Основы системного анализа

Лекция 9

5. Управление в сложных системах

5.1. Классификация задач принятия решений

5.2. Модели принятия решений

5.3. Методы решения многокритериальных задач выбора

5.4. Методы поиска решения

3. Методы решения многокритериальных задач выбора

Многокритериальная задача выбора формулируется в следующем виде. Дано множество допустимых альтернатив, каждая из которых оценивается множеством критериев. Требуется определить наилучшую альтернативу. При её решении основная трудность состоит в неоднозначности выбора наилучшего решения.

Для ее устранения используются две группы методов. В методах первой группы стремятся сократить число критериев, для чего вводят дополнительные предположения, относящиеся к процедуре ранжирования критериев и сравнения альтернатив.

В методах второй группы стремятся сократить число альтернатив в исходном множестве, исключив заведомо плохие альтернативы.

К методам первой группы относятся метод свертки, метод главного критерия, метод пороговых критериев, метод расстояния. Следует отметить, что строгое обоснование этих методов отсутствует и их применение определяется условиями задачи и предпочтением ЛПР.

Метод свертки состоит в замене исходных критериев (их называют также локальными или частными) K_j одним общим критерием K. Эта операция называется сверткой или агрегированием частных критериев. Метод целесообразно применять, если по условиям задачи частные критерии можно расположить по убыванию важности так, что важность каждой пары соседних критериев различается не сильно, либо, если альтернативы имеют существенно различающиеся оценки по разным критериям. Наиболее часто используются аддитивная, мультипликативная и максминная свертки.

Аддитивная свертка (от англ. addition – сложение) имеет вид

$$K(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j K_j(x),$$

где $K(x)$ – общий критерий для альтернативы $x \in X$, показывающий её пригодность для достижения цели; $\{K_j(x)\}_1^n$ – набор исходных критериев; n – число исходных критериев, a_j – относительный вес частного критерия K_j.

Для весов выполняется условие нормировки

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 1,$$

которое необходимо, чтобы результаты, полученные в разных условиях, были сопоставимы. Наилучшее решение определяется выражением

$$x^* = \arg\max_{x \in X} K(x)\,,$$

т.е. наилучшим считается решение, которому соответствует максимум общего критерия на множестве альтернатив.

Мультипликативная свертка (от англ. multiplication – умножение) применяется в двух формах:

$$K(x) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{a_j}(x),$$

или

$$K(x) = \prod_{j=1}^{n} a_j K_j(x).$$

Наилучшее решение определяется выражением

$$x^* = \arg\max_{x \in X} K(x)\,.$$

Максминная свертка (выбор по наихудшему критерию) имеет вид

$$K(x) = \min_j a_j K_j(x).$$

Эта свертка учитывает критерий, имеющий наименьшее значение. Наилучшее решение определяется выражением

$$x^* = \arg\max_{x \in X} \min_j a_j K_j$$

Метод пороговых критериев часто применяется в задачах обеспечения (удовлетворения), например при планировании и проектировании, когда ограничения задаются в виде

$$K_j(x) \geq K_{j0}; j = 1, \dots, n;$$

где K_{j0} – пороговые значения критериев. Их совокупность обычно характеризует некоторый аналог (базовый уровень).

Образуем свертку

$$K(x) = \min_j (K_j(x)/K_{j0}),$$

тогда наилучшее решение определяется выражением

$$x^* = \arg\max_{x \in X} K(x).$$

Метод главного критерия. Если исходной информации достаточно, чтобы из множества исходных критериев $K_j\ x$ выделить главный (основной) $K_0\ (x)$,т.е. такой, который значительно превосходит по важности все другие критерии (на практике в три и более раз), то наилучшее решение определяется в виде

$$x^* = \arg\max_{x \in X} K(x)\,,$$

при дополнительных условиях $K_j\ (\ x\ )\ \ K_{j\text{порог}}$ для всех остальных критериев, т.е. их значения должны быть не меньше некоторых пороговых значений.

Метод расстояния состоит во введении метрики (расстояния) в пространстве критериев. Пусть исходной информации достаточно, чтобы определить “идеальное” (эталонное) решение, соответствующее точке абсолютного максимума в пространстве критериев. Обозначим ее, как x_0 (K_{01} ,..., K_{0n}) . Отметим, что идеальное решение на практике не достижимо и определяется лишь теоретически. Введем для каждой альтернативы $x \in X$ расстояние до точки абсолютного максимума $d(x)$. Наилучшее решение определяется как наиболее близкое к идеальному

$$x^* = \arg\max_{x \in X} d(x)$$

В качестве меры расстояния используются различные функции, например, Махалобиса, Минковского. При использовании функции Минковского

$$d(x) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left| K_j(x) - K_{0j} \right|^p \right\}^{1/p}$$

или с учетом веса критериев

$$d(x) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left| a_j (K_j(x) - K_{0j}) \right|^p \right\}^{1/p} .$$

При $p = 1$ получаем расстояние Хемминга, при $p = 2$ – евклидово расстояние;

при $p = \infty$ – расстояние по максимальному значению, при $p = -\infty$ – расстояние по минимальному значению.

Выбор параметра *p* зависит от условий задачи и предпочтений ЛПР.

Построение множества Парето. Наряду с методами первой группы, использующими свертку в пространстве критериев, применяются методы второй группы, основанные на сужении множества альтернатив, в которых пытаются уменьшить число возможных вариантов решений, исключив заведомо плохие.

Один из подходов, обладающий большой общностью, был предложен итальянским экономистом В.Парето в 1904 г. и называется методом, основанным на принципе Парето или, коротко, методом Парето.

