以下の漸化式を考える。このとき$P(Awins|n)$は「n人でじゃんけんしてA以外の$n-1$人がグー、チョキ、パーをそれぞれr,p,sの確率で出し続けたとき、Aが最後まで勝ち残る確率」を与える。

$$P(Awins|n) = \frac{1}{1-P(draw|n)}\sum_{m=1}^{n-1} P(win|n,m)P(Awins|m) \tag{1}$$

ただし

$$1-P(draw|n) = (r+p)^{n-1} + (s+p)^{n-1} - 2p^{n-1} \tag{2}$$

$$P(Awins|1) = 1$$

$$P(win|n,m) = \binom{n-1}{m-1} r^{n-m} p^{m-1}$$

$$r+p+s = 1, 0 \le r,p,s \le 1$$

r,s,pはそれぞれ、相手がグー、チョキ、パーを出す確率である。

ここからは(1)の近似的な解を理論的に求める手法を示す。

(1)は記法を工夫することで簡潔に書ける。以下のように記述することにする。

$$W_n = P(Awins|n)$$

$$\Sigma_{xy}^{\mathrm{n-1}}(z_m) = \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-1}{m-1} x^{n-m} y^{m-1} z_m$$

$$\Sigma_{xy}^{\mathrm{n-1}} = \Sigma_{xy}^{\mathrm{n-1}}(1)$$

このとき(1)は

$$W_n = \frac{\Sigma_{rp}^{\mathrm{n-1}}(W_m)}{\Sigma_{rp}^{\mathrm{n-1}} + \Sigma_{sp}^{\mathrm{n-1}}} \tag{3}$$

ここでW_nはαに収束すると仮定し、収束値との差を$\epsilon_n = W_n - \alpha$とする。これを(3)に代入すると

$$\alpha + \varepsilon_n = \frac{\Sigma_{rp}^{\mathrm{n-1}}(\alpha + \varepsilon_m)}{\Sigma_{rp}^{\mathrm{n-1}} + \Sigma_{sp}^{\mathrm{n-1}}}$$

$$(\alpha+\varepsilon_n)(\Sigma_{rp}^{\mathrm{n-1}}+\Sigma_{sp}^{\mathrm{n-1}})=\alpha\Sigma_{rp}^{\mathrm{n-1}}+\Sigma_{rp}^{\mathrm{n-1}}(\varepsilon_m)$$

$$(\alpha+\varepsilon_n)\Sigma_{sp}^{\mathrm{n-1}}=\Sigma_{rp}^{\mathrm{n-1}}(\varepsilon_m-\varepsilon_n)$$

$$(\alpha+\varepsilon_n)\Sigma_{sp}^{\mathrm{n-1}}=(r+p)^{n-1}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n-1}{m-1}\left(\frac{r}{r+p}\right)^{n-m}\left(\frac{p}{r+p}\right)^{m-1}(\varepsilon_m-\varepsilon_n) \tag{4}$$

(4)の右辺は二項分布の畳み込みの形になっている。

nが十分に大きいとき、二項分布は$p_A=\frac{p}{r+p}$とするとnp_Aで鋭いピークを持つ分布となる。

ここで、あるmと$k\ll n$に対して$\varepsilon_m\cong\varepsilon_{m\pm k}$と仮定すると(4)は以下のように近似できる。

（完全には二項分布の畳み込みになっていないが、nが十分大きければピークが鋭い分布となり、$p_A<1$ではほぼ二項分布の畳み込みとみなせる。$0<p_A<1$で成り立つ近似である。）

$$(\alpha+\varepsilon_n)\Sigma_{sp}^{\mathrm{n-1}}=(r+p)^{n-1}\left(\varepsilon_{np_A}-\varepsilon_n\right) \tag{5}$$

