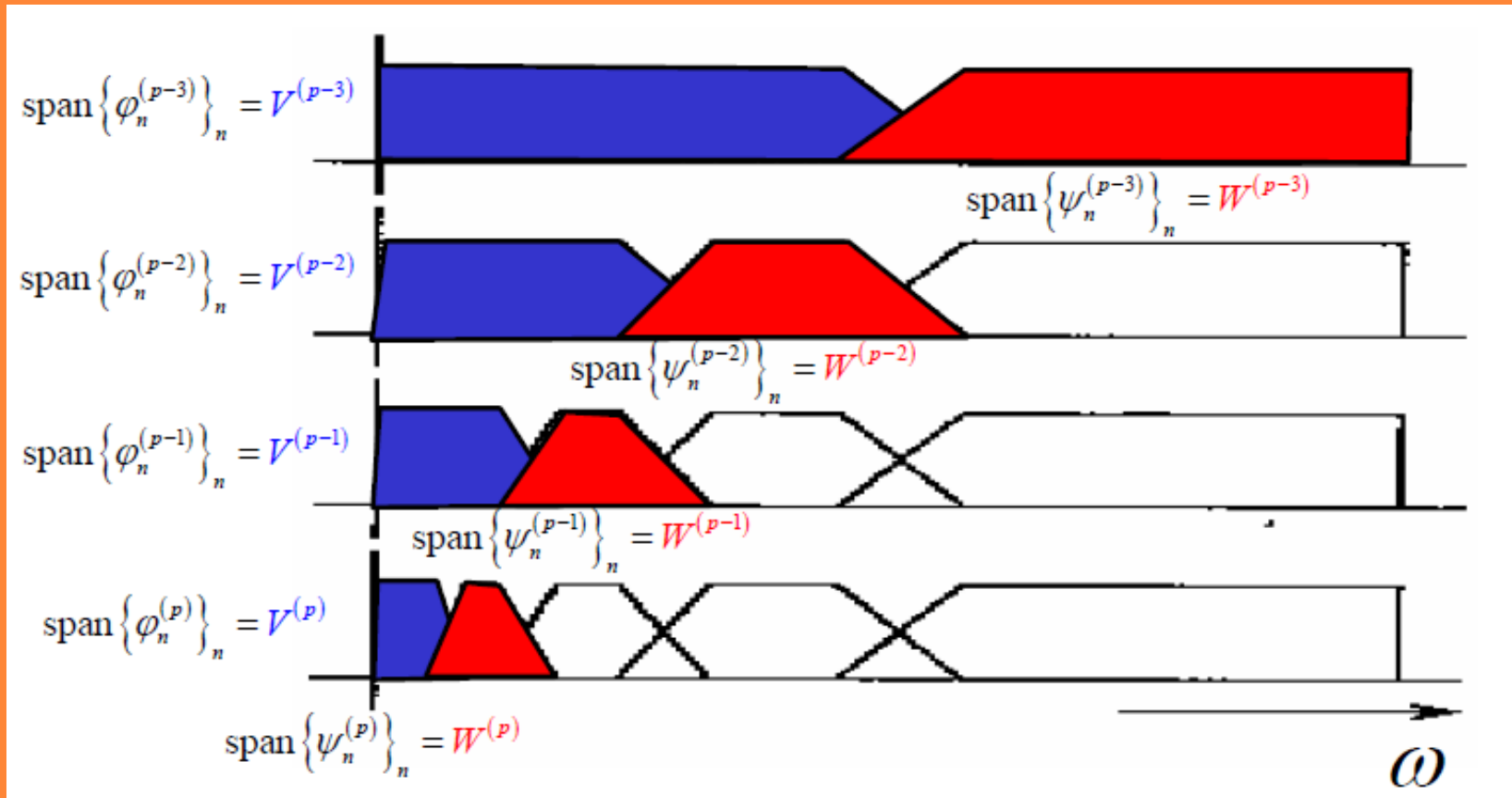
$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V^{(m)} = \{0\}$$

$$x(t) \in V^{(0)} \text{ iff } x(2^{-m}t) \in V^{(m)}$$

$$x(t) \in V^{(0)} \text{ iff } x(t-n) \in V^{(0)} \text{ for all } n \in \mathbb{Z}$$

$\varphi_n(t) = \varphi(t-n)$ tamsayı dönüşümlü bir $\varphi(t)$ ölçekleme fonksiyonu mevcuttur. Öyle ki $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ $V^{(0)}$ için ortonormal bir temel oluşturur.

