

22 avril 2020

Question 1. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Étant donné un échantillon aléatoire (X_1, X_2, \dots, X_n) de X , et une de ses réalisations (x_1, x_2, \dots, x_n) , cocher le(s) estimateur(s) non biaisé(s) de λ parmi les propositions ci-dessous :

- ☐ $L_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$
- ☐ $L_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$
- ☐ $L_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 \right).$
- ☐ $L_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right).$

Question 2. Un estimateur biaisé peut être plus précis qu'un estimateur non-biaisé.

- ☐ Vrai.
- ☐ Faux.

Indice pour la question 1. Quelles sont l'espérance et la variance d'une loi de Poisson de paramètre λ ?

Solution

Question 1. Il y a ici tout d'abord une question de vocabulaire : un estimateur est une variable aléatoire, tandis qu'une estimation est sa réalisation. Ainsi nous ne considérons que les formules avec X et non pas avec x .

On rappelle que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Seul L_2 est un estimateur sans biais de $\mathbb{E}(X) = \lambda$: c'est la moyenne empirique de X .

On peut refaire le calcul : les X_i étant i.i.d. de même loi que X ,

$$B(L_2) = \mathbb{E}(L_2) - \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) - \lambda = 0.$$

L_3 est la variance empirique de X et L_3 est donc un estimateur biaisé de $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Question 2. Vrai. C'est le concept du compromis biais-variance (cf. section 3.4.3 du poly).