ECUE21.1 : Science des données **QCM 2 – Estimation**

22 avril 2020

Question 1. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Étant donné un échantillon aléatoire $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ de X, et une de ses réalisations $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, cocher le(s) estimateur(s) non biaisé(s) de λ parmi les propositions ci-dessous :

- ☐ $L_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.
- ☐ $L_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
- ☐ $L_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right)^2\right)$.
- ☐ $L_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\right)^2\right)$.

Question 2. Un estimateur biaisé peut être plus précis qu'un estimateur non-biaisé.

- ☐ Vrai.
- ☐ Faux.

Indice pour la question 1. Quelles sont l'espérance et la variance d'une loi de Poisson de paramètre λ ?

Solution

Question 1. Il y a ici tout d'abord une question de vocabulaire : un estimateur est une variable aléatoire, tandis qu'une estimation est sa réalisation. Ainsi nous ne considérons que les formules avec X et non pas avec x.

Les deux sont des estimateurs sans biais de λ.

En effet, les X_i étant i.i.d. de même loi que X, et on rappelle que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$. Alors

$$\mathrm{B}(L_2) = \mathbb{E}(L_1) - \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) - \lambda = 0.$$

De même,

$$\mathrm{B}(L_3) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}(X_i)^2 - \lambda^2\right) - \lambda = 0.$$

On a utilisé ici que, par définition de la variance, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2$.

Question 2. Vrai. C'est le concept du compromis biais-variance (cf. section 3.4.3 du poly).