Он применяется, когда число альтернатив велико и альтернативы имеют противоречивые оценки по разным критериям. В этом случае применение методов первой группы может привести к ненадежным решениям и необходим неформальный анализ множества альтернатив. Для уменьшения числа альтернатив исходного множества строят множество Парето, являющееся подмножеством исходного.

Определим множество Парето в виде

$$x_\pi = \left\{ x_\pi \in X : \forall x \in X, \forall i\, K_i(x_\pi) \geq K_i(x), \exists j\, K_j(x_\pi) > K_j(x) \right\},$$

т.е. альтернатива принадлежит множеству Парето, если она не хуже других по всем критериям и хотя бы по одному критерию лучше. Альтернативы из множества Парето называются парето-решениями, эффективными или недоминируемыми (непревосходимыми) альтернативами.

При решении многокритериальных задач используется принцип Парето, заключающийся в том, что наилучшее решение следует выбирать среди альтернатив, принадлежащих множеству Парето.

Этот принцип выполняется в большинстве практических ситуаций, когда альтернативы оцениваются по противоречивым критериям.

Он позволяет сузить исходное множество альтернатив, причем окончательный выбор остается за ЛПР. Альтернативы, входящие в множество Парето, попарно не сравнимы друг с другом, т.е. по одним критериям лучше одна альтернатива, по другим другая и т.д., и их невозможно улучшить одновременно по всем критериям. Поэтому анализ множества Парето позволяет найти компромисс между противоречивыми требованиями и дает ЛПР возможность судить о том, какова “цена” увеличения одного из критериев и как это скажется на ухудшении остальных.

4. Методы поиска решения

Если решение задачи неизвестно или неоднозначно, например, отсутствуют аналоги или его трудно определить в явном виде, то применяются методы поиска (вывода) решения.

Большинство этих методов основано на стратегиях

- полного перебора,
- имплицитного (неявного, неполного) перебора,
- сокращенного (направленного) перебора на основе эвристик (эвристический поиск).

Стратегия *полного перебора* используется при отсутствии достаточной априорной информации о задаче и сравнительно небольшой мощности множества альтернатив.

Имплицитный перебор включает большую группу градиентных методов, например симплекс-метод, метод минимальной стоимости (“жадный” алгоритм), динамическое программирование, $(\alpha-\beta)$-метод, метод ветвей и границ и т.п. Все они основаны на рассмотрении на каждом шаге поиска не всего пространства задачи, а некоторого его фрагмента, определяемого симметрией задачи.

Эвристические методы основаны на моделировании эвристик – качественно-ситуационных способов решения задач.

Эвристики – это пошаговые процедуры, которые за конечное число шагов обеспечивают удовлетворительное решение задачи путем сокращения возможных вариантов при поиске решения и использования направленного перебора.

Эвристические методы применяются для решения слабо структурированных, плохо формализуемых задач, которые не могут быть описаны числовой моделью и характеризуются неточностью, неполнотой, неоднозначностью, неясностью информации.

Их применение также целесообразно при жестких ресурсных ограничениях (действия в экстремальных или неизвестных ситуациях). Эвристический поиск включает системный анализ задачи; выявление ограничений, влияющих на результат (как внешних, так и внутренних); анализ возможности получения результата простыми средствами; определение особенностей, ограничений и “узких мест”, требующих использования дополнительных средств, и путей их уменьшения; моделирование задачи и возможных ситуаций для получения наилучшего решения.

Метод аналогии (прецедента) является наиболее общим и может предусматривать аналогию в целях и критериях, структуре и функциях, условиях функционирования, в результатах и их оценке, способах описания и моделях.

Метод упрощения применяется, когда прямая аналогия затруднена из-за сложности проблемы и заключается в снятии ряда условий и ограничений, повышении “симметрии” задачи.

Метод агрегирования (ассоциации, погружения) дополняет предыдущий и предусматривает применение концептуального аппарата более высокого уровня, что позволяет рассматривать решаемую задачу как часть более общей (такой подход характерен для решения так называемых некорректных задач).

Основные методы поиска решения можно разделить на три группы.

Первую группу составляют *стратегии поиска по состояниям*. Исходная информация представляется в виде пространства ситуаций, описываемого как состояние системы и окружающей среды. Алгоритм поиска состоит в поиске пути $\{l\}$, ведущего из начального состояния в одно из конечных (целевых состояний) $S_0 \xrightarrow{\{l\}} \{S_k\}$. К этой группе относятся методы поиска “в ширину”, поиска “в глубину”, $(\alpha - \beta)$-метод, метод ветвей и границ, методы прямого и обратного поиска, а также градиентные методы.

Вторую группу составляют *стратегии поиска по задачам*.

Исходная информация представляется как задача и множество элементов решения (подзадач) σ_{ij} , где *j* – число уровней решения; *i* – число элементов на *j*-м уровне. Алгоритм поиска состоит в сведении исходной задачи к более простым задачам, пока не будут получены элементарные задачи $\sigma \rightarrow \bigcup_i \bigcap_j \sigma_{ij}$.

К этой группе относятся метод ключевых операторов, метод общего решателя задач и другие.

Третью группу составляют методы, использующие логический вывод. Исходная информация представляется в виде описания состояний в рамках некоторой формальной системы, включающей алфавит, аксиомы и правила вывода. Путем логического вывода проверяется, можно ли получить конечное состояние σ_k из начального состояния σ_0.

К этой группе относятся дедуктивный метод, метод продукций и ряд других.

Разработаны различные модификации методов поиска с целью повышения их эффективности, а также комплексные целевые стратегии поиска общего характера, моделирующие процесс рассуждения человека.

Рассмотренные схемы допускают обобщение на нечеткий случай путем объединения стратегий поиска по состояниям и по задачам, что повышает гибкость стратегии поиска в различной информационной среде.