また、nが十分に大きいとき、$0<s$では以下のように近似できる。

$$\Sigma_{sp}^{\mathrm{n-1}}=(s+p)^{n-1}-p^{n-1}\sim(s+p)^{n-1}$$

この近似から$R=\frac{s+p}{r+p}$とおくと(5)は以下のように変形できる。

$$(1+R^{n-1})\varepsilon_n=\varepsilon_{np_A}-\alpha R^{n-1} \tag{6}$$

ここでnは十分大きいのでε_nを連続関数として近似する。連続関数への置き換えとして、$n\to x,\varepsilon_n\to f(x)$とする。よって(6)は以下のような関数方程式に置き換えられる。

$$(1+R^{x-1})f(x)=f(p_Ax)-\alpha R^{x-1} \tag{7}$$

ここからは関数方程式(7)の一般解を求めることに焦点を当てる。

まず以下のような(7)の斉次方程式の一般解を求める。

$$(1+R^{x-1})f_h(x)=f_h(p_Ax) \tag{8}$$

(8)の解の 1 つを$G(x)$とおくと周期が$\ln(p_A x)$の周期関数Ωを用いて、$G(x)\Omega(\ln(x))$も解となる。これは以下のように示せる。

解の候補$G(x)\Omega(\ln(x))$を(8)に代入して

左辺は

$$(1+R^{x-1})G(x)\Omega(\ln(x))$$

右辺は

$$G(p_A x)\Omega(\ln(\mathrm{p_A} x)) = G(p_A x)\Omega(\ln(x)+\ln(\mathrm{p_A})) \tag{9}$$

ここで$G(x)$は(8)の解なので以下が成り立つ。

$$(1+R^{x-1})G(x) = G(p_A x) \tag{10}$$

これを(9)に代入して、Ωが周期が$\ln(p_A)$の周期関数であるから$\Omega(\ln(x)) = \Omega(\ln(x)+\ln(\mathrm{p_A}))$であることも用いて整理すると

右辺は

$$(1+R^{x-1})G(x)\Omega(\ln(x))$$

よって、$G(x)\Omega(\ln(x))$も(8)の解であることがわかる。

ここで、(10)より$G(x)$を構成してみる。

$G(x)$が連続と仮定し、(10)を変形して

$$\begin{aligned} G(x) &= G(p_A x)(1+R^{x-1})^{-1} \\ &= G(p_A^2 x)(1+R^{x-1})^{-1}(1+R^{p_A x-1})^{-1} \\ &= G(0)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+R^{p_A^k x-1}\right)^{-1} \end{aligned}$$

しかし、$k\to\infty$で$\left(1+R^{p_A^k x-1}\right)^{-1} = (1+R^{-1})^{-1} \neq 1$となるため$G(x)$の形を見直す。

xが 0 に十分近いとき、(10)は近似的に

$$(1+R^{-1})G(x) \cong G(p_A x)$$

これは$\beta=\frac{\ln(1+R^{-1})}{ln(p_{A})}$とすると$G(x)=x^{\beta}$が解となる。

そこで$G(x)=x^{\beta}G_0(x)$と置いてみると(10)より先ほどと同様に$G_0(x)$を構成して

$$G_0(x)=G_0(0)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1+R^{-1}}{1+R^{p_A^k x-1}}$$

任意定数$G_0(0)=C$と置くと$G(x)$は

$$G(x)=Cx^{\beta}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1+R^{-1}}{1+R^{p_A^k x-1}}$$

以上より、$f_h(x)$は以下のようになる。

$$f_h(x)=Cx^{\beta}\Omega(\ln(x))\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1+R^{-1}}{1+R^{p_A^k x-1}}$$

また、(7)は特殊解$f_p(x)=-\alpha$をもつ。

したがって、(7)の一般解は

$$\begin{aligned}f(x)&=f_h(x)+f_p(x)\\&=Cx^{\beta}\Omega(\ln(x))\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1+R^{-1}}{1+R^{p_A^k x-1}}-\alpha\end{aligned}$$

