Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАО УВО “Севастопольский государственный университет”

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

к решению задач линейного программирования по дисциплине “Методы исследования операций” для студентов направлений подготовки 09.03.02 – “Информационные системы и технологии” и 09.03.03 – “Прикладная информатика” всех форм обучения

Севастополь
СевГУ
2021

УДК 519.852
ББК 22.18я73
М545

Рецензенты:
Кротов К. В., кандидат техн. наук, доцент кафедры Информационных систем:
Козлова Е. В., кандидат техн. наук, доцент кафедры Информационных технологий и компьютерных систем.
Составители: В. Ю. Карлусов, Е. Н. Заикина

М545 Методическое пособие к решению задач линейного программирования по дисциплине “Методы исследования операций” для студентов направлений подготовки 09.03.02 – “Информационные системы и технологии” и 09.03.03 – “Прикладная информатика” всех форм обучения / Севастопольский государственный университет ; сост.: В. Ю. Карлусов, Е. Н. Заикина. – Севастополь : СевГУ, 2021. – 59 с.

Цель методических указаний: обеспечение выполнения учащимися как дневной, так и заочной формы обучения полного цикла операционных исследований в задачах линейного программирования – начиная от построения математической модели, нахождения для неё оптимального решения и заканчивая организацией проведения вычислительного эксперимента при решении вариационной задачи нахождения улучшенных параметров допустимой стратегии.

УДК 519.852
ББК 22.18я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры Информационных систем,
протокол № *08* от *12* *марта* 20*21* г.

Методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании Учёного Совета Института информационных технологий и управления в технических системах *14* *апреля* 20*21* года, протокол № *07*.

Ответственный за выпуск:
Заведующий кафедрой Информационных систем, канд. физ.-мат. наук, доцент И.П. Шумейко

Издательский номер №№ 148/21

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Опыт преподавания дисциплины “Методы исследования операций” позволил выявить ряд характерных и из года в год повторяющихся особенностей её восприятия со стороны обучающихся.

1. Отмечается слабое представление учащимися связей теоретических моделей исследования операций с практическими (прикладными) задачами.

2. Замечены случаи недопонимания отдельными студентами тонкостей тех или иных методов оптимизации.

3. Просматривается отсутствие у большинства обучаемых практики проведения расчётов по описанному алгоритму.

4. Имеется функциональная недостаточность наличествующих учебных пособий как центрального, так и местного изданий при самостоятельном или дистанционном (заочном) обучении.

Поэтому целью настоящего методического пособия является доскональная (пошаговая) демонстрация алгоритмов решения задач линейного программирования в связке с реальными содержательными задачами технической и экономической направленности.

При изложении численных демонстрационных примеров выполнена их привязка к пунктам алгоритма решения. Когда начинается итерационный процесс, то, в этом случае, ссылка на пункт алгоритма даётся в форме №_итерации•№_шага_алгоритма.

1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ

Описание алгоритма

Согласно классическим литературным источникам [1], построение математической модели производится в следующей последовательности.

1. Определяются переменные, для которых будет составлена целевая функция и ограничения на неё.

2. Формулируется цель решения и составляется функция цели.

3. Составляются ограничения задачи.

Замечание. В алгоритмах решения задач линейного программирования вводятся ограничения на неотрицательность переменных. Эти ограничения могут быть опущены в записи математической модели линейного программирования. Особенно это касается случаев, когда переменные, по содержательному смыслу, не могут быть отрицательными.

Продемонстрируем на примерах применение этого алгоритма.

Пример 1. Задача о планировании выпуска продукции пошивочного предприятия

Намечается выпуск двух видов костюмов – мужских и женских. На женский костюм требуется 3 м шерсти, 2 м лавсана и 3 человеко-дня трудозатрат. На мужской костюм – 4 м шерсти, 3 м лавсана и 2 человеко-дня трудозатрат. Всего выделяется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль. Прибыль от реализации женского костюма составляет 10 тыс. денежных единиц, а от мужского – 20 тыс денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

Решение.

1. Пусть x_1 – число женских костюмов, а x_2 – число мужских костюмов.

2. Поскольку речь идёт о прибыли, то необходимо максимизировать суммарную прибыль от реализации произведённого товара: для женских костюмов она составит $10 \cdot x_1$, от реализации мужских – $20 \cdot x_2$, поэтому функция цели примет вид $f(x) = 10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2$ [тыс. д.е.]$\rightarrow$ max.

3. Система ограничений по условию выглядит так:

- 1-е ограничение формируется по учёту трудозатрат
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 150;$$
- 2-е ограничение образуется за счёт применения лавсана
$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 240;$$
- 3-е учитывает лимиты на использование шерсти
$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 350;$$

- 4-е ограничение связано с минимально допустимым объёмом выпуска мужских костюмов

$$x_2 \geq 60;$$

- поскольку число костюмов, по смыслу, не может быть дробным, дополнительно вводится ограничение целочисленности переменных.

Математическая модель окончательно представима в виде.

$$f(x_1, x_2) = 10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 150; \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 240; \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 350; \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 60; \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0,\ X \in D, \end{cases}$$

где D – множество целых чисел.

Пример 2. Задача о планировании выпуска продукции фармацевтической фирмы

Фармацевтическая фирма производит витамины двух видов: для детей и для взрослых. Продукция обоих видов поступает в продажу. Для их производства кроме стандартного комплекса витаминов, микроэлементов и аминокислот используют новые биологические добавки A, B, C и D. Расход этих добавок в граммах на килограмм соответствующих витаминов и ограничения в применении добавок A, B, C и D приведены в таблице ниже

Таблица 1.1 – Показатели потребителя пищевых добавок

Добавки	Расход добавок в Г на кГ витаминов		Ограничения в применении добавок (Г)
	Взрослые	Детские	
A	2	5	10
B	5	2	10
C	6	–	6
D	–	5	5

Оптовые цены 1 кГ витаминов, изготовленных в виде капсул: для детей – 6 денежных единиц, для взрослых – 7 денежных единиц.

Требуется найти такое количество витаминов каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Решение.

1. Пусть x_1 – количество изготовленных витаминов для взрослых (в кг), а x_2 – количество изготовленных витаминов для детей (в кг)

2. Так как стоимость одного килограмма витаминов каждого вида известна, то общий доход от их реализации составит $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2$ (д.е.), а максимальный доход предполагает максимизацию $f(X)$.

3. При определении плана производства изделий должны быть учтены ограничения в применении добавок, то есть расход каждого вида добавок на производство обоих видов витаминов должен соответствовать рецептам:

- добавка A: $2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 10$;
- добавка B: $5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10$;
- добавка C: $1 \cdot x_1 \leq 6$;
- добавка D: $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 5$;
- ограничение на знак переменных, по смыслу задачи.

Окончательный вид математической модели

$$f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 10; \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10; \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \leq 6; \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Пример 3. Задача о сбалансированном рационе

На свиноферме производится откорм свиней. Известно, что каждая свинья должна ежедневно получать на весовую массу тела не менее 6 единиц жиров, 8 единиц белков, 12 единиц углеводов. Для откорма свиней можно закупить три вида кормов: картофель, жмых и комбикорм. Содержание каждого вещества в различных видах корма и стоимость (в денежных единицах) единицы каждого корма приведены в таблице ниже.

Таблица 1.2 – Показатели сбалансированного питания хрюшек

Вид корма	Вещества			Стоимость единицы корма
	Жиры	Белки	Углеводы	
Картофель	2	1	3	2
Жмых	1	2	4	3
Комбикорм	3	1,5	2	2,5

Требуется обеспечить наименьшие затраты при закупке кормов, при условии, что указанные вещества будут сбалансированы.

Решение.

1. Пусть x_1 – объём картофеля (кГ), x_2 – объём жмыха (кГ), а x_3 – объём комбикорма (кГ).

2. Тогда при известных закупочных ценах суммарная стоимость приобретенных харчей составит $f(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2{,}5 \cdot x_3$ денежных средств. Тенденция экономить определяет минимизацию функции.

3. Система ограничений будет построена с учётом рекомендаций по откорму, сведённых в таблицу 1.2:

- по жирам: $2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 6$;
- по белкам: $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1{,}5 \cdot x_3 \geq 8$;
- по углеводам: $3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geq 12$;
- по неотрицательности: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Окончательно имеем

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2{,}5 \cdot x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 6; \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1{,}5 \cdot x_3 \geq 8; \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geq 12; \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Пример 4.

Металлургический комбинат использует два технологических способа получения стали для экспорта: конверторный и мартеновский. Для получения стали используются три основных вида сырья: чугун, руда и металлолом. Максимально возможные суточные запасы сырья составляют: 63, 24 и 12 ед. веса соответственно. Расходы сырья на производство одной тонны соответствующего вида стали приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Нормы добавок стали

Сырье	Расход сырья на одну тонну		Суточный запас сырья
	Конверторный способ	Мартеновский способ	
Чугун	9	7	63
Руда	3	4	24
Металлолом	1	3	12

Экспортная цена одной тонны стали, изготовленной конверторным способом, составляет 6 тыс. денежных единиц, а мартеновским – 3 тыс. денежных единиц.

Требуется определить, какое количество стали каждого вида должен производить металлургический комбинат за смену, чтобы получить максимальную прибыль.

Решение.

1. Пусть объёмы производства стали за одну смену составят: x_1 – конверторным способом, x_2 –мартеновским способом.

2. Так как стоимость одной тонны стали, полученной конверторным способом – 6 тыс. ден. ед., а стоимость одной тонны стали, полученной мартеновским способом – 3 тыс. ден. ед., то общий доход от реализации составит: $f(x_1, x_2) = 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$, максимизация прибыли предписывает максимизацию $f(x_1, x_2)$.

3. Система ограничений будет построена по нормам расхода сырья:

- по чугуну: $9 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 63$;
- по руде: $3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24$;
- по металлолому: $1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12$;
- будут ограничения по неотрицательности.

Математическая модель такова:

$$f(x_1, x_2) = 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 9 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 63; \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Пример 5. Модуль узла связи оборудован аппаратурой кодирования и декодирования 1-го и 2-го типов, которая работает с эффективными кодами Хаффмена и помехозащищёнными кодами Хемминга и Берлекемпа.

Объёмы разновидностей кодовых сообщений в потоке данных, в пределах которой аппаратура j-го типа работает устойчиво, представлены ниже элементами таблицы. Там же приводятся предельные значения объёмов данных по каждому виду кода, при которых модуль сохранит работоспособность и обобщённые показатели эффективности.

Таблица 1.4 – Номинальные характеристики модуля узла связи

Тип кода	Объёмы (по типам) разновидностей кодов		Предельные объёмы данных (Гбит/сек)
	1-й тип	2-й тип	
Хаффмен	8	6	48
Хемминг	3	7	21
Берлекемп	7	4	28
Эффективность	8	5	

Требуется найти вариант комплектации узла связи, обладающий наибольшей эффективностью в заданных условиях

Решение.

1. Пусть x_1 – число аппаратных комплексов 1-го типа, а x_2 – число аппаратных комплексов 2-го типа.

2. Показатель эффективность работы узла связи в конфигурации (x_1, x_2) будет определяться как $f(x_1, x_2) = 8 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$, а сама функция подлежит максимизации.

3. Система ограничений по содержательному условию такова:

- 1-е ограничение (по Хаффмену): $8 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 48$;
- 2-е ограничение (по Хеммингу): $3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21$;
- 3-е учитывает (по Берлекемпу): $7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 28$;
- поскольку число аппаратных комплесов, по смыслу, не может быть ни отрицательным, ни дробным, дополнительно вводятся ограничения неотрицательности и целочисленности переменных.

Математическая модель окончательно представима в виде.

$$f(x_1, x_2) = 8 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 8 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 48; \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21; \\ 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 28; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0,\ X \in D, \end{cases}$$

где D – множество целых чисел.

Пример 6. Датчики разных типов информационно-измерительной системы, функционирующие в агрессивной среде, измеряют давление P, температуру T и поток γ-излучения.

За нормативное время, проходящее от начала измерений до разрушения, информационный зонд, укомплектованный датчиками, должен сформировать некоторые объёмы данных по каждому из параметров, которые указаны в техническом задании (ТЗ) на проектирование ИС.

Таблица 1.6 – Фрагменты данных ТЗ

Параметр	Поступления от датчиков по измеряемым параметрам (Гбайт)			Объём данных, поступающих от зонда (Гбайт)
	Тип I	Тип II	Тип II	
Давление P	10	12	15	200
Температура T	12	16	10	150
γ-излучение	17	8	20	180
Стоимость	8	9	7	

Типы датчиков характеризуются, с точки зрения разработчика, двумя параметрами: скоростями выдачи данных по каждой из измеряемых величин и стоимостью.

Необходимо спроектировать такую комплектацию зонда минимальной стоимости, которая бы до разрушения успевала сформировать объём данных, не менее, чем задан в ТЗ. Числовые величины приведены в таблице 1.6 выше.

Решение.

1. Пусть x_1 – количество датчиков 1-го типа (шт), x_2 – количество датчиков 2-го типа (шт), а x_3 – количество датчиков 3-го типа (шт).

2. При известных ценах за штуку датчика стоимость комплектации зонда составит $8 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3$ денежных средств. Требование минимальной стоимости определяет необходимость минимизации функции.

3. Система ограничений будет построена с учётом обеспечения измеряемых данных не менее минимального объёма по каждому из параметров, поэтому знаки будут иметь вид “$\geq$”:

- по давлению: $10 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 \geq 200$;
- по температуре: $12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + 105 \cdot x_3 \geq 150$;
- по γ-излучению: $17 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 \geq 180$;
- по неотрицательности: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$;
- по целочисленности переменных: $X \in D$, где D – множество целых чисел.

Окончательно имеем модель в терминах исследования операций

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 10 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 \geq 200; \\ 12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + 105 \cdot x_3 \geq 150; \\ 17 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 \geq 180; \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ X \in D. \end{cases}$$

Пример 7. Маршрутизатор компьютерной сети осуществляет передачу контента в виде пакетов данных от мест их формирования к конечным пользователям. Известны средние объёмы формирования A и потребностей B, стоимость передачи 1мБ данных C и ограничения на трафик D.

$$A = \begin{bmatrix} 33 \\ 67 \\ 50 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 18 & 62 & 55 & 45 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 25 & 30 & 20 & 20 \\ 30 & 35 & 25 & 20 \\ 20 & 25 & 30 & 30 \end{bmatrix}.$$

Требуется построить статическую схему маршрутизации, при которой были бы обеспечены все потребности всех пользователей в контенте, и, при этом, стоимость передачи всех пакетов была минимальной из возможных.