Çoklu çözünürlük Fourier analizi



Altband filtrelerle ilişkisi

$V^{(0)} \subset V^{(-1)}$ olduğundan ölçekleme fonksiyonunun tekrarlı tanımı

$$\varphi(t) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0[n] \varphi_n^{(-1)}(t)}_{\text{linear combination of scaling functions in } V^{(-1)}} = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0[n] \varphi(2t-n)$$

Orthonormality

$$\begin{aligned} \delta[n] &= \langle \varphi_0^{(0)}, \varphi_n^{(0)} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_i g_0[i] \varphi_i^{(-1)}(t) \sum_j g_0[j] \varphi_{j+2n}^{(-1)}(t) \right) dt \\ &= \sum_{i,j} g_0[i] g_0[j-2n] \langle \varphi_i^{(-1)}, \varphi_j^{(-1)} \rangle = \underbrace{\sum_i g_0[i] g_0[i-2n]}_{\substack{g_0[k] \text{ unit norm and orthogonal} \\ \text{to its 2-translates: corresponds} \\ \text{to synthesis lowpass filter of} \\ \text{orthonormal subband transform}}} \end{aligned}$$

Ölçekleme fonksiyonlarından dalgacık

$W^{(p)}$ $V^{(p)}$ nin $V^{(p-1)}$ de orthogonal tümleyenidir.

$$W^{(p)} \perp V^{(p)} \quad \text{and} \quad W^{(p)} \cup V^{(p)} = V^{(p-1)}$$

Orthonormal dalgacık temeli $\{\psi_n^{(0)}\}$ for $W^{(0)} \subset V^{(-1)}$

$$\psi(t) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1[n] \varphi_n^{(-1)}(t)}_{\substack{\text{linear combination} \\ \text{of scaling functions in } V^{(-1)}}} = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1[n] \varphi_n(2t-n)$$

Dördün yüksek geçiren snetez filtresi eşlenik kullanımı

$$g_1[n] = (-1)^{n+1} g_0[-(n-1)]$$

Karşılıklı orthonormal fonksiyonlar, $\{\psi_n^{(0)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ and $\{\varphi_n^{(0)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, together span $V^{(-1)}$.

Orthonormal dalgacık temelini oluşturmak için $\psi(t)$ 'nin genleştirilmiş versiyonuna yayılım kolaylığı

$$\{\psi_n^{(m)}\}_{n,m \in \mathbb{Z}} \quad \text{for } \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

Sürekli sinyal için dalgacık katsayısı hesabı

-Ayırık süzgeç takımıyla sinyal süzgeci

*Sürekli sinyal için $x^{(0)}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_0^{(0)}[n] \varphi(t-n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_0^{(0)}[n] \varphi_n^{(0)} \in V^{(0)}$

