# Calcul Intégral IV

STEP, MINES ParisTech*

7 octobre 2019 (`#24161b4`)

## Table des matières



*Ce document est un des produits du projet `boisgera/CDIS`, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). 

# TODO – Mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

Dans les volets précédents du "Calcul Intégral", nous avons défini le volume d'un pavé compact de $\mathbb{R}^n$

$$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

au moyen de la formule

$$v(P) := (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

L'intégrable de Henstock-Kurzweil nous permet de prolonger la fonction $v$ en une fonction définie pour tous les ensembles mesurables $A$ de $\mathbb{R}^n$, par la relation

$$v(A) = \int 1_A(x) dx$$

si $1_A$ est intégrable et $v(A) = +\infty$ sinon. Mais cette approche n'est pas totalement satisfaisante intellectuellement. D'une part on peut considérer l'usage de l'intégrale comme un chemin tortueux pour étendre $v$. D'autre part on peut avoir l'impression que cette approche – qui ne permet pas de mesure le volume de tout ensemble de $\mathbb{R}^n$ – n'atteint pas totalement son objectif ; cette limitation pourrait a être un artefact de la méthode choisie plutôt qu'une limitation intrinsèque. Dans cette section, nous allons donner une autre méthode, plus directe, due à Lebesgue et Carathéodory [1], qui nous permettra de définir la mesure du volume de tout ensemble de $\mathbb{R}^n$. Elle nous donnera également la raison pour laquelle notre construction initiale du volume se limite à la collection des ensembles qualifiés de "mesurables".

Pour calculer le volume d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, nous généralisons la méthode utilisée pour définir les ensembles négligeables (de volume nul) : nous considérons l'ensemble des collections dénombrables de pavés recouvrant ce sous-ensemble et nous utilisons chacun des ces recouvrements pour produire une estimation (supérieure) du volume de l'ensemble. Formellement :

1. Henri Lebesgue (1875-1941) était un mathématicien français et Constantin Carathéodory (1873-1950) un mathématicien grec entrenant des liens étroits avec l'Allemagne. Ils font partie des fondateurs de la théorie abstraite de la mesure qui conduit à un renouveau de la théorie de l'intégration au début du XXème siècle.

### Mesure extérieure de Lebesgue

On appelle *mesure extérieure de Lebesgue* dans $\mathbb{R}^n$ la fonction

$$v^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty],$$

qui a tout ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$ associe le nombre réel étendu positif défini par

$$v^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} v(P_k) \;\middle|\; P_k \text{ pavé compact de } \mathbb{R}^n, A \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} P_k \right\},$$

Cette définition "raisonnable" ne satisfait toutefois pas les propriétés que nous attendons (implicitement) d'un volume. Ce décalage est mise en évidence par un résultat paradoxal de la théorie des ensembles dans $\mathbb{R}^3$ :

### Paradoxe de Banach-Tarski

Il est possible de partitionner une sphère de rayon un de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini d'ensembles, qui, après rotations et translations, forment une partition de deux sphères disjointes de rayon un.

---

Si le résultat est qualifié de paradoxe, c'est qu'il nous semble intuitivement que le volume devrait être préservé par les les opérations subies par la sphère initiale. Or, le volume d'une sphère de rayon un et de deux sphères disjointes de même rayon diffère d'un facteur 2 ... Pour dépasser ce paradoxe, nous allons devoir examiner un par un les résultats qui nous semblent évidents dans ce raisonnement.

Soient $A_1, \dots, A_p$ des ensembles disjoints et non vides de $\mathbb{R}^3$ dont la réunion forme la sphère initiale $S_0 = A_1 \cup \cdots \cup A_p$, et tels que des ensembles disjoints $B_1, \dots, B_p$ qui s'en déduisent par rotation et translation, vérifient $S_1 \cup S_2 = B_1 \cup \cdots \cup B_p$ où $S_1$ et $S_2$ sont les deux sphère finales.

Tout d'abord, on a bien

$$v^*(S) = \frac{4\pi}{3} \;\text{ et }\; v^*(S_1 \cup S_2) = 2 \times \frac{4\pi}{3},$$

car les ensembles $S_0$, $S_1$ et $S_2$ considérés sont intégrables (au sens de l'intégrale de Henstock-Kurzweil) et nous verrons ultérieurement que dans ce cas, la mesure extérieure $v^*$ coïncide avec celle de $v$ qui exploite l'intégrable de Henstock-Kurzweil. Un simple calcul intégral fournit alors le résultat.

On peut croire que le point critique dans notre définition est la préservation de la valeur de $v^*(A)$ par translation et rotation ; s'il est facile d'établir que lorsque $B$ se déduit de $A$ par une translation, alors $v^*(A) = v^*(B)$, on peut douter du résultat pour les rotations. Après tout, la définition de $v^*(A)$ fait appel à des rectangles qui sont parallèles aux axes, une propriété qui n'est pas conservée par rotation. Mais si le résultat n'est pas évident, il s'avère pourtant que la mesure $v^*$ est bien invariante par rotation (cf. (Hunter 2011, sec. 2.8)).

La propriété qui nous fait défaut est plus fondamentale : la fonction $v^*$ n'est pas additive ! Même si les ensembles $A_1, \dots, A_p$ sont disjoints, il est possible que

$$v^*(A_1 \cup \cdots \cup A_p) \neq v^*(A_1) + \cdots + v^*(A_p).$$

On peut par contre établir avec la définition de $v^*$ qu'elle est sous-additive : pour tous les ensembles $A_1, \dots, A_p$ (disjoints ou non), on a

$$v^*(A_1 \cup \cdots \cup A_p) \leq v^*(A_1) + \cdots + v^*(A_p).$$

Elle est même $\sigma$-sous-additive : si $A_k$, $k \in \mathbb{N}$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$,

$$v^* \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{n} v^* \left( A_k \right).$$

Cette propriété est caractéristique des mesures extérieures :

### Mesure extérieure

On appelle *mesure extérieure* sur l'ensemble $X$ toute application

$$v^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et qui soit *$\sigma$-subadditive* : pour tout $A \subset X$ et $A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } A \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k, \text{ alors } \mu^*(A) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(A_k).$$

Alternativement, on peut caractériser une mesure extérieure par trois règles au lieu de deux:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$.
2. Si $A \subset B$, alors $\mu^*(A) \subset \mu^*(B)$.
3. $\mu^* \left( \cup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^* \left( A_k \right)$.

---

Il existe un procédé général permettant de déduire d'une mesure extérieure une application qui soit additive – à condition d'accepter de réduire son domaine de définition ; la fonction qui en résulte est non seulement additive, mais même $\sigma$-additive.

### Ensemble mesurable

Soit $\mu^*$ une mesure extérieure sur l'ensemble $X$ ; un ensemble $A \subset X$ est dit $\mu^*$-*mesurable* (au sens de Carathéodory) si pour tout $B \subset X$, on a

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Une façon alternative de voir les choses : si l'on note $\mu^*|_A$ la trace de $\mu^*$ sur un ensemble $A$ de $X$, définie pour tout sous-ensemble $B$ de $X$ par

$$\mu^*|_A(B) = \mu^*(B \cap A),$$

alors l'ensemble $A$ est $\mu^*$ mesurable si et seulement si

$$\mu^* = \mu^*|_A + \mu^*|_{A^c}.$$

### