

FOURIER TRANSFORM

Samsun – 2011

Özet

- FT: Uzaysal düzlemde frekans düzlemine geçiş
- Ayırık işaretlerde DFT
- Hızlandırılmış FFT
- Eş isimleri:
 - Fourier Transform, Spectral Analysis, Frequency Analysis
- Çok sayıda uygulama:
 - image analysis, image filtering, image reconstruction ve image compression.

DFT

- Tüm frekanslar değil resim boyutu kadarlık olanlar
- NxN boyutlu karasel $f(i, j)$ resmi için,

$$F(k, l) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) e^{-i2\pi(\frac{ki}{N} + \frac{lj}{N})}$$

- k, l frekans değerleri
- Resmin baz işlevleriyle çarpımının toplamı.
- Artan frekans kavramı:
 - $F(0,0)$ ->DC bileşen iken
 - $F(N-1, N-1)$ maksimum frekans değeri

IDFT

- Ters dönüşüm için

$$f(a, b) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F(k, l) e^{i2\pi(\frac{ka}{N} + \frac{lb}{N})}$$

- $F(k, l)$ frekans düzlemi ve $f(a, b)$ görüntü(uzaysal) düzlem
- $1/N^2$ normalizasyon faktörüdür.

Özellikleri

- **Ayrılabilirlik**

$$F(k, l) = \frac{1}{N} \sum_{b=0}^{N-1} P(k, b) e^{-i2\pi \frac{lb}{N}}$$

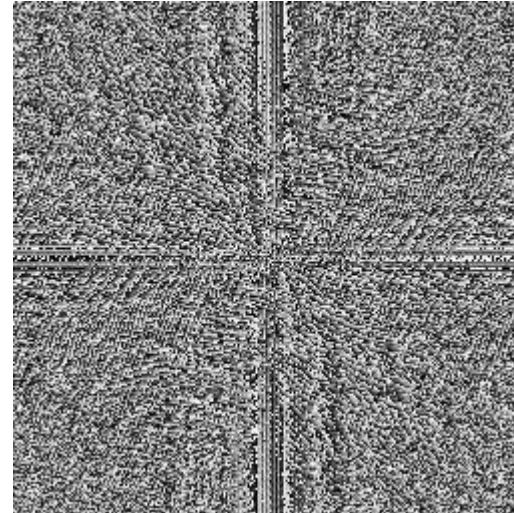
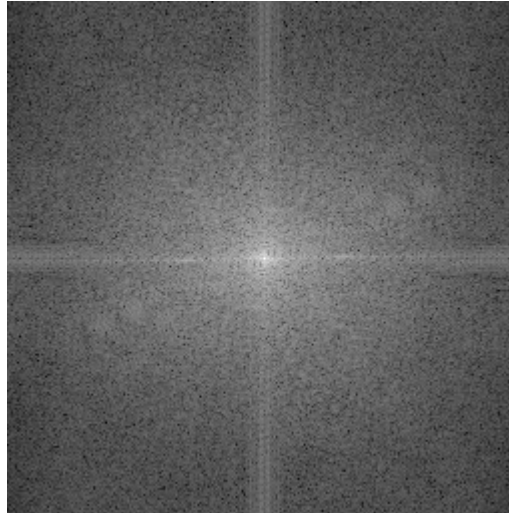
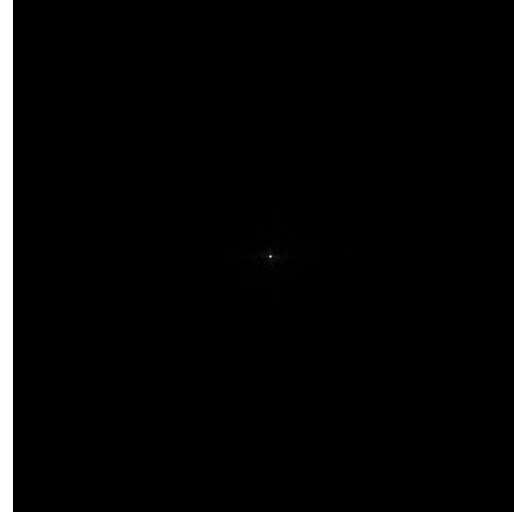
$$P(k, b) = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} f(a, b) e^{-i2\pi \frac{ka}{N}}$$

- Vektörel hesaplamaya imkan verir ve hesaplama maliyetini düşürür --> FFT
- 1 boyutlu DFT N^2 maliyetine sahiptir
 - FFT ise $N \log N$
 - FFT: $N = 2^n$ kısıtı altında çalışır

FFT

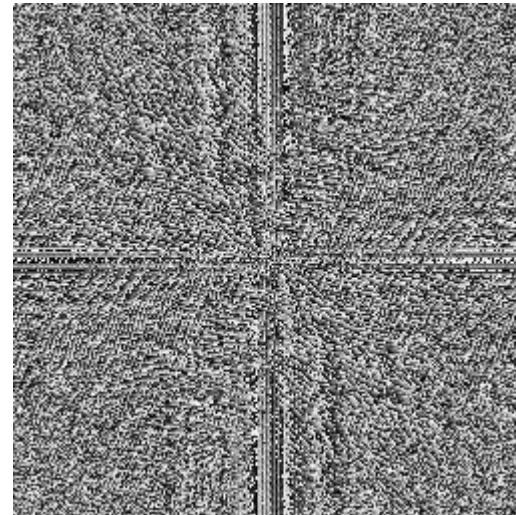
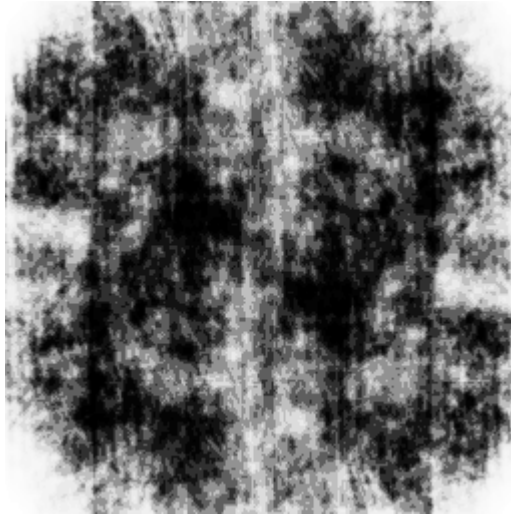
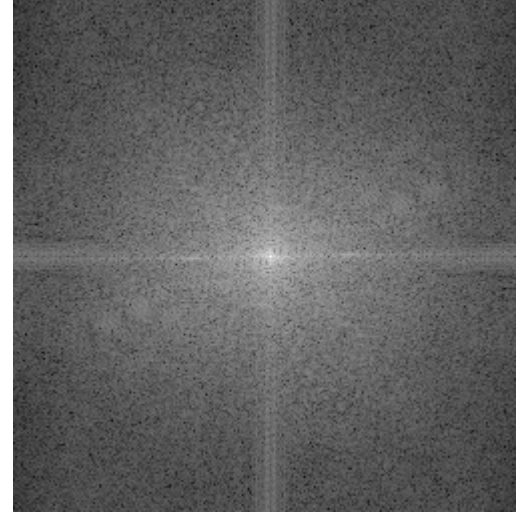
- Gerçek ve sanal kısımlara sahiptir
- Başka sözle genlik ve faza sahiptir
-
- DIP'de genelde genliği kullanılır
- Frekans düzlemi iki şekilde gösterilir: tek yönlü ve çift yönlü
 - DIP'de iki yönlü (kartezyen koordinat sisteminin ortası 0-sıfır frekans) gösterim tercih edilir
 - `fftshift`
- Frekans düzlemi, uzaysal düzlemde daha geniş bir erime sahiptir.
 - Gerçek sayı sonuçlar
 - Log genlik gösterimi: `log(abs(fftshift(fft(im))))`

Örnekler



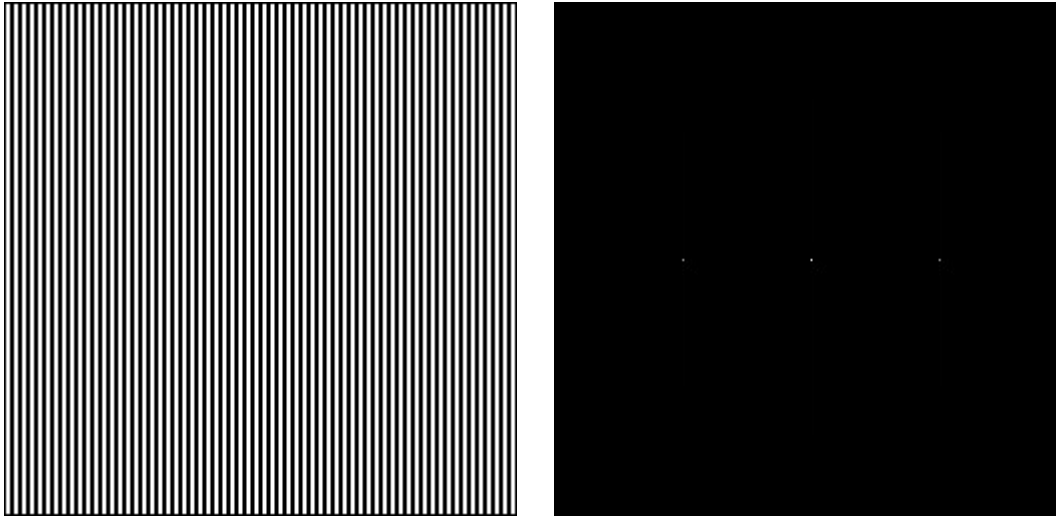
- Orijinal resim, FFT, LOG(FFT), faz
- Ortada DC (ortalama) bileşen en büyük genlik (parlak)
- Frekans arttıkça genlik azalması
- Faz ekstra bilgi sunmaz

Örnekler



- Faz ekstra bilgi sunmaz
- Fakat ihmal edilirse de resim elde edilemez!

Örnekler



- 2 piksel genişliğinde dikey çizgi
- FFT: üç belirgin değer; DC ve iki tarafta/simetrik/yatay frekans değeri
- Değişim yatayda değil mi?

Frekans hesabı

- Görüntü düzleminde en büyük frekans değeri – f_{\max} , 2 piksel (biri beyaz diğeri siyah) değişim içindir

$$f_{\max} = \frac{1}{2 \text{ pixels}}$$

- Önceki resimdeki durum ise 4 piksel genişliğinde

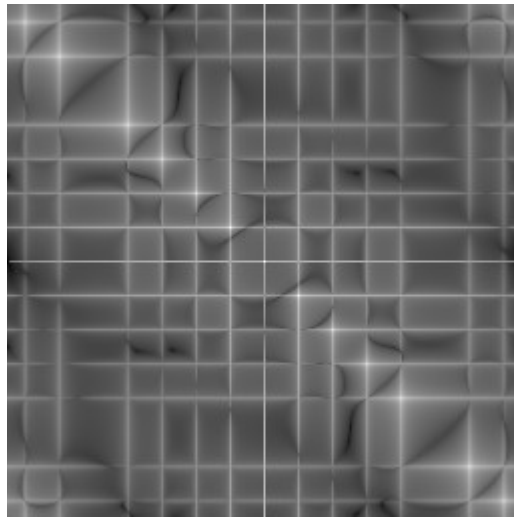
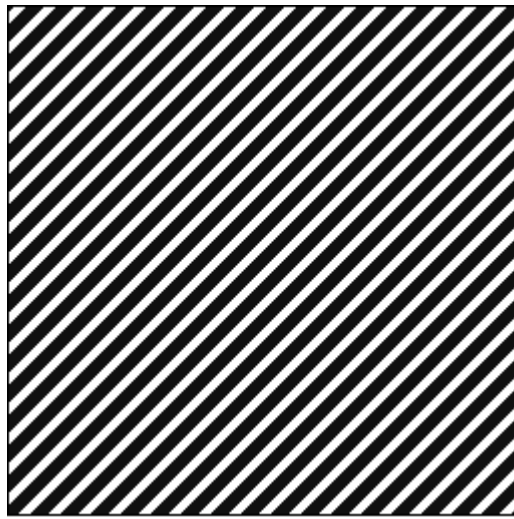
$$f = \frac{1}{4 \text{ pixels}} = \frac{f_{\max}}{2}$$

- Fourier düzleminde noktalar, merkezle-kenarın tam ortasında olacak. Maks frekansın yarısıydı

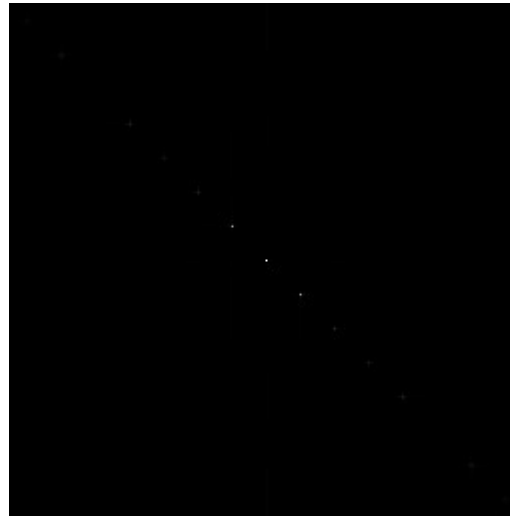
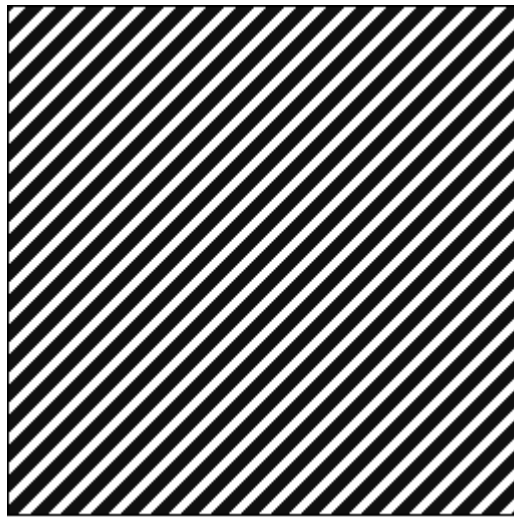
Genlik

- Diğer frekans genlikleri DC bileşenin genliğinin 100'de 1'inden az olacak
 - En önemli katkı DC'den
-

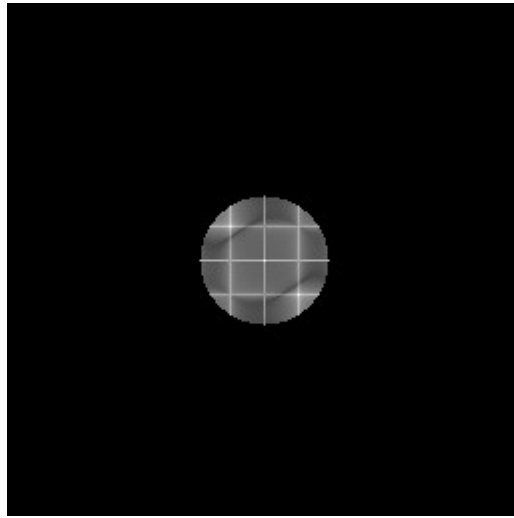
Örnekler



- 2 piksel genişliğinde diagonal çizgi
- FFT: üç belirgin değer; DC ve iki tarafta/simetrik/yatay frekans değeri
- Logaritmik olanda ekstra frekanslar
 - Çizgilerin sayısal temsiliyle alakalı
- Eşiklemenin ardından temel frekanslar bulunur. Ana genliğin %5'inden az
- Harmonik frekanslar