Решение.

1. Пусть $x_{i,j}$ – объём данных, передаваемый из пункта формирования с номером i конечному пользователю с номером j, $j = 1, n$, $i = 1, m$.

2. В этом случае, стоимость схемы маршрутизации может быть оценена как $F(C,X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ с последующей минимизацией полученной функции.

3. Ограничения учитывают

- факт удовлетворения запроса пользователя

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1, n;$$

- факт формирования требуемого объёма контента на передающей стороне

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_j, \quad i = 1, m;$$

- физической возможности пересылки объёма по конкретной линии связи

$$x_{ij} \le d_{ij}; \qquad i = 1, m; \qquad j = 1, m;$$

- положительность переменных $x_{i,j} \ge 0$, $j = 1, n$, $i = 1, m$.

Для конкретного цифрового набора, заданного в условии задачи, модель такова

$$\begin{aligned} f(X, C) = {} & 4\cdot x_{11} + 8\cdot x_{12} + 3\cdot x_{13} + 2\cdot x_{14} + \\ & + 1\cdot x_{21} + 7\cdot x_{22} + 4\cdot x_{23} + 2\cdot x_{24} + \\ & + 7\cdot x_{31} + 1\cdot x_{32} + 5\cdot x_{33} + 4\cdot x_{34} \to \min \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 18; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 62; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 55; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \ge 45; \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 33; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 67; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 50; \\ 0 \le x_{11} \le 25;\ 0 \le x_{12} \le 30;\ 0 \le x_{13} \le 20;\ 0 \le x_{14} \le 20; \\ 0 \le x_{21} \le 30;\ 0 \le x_{22} \le 35;\ 0 \le x_{23} \le 25;\ 0 \le x_{24} \le 20; \\ 0 \le x_{31} \le 20;\ 0 \le x_{32} \le 25;\ 0 \le x_{33} \le 30;\ 0 \le x_{34} \le 30. \end{cases}$$

Примечание. Для задач подобного типа, которые называются транспортными, существуют специальные алгоритмы решения, помимо тех, что будут излагаться ниже.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Графический метод решения задач линейного программирования (ЗЛП) может быть применён для тех моделей, число переменных которых в точности равно двум. Метод тако же известен под названием “графо-аналитический”, и, как явствует из названия, содержит графическую часть, позволяющую получить решение с погрешностью, определяемой качеством построения графиков, и аналитическую – сиречь, расчётную, обеспечивающую нахождение решения с требуемой точностью.

Алгоритм графического метода [2]

1. Построить на координатной плоскости допустимое множество решений. Допустимое множество решений (оно же множество допустимых стратегий, оно же область ограничений) обладает тем свойством, что в любой его точке, включая граничные, выполняются все ограничения модели.

Любое ограничение ЗЛП разбивает координатную плоскость на две полуплоскости:

- граничная линия полуплоскостей определяется уравнением соответствующего ограничения, в котором знак неравенства заменён знаком равенства;
- для определения полуплоскости, в которой неравенство истинно, следует в качестве переменных в неравенстве использовать значения начала координат (0, 0): если точка (0, 0) обеспечивает истинность неравенства, то начало координат принадлежит полуплоскости.

2. Построить нормаль к целевой функции и изобразить её проекцию на плоскости решений. Направление нормали указывают направление возрастания целевой функции.

Вектор, направленный от начала координат к точке с координатами (c_1, c_2), являющимися коэффициентами функции цели, представляет собой нормаль к плоскости, определяемой целевой функцией f.

3. Перемещать перпендикуляр к нормали вдоль прямой, совпадающей с нормалью, до тех пор, пока он не достигнет крайней точки множества допустимых стратегий.

При поиске минимума перемещать перпендикуляр от точки (c_1, c_2) к точке (0, 0), а при поиске максимума наоборот – от точки (0, 0) к точке (c_1, c_2).

4. Определить значения координат крайней (в направлении оптимизации) точки допустимого множества либо непосредственно по графику, либо по уравнениям ограничивающих прямых, пересекающихся в крайней точке.

5. Вычислить значение целевой функции, соответствующее оптимуму.

Пример. Для математической модели ЗЛП вида

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30; & (1) \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 12; & (2) \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 40; & (3) \\ x_1 \ge 0; \; x_2 \ge 0, & (4) \end{cases}$$

найти минимальное и максимальное значения целевой функции при данных ограничениях.

ХОД РЕШЕНИЯ

1. Построение области допустимых стратегий.

Ограничение (1)

- Уравнение граничной линии

$$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 30.$$

- Координаты точек прохождения граничной линии на координатных осях, получаемые из уравнения граничной линии

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10$. Прямая проходит через [(0, 6), (10, 0)]

- Тест на удовлетворение точки начала координат ограничению

$5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \le 30$? Точка (0, 0) **удовлетворяет** ограничению (1).

Ограничение (2)

- Уравнение граничной линии

$$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 12.$$

- Координаты точек прохождения граничной линии на координатных осях, получаемые из уравнения граничной линии

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 12$. Прямая проходит через [(0, 4), (12, 0)]

- Тест на удовлетворение точки начала координат ограничению

$1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \ge 12$? Точка (0, 0) **не удовлетворяет** ограничению (2).

Ограничение (3)

- Уравнение граничной линии

$$5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 40.$$

- Координаты точек прохождения граничной линии на координатных осях, получаемые из уравнения граничной линии

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$. Прямая проходит через [(0, 10), (8, 0)]

- Тест на удовлетворение точки начала координат ограничению

$5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \le 40$. Точка (0, 0) **удовлетворяет** ограничению (3).

Ограничения (4) удовлетворяются повсеместно в 1-м квадранте координатной плоскости.

Пересечение всех полуплоскостей, в пределах которых выполняются ограничения (1) – (4), даёт область допустимых решений (смотри рисунок 1).

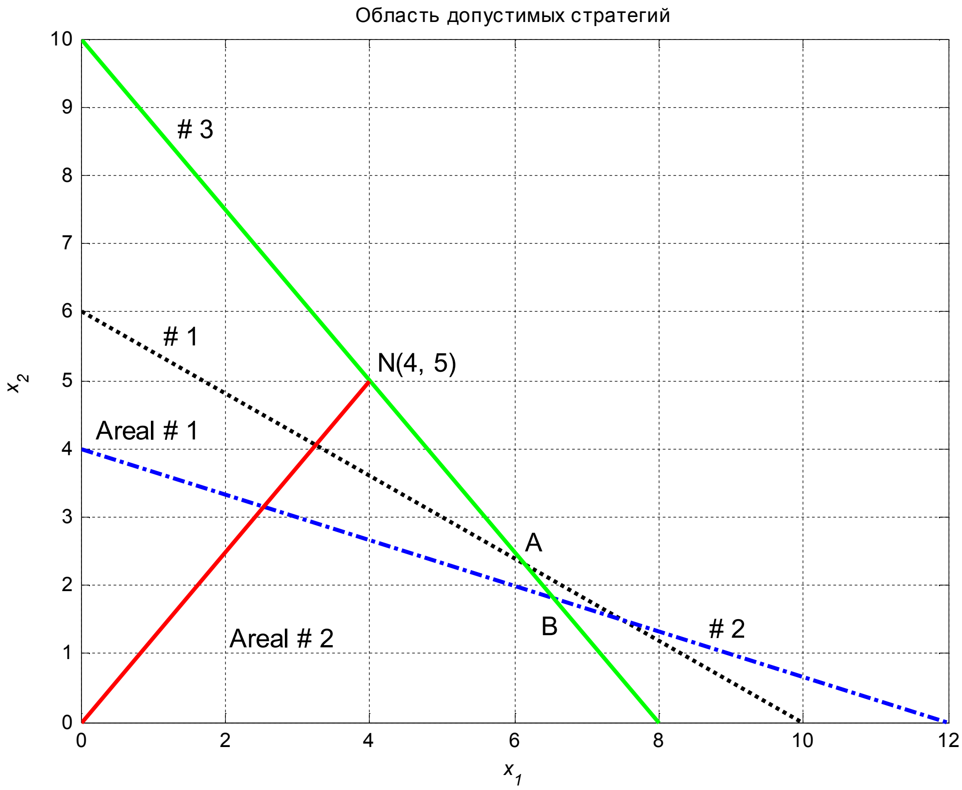

Рисунок 1 – Графическая интерпретация хода решения

Область, обозначенная как Areal # 1, представляет собой неправильный четырёхугольник с вершинами 6AB4, любая точка в его пределах является допустимой. Линии ограничений пронумерованы (# 1, # 2, # 3).

2. Построение нормали

Для построения проекции нормали воспользуемся коэффициентами функции цели. Получим точку N(4, 5) – конец нормали, а (0, 0) – начало нормали.

3. Поиск крайних точек на множестве допустимых решений.

- Поиск минимума

Перемещаем перпендикуляр (мысленно, либо приложив транспортир к странице) в направлении от конца нормали (4, 5) к её началу (0, 0). Крайняя точка будет иметь координаты (0, 4). В той точке будет наблюдаться минимум функции цели.

- Поиск максимума

Перемещаем перпендикуляр в направлении от начала к концу нормали, то есть (0, 0) → (4, 5). Крайняя точка A образована пересечением линий ограничений (1) и (3) и имеет координаты, считанные с графика, примерно

(6,1; 2,3). В точке А функция цели достигнет максимума при заданных ограничениях.

4. Расчёт координат крайних точек

- Точки минимума

Координаты определены точно, дополнительных расчётов не требуется: (0, 4).

- Точка максимума

Координаты считаны с графика, A(6,1; 2,3), потребуются уточнения. Так как точка образована пересечением линий ограничений (1) и (3), то её координаты могут быть получены решением системы уравнений, соответствующих граничным линиям:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 30; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 40. \end{cases}$$

Система в матричной форме представима в виде $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Выполним расчёт определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 5 \times 5 = 12 - 25 = -13, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 \\ 40 & 4 \end{vmatrix} = 120 - 200 = -80,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 30 \\ 5 & 40 \end{vmatrix} = 120 - 150 = -30.$$

Зная определители, рассчитаем значения неизвестных:

$$x_1 = \frac{-80}{-13} = 5\frac{5}{13} = 6{,}153846(153846), x_2 = \frac{-30}{-13} = 2\frac{4}{13} = 2{,}307692(307692).$$

5. Расчёт оптимальных значений целевых функций

Расчёт выполняется путём подстановки координат крайних точек в выражение функции цели в качестве аргументов.

- Значение функции в точке минимума:

$$f_{\min}(0, 4) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = 20.$$

- Значение функции в точке максимума:

$$f_{\max}\left(\frac{80}{13}; \frac{30}{13}\right) = \frac{4 \times 80 + 5 \times 30}{13} = \frac{470}{13} = 36{,}153846(153846).$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРЯМЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Прямой симплекс-метод позволяет найти решение за конечное число шагов. Значение целевой функции в ходе решения возрастают (при решении задач на максимум) или убывают (при решении задач на минимум).

Метод применяется для математических моделей ЗЛП вида:

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, ..., x_n) \to opt \\
& \left.\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\
& ... \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_{m1},
\end{aligned}\right\} \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0,
\end{aligned}
$$

когда все ограничения системы имеют в записи знаки “≤”, а столбец свободных членов положителен. Под сокращением opt (optimum) подразумевают min функции, либо её max.

Алгоритм прямого симплекс-метода [2 – 4]

Алгоритм включает ряд шагов.

1. Приведение математической модели задачи к каноническому виду и представление её в векторной форме.

Для этого вводятся, со знаком плюс, дополнительные переменные, преобразующие неравенства в равенства. Получаем каноническую форму системы ограничений (расширенную модель ЗЛП).

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \to opt, \\
& \left.\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_1, \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_2, \\
& ... \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 1x_{n+m} = b_{m1}.
\end{aligned}\right\} \\
& A_1 \quad A_2 \qquad A_n \qquad A_{n+1} \quad A_{n+2} \qquad A_{n+m} \quad A_0
\end{aligned}
$$

2. Построение таблицы. Каноническая форма ЗЛП помещается в так называемую симплекс-таблицу, а в качестве начального базиса выбираются вектора, соответствующие дополнительным переменным:

		c_j	c_1	…	c_n	0	…	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	…	A_n	A_{n+1}	…	A_{n+m}
A_{n+1}	*0*	b_1	a_{11}	…	a_{1n}	*1*	…	*0*
A_{n+2}	*0*	b_2	a_{22}	…	a_{2n}	*0*	…	*0*
…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_{n+m}	*0*	b_m	a_{m1}	…	a_{mn}	*0*	…	1
	δ	δ_0	δ_1	…	δ_n	δ_{n+1}	…	δ_{n+m}

В таблице обозначено: $C_Б$ – коэффициенты функции цели при базисных переменных, δ – строка симплекс-разностей, при первоначальном заполнении – пустая, её расчёт производится сразу же после формирования таблицы.

3. Расчёт симплекс-разностей. Эти величины определяются как:

- текущее значение целевой функции $\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,o}$;
- j-е симплекс-разности $\delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,j} - c_j$.

4. Проверка на окончание расчёта.

Оптимальное решение **найдено**. Оно будет в столбце A_0.

- при решении задачи на максимум, когда все j-е симплекс-разности больше либо равны нулю;
- при решении задачи на минимум при неположительных значениях всех j-х симплекс-разностей.

Задача **не разрешима** при заданнном условии (область ограничений ***не замкнута в направлении оптимизации***)

- при решении задачи на максимум существуют столбцы с отрицательными j-ми симплекс-разностями, и в этих столбцах ***все*** элементы неположительные;
- при решении задачи на минимум существуют столбцы с положительными j-ми симплекс-разностями, а в этих столбцах **все** элементы неположительные.

5. Выбор направляющего столбца.

Если решение задачи не завершено, то предстоят итерации, и следует выбирать направляющий столбец:

- при решении задачи на максимум выбирается столбец с минимальной отрицательной j-й симплекс-разностью (самой отрицательной, для тех, кто забыл);
- при решении задачи на минимум выбирается столбец с максимальной положительной j-й симплекс-разностью.

