Entrega II

Pablo González Mediavilla, Víctor Manuel Peiró Martínez
Introducción a la Programación Científica
Doble Grado en Física Computacional e Ingeniería de Software
U-TAD

Diciembre, 2024

1 Ejercicio 1 - Sistema de EDOs acopladas. Modelo de epidemia SIR

El modelo SIR fue propuesto por Kermack y McKendric en 1927 y describe cómo se extiende una epidemia en una población "N", usando tres magnitudes: "S" ("Susceptible", población sana pero no inmune al patógeno), "I" ("Infectado" población infectada y contagiadora), "R" ("Recuperado" población curada e inmunizada). Las tres se miden en número de individuos y se cumple en todo momento que $S + R + I = N$. Se supone que no hay vacuna y nadie muere.

1.1 Planteamiento teórico

Las ecuaciones diferenciales son:

- $\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N}$
- $\frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I$
- $\frac{dR}{dt} = \gamma I$
- La primera ecuación indica que la variación del número de individuos susceptibles es el producto de contagios entre Susceptibles e Infectados, que se encuentran con una tasa β y con una probabilidad de contagio 1, dividido por el total de la población. Inicialmente todos los habitantes menos uno están sanos pero no son inmunes, este número solo puede disminuir.
- La segunda ecuación es la variación de infectados, que crecen conforme los pacientes Susceptibles se Infectan al ritmo que determina la primera ecuación, pero además puede disminuir cuando el sistema inmunológico hace su trabajo y un Infectado se Recupera y se inmuniza (segundo término).
- La tercera, que el número de individuos recuperados es proporcional al de infectados. La fracción γ ($\gamma < 1$) es la velocidad de recuperación de los enfermos. Al cociente $\frac{\beta}{\gamma}$ se le denomina tasa de reproducción o R_0 , si es mayor que 1 la infección se extiende por toda la población, si es inferior se extingue. Puede actuarse aumentando el denominador (reduciendo el tiempo de recuperación encontrando una cura) o disminuyendo el numerador, al rebajar el número de contactos con una cuarentena.
- Si existe vacuna el modelo SIR simple ya no sirve, en ese caso hay que incluir una nueva ecuación que representa el número de individuos que pasan directamente de "S" a "R" al inmunizarse.
- Resolvemos el modelo SIR y representamos la evolución para tres valores de R_0: 0.5, 1 y 1.8

1.2 Método experimental

Para la realización de este ejercicio hemos utilizado el entorno virtual de jupyter notebooks, usando las librerías matlplotlib para poder representar las gráficas y numpy para poder hacer todo el trabajo con vectores. Utilizamos odeint de la librería scipy.integrate para hayar las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales lineales de primero orden.

1.3 Código y solución

El código para la resolución del problema se encuentra en el siguiente repositorio.

1.4 Análisis de los resultados

Para un $R_0 = 0.5$, tenemos una tasa de reproducción de la enfermedad baja para nuestra población. Una gran minoría de la población es contagiada y por lo tanto las tres variables siguen expresiones prácticamente constantes. El número de infectados es prácticamente 0 y por lo tanto el de recuperados a penas crece. Por otro lado, el numero de susceptible decrementa también prácticamente nada. Éste sería el caso de una epidemia ideal para la población estudiada, mínimo contagio.

Para una tasa de reproducción de la enfermedad de 1, vemos un mayor cambio de las variables estudiadas en función del paso del tiempo. Los susceptibles decrementan ligeramente ya que suben los infectados / recuperados. De todas maneras, el número de personas recuperadas es mayor al numero de personas infectadas ya que como no hay un gran número de personas infectadas en un corto período de tiempo, no hay agotamiento de recursos y colapsamiento de hospitales... Por ello, la curva de recuperados crece de manera mayor que el numero de infectados.

Para una $R_0 = 1.8$ la cosa cambia, podemos ver como el número de personas infectadas sube en un punto determinado cuando decrementa en consecuencia el número de susceptibles. A su vez, incrementa el número de recuperados rápidamente. Una vez se estabiliza el número de infectados, se estabilizan también el resto de curvas. Aunque haya habido un número de recuperados e infectados mayor la enfermedad no ha sido muy fuerte en la sociedad ya que el crecimiento de los infectados con respecto del tiempo no ha tenido una gran pendiente, luego los equipos médicos han podido convertir todos los infectados en recuperados. Vemos que la curva de infectados no tiene ningún punto donde haya alcanzado un máximo de manera rápida.