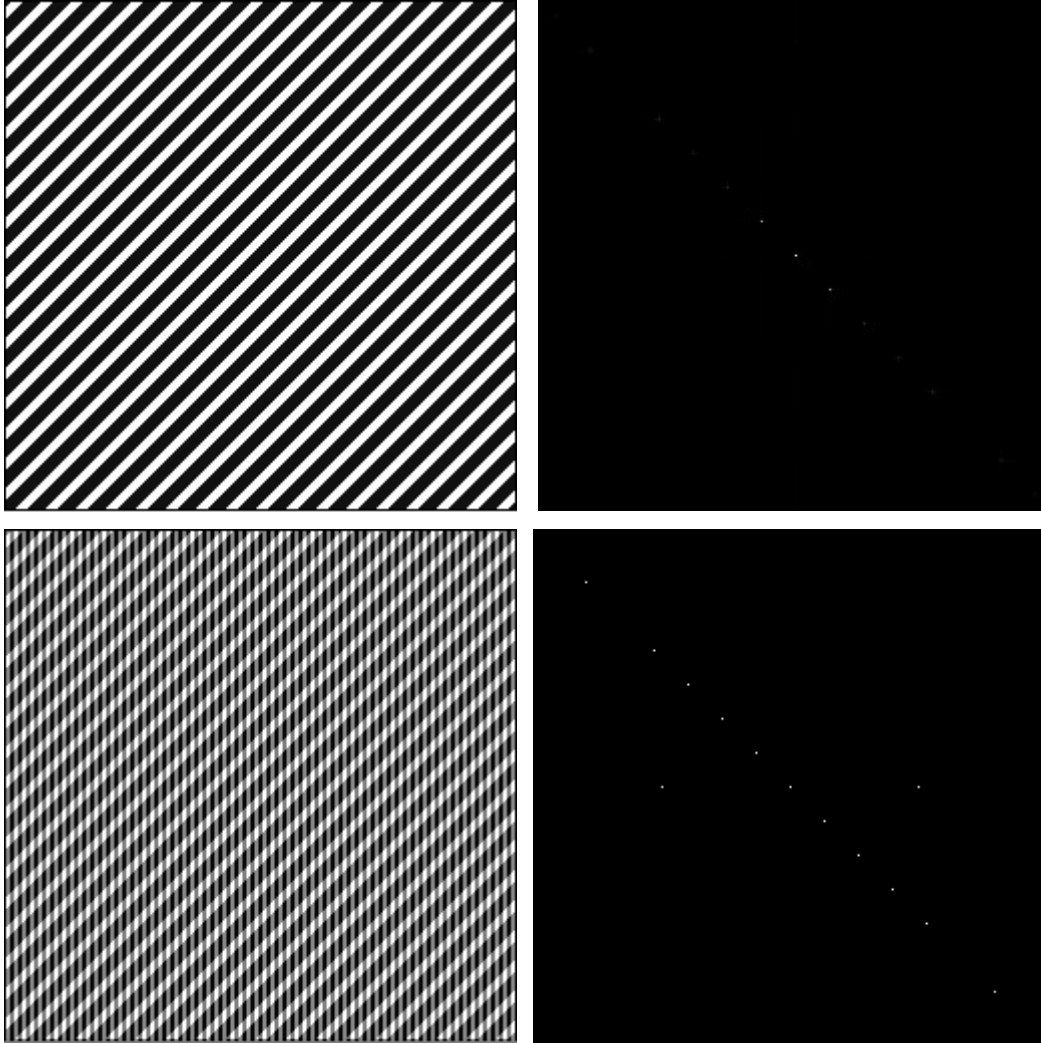


Filtreleme



- AGS: Filtre maskesi ve sonuç

Frekans düzleminde ekleme



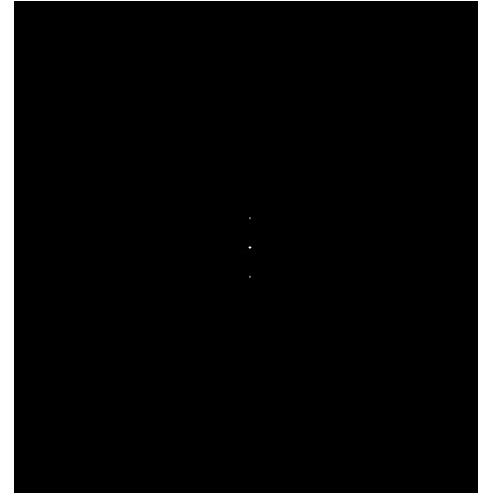
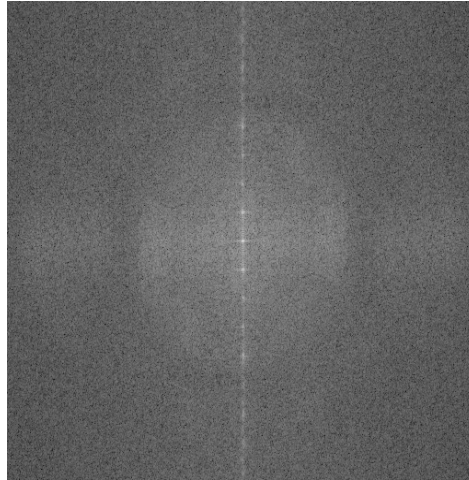
- 2 frekans bileşeni eklendi – sonuç