Выбранный столбец называют ***направляющим*** и отмечают в таблице вертикальной стрелкой “↑”, а в записях формул он и его компоненты обозначаются символом “*”.

6. Выбор направляющей строки.

Независимо от направления проводимой оптимизации (минимизация или максимизация функции цели), направляющая строка определяется по минимальному значению из отношений соответствующих элементов столбцов A_0 и A_{j*}:

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \geq 0}{a_{i,j^*} \geq 0} \right\} \to i^*$$

для выбранного ранее направляющего столбца j^* и отмечается символом “←” в таблице. Вектор, соответствующий i^*, выводится из базиса.

7. Построение и пересчёт новой симплекс-таблицы.

Строится новая симплекс-таблица, два левых столбца в которой претерпевают изменения:

- в столбце *Базис* имя вектора, стоявшее на направляющей строке, заменяется именем A_{j*}.
- в столбце $C_Б$ записывается значение коэффициента целевой функции c_j^*, соответствующего новой базисной переменной.

Содержимое новой таблицы вычисляется путём применения исключений Жордана-Гаусса

- Модифицируется направляющая строка путем деления на направляющий элемент a_{i^*,j^*}, стоящий на пересечении направляющей строки и направляющего столбца, а результат записывается на соответствующее место новой таблицы.
- Из всех остальных строк исходной таблицы вычитается поэлементно модифицированная направляющая строка, умноженная на элемент a_{i,j^*}, стоящий на пересечении “уменьшаемой” строки и направляющего столбца, результаты вычитаний записываются на соответствующие места в новой таблице.

8. Работа алгоритма возобновляется с пункта №3.

Пример. Решить ЗЛП прямым симплекс-методом

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

ХОД РЕШЕНИЯ

1. Приведём модель к канонической форме:

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 30; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Поместим каноническую форму в симплекс-таблицу

			c_j	4	5	0	0	0
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	A_3	0	30	3	5	1	0	0
←	A_4	0	12	1	3	0	1	0
	A_5	0	40	5	4	0	0	1
		δ_j	0	– 4	– 5	0	0	0
					↑			

3. Подсчитаем симплекс-разности по формулам пункта № 3.

$\delta_0 = 0 \cdot 30 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 40 = 0;$

$\delta_1 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 5 - 4 = -4;$ $\delta_2 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 - 5 = -5;$

$\delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$ $\delta_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$

$\delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$

4. Проверим условие окончания.

Имеются отрицательные симплекс-разности, решение продолжается.

1-я итерация

1.5. Направляющий столбец A_2, отмечен стрелкой.

1.6. Направляющую строку найдём по отношениям

$$\min\left\{\frac{30}{5} = 6; \frac{12}{3} = 4; \frac{40}{4} = 10\right\} = 4 \Rightarrow i^* = 2\,.$$

В базис вводится вектор A_2, а выводится A_4.

1.7. Перестраиваем таблицу

Пересчёт по Жордану-Гауссу

- Модификация направляющей строки, направляющий элемент 3 выделен серым, на него делим поэлементно строку A_4:

$$\frac{12}{3}=4, \frac{1}{3}, \frac{3}{3}=1, \frac{0}{3}=0, \frac{1}{3}, \frac{0}{3}=0.$$

Результат помещаем в новую таблицу, строка A_2.

- Пересчёт остальных строк

Строка A_3, множитель 5:

Столбец A_0: $30 - 4{\cdot}5 = 10$.

Столбец A_1: $3-\frac{1}{3}\cdot 5=\frac{4}{3}$.

Столбец A_2: $5 - 1{\cdot}5 = 0$.

Столбец A_3: $1 - 0{\cdot}5 = 1$.

Столбец A_4: $0-\frac{1}{3}\cdot 5=-\frac{5}{3}$.

Столбец A_5: $0 - 0{\cdot}5 = 0$.

Строка A_5, множитель 4:

Столбец A_0: $40 - 4{\cdot}4 = 24$.

Столбец A_1: $5-\frac{1}{3}\cdot 4=\frac{11}{3}$.

Столбец A_2: $4 - 1{\cdot}4 = 0$.

Столбец A_3: $0 - 0{\cdot}4 = 0$.

Столбец A_4: $0-\frac{1}{3}\cdot 4=-\frac{4}{3}$.

Столбец A_5: $1 - 0{\cdot}4 = 1$.

			c_j	4	5	0	0	0
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	A_3	0	10	4/3	0	1	– 5/3	0
	A_2	5	4	1/3	1	0	1/3	0
←	A_5	0	24	11/3	0	0	– 4/3	1
		δ_j	20	– 7/3	0	0	5/3	0
				↑				

Отметим, что базисным векторам (A_2, A_3, A_5) в симплекс-таблице всегда соответствуют орты. Поэтому, в последующей демонстрации решения, расчёты компонентов симплекс-таблицы для столбцов базисных векторов будем опускать ввиду очевидности получаемого результата.

1.3. Подсчитаем симплекс-разностей по формулам пункта № 3.

$\delta_0 = 0{\cdot}10 + 5{\cdot}4 + 0{\cdot}24 = 20$;

$$\delta_1 = 0\cdot\frac{4}{3}+5\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{11}{3}-4=-\frac{7}{3};\ \delta_2 = 0\cdot 3 + 5\cdot 1 + 0\cdot 0 - 5 = 0;$$

$$\delta_3 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0; \qquad \delta_4 = 0\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+5\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-0=\frac{5}{3};$$

$$\delta_5 = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0.$$

1.4. Условие окончания не выполняется, оптимальное решение не достигнуто, признаки неразрешимости задачи не обнаружены.

2-я итерация

2.5. Направляющий столбец A_1, отмечен стрелкой.

2.6. Направляющую строку найдём по выбору

$$\min\left\{\frac{10}{\frac{4}{3}}=\frac{15}{2};\frac{4}{\frac{1}{3}}=12;\frac{24}{\frac{11}{3}}=\frac{72}{11}\right\}=\frac{72}{11}\Rightarrow i^*=3.$$

В базис вводится вектор A_1, а выводится A_5.

2.7. Перестраиваем таблицу

Пересчёт по Жордану-Гауссу

- Модификация направляющей строки, направляющий элемент $\frac{11}{3}$ выделен серым цветом, на него делим поэлементно строку A_5:

$$\frac{72}{11},1,0,0,\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{11}{3}}=-\frac{4}{11},\frac{3}{11}.$$

Результат помещаем в новую таблицу, в строку A_2.

- Пересчёт остальных строк (для небазисных векторов)

Строка A_3, множитель $\frac{4}{3}$:

Столбец A_0: $10-\frac{72}{11}\cdot\frac{4}{3}=\frac{14}{11}$.

Столбец A_4: $-\frac{5}{3}-\left(-\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{4}{3}=-\frac{13}{11}$.

Столбец A_5: $0-\frac{3}{11}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{4}{11}$.

Строка A_2, множитель $\frac{1}{3}$:

Столбец A_0: $4-\frac{72}{11}\cdot\frac{1}{3}=\frac{20}{11}$.

Столбец A_4: $\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{11}$.

Столбец A_5: $0-\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{11}$.

		c_j	4	5	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	14/11	0	0	1	–13/11	–4/11
A_2	5	20/11	0	1	0	5/11	–1/11
A_1	4	72/11	1	0	0	–4/11	3/11
	δ_j	388/11	0	0	0	9/11	7/11

2.3. Подсчёт симплекс-разностей.

$\delta_0 = 0\cdot\frac{14}{11}+5\cdot\frac{20}{11}+4\cdot\frac{72}{11}=\frac{388}{11}$;

$\delta_1 = 0{\cdot}0 + 5{\cdot}0 + 4{\cdot}1 - 4 = 0$; $\delta_2 = 0{\cdot}0 + 5{\cdot}1 + 0{\cdot}0 - 5 = 0$;

$\delta_3 = 0{\cdot}1 + 0{\cdot}0 + 0{\cdot}0 - 0 = 0$; $\delta_4 = 0\cdot\left(-\frac{13}{11}\right)+5\cdot\frac{5}{11}+4\cdot\left(-\frac{4}{11}\right)-0=\frac{9}{11}$;

$\delta_5 = 0\cdot\left(-\frac{4}{11}\right)+5\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)+4\cdot\frac{3}{11}-0=\frac{7}{11}$.

2.4. Условие окончания выполнено.

Оптимальное решение, находящееся в столбце A_0, имеет вид

$$X_{opt}^T=\left\{\frac{72}{11}\quad\frac{20}{11}\quad\frac{14}{11}\quad 0\quad 0\right\},\ f_{\max}(X)=\frac{388}{11}.$$

Графическая интерпретация решения приводится на рисунке 1, область Areal # 2, четырёхугольник с вершинами 4B80, решение находится в точке *B*. Её координаты точные координаты определяются как решение системы:

$$\begin{pmatrix}1&3\\5&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\40\end{pmatrix},\ \Delta=\begin{vmatrix}1&3\\5&4\end{vmatrix}=-11,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}12&3\\40&4\end{vmatrix}=-72,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&12\\5&40\end{vmatrix}=-20.$$

$$x_1=\frac{72}{11}=6{,}54(54),x_2=\frac{20}{11}=1{,}81(81),f_{\max}=\frac{4\cdot72+5\cdot20}{11}=\frac{388}{11}=35{,}23(27).$$

Для проверки подставим координаты точки оптимума в каноническую форму ограничения 1. Имеем $3\cdot\frac{72}{11}+5\cdot\frac{20}{11}+1\cdot\frac{14}{11}=30$. Равенство выполнено, следовательно, полученное решение верно.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Метод часто называется ещё методом искусственного базиса, то есть базиса, составленного из векторов, соответствующих искусственным переменным, который используется в начале решения. Однако на практике часты случаи, когда начальный допустимый базис составлен, в различных пропорциях, из векторов, связанных как с дополнительными, так и с искусственными переменными. Поэтому название, вынесенное в заголовок, точнее обозначает ситуацию.

Метод искусственных переменных применяется когда:

- Компоненты вектора A_0 свободных членов не отрицательны, в противном случае, ограничения с отрицательными правыми частями следует умножить на (– 1).
- Все знаки отношения в системе ограничений имеют вид “≥”. Имеем чисто искусственный базис.
- Все знаки имеют вид “=”. Также имеем чисто искусственный базис.
- Имеется смесь знаков только “≥” и “=”. Базис чисто искусственный.
- Имеется смесь знаков “≥” (и/или “=”) и “≤” в любых сочетаниях. Базис смешанный.

Иными словами говоря, достаточно хотя бы одного знака отношения “≥” или “=” для необходимости использовать этот метод.

Алгоритм метода искусственных переменных [2]

1. Ограничения исходной математической модели подвергаются канонизации путём введения дополнительных переменных в ограничения со знаками “≥” и “≤”.

2. В те ограничения, которые изначально имели знаки “≥” и “=”, вводятся искусственные переменные. Искусственные переменные одновременно вводятся и в целевую функцию с бесконечно большими коэффициентами $\pm\mu$.

Знак при коэффициенте:

- “минус” для задач максимизации,
- “плюс” для решения задач минимизации.

3. По записи модели с искусственными переменными производится построение симплекс-таблицы.

Начальный базис образуют векторы дополнительных переменных, которые при канонизации введены со знаком “плюс” (если таковые найдутся) и векторы искусственных переменных. Столбец $C_Б$ заполняется соответствующими коэффициентами.

4. Расчёт симплекс-разностей. Эти величины определяются как:

- текущее значение целевой функции $\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,o}$;
- j-е симплекс-разности $\delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,j} - c_j$.

Симплекс-разности на начальной итерации и нескольких последующих итерациях могут состоять из двух частей: полностью числовой и зависящей от множителя μ.

5. Проверка на окончание расчёта.

Оптимальное решение **найдено**.

- при решении задачи на максимум, когда все j-е симплекс-разности больше либо равны нулю;
- при решении задачи на минимум при неположительных значениях всех j-х симплекс-разностей.

Задача **не разрешима**, когда система ограничений несовместна.

- строка симплекс-разности указывает, что оптимальное решение найдено, но(!)
- в базисе присутствуют искусственные переменные.

Задача **не разрешима**, когда область ограничений не замкнута в направлении оптимизации:

- при решении задачи на максимум существуют столбцы с отрицательными j-ми симплекс-разностями, и в этих столбцах **все** элементы неположительные
- при решении задачи на минимум существуют столбцы с положительными j-ми симплекс-разностями, а в этих столбцах **все** элементы неположительные

6. Выбор направляющего столбца.

Если решение задачи не завершено, то возникает итерационная часть, и необходимо выбрать направляющий столбец:

- при решении задачи на максимум выбирается столбец с минимальной отрицательной j-й симплекс-разностью;
- при решении задачи на минимум выбирается столбец с максимальной положительной j-й симплекс-разностью.

Выбранный столбец называют ***направляющим*** и отмечают в таблице вертикальной стрелкой “↑”, а в записях формула он и его компоненты обозначаются символом “*”.

7. Выбор направляющей строки.

Независимо от направления проводимой оптимизации (минимизация или максимизация функции цели), направляющая строка определяется по минимальному значению из отношений элементов столбцов A_0 и A_{j*}:

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \ge 0}{a_{i,j^*} \ge 0} \right\} \to i^*$$

для выбранного ранее направляющего столбца j^* и отмечается символом "←" в таблице. Вектор, соответствующий i^*, выводится из базиса.

8. Построение и пересчёт новой симплекс-таблицы.

Строится новая симплекс-таблица, столбцы в которой претерпевают изменения:

- в столбце *Базис* имя вектора, стоявшее на направляющей строке, заменяется именем A_{j*};
- в столбце $C_Б$ записывается значение коэффициента целевой функции c_j^*, соответствующего новой базисной переменной;
- если вектор, выводимый из базиса, соответствует искусственной переменной, связанный с ним столбец удаляется из симплекс-таблицы.

Содержимое новой таблицы вычисляется путём применения исключений Жордана-Гаусса

- Модифицируется направляющая строка путем деления на направляющий элемент a_{i^*,j^*}, стоящий на пересечении направляющей строки и направляющего столбца, а результат записывается на соответствующее место новой таблицы.
- Из всех остальных строк исходной таблицы вычитается поэлементно модифицированная направляющая строка, умноженная на элемент a_{i,j^*}, стоящий на пересечении "уменьшаемой" строки и направляющего столбца, результаты вычитаний записываются на соответствующие места в новой таблице.

9. Работа алгоритма возобновляется с пункта № 4.

Пример. Решить ЗЛП методом искусственных переменных

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Поскольку присутствует знак “≥”, и положительны компоненты вектора свободных членов, можно применять метод искусственных переменных.

ХОД РЕШЕНИЯ

1. Выполним канонизацию системы ограничений:

$$f(x_1, x_2) = 4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 = 30; \\ 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 = 12; \\ 5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5 = 40; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Введём искусственную переменную во второе уравнение, так как во 2-м неравенстве был знак “≥”, а в целевую функцию – с множителем $-\mu$.

$$f(x_1, x_2) = 4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 - \mu\cdot x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 = 30; \\ 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 1\cdot x_6 = 12; \\ 5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5 + 0\cdot x_6 = 40; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. Строим симплекс-таблицу

Вектора A_3, A_5 и A_6 образуют начальный смешанный базис.

			c_j	4	5	0	0	0	$-\mu$
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
	A_3	0	30	3	5	1	0	0	0
←	A_6	$-\mu$	12	1	3	0	–1	0	1
	A_5	0	40	5	4	0	0	1	0
		δ_j	-12μ	$-1\mu-4$	$-3\mu-5$	0	μ	0	0
					↑				

4. Подсчитаем симплекс-разности по известным формулам.

$\delta_0 = 0\cdot30 - \mu\cdot12 + 0\cdot40 = -12\cdot\mu$;

$\delta_1 = 0\cdot3 - \mu\cdot1 + 0\cdot5 - 4 = -1\cdot\mu - 4$; $\delta_2 = 0\cdot5 - \mu\cdot3 + 0\cdot5 - 5 = -3\cdot\mu - 5$;

$\delta_3 = 0\cdot1 - \mu\cdot0 + 0\cdot0 - 0 = 0$; $\delta_4 = 0\cdot0 - \mu\cdot(-)1 + 0\cdot0 - 0 = \mu$;

$\delta_5 = 0\cdot0 + 0\cdot0 + 0\cdot1 - 0 = 0$; $\delta_6 = 0\cdot0 - \mu\cdot1 + 0\cdot0 - (-\mu) = 0$.

5. Проверим условие окончания.

Имеются отрицательные симплекс-разности, решение продолжается.

1-я итерация

Замечание. Величину μ можно овеществлено представлять при расчётах в виде маодзедуновского (1,7 М × 1,7 М) мешка с зерновыми, которых в такой мешок поместится изрядно. Применительно к таблице: для δ_1 долг (знак –) составляет 1 мешок семечек и ещё 4-е семечки, для δ_2 долг (знак –) составляет 3 мешка семечек и ещё 5 семечек и т. д.

1.6. Самая отрицательная симплекс-разность находится в столбце A_2, поэтому столбец A_2, отмечаем стрелкой, он – направляющий.

1.7. Направляющую строку найдём по отношениям

$$\min\left\{\frac{30}{5}=6;\frac{12}{3}=4;\frac{40}{4}=10\right\}=4\Rightarrow i^*=2.$$

В базис вводится вектор A_2, а выводится A_6, который соответствует искусственной переменной, следовательно, столбец A_6 удаляется из таблицы и, в дальнейших расчётах, принимать участия не будет.

1.8. Перестраиваем таблицу

Новый базис состоит из векторов: для дополнительных переменных A_3, A_5 и основной переменной A_2.

			c_j	4	5	0	0	0
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	A_3	0	10	4/3	0	1	5/3	0
	A_2	5	4	1/3	1	0	–1/3	0
←	A_5	0	24	11/3	0	0	4/3	1
		δ_j	20	– 7/3	0	0	–5/3	0
				↑				

Пересчёт по Жордану-Гауссу

- Модификация направляющей строки, направляющий элемент 3 выделен серым, на него делим поэлементно строку A_4:

$$\frac{12}{3}=4,\frac{1}{3},\frac{3}{3}=1,\frac{0}{3}=0,\frac{1}{3},\frac{0}{3}=0.$$

Результат помещаем в новую таблицу, строка A_2.

- Пересчёт остальных строк

Строка A_3, множитель 5:

Столбец A_0: $30 - 4\cdot 5 = 10$.

Столбец A_1: $3-\frac{1}{3}\cdot 5=\frac{4}{3}$.

Столбец A_2: $5 - 1\cdot 5 = 0$.

Столбец A_3: $1 - 0\cdot 5 = 1$.

Столбец A_4: $0-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 5=\frac{5}{3}$.

Столбец A_5: $0 - 0\cdot 5 = 0$.

Строка A_5, множитель 4:

Столбец A_0: $40 - 4\cdot 4 = 24$.

Столбец A_1: $5 - \frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{11}{3}$.

Столбец A_2: $4 - 1\cdot 4 = 0$.

Столбец A_3: $0 - 0\cdot 4 = 0$.

Столбец A_4: $0 - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 4 = \frac{4}{3}$.

Столбец A_5: $1 - 0\cdot 4 = 1$.

1.4. Пересчитаем симплекс-разностей для новообретённой таблицы.

$\delta_0 = 0\cdot 10 + 5\cdot 4 + 0\cdot 24 = 20$;

$\delta_1 = 0\cdot\frac{4}{3} + 5\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{11}{3} - 4 = -\frac{7}{3}$; $\delta_2 = 0\cdot 3 + 5\cdot 1 + 0\cdot 0 - 5 = 0$;

$\delta_3 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0$; $\delta_4 = 0\cdot\frac{5}{3} - 5\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{4}{3} - 0 = -\frac{5}{3}$;

$\delta_5 = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0$.

1.5. Условие окончания не выполняется, оптимальное решение не найдено, и признаки неразрешимости отсутствуют.

2-я итерация

2.6. Направляющий столбец A_1, отмечен стрелкой.

2.7. Направляющую строку найдём выбором

$$\min\left\{\frac{10}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{2}; \frac{4}{\frac{1}{3}} = 12; \frac{24}{\frac{11}{3}} = \frac{72}{11}\right\} = \frac{72}{11} \Rightarrow i^* = 3.$$

В базис вводится вектор A_1, вместо A_5.

2.8. Перестраиваем заголовки таблицы и пересчитываем её содержимое

Пересчёт по Жордану-Гауссу

- Модификация направляющей строки, направляющий элемент $\frac{11}{3}$ выделен серым цветом, на него делим поэлементно строку A_5:

$$\frac{72}{11}, 1, 0, 0, \frac{\frac{4}{3}}{\frac{11}{3}} = \frac{4}{11}, \frac{3}{11}.$$

Результат помещаем в новую таблицу, в строку A_2.

- Пересчёт остальных строк (для небазисных векторов)

Строка A_3, множитель $\frac{4}{3}$:

Столбец A_0: $10-\frac{72}{11}\cdot\frac{4}{3}=\frac{14}{11}$.

Столбец A_4: $\frac{5}{3}-\frac{4}{11}\cdot\frac{4}{3}=\frac{13}{11}$.

Столбец A_5: $0-\frac{3}{11}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{4}{11}$.

Строка A_2, множитель $\frac{1}{3}$:

Столбец A_0: $4-\frac{72}{11}\cdot\frac{1}{3}=\frac{20}{11}$.

Столбец A_4: $-\frac{1}{3}-\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{5}{11}$.

Столбец A_5: $0-\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{11}$.

			c_j	4	5	0	0	0
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
←	A_3	0	14/11	0	0	1	13/11	–4/11
	A_2	5	20/11	0	1	0	–5/11	–1/11
	A_1	4	72/11	1	0	0	4/11	3/11
		δ_j	388/11	0	0	0	–9/11	7/11
							↑	

2.4. Подсчёт симплекс-разностей.

$\delta_0 = 0\cdot\frac{14}{11}+5\cdot\frac{20}{11}+4\cdot\frac{72}{11}=\frac{388}{11}$;

$\delta_1 = 0\cdot0 + 5\cdot0 + 4\cdot1 - 4 = 0$; $\delta_2 = 0\cdot0 + 5\cdot1 + 0\cdot0 - 5 = 0$;

$\delta_3 = 0\cdot1 + 0\cdot0 + 0\cdot0 - 0 = 0$; $\delta_4 = 0\cdot\frac{13}{11}+5\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)+4\cdot\frac{4}{11}-0=-\frac{9}{11}$;

$\delta_5 = 0\cdot\left(-\frac{4}{11}\right)+5\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)+4\cdot\frac{3}{11}-0=\frac{7}{11}$.

2.5. Оптимальное решение не найдено, признаков неразрешимости нет.

3-я итерация

3.6. Единственный направляющий столбец A_4, отмечен стрелкой.

3.7. Выбираем направляющую строку

$$\min\left\{\frac{\frac{14}{11}}{\frac{13}{11}}=\frac{14}{13};-;\frac{\frac{72}{11}}{\frac{4}{11}}=18\right\}=\frac{14}{13}\Rightarrow i^*=1.$$

Вместо A_3 вводится вектор A_4(отмечен стрелкой в таблице выше).

3.8. Перестраиваем заголовки таблицы и пересчитываем её содержимое Пересчёт по Жордану-Гауссу

- Модификация направляющей строки, направляющий элемент $\frac{13}{11}$ выделен серым цветом, на него делим поэлементно строку A_3:
$$\frac{14}{13},0,0,\frac{11}{13},1,-\frac{4}{13}.$$
Результат помещаем в новую таблицу, в верхнюю строку A_4.
- Пересчёт остальных строк (для небазисных векторов)

Строка A_2, множитель $-\frac{5}{11}$:

Столбец A_0: $\frac{20}{11}-\frac{14}{13}\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)=\frac{30}{13}$.

Столбец A_3: $0-\frac{11}{13}\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)=\frac{5}{13}$.

Столбец A_5: $-\frac{1}{11}-\left(-\frac{4}{13}\right)\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)=-\frac{3}{13}$.

Строка A_1, множитель $\frac{4}{11}$:

Столбец A_0: $\frac{72}{11}-\frac{14}{13}\cdot\frac{4}{11}=\frac{80}{13}$.

Столбец A_3: $0-\frac{11}{13}\cdot\frac{4}{11}=-\frac{4}{13}$.

Столбец A_5: $\frac{3}{11}-\left(-\frac{4}{13}\right)\cdot\frac{4}{11}=\frac{53}{13}$.

		c_j	4	5	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_4	0	14/13	0	0	11/13	1	–4/13
A_2	5	30/13	0	1	5/13	0	–3/13
A_1	4	80/13	1	0	–4/13	0	5/13
	δ_j	470/13	0	0	9/13	0	5/13

3.4. Вычислим симплекс-разности.

$\delta_0 = 0\cdot\frac{14}{13}+5\cdot\frac{30}{13}+4\cdot\frac{82}{13}=\frac{470}{13}$;

$\delta_1 = 0\cdot0 + 5\cdot0 + 4\cdot1 - 4 = 0$; $\delta_2 = 0\cdot0 + 5\cdot1 + 0\cdot0 - 5 = 0$;

$\delta_3 = 0\cdot\frac{11}{13}+5\cdot\frac{5}{13}+4\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)-0=\frac{9}{13}$;$\delta_4 = 0\cdot1 + 0\cdot0 + 0\cdot0 - 0 = 0$;

$$\delta_5 = 0 \cdot \left(-\frac{4}{13}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) + 4 \cdot \frac{5}{13} - 0 = \frac{5}{13}.$$

3.5. Строка указывает на достижение оптимального решения, искусственных переменных в базисе нет, следовательно, система ограничений, заданная в условии задачи совместна, и в столбце A_0 находится её решение:

$$X^T_{\max} = \begin{Bmatrix} \frac{80}{13} & \frac{30}{13} & 0 & \frac{14}{13} & 0 \end{Bmatrix}, \ f_{\max}(X) = \frac{470}{13}.$$

Можно выполнить проверку по 2-му ограничению системы в канонической форме, подставив в него значения переменных

$$1 \cdot \frac{80}{13} + 3 \cdot \frac{30}{13} - 1 \cdot \frac{14}{13} = \frac{156}{13} = 12.$$

Тако же полученное решение совпадает с графо-аналитическим методом, демонстрационный пример для которого приведен выше.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Этот метод называется ещё **методом обратной матрицы**. Его особенность состоит в том, что расчёты, производимые на итерации, касаются только векторов текущего базиса, и происходит обращение составленной из них матрицы.

Поскольку число базисных векторов совпадает с размером системы ограничений, наибольшая эффективность алгоритма, в сопоставлении с прямым симплекс-методом или методом искусственного базиса, проявляется, когда число переменных n значительно превосходит число ограничений m.

Алгоритм метода разработан Л.В. Канторовичем.

Алгоритм модифицированного симплекс-метода [2]

1. Привести математическую модель задачи к канонической форме. Ввести, по необходимости, искусственные переменные.

2. Построить две таблицы: вспомогательную таблицу и основную таблицу:

- во вспомогательной таблице помещается каноническая форма математической модели, которая содержит (заранее не известно сколько) строк, предназначенных для хранения значений симплекс-разностей;

- в основной таблице помещается обратная матрица, совместно с текущими данными для производства расчётов.

Внешний вид вспомогательной таблицы:

		c_j	c_1	.....	c_n	0	......	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	.....	A_n	A_{n+1}	......	A_{n+m}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0
A_{n+2}	0	b_2	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1
	Δ^0	δ_0^0	δ_1^0	...	δ_n^0	δ_{n+1}^0	...	δ_{n+m}^0
	...							
	Δ^r	δ_0^r	δ_1^r	...	δ_n^r	δ_{n+1}^r	δ_0^r	δ_1^r

где r – номер итерации, итераций может быть не более $n + m$.

Первоначально все строки симплекс-разностей Δ вспомогательной таблицы пусты.

Типовой макет основной таблицы:

$$\longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- A_x^{-1} -\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow$$

Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	...	e_m	A^*	θ
A_{n+1}	0	b_1	1	0	…	0		
A_{n+2}	0	b_2	0	1	…	0		
...	...	...	...	…	…	...		
A_{n+m}	0	b_m	0	0	…	1		
	Λ	λ_0	λ_1	λ_2	...	λ_m		

где A_x^{-1} – местоположение обратной матрицы, коя является таковой по отношению к базисному фрагменту исходной матрицы ограничений. Первоначально – это единичная матрица.

Назначение столбцов *Базис* и $C_Б$ читателю известно по предыдущему изложению. Столбец e_0 при начальном заполнении совпадает с вектором свободных членов системы ограничений.

Строка оценок Λ, столбцы A^* и θ пусты.

3. Рассчитать строку оценок Λ в основной таблице.

Алгоритм расчёта оценок в литературе [1 – 4] описывается двояко:

- с использованием матричных выражений: $\Lambda^T = C_Б^T \times A_x^{-1}$ и $\lambda_0 = C_Б^T \times e_0$;
- развёрнутой записью $\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} c_{i,Б} \cdot e_{i,j},\ j = 0, m$.

Форма записи не влияет на объём и порядок проводимых операций.

4. Рассчитать текущие значения симплекс-разностей с использованием элементов оценок Λ по формулам:

- $\delta_0 = \lambda_0$;
- $\delta_j = \Lambda^T \times A_j - c_j$,

где Λ^T – элементы оценок с номерами $1 - m$, A_j – столбец вспомогательной таблицы, а c_j – коэффициент целевой функции для переменной x_j.

Рассчитанные значения поместить в соответствующую номеру итерации строку вспомогательной таблицы.

5. Проверить симплекс-разности на признак окончания расчётов. Проверка осуществляется известным способом.

Если в базисе оптимального решения присутствуют искусственные переменные, это говорит о несовместности системы ограничений.

Решение задачи будет располагаться в столбце e_0 основной таблицы.

6. Если признаки неразрешимости или нормального завершения решения отсутствуют, возникает итерационная часть. Необходимо выбрать направляющий столбец:

- при решении задачи на максимум выбирается столбец с минимальной отрицательной j-й симплекс-разностью;
- при решении задачи на минимум выбирается столбец с максимальной положительной j-й симплекс-разностью.

Выбранный столбец является направляющим, его следует отметить во вспомогательной таблице вертикальной стрелкой “↑”, в выражениях его элементы будем обозначать “*”.

7. Выполнить расчёт столбца A^*.

Пересчёт направляющего столбца A_{j*} в столбец выполняется по правилу: $A^* = A_x^{-1} \times A_{j*}$, в качестве A_x^{-1} взять содержимое основной таблицы, столбцы $e_1 - e_m$. Рассчитанный столбец поместить в соответствующее место основной таблицы.

8. Определить отношения $\theta_i = \dfrac{e_{i,0 \geq 0}}{a_i^* > 0}, i = 1, m.$

Если ни одно из отношений не удовлетворяет условиям расчёта, необходимо вернуться к п. 6, выбрать другой направляющий столбец, удовлетворяющий условиям оптимизации, выполнить п.7 и вернуться к п.8.

Если операции п.п. 6 – 8 выполнить не удастся, то система ограничений **не замкнута** в направлении оптимизации.

Рассчитанные значения θ_i поместить в основную таблицу, там, где отношение не существует, поместить прочерк.

9. Найти направляющую строку

На неё укажет минимальное значение θ_i. Направляющую строку отметим в основной таблице “←”. Элемент, стоящий на пересечении направляющей строки и столбца A^* является направляющим.

10. Пересчитать содержимое основной таблицы

Пересчёт выполняется путём применения исключений Жордана-Гаусса

- Модифицируется направляющая строка путем деления на направляющий элемент $a_{\leftarrow}^{*}$, стоящий на пересечении направляющей строки и столбца A^{*}, а результат записывается на место старой направляющей строки в новой таблице;
- Из всех остальных строк исходной таблицы вычитается поэлементно модифицированная направляющая строка, умноженная на элемент a_i^{*}, стоящий на пересечении "уменьшаемой" строки и столбца A^{*}, результаты вычитаний записываются на соответствующие места в новой таблице.

Замечание. Столбец e_0 может быть определён как с использованием исключений Жордана-Гаусса, так и по формуле $e_0 = A_x^{-1} \times A_0$, где A_x^{-1} – содержимое "свежепересчитанной" обратной матрицы.

Итерации возобновляются с п.3.

Пример. Решить ЗЛП модифицированным симплекс методом

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

ХОД РЕШЕНИЯ

1. Во втором ограничении имеется знак "≥", понадобится введение искусственной переменной после канонизации системы ограничений

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 30; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Окончательно получим:

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - \mu \cdot x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 30; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 = 12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Построим вспомогательную и основную таблицы.

Замечание. Во вспомогательной таблице первоначально были пусты строки симплекс-разностей, а в основной – строка Λ, столбцы A^* и θ. То, что читатель видит в таблицах, есть результат отражения дальнейшего хода решения

Вспомогательная таблица:

		c_j	4	5	0	0	0	$-\mu$
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	30	3	5	1	0	0	0
A_6	$-\mu$	12	1	3	0	–1	0	1
A_5	0	40	5	4	0	0	1	0
	Δ^0	-12μ	$-1\mu-4$	$-3\mu-5$ ↑	0	μ	0	0
	Δ^1	20	–7/3 ↑	0	0	–5/3	0	–
	Δ^2	388/11	0	0	0	–9/11↑	7/11	–
	Δ^3	470/13	0	0	9/13	0	5/13	–

Основная таблица

	Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	θ
	A_3	0	30	1	0	0	5	6
←	A_6	$-\mu$	12	0	1	0	3	4
	A_5	0	40	0	0	1	4	10
		Λ	-12μ	0	$-\mu$	0		

3. Расчёт строки оценок основной таблицы Λ:

$\lambda_0 = 0{\cdot}30 - \mu{\cdot}12 + 4{\cdot}0 = -12{\cdot}\mu$; $\lambda_1 = 0{\cdot}1 - \mu{\cdot}0 + 0{\cdot}0 = 0$;

$\lambda_2 = 0{\cdot}1 - \mu{\cdot}1 + 0{\cdot}0 = -\mu$; $\lambda_3 = 0{\cdot}1 - \mu{\cdot}0 + 0{\cdot}1 = 0$.

Результаты заносим в нижнюю строку основной таблицы.

4. Расчёт текущих значений симплекс-разностей:

$\Lambda^T = \begin{bmatrix} 0 & -\mu & 0 \end{bmatrix}$.

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\mu & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - 4 = -\mu - 4 . \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mu & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 5 = -3 \cdot \mu - 5 .$$

$$\delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\mu & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0 . \qquad \delta_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\mu & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \mu$$

$$\delta_5 = [0 \quad -\mu \quad 0]\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 0 = 0. \qquad \delta_6 = [0 \quad -\mu \quad 0]\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} - (-\mu) = 0$$

Помещаем результаты в строку Δ^0 вспомогательной таблицы.

5. Среди симплекс-разностей присутствуют отрицательные величины, необходимо улучшать решение.

1-я итерация

1.6. Выбираем направляющий столбец, это A_2, отмечаем его стрелкой в строке Δ^0 вспомогательной таблицы.

1.7. Осуществляем расчёт столбца A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix},$$

и помещаем его в основную таблицу.

1.8. Рассчитываем значения отношения θ_i, и помещаем их в соответствующий столбец основной таблицы.

1.9. Минимальное значение отношения соответствует 2-й строке (отмечена стрелкой в основной таблице), следовательно, вектор A_6 будет выведен из базиса, а на его место поступит A_2.

Направляющий элемент выделен в основной таблице серым цветом.

Так как A_6 связан с искусственной переменной, симплекс-разности для одноимённого столбца во вспомогательной таблице можно больше не пересчитывать.

1.10. Построение новой основной таблицы из старой

Пересчёт старой основной таблицы по Жордану-Гауссу

- Модификация направляющей строки, направляющий элемент 3 выделен серым цветом, на него делим поэлементно строку A_6:

$$\frac{12}{3} = 4; \frac{0}{3} = 0; \frac{1}{3}; \frac{0}{3} = 0.$$

Результат помещаем в новую таблицу, в среднюю строку A_2.

- Пересчёт остальных строк (для ненулевых элементов A_2)

Строка A_3, множитель 5:

Столбец e_0: $30 - 4\cdot 5 = 10$.

Столбец e_2: $0 - \frac{1}{3}\cdot 5 = -\frac{5}{3}$.

Строка A_5, множитель 4:

Столбец e_0: $40 - 4 \cdot 4 = 24$.

Столбец e_2: $0 - \frac{1}{3} \cdot 4 = -\frac{4}{3}$.

В результате получим нижеследующую таблицу, в которой строка Λ, столбцы A^* и θ пока пусты.

Пересчитанная основная таблица

	Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	θ
	A_3	0	10	1	–5/3	0	4/3	30/4
	A_2	5	4	0	1/3	0	1/3	12
←	A_5	0	24	0	–4/3	1	11/3	72/11
		Λ	20	0	5/3	0		

1.3. Рассчитаем строку оценок Λ этой таблицы:

$\lambda_0 = 0 \cdot 10 - 5 \cdot 4 + 0 \cdot 24 = 20$; $\lambda_1 = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$;

$\lambda_2 = 0 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 5 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$. $\lambda_3 = 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Поместим значения в основную таблицу.

1.4. Сделаем расчёт симплекс-разностей

$$\Lambda^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - 4 = -\frac{7}{3}. \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 5 = 0.$$

$$\delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0. \quad \delta_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{5}{3}.$$

$$\delta_5 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0.$$

Заполним строчку Δ^1 вспомогательной таблицы.

1.5. Среди симплекс-разностей присутствуют отрицательные величины, решение продолжается.

2-я итерация

2.6. Выберем направляющий столбец (самая отрицательная симплекс-разность) A_1, отмечаем его стрелкой в строке Δ^1 вспомогательной таблицы.

2.7. Пересчитаем A_1 в столбец в A^* и помещаем его в основную таблицу.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

2.8. Рассчитываем значения отношения θ_i, и тако же помещаем их в соответствующий столбец основной таблицы.

2.9. Минимальное значение отношения соответствует 3-й строке (отмечена “←” в основной таблице), следовательно, вектор A_5 будет удалён из базиса, а на его место введён A_1.

2.10. Пересчёт основной таблицы по Жордану-Гауссу

- Модификация направляющей строки, направляющий элемент $\frac{11}{3}$ выделен серым цветом, на него делим поэлементно строку A_5:

  $$\frac{72}{11};0;-\frac{4}{11};\frac{3}{11}.$$

  Результат помещаем в новую таблицу, в последнюю строку A_1.
- Пересчёт остальных строк (для ненулевых элементов A_2)

  Строка A_3, множитель $\frac{4}{3}$:

  Столбец e_0: $10 - \frac{72}{11} \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{11}$.

  Столбец e_2: $-\frac{5}{3} - \left(-\frac{4}{11}\right) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{13}{11}$.

  Столбец e_3: $0 - \frac{3}{11} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4}{11}$.

  Строка A_2, множитель $\frac{1}{3}$:

  Столбец e_0: $4 - \frac{72}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{11}$.

  Столбец e_2: $\frac{1}{3} - \left(-\frac{4}{11}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{11}$.

  Столбец e_3: $0 - \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{11}$.

В результате получим нижеследующую таблицу, в которой столбцы A^*, θ и строка Λ будут заполнены позднее.

2.3. Рассчитаем строку оценок Λ этой таблицы:

$$\lambda_0 = 0\cdot\frac{14}{11} + 5\cdot\frac{20}{11} + 4\cdot\frac{72}{11} = \frac{388}{11};$$

$\lambda_1 = 0{\cdot}1 + 5{\cdot}0 + 4{\cdot}0 = 0;$

$$\lambda_2 = 0\cdot\left(-\frac{13}{11}\right) + 5\cdot\frac{5}{11} + 4\cdot\left(-\frac{4}{11}\right) = \frac{9}{11};$$

$$\lambda_3 = 0\cdot\left(-\frac{4}{11}\right) + 5\cdot\left(-\frac{1}{11}\right) + 4\cdot\frac{3}{11} = \frac{7}{11}.$$

Поместим значения в основную таблицу.

Пересчитанная основная таблица

	Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	θ
←	A_3	0	14/11	1	–13/11	–4/11	13/11	14/13
	A_2	5	20/11	0	5/11	–1/11	–5/11	–
	A_1	4	72/11	0	–4/11	3/11	4/11	24
		Λ	388/11	0	9/11	7/11		

2.4. Сделаем расчёт симплекс-разностей

$$\Lambda^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix}.$$

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - 4 = 0.\quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 5 = 0.$$

$$\delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0.\quad \delta_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{9}{11}.$$

$$\delta_5 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = \frac{7}{11}.$$

Заполним строчку Δ^2 вспомогательной таблицы.

2.5. В строке симплекс-разностей вспомогательной таблицы присутствует отрицательная величина для столбца A_4. Поэтому продолжим решение.

3-я итерация

3.6. Направляющий столбец безальтернативен, отметим A_4 стрелкой в строке Δ^2 вспомогательной таблицы.

3.7. Осуществим расчёт элементов A^* и поместим их в основную таблицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{13}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix}.$$

2.9. Подсчитаем θ_i, и заполним столбец основной таблицы.

3.10. Пересчитаем основную таблицу

- Модификация направляющей строки, направляющий элемент $\frac{13}{11}$ выделен серым цветом, на него делим поэлементно строку A_3:

$$\frac{14}{13};\frac{11}{13};-1;\frac{4}{13}.$$

  Результат помещаем в новую таблицу, на строку A_4.
- Пересчёт остальных строк (для ненулевых элементов A_2)

  Строка A_2, множитель $-\frac{5}{11}$:

  Столбец e_0: $\frac{20}{11}-\frac{14}{13}\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)=\frac{30}{13}$.

  Столбец e_1: $0-\frac{11}{13}\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)=\frac{5}{13}$.

  Столбец e_2: $\frac{5}{11}-(-1)\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)=0$.

  Столбец e_3: $-\frac{1}{11}-\left(-\frac{4}{13}\right)\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)=-\frac{3}{13}$.

  Строка A_1, множитель $\frac{4}{11}$:

  Столбец e_0: $\frac{72}{11}-\frac{14}{13}\cdot\frac{4}{11}=\frac{80}{13}$.

  Столбец e_1: $0-\frac{11}{13}\cdot\frac{4}{11}=-\frac{4}{13}$.

  Столбец e_2: $-\frac{4}{11}-(-1)\cdot\frac{4}{11}=0$.

  Столбец e_3: $\frac{3}{11}-\left(-\frac{4}{13}\right)\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{13}$.

В результате новая таблица (с пустыми A^*, θ и Λ) будет такова:

Последняя основная таблица

Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	θ
A_4	0	14/13	11/13	–	–4/13		
A_2	5	30/13	5/13	0	–3/13		
A_1	4	80/13	–4/13	0	5/13		
	Λ	470/13	9/13	0	5/13		

3.3. Расчёт вектора оценок Λ.

$$\lambda_0 = 0\cdot\frac{14}{13}+5\cdot\frac{30}{13}+4\cdot\frac{80}{13}=\frac{470}{13};$$

$$\lambda_1=0\cdot\frac{11}{13}+5\cdot\frac{3}{13}+4\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)=\frac{9}{13};$$

$$\lambda_2 = 0\cdot(-1) + 5\cdot0 + 4\cdot0 = 0;$$

$$\lambda_3 = 0\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)+5\cdot\left(-\frac{3}{13}\right)+4\cdot\frac{5}{13}=\frac{5}{13}.$$

Заполним строку последней основной таблицы

3.4. Расчёт симплекс-разностей

$$\Lambda^T=\begin{bmatrix}\frac{9}{13} & 0 & \frac{5}{13}\end{bmatrix}.$$

$$\delta_1=\begin{bmatrix}\frac{9}{13} & 0 & \frac{5}{13}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}-4=0.\quad \delta_2=\begin{bmatrix}\frac{9}{13} & 0 & \frac{5}{13}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}-5=0.$$

$$\delta_3=\begin{bmatrix}\frac{9}{13} & 0 & \frac{5}{13}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-0=\frac{9}{13}.\quad \delta_4=\begin{bmatrix}\frac{9}{13} & 0 & \frac{5}{13}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}-0=0.$$

$$\delta_5=\begin{bmatrix}\frac{9}{13} & 0 & \frac{5}{13}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}-0=\frac{5}{13}.$$

Заполним строчку Δ^3 вспомогательной таблицы.

3.5. В строке симплекс-разностей вспомогательной таблицы отсутствуют отрицательные величины. Решение завершено, ответ совпал с предыдущим:

$$X_{\max}^{T} = \left\{ \frac{80}{13} \quad \frac{30}{13} \quad 0 \quad \frac{14}{13} \quad 0 \right\},\ f_{\max}(X) = \frac{470}{13}.$$

6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДВОЙСТВЕННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Указанный метод называют ещё методом последовательного улучшения оценок, по первичному определению Дж. Данцига. В его основе лежат теоретические обоснования, утверждающие, что для любой задаче, по определённым формальным правилам, может быть построена соответствующая двойственная задача:

- базису исходной (прямой) задачи соответствует сопряжённый базис двойственной задачи;
- текущему плану прямой задачи соответствует псевдоплан двойственной задачи.

Такое положение вещей позволяет вводить дополнительные ограничения к уже имеющимся ограничениям по мере решения задачи.

Алгоритм двойственного симплекс-метода

Работа алгоритма базируется на ряде определений.

- **Сопряжённый базис** – система m независимых векторов, составленная из матрицы ограничений прямой задачи, базисное решение которой Y удовлетворяет ограничениям двойственной задачи: $A_j^T Y \geq c_j$.
- **Псевдоплан прямой задачи** – допустимое базисное решение относительно сопряжённого базиса. Разложение векторов прямой задачи, не вошедших в сопряжённый базис, по векторам сопряжённого базиса.
- Подразумевается, что решается задача линейного программирования вида

$$F(X) \rightarrow \max$$
$$A \times X \leq B.$$

1. Привести, при необходимости, ЗЛП к подразумеваемому виду, для чего следует умножить на (–1) функцию цели, если в исходной постановке имеет место $F(X) \rightarrow \min$ ограничения, в которых присутствует знак “≥”.

2. Построить каноническую форму ЗЛП.

3. Построить двойственную задачу по отношению к канонической форме по формальному правилу:

Прямая задача		Двойственная задача
$C^T X \to \max,$ $AX + X_{ДОП} = B.$	$\Rightarrow$	$B^T Y \to \min,$ $(A+E)^T Y \ge C.$

4. Найти (подобрать) сопряжённый базис из m независимых векторов, руководствуясь определением, данным выше.

- Неравенства двойственной задачи, соответствующие включаемым в базис векторам, преобразуются в систему линейных алгебраических уравнений, результат решения которых подставляется в остальные неравенства, вектора, соответствующие которым, не вошли в предполагаемый сопряжённый базис.
- Если неравенства для “небазисных” векторов выполняются как истинные, базис подобран правильно, в противном случае, подбор базиса необходимо продолжить. Всего вариантов различных комбинаций векторов C_{n+m}^{m}.
- Если сопряжённый базис подобрать не удалось, то **система ограничений не совместна**, и пара задач является неразрешимой.

5. Рассчитать псевдоплан, путём решения ряда систем уравнений вида

$$A_j = M \times \widetilde{A}_j,$$

где A_j – разлагаемый вектор, M – матрица, составленная из векторов прямой задачи, образующих сопряжённый базис, $\widetilde{A}_j$ – искомое разложение вектора для всех векторов прямой задачи, не вошедших в базис.

6. Поместить псевдоплан в симплекс-таблицу общего вида

7. Рассчитать симплекс разности.

8. Проверить на окончание решения:

- если в полученном псевдоплане все элементы столбца A_0 неотрицательны, то указанный план является **оптимальным**, алгоритм завершает работу.
- если в A_0 присутствуют отрицательные компоненты, а на строках с ними **все** элементы неотрицательны, то **целевая функция не ограничена** в направлении оптимизации, а **задача неразрешима**.

9. Найти направляющую строку.

Её определяет самый минимальный отрицательный элемент столбца A_0.

10. Найти направляющий столбец, который определяется по правилу

$$\arg\min_{j} \left\{ \frac{-\delta_j \ge 0}{a_{i^*,j} < 0} \right\} \Rightarrow j^*.$$

11. Пересчитать симплекс-таблицу по методу Жордана-Гаусса.

12. Алгоритм продолжает работу с п. 7.

Пример. Решить ЗЛП двойственным симплекс методом

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

ХОД РЕШЕНИЯ

1. Преобразуем систему ограничений в состояние с одинаковыми знаками:

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30; \\ -1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 \le -12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Приведём модель к канонической форме

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 30; \\ -1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = -12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$
$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad B$$

3. Выполним построение двойственной задачи

$$f(y_1, y_2, y_3) = 30 \cdot y_1 - 12 \cdot y_2 + 40 \cdot y_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \min$$
$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{cases} 3 \cdot y_1 - 1 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 \ge 4; \\ 5 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 \ge 5; \\ y_1 \ge 0; \\ y_2 \ge 0; \\ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

4. Подберём сопряженный базис из 3-х векторов

Пусть это будут A_2, A_4 и A_5. Необходимо, чтобы решение системы уравнений, связанных с базисом, удовлетворяло остальным ограничениям

$$\begin{cases} 5\cdot y_1 - 3\cdot y_2 + 4\cdot y_3 = 5; & \Rightarrow y_1 = 1,\ y_1 \geq 0; \\ y_2 = 0; & 3\cdot 1 - 1\cdot 0 + 5\cdot 0 \geq 4? \text{ – неравенство не} \\ y_3 = 0. & \text{выполняется} \end{cases}$$

Базис (A_2, A_4, A_5) не приемлем. Попробуем комбинацию (A_1, A_4, A_5).

$$\begin{cases} 3\cdot y_1 - 1\cdot y_2 + 5\cdot y_3 \geq 4; & \Rightarrow y_1 = \dfrac{4}{3},\ y_1 \geq 0; \\ y_2 = 0; & \\ y_3 = 0. & 5\cdot\dfrac{4}{3} - 3\cdot 0 + 4\cdot 0 = \dfrac{20}{3} \geq 5? \text{ – подходит} \end{cases}$$

Базис, составленный из векторов (A_2, A_4, A_5), может быть использован в качестве сопряжённого. Матрица, составленная из векторов сопряжённого базиса, будет нами дальше использоваться для расчёта псевдоплана:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Расчёт псевдоплана

Необходимо найти разложение всех векторов, не вошедших в базис, это A_0, A_1, и A_3, по векторам сопряжённого базиса. Для этого необходимо будет решать уравнения.

A_0:

$$\begin{pmatrix} 30 \\ -12 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{40} \\ x_{50} \end{pmatrix}; \Rightarrow \quad \begin{cases} 30 = 3\cdot x_{10}; \Rightarrow & x_{10} = 10; \\ -12 = -1\cdot 10 + 1\ x_{40}; \Rightarrow & x_{40} = -2; \\ 40 = 5\cdot 10 + 1\ x_{50}; \Rightarrow & x_{50} = -10. \end{cases} \quad \widetilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

A_2:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{42} \\ x_{52} \end{pmatrix}; \Rightarrow \quad \begin{cases} 5 = 3\cdot x_{12}; \Rightarrow & x_{12} = \dfrac{5}{3}; \\ -3 = -1\cdot\dfrac{5}{3} + 1\ x_{42}; \Rightarrow & x_{42} = -\dfrac{4}{3}; \\ 4 = 5\cdot\dfrac{5}{3} + 1\ x_{52}; \Rightarrow & x_{50} = -\dfrac{13}{3}. \end{cases} \quad \widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

A_3:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\-1&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{43}\\x_{53}\end{pmatrix};\Rightarrow \qquad \begin{cases}1=3\cdot x_{13};\Rightarrow & x_{13}=\dfrac{1}{3};\\ 0=-1\cdot\dfrac{1}{3}+1\,x_{43};\Rightarrow & x_{43}=\dfrac{1}{3};\\ 0=5\cdot\dfrac{1}{3}+1\,x_{53};\Rightarrow & x_{53}=-\dfrac{5}{3}.\end{cases} \qquad \tilde{A}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

6. Помещаем вектора сопряжённого базиса и разложение остальных векторов в симплекс-таблицу

		c_j	4	5	0	0	0
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	A_1	4	10	1	–5/3	1/3	0	0
	A_4	0	– 2	0	–4/3	1/3	1	0
←	A_5	0	– 10	0	–13/3	–5/3	0	1
		δ_j	40	0	5/3	4/3	0	0
					↑			

7. Рассчитываем симплекс разности.

$\delta_0 = 4\cdot10 - 0\cdot(-2) + 0\cdot(-10) = 40$; $\delta_1 = 4\cdot1 + 0\cdot1 + 0\cdot5 - 4 = 0$;

$$\delta_2 = 4\cdot\frac{5}{3}+0\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+0\cdot\left(-\frac{13}{3}\right)-5=\frac{5}{3};\quad \delta_3 = 4\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-0=\frac{4}{3}.$$

$\delta_4 = 0\cdot0 + 0\cdot1 + 0\cdot0 - 0 = 0$; $\delta_5 = 0\cdot0 + 0\cdot0 + 0\cdot1 - 0 = 0$.

8. В столбце A_0 присутствуют отрицательные компоненты, и на одних строках с ними есть неотрицательные элементы. Решение должно быть продолжено.

1-я итерация

9.1. Из двух отрицательных элементов, – 2 и – 10, самое отрицательное число – 10. Поэтому вектор A_5 выводится из базиса, третья строка будет направляющей (отмечена стрелкой).

10.1. Найдем, какой из векторов A_2 или A_3 будет вводиться в сопряжённый базис:

$$\theta=\min\left\{\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{13}{3}}=\frac{5}{13};\frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}}=\frac{4}{5}\right\}=\frac{5}{13}.$$

Столбец, соответствующий вектору A_2 – направляющий, выделен “↑“.

11.1. Пересчёт по Жордану-Гауссу

- Модификация направляющей строки, направляющий элемент $-\frac{13}{3}$ выделен серым цветом, на него делим поэлементно строку A_5:

$$\frac{30}{13},0,1,\frac{5}{13},0,-\frac{3}{13}.$$

Результат помещаем в новую таблицу, в нижнюю строку A_2.

- Пересчёт элементов остальных строк (для небазисных векторов)

Строка A_1, множитель $\frac{5}{3}$:

Столбец A_0: $10-\frac{30}{13}\cdot\frac{5}{3}=\frac{80}{13}$.

Столбец A_3: $\frac{1}{3}-\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{3}=-\frac{4}{13}$.

Столбец A_5: $0-\left(-\frac{3}{13}\right)\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{13}$.

Строка A_4, множитель $-\frac{4}{3}$:

Столбец A_0: $2-\frac{30}{13}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{14}{13}$.

Столбец A_3: $\frac{1}{3}-\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{11}{13}$.

Столбец A_5: $0-\left(-\frac{3}{13}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{13}$.

		c_j	4	5	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	4	80/13	1	0	–4/13	0	5/13
A_4	0	14/13	0	0	11/13	1	–4/13
A_2	5	30/13	0	1	5/13	0	–3/13
	δ_j	470/13	0	0	9/13	0	5/13

7.1. Рассчитаем симплекс-разности:

$\delta_0 = 4\cdot\frac{80}{13}+0\cdot\frac{14}{13}+5\cdot\frac{30}{13}=\frac{470}{13}$;

$\delta_1 = 4\cdot1 + 0\cdot0 + 5\cdot0 - 4 = 0$; $\delta_2 = 4\cdot0 + 0\cdot0 + 5\cdot1 - 5 = 0$;

$\delta_3 = 4\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)+0\cdot\frac{11}{13}+5\cdot\frac{5}{13}-0=\frac{9}{13}$; $\delta_4 = 0\cdot0 + 0\cdot1 + 0\cdot0 - 0 = 0$;

$\delta_5 = 4\cdot\frac{5}{13}+0\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)+5\cdot\left(-\frac{3}{13}\right)-0=\frac{5}{13}$.

8.1. Столбец A_0 положителен, достигнуто оптимальное решение.

Оно совпало с найденными ранее оптимальными решениями для данной математической модели.

$$X_{\max}^T = \left\{ \frac{80}{13} \quad \frac{30}{13} \quad 0 \quad \frac{14}{13} \quad 0 \right\}, \; f_{\max}(X) = \frac{470}{13}.$$

7. ВЫПОЛНЕНИЕ ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Постоптимальный анализ ещё называется исследованием на чувствительность или устойчивость полученного оптимального решения к изменениям правых частей системы ограничений и вектора коэффициентов целевой функции.

Эти изменения могут быть объективно вызваны внешними причинами: желанием поменять планы выпуска или расценки в задачах экономического содержания, либо уточнением реальных условий функционирования в технических задачах.