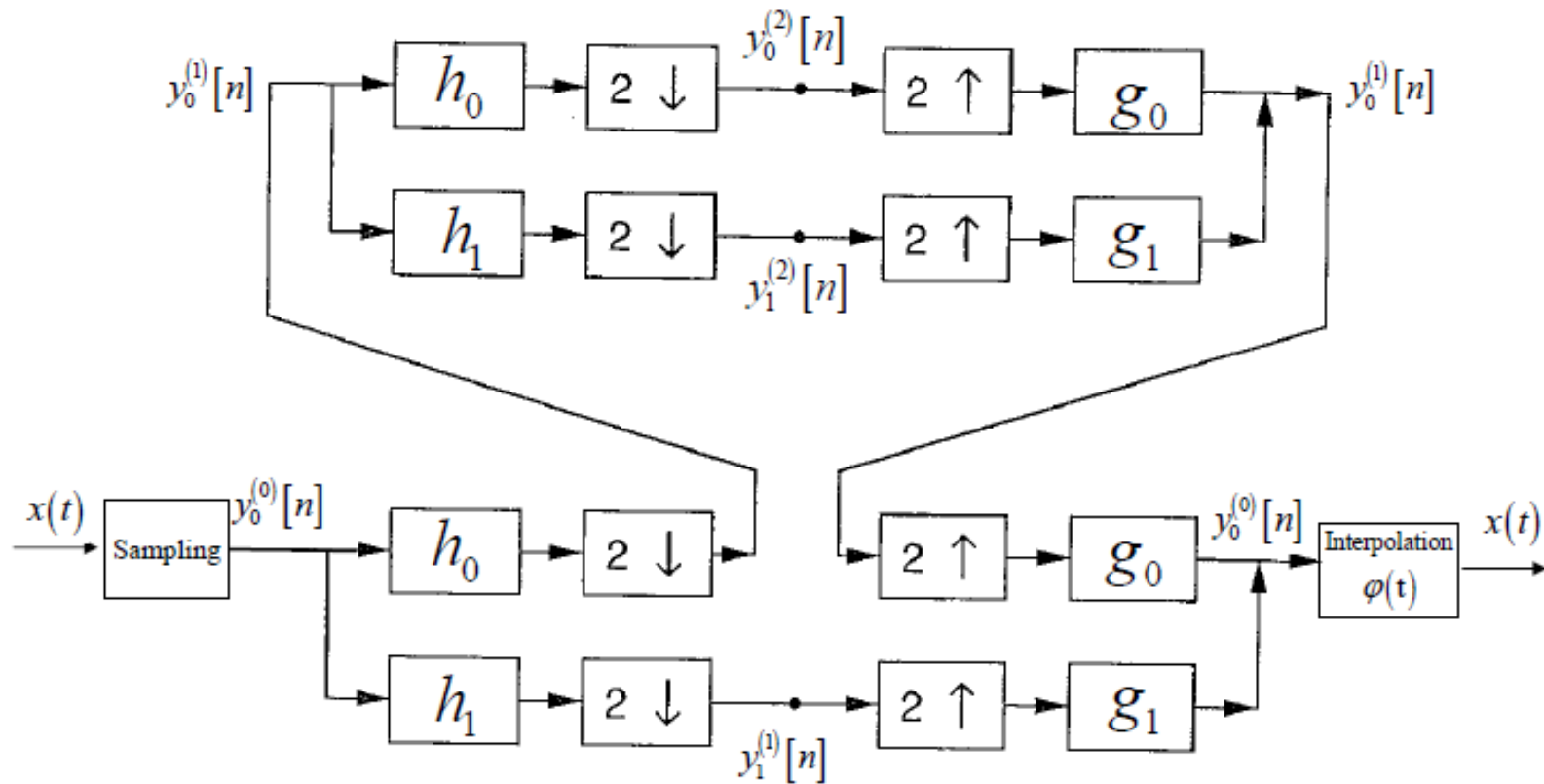
as superposition of $x^{(1)}(t) \in V^{(1)}$ and $w^{(1)}(t) \in W^{(1)}$

$$\begin{aligned} x^{(0)}(t) &= \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{Z}} y_0^{(1)}[i] \varphi_n^{(1)}}_{x^{(1)}(t) \in V^{(1)}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{Z}} y_1^{(1)}[j] \psi_n^{(1)}}_{w^{(1)}(t) \in W^{(1)}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n^{(0)} \underbrace{\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} y_0^{(1)}[n] g_0[n-2i] + \sum_{j \in \mathbb{Z}} y_1^{(1)}[j] g_1[n-2i] \right)}_{y_0^{(0)}[n]} \end{aligned}$$

