Entrega III

Pablo González Mediavilla, Víctor Manuel Peiró Martínez
Introducción a la Programación Científica
Doble Grado en Física Computacional e Ingeniería de Software
U-TAD

Diciembre, 2024

1 Ejercicio 1 - Resolución de oscilador acoplado

El oscilador acoplado consiste en una masa sujetada un muelle el cual esta fijado a una pared fija y oscila de manera proporcional a su masa y constante elástica. Para formar de este sistema un oscilador acoplado, unimos a esta masa primera, una segunda masa con otro muelle con otra constante elástica. Por lo tanto, tenemos dos masas con oscilaciones pero que además de jugar un papel las constantes elásticas y las masas, la otra masa también varía la manera de oscilar de la otra.

1.1 Planteamiento teórico

La segunda ley de newtoon, nos dice que:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Según la Ley de Hooke:

$$\vec{F} = -k \cdot \triangle \vec{x}$$

Si recordamos que: $a = \ddot{x}$; Igualando las expresiones de las fuerzas elásticas de cada muelle con la Segunda Ley de Newtoon:

$$m_1 \cdot \ddot{x_1} = -k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot (x_2 - x_1)$$
$$m_2 \cdot \ddot{x_2} = -k_2 \cdot (x_2 - x_1)$$

Si cogemos: $x_3 = \dot{x_1}$ y $x_4 = \dot{x_2}$ → *La velocidad es la primera derivada de la posición*

$$\dot{x_3} = -\frac{k_1}{m_1} \cdot x_1 + \frac{k_2}{m_1} \cdot (x_2 - x_1)$$
$$\dot{x_4} = -\frac{k_2}{m_2} \cdot (x_2 - x_1)$$

Con todo esto vemos la dependencia que tienen las trayectorias de ambos muelles entre sí. Es decir, está claro que como la segunda masa esta unida a la primera, dependiendo de los estados de la primera, la segunda evolucionará en su oscilación. Sin embargo, las ecuaciones no sólo se quedan ahí sino que también nos muestran que la primera masa sufrirá una variación en su trayectoria debido a efectos de la segunda (ese segundo término que nos aparece en la ecuación descrita cuando igualamos la ley de Hooke con la de Newtoon).

1.2 Método experimental

Para la realización de este ejercicio hemos utilizado el entorno virtual de jupyter notebooks, usando las librerías matlplotlib para poder representar las gráficas y numpy para poder hacer todo el trabajo con vectores. Utilizamos odeint de la librería scipy.integrate para hayar las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales. Utilizamos vpython para hacer la simulación del movimiento de las masas.
En el código, la constante elástica del primer resorte es k_1 y la del segundo resorte es k_2. Las masas m_1 y m_2 están inicialmente desplazadas y sin velocidad, lo que establece las condiciones iniciales del sistema.

1.3 Código y solución

El código para la resolución del problema se encuentra en el siguiente repositorio.

1.4 Análisis de los resultados

El sistema de ecuaciones contiene dos términos clave que reflejan la interacción entre las masas:

El primer resorte conecta la masa m_1 a un punto fijo (en el código no explítamente, pero se sobreentiende por la forma de las ecuaciones). El segundo resorte conecta m_1 y m_2, generando un acoplamiento entre las dos masas. Esto significa que el movimiento de una masa afecta directamente al movimiento de la otra.

Este acoplamiento hace que las oscilaciones de las masas no sean independientes, sino que se influencian mutuamente. Si una masa se mueve hacia la derecha, la otra experimentará una fuerza que la empujará hacia la izquierda, y viceversa, creando un patrón de movimiento complejo.

Al ser un sistema acoplado en serie, la energía se transfiere entre las masas a través del resorte que las conecta. Si las constantes elásticas de los resortes son diferentes, como en este caso ($k_1 \neq k_2$), las frecuencias de oscilación de las masas no serán iguales. Esto puede llevar a un comportamiento interesante, donde las masas oscilan en una forma no sincronizada, dependiendo de las condiciones iniciales y las propiedades de los resortes.

El movimiento de las masas es un movimiento oscilatorio amortiguado (aunque en este caso no se ha incluido explícitamente un término de amortiguamiento). Si se añade este término, las amplitudes de las oscilaciones disminuirían gradualmente con el tiempo debido a la disipación de energía. Este fenómeno es común en sistemas reales donde la fricción o la resistencia del aire juegan un papel importante. Por lo tanto, al cambiar minimamente las condiciones iniciales de nuestro problema, obtendremos resultados de la misma forma (ya que se trata del mismo problema) pero con una gran diferencia en los resultados.

1.5 Conclusiones

Por lo tanto, la dependencia de éste problema guarda un gran peso en las condiciones iniciales. Gracias al código que aportamos, se puede observar de manera rápida y sencilla que un cambio mínimo en las condiciones iniciales de cualquiera de las dos masas o en cualquier parámetro que entre en juego en el sistema, supone un cambio en el transcurso de la simulación; y por lo tanto, en el resultado. Además, también observamos que la dependencia entre las dos masas es grande.

La gráfica generada por el código muestra la evolución de la posición de la masa m_1 en el eje x frente a la posición de la masa m_2. Este gráfico es una manera fácil de visualizar cómo se desarrolla el acoplamiento entre las dos masas. Cómo ambos osciladores están acoplados, el sistema muestra una trayectoria en el plano de fase que es mucho más compleja que la de un oscilador individual. Este gráfico tiene un patrón de movimiento de una figura más compleja, dependiendo de la relación que hay entre las constantes k_1 , k_2, las masas y las condiciones iniciales. Lo que está claro es que no es cíclico.

Los osciladores acoplados en este tipo de simulación muestran cómo la energía puede transferirse entre dos objetos conectados por resortes. A medida que el sistema evoluciona, las posiciones de las masas fluctuaran debido a las fuerzas restauradoras generadas por los resortes, pero estas fluctuaciones estarán interrelacionadas, ya que el movimiento de una masa afecta a la otra. El sistema de ecuaciones que describe estas interacciones refleja la naturaleza no lineal y acoplada de estos tipos de sistemas, lo que puede llevar a una variedad de comportamientos dinámicos, desde oscilaciones sincronizadas hasta desincronizadas.

Si extendemos este modelo a más masas o añadimos términos de amortiguamiento, podemos estudiar fenómenos más complejos como la resonancia, el comportamiento caótico en sistemas no lineales o la transmisión de energía a través de materiales conectados.