1.5 Conclusiones

Como conclusiones de este problema destacamos la dependencia que tienen las tres variables estudiadas. Como nadie de la población muere por la enfermedad, el cambio de una de las tres variables en función del tiempo repercute directamente sobre las otras dos. Ademas, vemos que a mayor R_0 mayor dispersión de la enfermedad. Y, por lo tanto, mayor número de infectados por la enfermedad.
También, ver la importancia de ecuaciones diferenciales para modelizar cambios en una sociedad como puede ser esta enfermedad. Al final, simplemente definiendo bien las variables que siguen una proporcionalidad directa o inversa se puede ver, no sólo el cambio de las variables sino también su repercusión con respecto al resto de variables que sean objeto de estudio.

2 Ejercicio 2 - Ecuación de difusión

Tenemos una barra metálica homogénea a temperatura ambiente (300k) de longitud 3m y podemos suponer que de grosor despreciable frente a la longitud. Esta barra está sometida a la llama de un soplete situado a 1m del origen, con una llama de temperatura 800K y que puede modelarse como un puso gaussiano muy estrecho. A 2m del origen, la barra se enfría con un chorro de aire a 273K, que puede modelarse también como un pulso gaussiano. Si la conductividad térmica adimensional es 0.3, representamos la gráfica de la temperatura en la barra 1, 5 y 10 segundos después de comenzar el experimento.

2.1 Planteamiento teórico

Dos cuerpos con distinta temperatura tienden a estar en equilibro térmico. Éste equilibrio térmico se consigue cuando $T_A = T_B$. Por lo tanto, si tenemos una barra metálica a temperatura 300 k y le suministramos con una corriente de calor de temperatura mayor, la barra aumentará la temperatura. Este pulso que realiza la llama del soplete sobre la barra se puede modelizar como un pulso gaussiano.
La transfusión de este calor se dará bajo la relación: $\frac{Q}{dt} = \frac{k \cdot A}{x} \cdot (T_1 - T_2)$.
Donde k es una constante de conductividad térmica, A el área de la superficie de contacto y x el espesor del material. Sin embargo, nosotros cogeremos el valor de la temperatura en el punto donde se suministra la fuente de calor y lo modelizaremos como una guassiana.

2.2 Método experimental

Para la realización de este ejercicio hemos utilizado el entorno virtual de jupyter notebooks, usando las librerías de matplotlib para poder representar las gráficas y numpy para poder hacer todo el trabajo con vectores. Utilizamos np.gradiente para la resolucion del sistema de ecuaciones.

2.3 Código y solución

El código para la resolución del problema se encuentra en el siguiente repositorio.

2.4 Análisis de los resultados

Vemos como los verdaderamente cuando le proporcionamos calor a la barra en un punto centralizado como en ese punto exacto adquiere la máxima temperatura que, coincide con la temperatura proporcionada. La transferencia de calor en torno a los diferentes puntos de la barra sigue un pulso gaussiano. Es decir, como la barra sigue una distribucción uniforme, el calor proporcionado tiende a distribuirse por toda la barra, de tal manera que toda la barra se encuentre a la misma temperatura la cual será igual encontrando el equilibrio térmico.
A diferencia que cuando le proporcionamos una temperatura de 800k, cuando le proporcionamos la temperatura de 273k, como hemos supuesto que la barra se encuentra a temperatura ambiente (300k), el pulso gaussiano es negativo. Además, como la diferencia 800 - 300 es mucho mayor que la diferencia 300 - 273, vemos que la curva no llega al mismo máximo / mínimo.

Como si nos indica la expresión antes enunciada: $\frac{Q}{dt} = \frac{k \cdot A}{x} \cdot (T_1 - T_2)$ el crecimiento de la gaussiana sería mayor / menor si el área sobre el que se da calor en la barra fuera mayor, el intervalo de tiempo fuese mayor o la diferencia de temperatura fuese mayor. El resto de magnitudes como k o x no se pueden cambiar ya que son constantes para un mismo material.

Sin embargo, como es lógico, una vez la barra ha llegado a tener la misma temperatura y está en equilibrio con el resto de fuentes de calor, la temperatura será constante hasta que haya otro elemento externo que perturbe el estado de equilibrio. Es decir, no por mantener la fuente de calor la temperatura sigue aumentando de manera "infinita", sino hasta que: $T_A = T_B$

2.5 Conclusiones

Una vez visto la evolución del problema las conclusiones que obtenemos son las siguientes:
La importancia del tipo de material con el que estas trabajando puede variar demasiado la evolución que tengas del calor en el sistema. En muchos problemas, da un poco igual el material que tengas mientras tenga una masa (m) o una carga (q). Sin embargo, en este problema el tipo de material hace cambiar las condiciones del problemas y varía el flujo de calor en el sistema. Además, también las condiciones geométricas juegan un papel en este problema.

A mayor sea el área de incidencia, mayor será la amplitud de la gaussiana y; por lo tanto, más cantidad de barra obtendrá cierta temperatura en un menor período de tiempo.