В ходе исследований определяются диапазоны изменения элементов векторов свободных членов и коэффициентов функции цели. В пределах этих диапазонов сохраняется неизменность оптимального базисного решения.

Алгоритм проведения постоптимального анализа [3, 4]

I. Определение устойчивости оптимального решения к изменениям элементов вектора системы ограничений

Необходимо, в ходе исследования,

- оценить статус ограничения,
- оценить значимость ограничения,
- определить диапазон изменения ограничения,
- оценить влияние на оптимальный план результаты увеличения (уменьшения) запаса ресурсов.

Примем, в качестве смыслового содержания элементов вектора свободных членов системы ограничений, величины ресурсов, задействованных в производстве. Поскольку производственно-экономическая трактовка моделей часто встречается в математическом программировании.

1. Определение статуса ресурсов

Ресурсы относятся к **дефицитным**, если оптимальный план производства предусматривает их **полное** использование, в противном случае они считаются недефицитными.

Поэтому

- **положительное** значение *дополнительной переменной* указывает на **НЕполное** использование дополнительного ресурса, на его “**НЕ**дефицитность”;

- **нулевое** значение *дополнительной переменной* указывает на “дефицитность” ресурса, его **полное** использование.

Можно воспользоваться строкой симплекс-разностей оптимального решения для векторов дополнительных переменных:

- **дефицитным** ресурсам соответствуют **положительные** симплекс-разности.
- **недефицитным** ресурсам соответствуют **нулевые** симплекс-разности.

2. Определение значимости ресурсов

Значимости ресурса можно определить, сравнивая величины улучшения значения функции цели, определяемой на единицу прироста данного ресурса.

По теореме о чувствительности [4], значимость ресурса определяется значением двойственных переменных в оптимальном решении двойственной задачи. Эти значения находятся в строке симплекс-разностей дополнительных переменных таблицы оптимального решения.

- б**О**лее значимому ресурсу соответствует б**О**льшее значение симплекс-разности.

3. Определение диапазона изменения ресурсов

Изменение запасов ресурсов, определяемое правыми частями ограничений, может привести к смене текущего решения. Поэтому следует определить диапазон изменений компонент вектора ограничений, в котором структура текущего решения остаётся неизменной.

Этот диапазон есть решение системы ограничений

$$a_{i,0}^{*} + \delta_r \cdot a_{i,n+r} \geq 0,\ i = \overline{1,m},$$

где $a_{i,0}^{*}$ — компоненты столбца A_0, $a_{i,n+r}$ — компоненты столбца A_{n+r} таблицы оптимального решения, δ_r — величина приращения.

Если требуется комплексная оценка (одновременное изменение нескольких ограничений), то система ограничений примет вид

$$a_{i,0}^{*} + \sum_{r=1}^{m} \delta_r \cdot a_{i,n+r} \geq 0,\ i = \overline{1,m}.$$

4. Оценки влияния изменения ограничений можно получить, вычисляя функцию цели для каждого изменения элементов векторов свободных членов

- построить семейство зависимостей $F(\delta_i)$, $i \in DZ$, где DZ – множество дефицитных и значимых ресурсов.

Для получения оптимальных решений множества задач можно их перешивать для каждого приращения, а можно воспользоваться свойствами таблицы оптимального решения

$$X^{\nabla} = A^{-1} \times B^{\nabla},$$

где X^{∇} – вектор оптимального решения, A^{-1} – обратная матрица, составленная из столбцов оптимальной симплекс-таблицы для дополнительных переменных, B^{∇} – новый вектор правых частей ограничений.

Иногда возникает задача о замене одного дефицитного ресурса другим, таким образом, чтобы функция цели при этом не менялась:
ресурсы нужно менять в пропорциях:

$$\delta_q = \frac{\delta^*_{n+s}}{\delta^*_{n+q}} \cdot \delta_s \text{ или } \delta_s = \frac{\delta^*_{n+q}}{\delta^*_{n+s}} \cdot \delta_q,$$

где δ_q и δ_s — приращение пары дефицитных ресурсов q и s соответственно, а δ^*_{n+q} и δ^*_{n+s} — значения симплекс-разностей, соответствующих этим ресурсам в таблице оптимального решения.

II. Определение устойчивости оптимального решения к изменениям элементов вектора коэффициентов целевой функции

Ориентируясь на экономический подход, необходимо определить люфт изменений расценок (себестоимости или прибыли) по каждому из типов выпускаемой продукции, когда структура производства остаётся неизменной.

Очевидно, что текущее оптимальное решение сохранится при неотрицательности симплекс-разностей таблицы:

- это обеспечивается выполнением условия, формулируемое в виде системы неравенств:

$$\delta_j + \sum_{r=1}^{m} a_{r,j} \cdot \delta_r \geq 0, \qquad j = \overline{1, n+m},$$

в которых δ_j — симплекс-разности, обеспечивающие остановку алгоритма в точке достижения оптимума; δ_r — приращение коэффициента функции цели при переменной, находящейся в оптимальном решении в r-й строке симплекс-таблицы.

Пример. Исследовать на чувствительность оптимальное решение ЗЛП

$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 30; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 40; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

ХОД РЕШЕНИЯ

Ранее, в главе 3, нами было получено такое оптимальное решение

		c_j	4	5	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	14/11	0	0	1	–13/11	–4/11
A_2	5	20/11	0	1	0	5/11	–1/11
A_1	4	72/11	1	0	0	–4/11	3/11
	δ_j	388/11	0	0	0	9/11	7/11

Проверим справедливость равенства:

$$X_{\text{opt}} = A^{-1} \cdot A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{13}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{11} \\ \frac{20}{11} \\ \frac{72}{11} \end{pmatrix}.$$

Стало быть, матрицей A^{-1} можно будет уверенно пользоваться в границах устойчивости при исследовании, не прибегая к пересчёту ЗЛП заново.

I. Определим устойчивости оптимального решения по вектору системы ограничений

1. Статус ресурсов:

- ресурсы, связанные с ограничениями 2 и 3, являются дефицитными, поскольку им соответствуют положительные значения симплекс-разностей и нулевые значения дополнительных переменных;
- ресурс, задаваемый ограничением 1, недефицитный, ибо дополнительная переменная x_3 в оптимальном плане положительна, и δ_3– нулевая.

2. Оценим значимость ресурсов:

Из двух дефицитных 2-го и 3-го ресурсов, более значимый – 2-й, поскольку $\frac{9}{11} > \frac{7}{11}$.

Найдём границы изменения 2-го ресурса:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{20}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 12+\delta_2 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{11} - \frac{13}{11}\delta_2 \\ \frac{20}{11} + \frac{5}{11}\delta_2 \\ \frac{72}{11} - \frac{4}{11}\delta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{14}{11} - \frac{13}{11}\delta_2 \ge 0; \\ \frac{20}{11} + \frac{5}{11}\delta_2 \ge 0; \Rightarrow \left[-4; \frac{14}{13}\right]. \\ \frac{72}{11} - \frac{4}{11}\delta_2 \ge 0. \end{cases}$$

Руководствуясь исследовательским интересом, найдём границы изменения 3-го ресурса:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{20}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 40+\delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{11} - \frac{4}{11}\delta_3 \\ \frac{20}{11} - \frac{1}{11}\delta_3 \\ \frac{72}{11} + \frac{3}{11}\delta_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{14}{11} - \frac{4}{11}\delta_3 \geq 0; \\ \frac{20}{11} - \frac{1}{11}\delta_3 \geq 0; \\ \frac{72}{11} + \frac{3}{11}\delta_3 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \left[-24; \frac{7}{2}\right].$$

В том случае, когда произвольно изменяются оба дефицитных ресурса, будем иметь дело с системой неравенств двух переменных:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{20}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 12+\delta_2 \\ 40+\delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{11} - \frac{13}{11}\delta_2 - \frac{4}{11}\delta_3 \\ \frac{20}{11} + \frac{5}{11}\delta_2 - \frac{1}{11}\delta_3 \\ \frac{72}{11} - \frac{4}{11}\delta_2 + \frac{3}{11}\delta_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{14}{11} - \frac{13}{11}\delta_2 - \frac{4}{11}\delta_3 \geq 0; \\ \frac{20}{11} + \frac{5}{11}\delta_2 - \frac{1}{11}\delta_3 \geq 0; \\ \frac{72}{11} - \frac{4}{11}\delta_2 + \frac{3}{11}\delta_3 \geq 0. \end{cases}$$

Прибегнем к графической интерпретации.

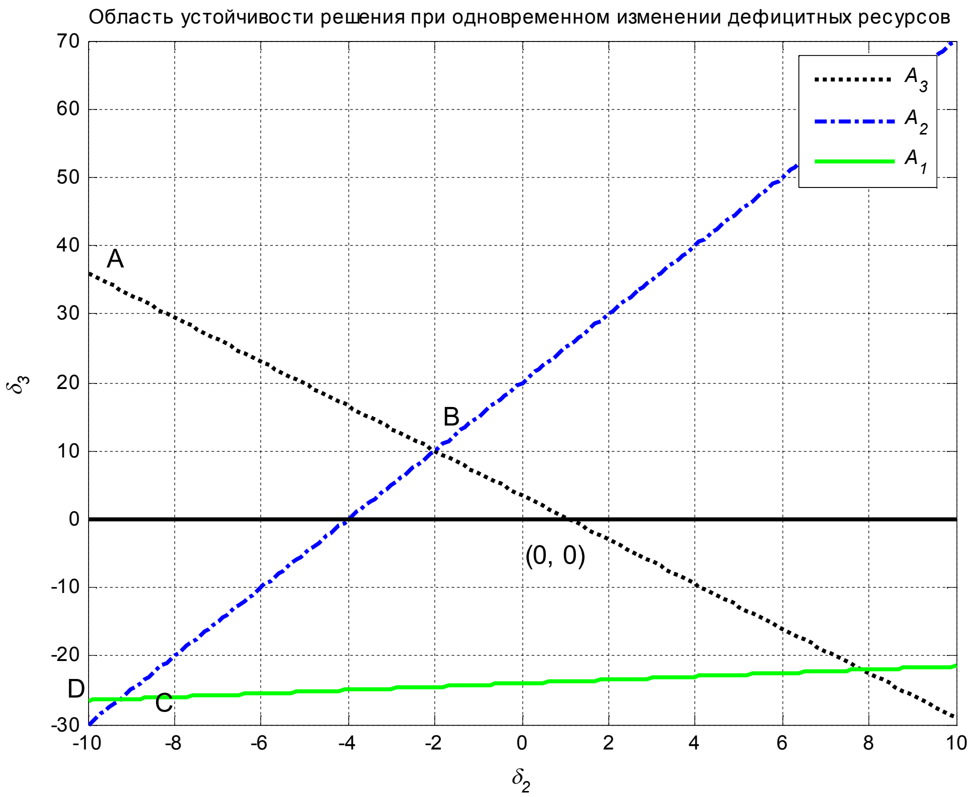

Рисунок 2 – К исследованию устойчивости при изменении ресурсов

Из рисунка 2 видно, что система ограничений выполняется в пределах открытой области, ограниченной сверху линией, совпадающей с отрезком [AB], участком ломаной ABCD справа и линией, совпадающей с отрезком [CD], снизу.

Принимая во внимание, что компоненты вектора свободных членов не могут быть отрицательными, возникнут дополнительные ограничения на величины приращений $\delta_2 \geq -12$ и $\delta_3 \geq -40$.

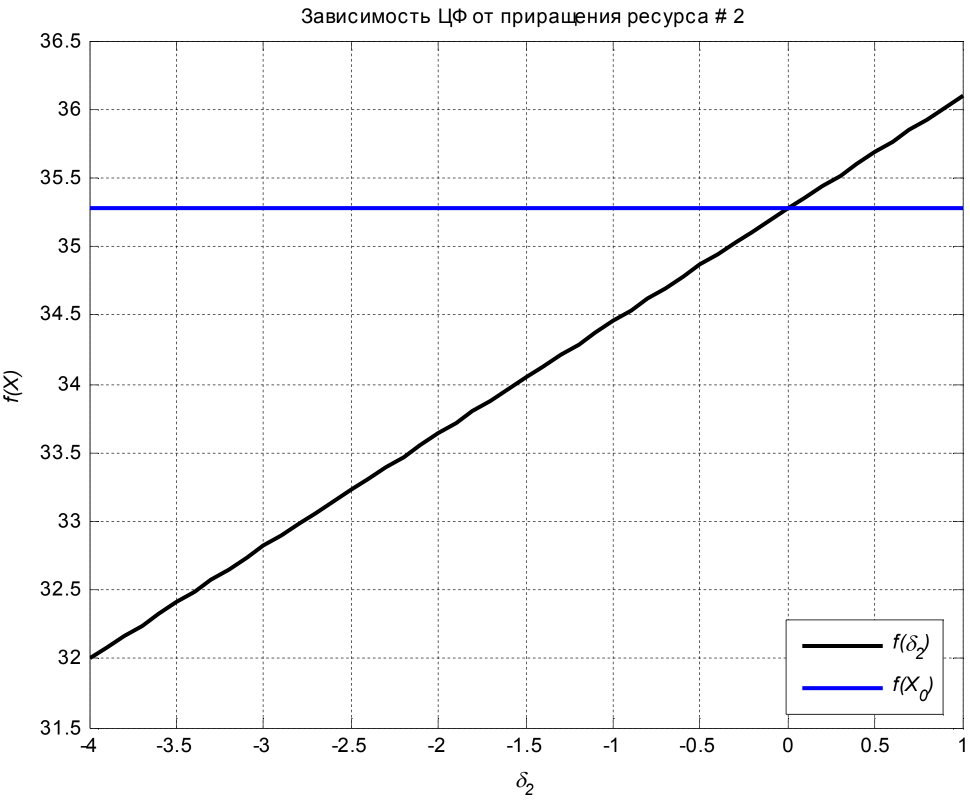

Рисунок 3 – $f_{\max}(X_{\text{opt}}, \delta_2)$

Поскольку отрицательные приращения вызывают уменьшение значения целевой функции (линии, ограничивающие область, пройдут ниже, и аргументы функции цели окажутся меньше, чем в исследуемом решении), придавать таковые нецелесообразно.

Область положительных приращений, как показано на чертеже, лежит вне области устойчивости, левее точки (0,0) и выше жирной чёрной оси абсцисс.

