Errata du chapitre 3

Vraisemblance dans le cas X discrète

Soit $p_\theta : \mathbb{N} \to [0{,}1]$ la fonction de masse de $X : \mathbb{P}(X = k) = p_\theta(k)$.

La vraisemblance d'un échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i).$$

Vraisemblance dans le cas X continue

Soit $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la densité de X.

La vraisemblance d'un échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i).$$

Distribution a posteriori dans le cas X discrète et Θ discrète

Soit $p_\theta : \mathbb{N} \to [0{,}1]$ la fonction de masse de X et $q : \mathbb{N} \to [0{,}1]$ la fonction de masse a priori de Θ.

La fonction de masse a posteriori de Θ est donnée, en utilisant Bayes, par

$$q'_{x_1, x_2, \ldots, x_n} : \theta \in \mathbb{N} \mapsto \frac{q(\theta) \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i)}{\sum_{t \in \mathbb{N}} q(t) \prod_{i=1}^{n} p_t(x_i)}$$

Plus précisément, par rapport à la formule de Bayes donnée dans le poly Probabilités I, on utilise

- $A = \{X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2 \text{ et } \ldots X_n = x_N\}$
- $B_i = \{\Theta = \theta\}\,; \mathbb{P}(B_i) = q(\theta)$
- $B_n = \{\Theta = n\}\,; \mathbb{P}(B_n) = q(n)$

Distribution a posteriori dans le cas X continue et Θ continue

Soit $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la densité de X et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la densité a priori de Θ.

La densité a posteriori de Θ est donnée, en utilisant Bayes, par

$$g'_{x_1, x_2, \ldots, x_n} : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \frac{g(\theta) \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)}{\int_{\mathbb{R}} g(t) \prod_{i=1}^{n} f_t(x_i) dt}$$

Plus précisément, par rapport à la formule de Bayes pour les densités donnée dans le poly Probabilités IV, on utilise

- $Y = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- $X = \Theta$ et $x = \theta$,

la formule permettant de calculer la densité marginale étant donnée juste au-dessus.

Distribution a posteriori dans le cas X discrète et Θ continue

Soit $p_\theta : \mathbb{N} \to [0,1]$ la fonction de masse de X et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la densité a priori de Θ.

La densité a posteriori de Θ est donnée, en utilisant Bayes, par

$$g'_{x_1,x_2,\ldots,x_n} : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \frac{g(\theta)\prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)}{\int_{\mathbb{R}} g(t)\prod_{i=1}^n p_t(x_i)dt}$$

Ce cas a été traité dans la question 2 de l'exercice « Lois conjuguées » du poly de Probabilités IV.

Distribution a posteriori dans le cas X continue et Θ discrète

Soit $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la densité de X et $q : \mathbb{N} \to [0,1]$ la fonction de masse a priori de Θ.

La fonction de masse a posteriori de Θ est donnée, en utilisant Bayes, par

$$q'_{x_1,x_2,\ldots,x_n} : \theta \in \mathbb{N} \mapsto \frac{q(\theta)\prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)}{\sum_{t\in\mathbb{N}} q(t)\prod_{i=1}^n f_t(x_i)}$$

Ce cas peut être traité de manière symmétrique à celui de la question 2 de l'exercice « Lois conjuguées » du poly de Probabilités IV.

A priori bêta sur le paramètre d'une Bernoulli

Pour calculer l'estimateur de Bayes de p, il nous faut connaître la densité a posteriori de Θ, $g'_{x_1,x_2,\ldots,x_n}$.

On pose p_θ la fonction de masse d'une Bernouilli :

$$p_\theta(k) = \begin{cases} \theta^k(1-\theta)^{1-k} & \text{si } k \in \{0,1\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et g la densité d'une distribution bêta de paramètres (α,β) :

$$g_{\alpha,\beta}(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}.$$

La loi de Bayes, combinée à l'hypothèse d'indépendance et de distribution identique des X_i, nous permet d'écrire la densité a posteriori de Θ comme :

$$\begin{aligned} g'_{x_1,x_2,\ldots,x_n}(p) &= \frac{g(p)\prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)}{\int_{\mathbb{R}} g(t)\prod_{i=1}^n p_t(x_i)dt} \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)\int_{\mathbb{R}} g(t)\prod_{i=1}^n p_t(x_i)dt}\prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \\ &= \frac{1}{\mathcal{K}}p^{b+\alpha-1}(1-p)^{n-b+\beta-1}, \end{aligned}$$

où K ne dépend pas de p.

On reconnaît ici la densité d'une nouvelle loi bêta. Ainsi $\Theta|X_1,X_2,\ldots,X_n$ suit une loi bêta de paramètres $(b+\alpha)$ et $(n-b+\beta)$.

L'estimation de Bayes de p est ainsi

$$\widehat{p}_{\text{Bayes}} = \mathbb{E}_{g'_{x_1,x_2,\ldots,x_n}}(\Theta) = \frac{(b+\alpha)}{(b+\alpha)+(n-b+\beta)} = \frac{b+\alpha}{n+\alpha+\beta}.$$