Örnekler

Sonnet for Lena

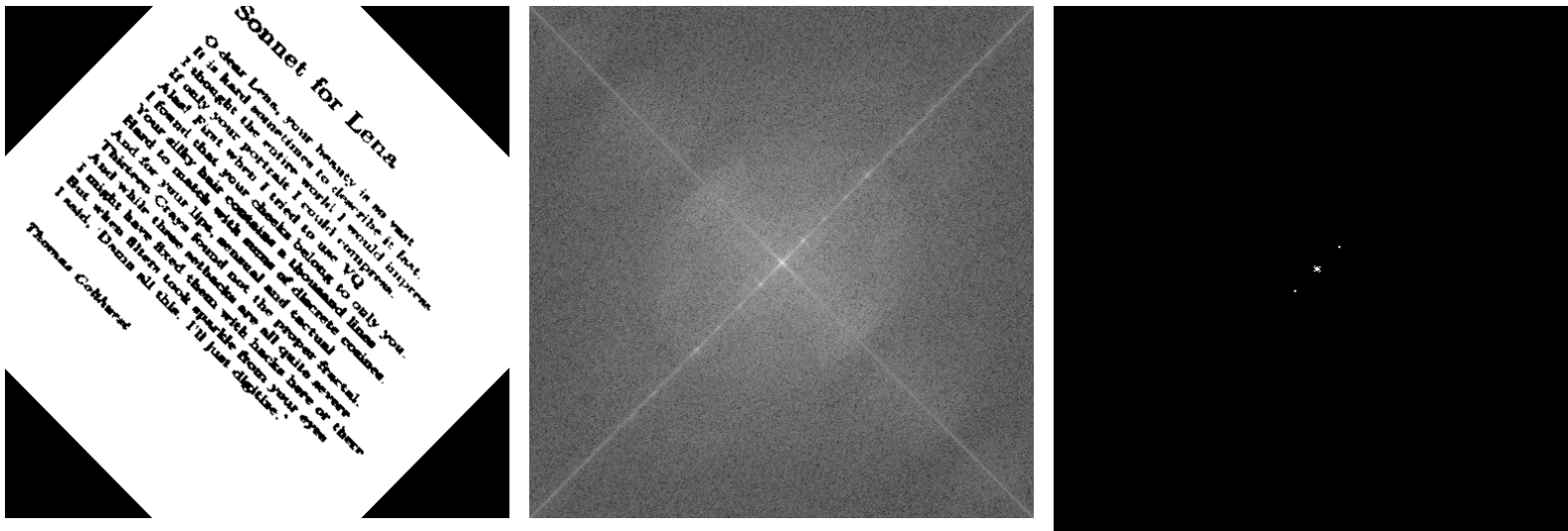
O dear Lena, your beauty is so vast
It is hard sometimes to describe it fast.
I thought the entire world I would impress
If only your portrait I could compress.
Alas! First when I tried to use VQ
I found that your cheeks belong to only you.
Your silky hair contains a thousand lines
Hard to match with sums of discrete cosines.
And for your lips, sensual and tactual
Thirteen Crays found not the proper fractal.
And while these setbacks are all quite severe
I might have fixed them with hacks here or there
But when filters took sparkle from your eyes
I said, 'Damn all this. I'll just digitize.'

Thomas Goldhurst



- Yazı – FFT – eşikleme

Örnekler



- Dönmüş Yazı – FFT – eşikleme

DCT

$$C(k, n) = \alpha(k, n) \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) \cos\left(\frac{(2i+1)k\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2j+1)n\pi}{2N}\right)$$

$$\alpha(k, n) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{for } k, n = 0 \\ \frac{2}{N} & \text{for } k, n = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

- C: real değerler
 - JPEG