Поэтому одновременное изменение обоих дефицитных ресурсов не целесообразно.

Зависимости изменения значений целевой функции от приращений дефицитных ресурсов показаны на рисунках 3 и 4.

Синей линией, параллельной оси абсцисс, на рисунках показано значение функции цели исходной задачи. Тако же можно убедиться в нецелесообразности отрицательных приращений величин ресурсов.

Если вычертить эти графики в одной координатной плоскости, то возникнет следующая картина, показанная на рисунке 5.

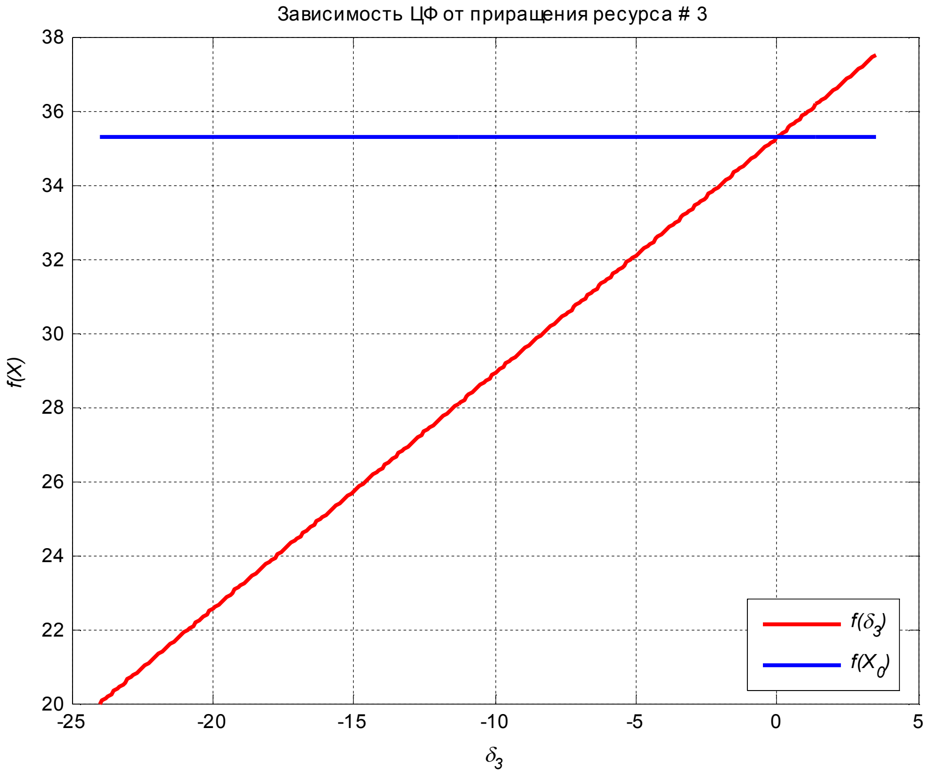

Рисунок 4 – $f_{\max}(X_{\text{opt}},\ \delta_3)$

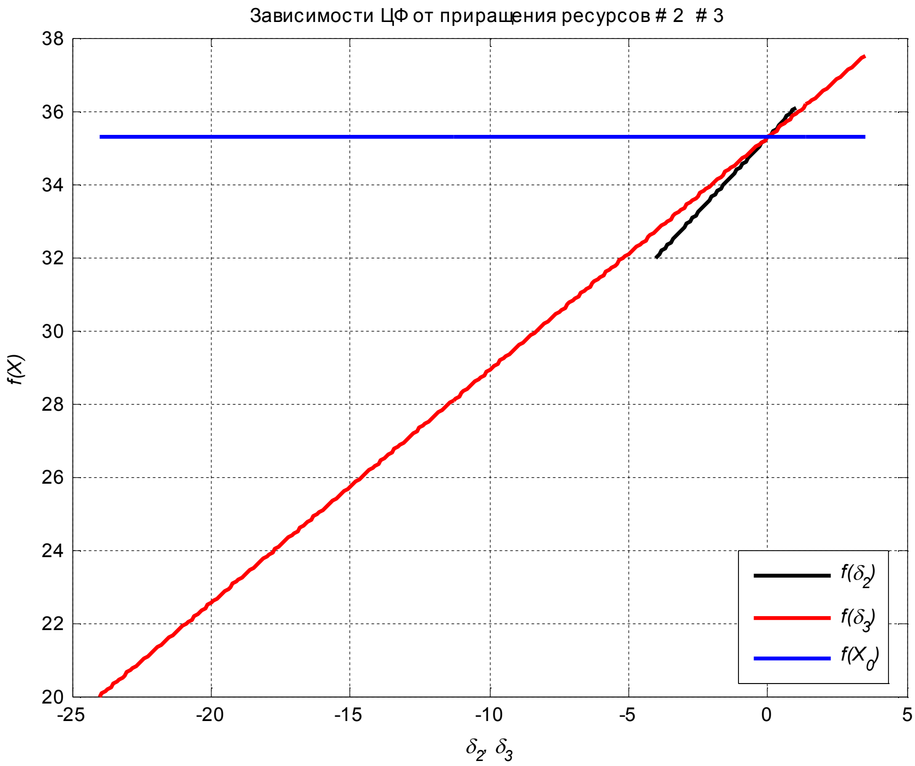

Рисунок 5 – Семейство изменений целевых функций

Из приведённой на рисунке 5 иллюстрации, видно, что хотя (как показали предыдущие исследования) ресурс, связанный с ограничением задачи № 3, менее значимый, тем не менее, он обладает бОльшей верхней границей, чем значимый 2-й, и это позволяет достичь большего значений целевой функции.

Таким образом, увеличение в рассчитанных пределах, 3-го элемента вектора ограничений, весьма перспективно.

Расчёт зависимостей значений целевой функции, показанных на рисунках 3 – 5, выполнен с использованием матричных вычислений.

Коэффициент пропорциональной замены одного дефицитного ресурс другим составит, по отношению значений симплекс разностей $\frac{9}{7}$ или $\frac{7}{9}$.

II. Определим область устойчивости решения к изменениям коэффициентов целевой функции

Для этого сформулируем систему неравенств, исходя из требований обеспечения неотрицательных значений симплекс-разностей в оптимальном решении

$$\begin{cases} \frac{9}{11} + 4 \cdot \left(-\frac{4}{11}\right) \cdot \delta_1 + 5 \cdot \frac{5}{11} \cdot \delta_2 \geq 0; \\ \frac{9}{11} + 4 \cdot \frac{3}{11} \cdot \delta_1 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{11}\right) \cdot \delta_2 \geq 0. \end{cases}$$

Область, где выполняются оба ограничения, выглядит так

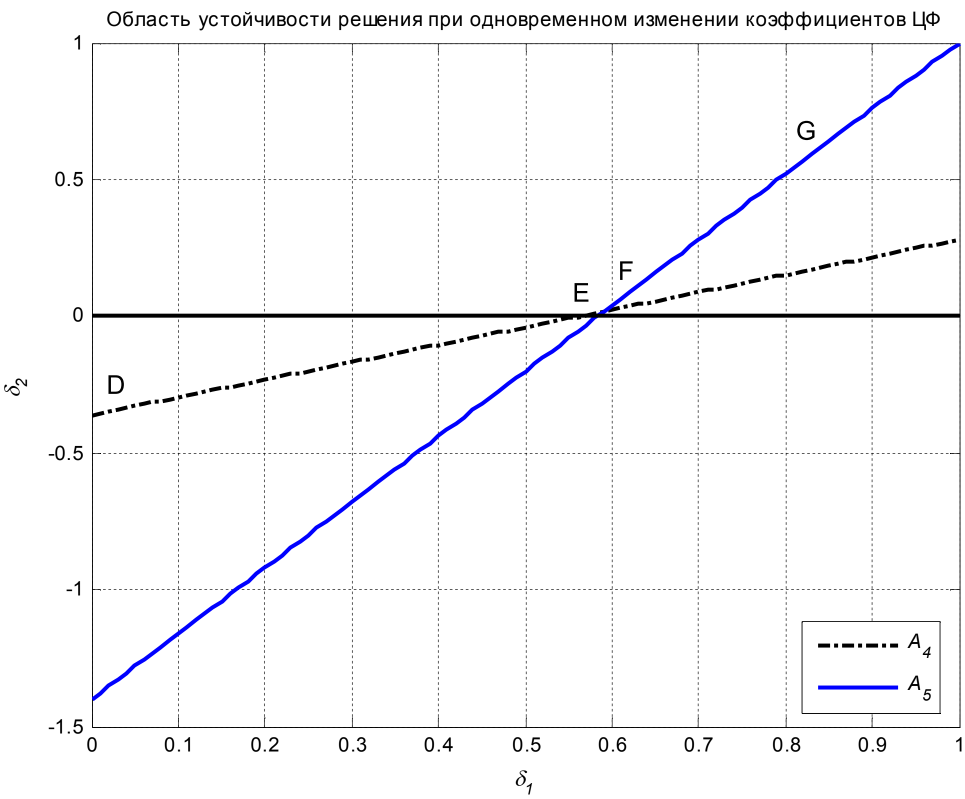

Рисунок 6 – Области устойчивости по коэффициентам

Область устойчивости (рисунок 6) представляет незамкнутую часть плоскости, ограниченную лучами угла:

- нижним лучом, на котором лежит отрезок DF,
- верхним лучом, на котором лежит отрезок FG.

Как и для вектора правых частей системы ограничений, по понятным причинам, отрицательные (“уменьшающие”) приращения будут нецелесообразны.

С учётом этих соображений, область следует скорректировать, её ограничивают линии:

- луч вдоль оси абсцисс до точки E,
- отрезок EF,
- луч FG.

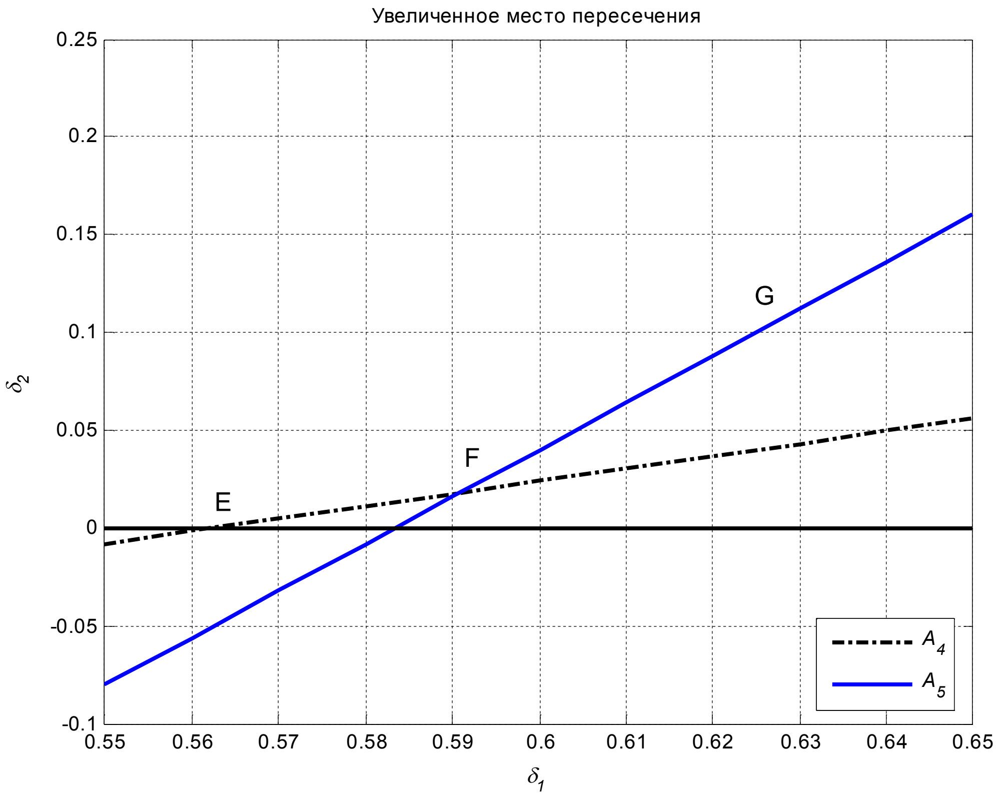

Рисунок 7 – Скорректированная область устойчивости

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение оптимизационных задач является одним из центральных мест этапа проектирования и разработки, благодаря чему предоставляется возможность выбора оптимального варианта конструкторского решения, либо прихода к разумному компромиссу.

Следствием этого обеспечивается наилучшее удовлетворение противоречивых требований к разработке и учёт ограничений в рамках выбранной математической модели.

Модели и методы линейного программирования позволяют, пусть и весьма приближённо, оценить возможный эффект разработки, стоимостные и производственные показатели…

Е.Н. Заикина,
В.Ю. Карлусов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер Г. Основы исследования операций [Текст] в 3-х томах. / Г. Вагнер. – М. : Мир Т.1: 1972. – 335 с. Т.2: 1973. – 488 с. Т.3: 1973. – 501 с.

2. Зайченко Ю. П. Исследование операций: учеб. пособие для вузов / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища школа, 1979. – 392 с.

3. Юдин Д. Б. Задачи и методы линейного программирования [Текст] / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М. : Советское радио, 1964. – 736 с.

4. Юдин Д. Б. Линейное программирование (Теория, методы, приложения) [Текст] / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М. : Наука, 1969. – 424 с

ЭЛЕКТРОННЫЕ ИЗДАНИЯ, ДОСТУПНЫЕ ПО ПОДПИСКЕ СЕВГУ

5. Горлач, Б. А. Исследование операций [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б. А. Горлач. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 448 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/4865. — Загл. с экрана.

Ржевский, С. В. Исследование операций [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. В. Ржевский. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 480 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/32821. — Загл. с экрана.

6. Есипов, Б. А. Методы исследования операций [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б. А. Есипов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 304 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/68467. — Загл. с экрана.

7. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. Л. Акулич. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 352 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2027. — Загл. с экрана.

8. Балдин К. В. Математическое программирование / Балдин К. В., Брызгалов Н. А., Рукосуев А. В., — 2-е изд. — М.:Дашков и К, 2018. — 218 с. — Режим доступа : http://znanium.com/catalog/product/415097. — ISBN 978-5-394-01457-4

Заказ № ______ от “ ______ “ ______________ 20*21* __________ . Тираж ___*25*___ экз.
Изд-во СевНТУ