以上より、nが十分大きいとき$W_n=\alpha+\varepsilon_n$は以下のようになる。

$$\begin{aligned}W_n&=\alpha+\varepsilon_n\\&=Cn^{\beta}\Omega(\ln(n))\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1+R^{-1}}{1+R^{p_A^k n-1}}\end{aligned}$$

求めた式の解析

この式でβは負であるからn^{β}は減少する。しかし、無限積の影響が明らかではないため無限積の成長を解析する必要がある。

無限積の項が 1 より十分大きくなる個数を成長のオーダーとして考えてみる。

$R < 1$のとき、$p_A^k n > 1$で項が 1 より十分大きくなると考えると、対数をとって

$$k\ln(p_A) + \ln(n) > 0$$

$$k < -\frac{\ln(n)}{\ln(p_A)}$$

$n \gg k$のとき、無限積の項の分母が 1 に近くなる。よって、無限積の成長のオーダーは

$(1 + R^{-1})^{-\frac{\ln(n)}{\ln(p_A)}}$と書ける。

これを変形すると

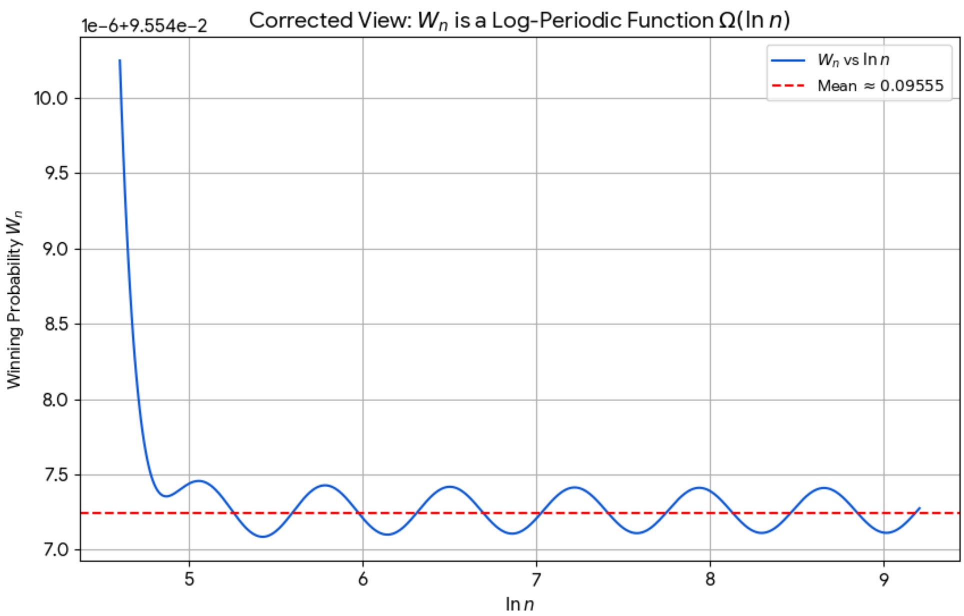
$$n^{-\frac{\ln(1+R^{-1})}{\ln(p_A)}} = n^{-\beta}$$

よってnが十分に大きいとき、W_nは以下のように振る舞う。

$$W_n = C\,\Omega(\ln(n))$$

Ωは周期が$\ln(p_A)$の周期関数なので、定数項を含む。よって、nが大きくなるとW_nは何かしらの定数周辺で振動し続ける。(振動しない場合もある)

実際に$r = 0.35, s = 0.317, p = 0.333$(人間が出す手の統計的な確率)として(1)を用いて計算した結果が以下である。



横軸に$\ln(n)$、縦軸にW_nをとると、0.09555 周辺で一定周期で振動していることがわかる。

この結果は先ほど導出した理論式と一致する。周期は理論から$|\ln{(p_A)}| \cong 0.72$であるが、グラフと一致することがわかり、導出した理論式は妥当だといえる。