-Analiz filtreleri $h_0[k], h_1[k]$ ile sinyal analizi

-Ayırık dalgacık dönüşümü

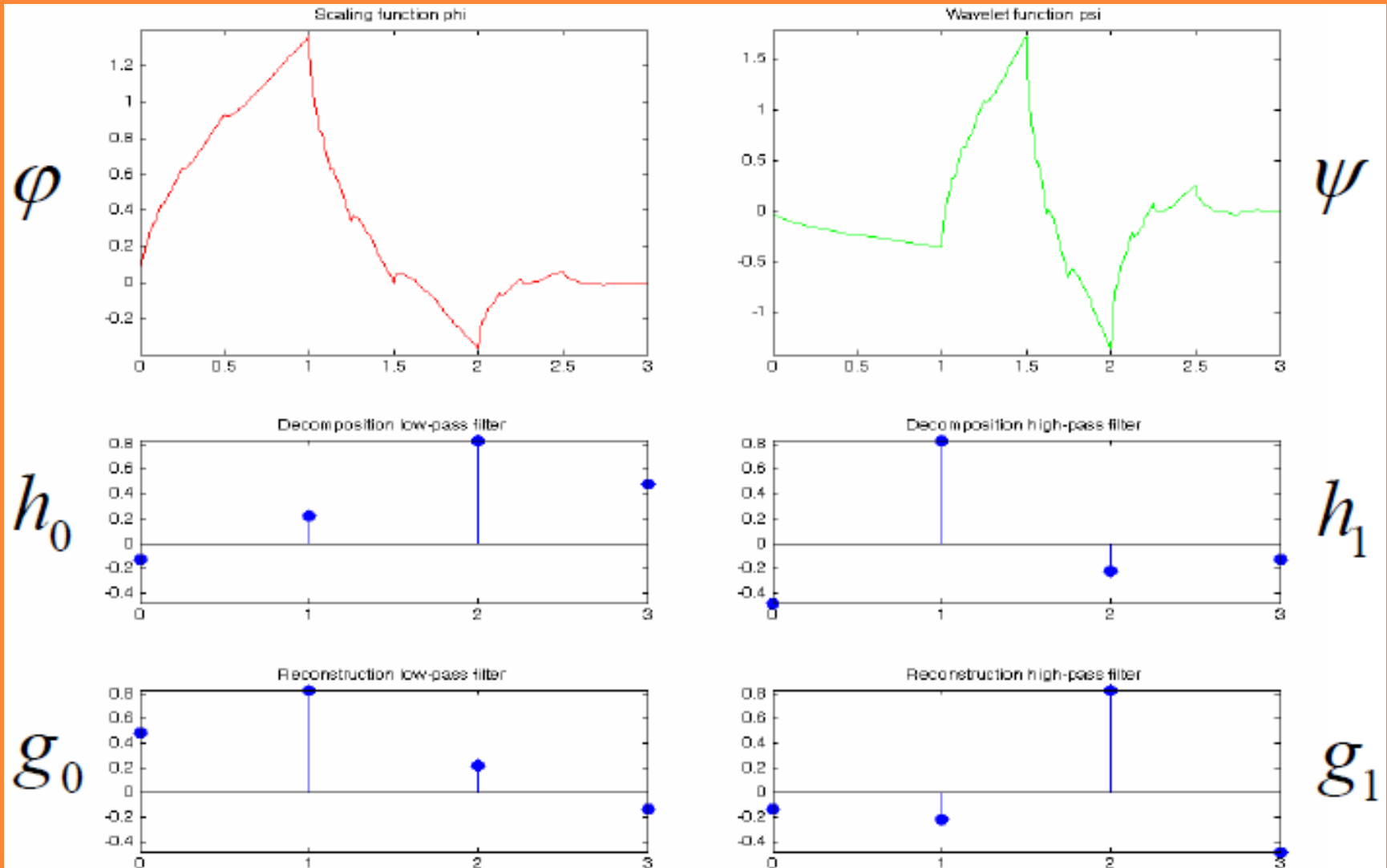
1 boyutlu ayrik dalgacık dönüşümü



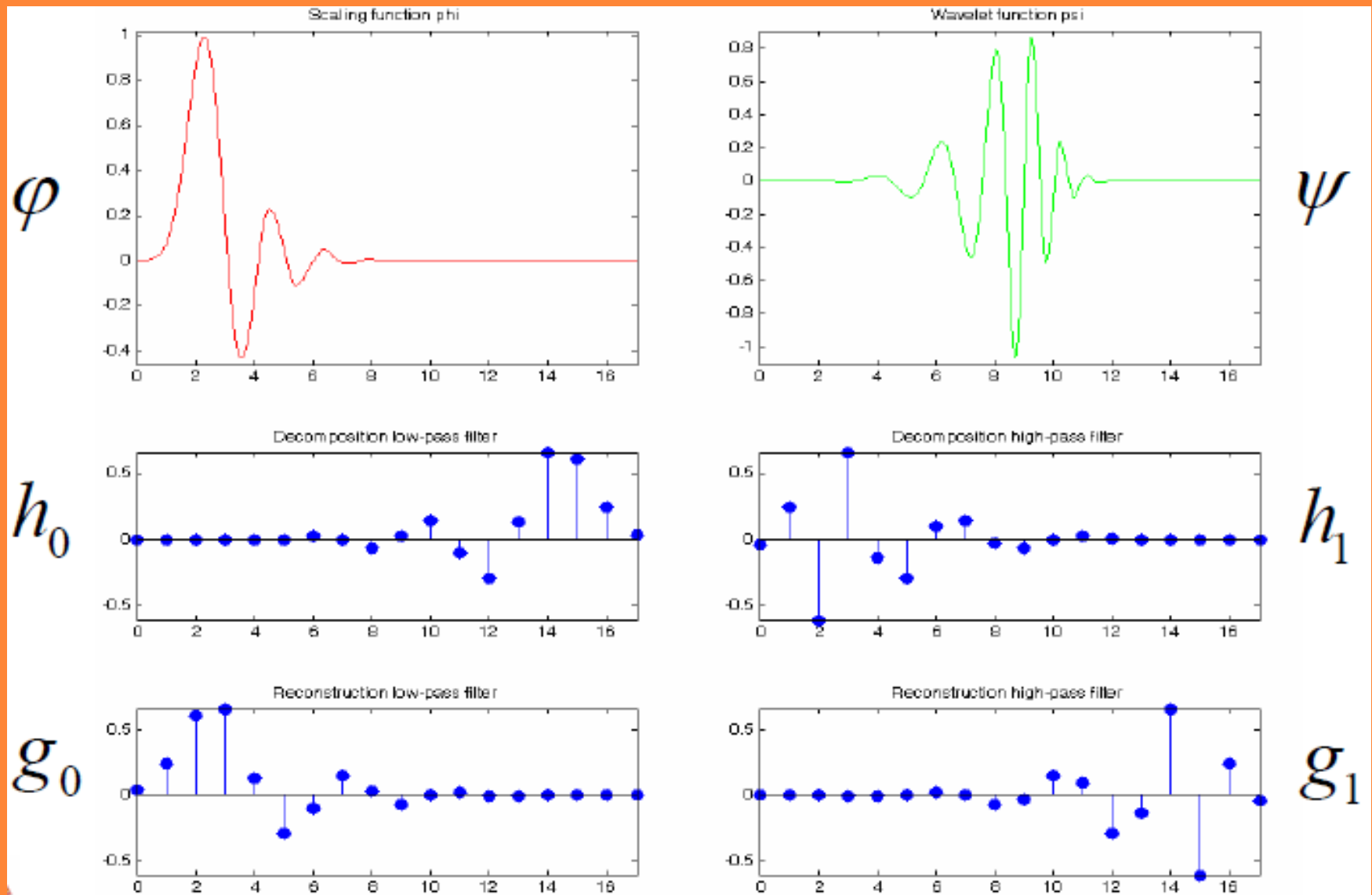
sampling: örnekleme
çoğaltma

interpolation: örnek

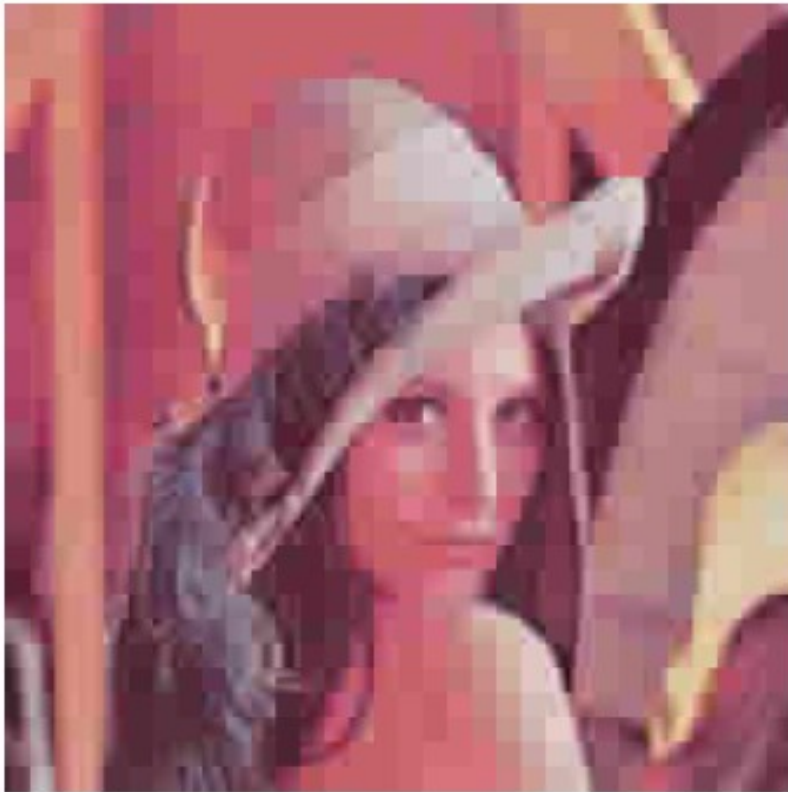
Örnek: Daubechies dalgacığ, order 2



Örnek: Daubechies dalgacı, order 9



JPEG ve JPEG2000 karşılaştırması



Lenna, 256x256 RGB
Baseline JPEG: 4572 bytes



Lenna, 256x256 RGB
JPEG-2000: 4572 bytes

JPEG ve JPEG2000 karşılaştırması



JPEG with optimized Huffman tables
8268 bytes



JPEG2000
8192 bytes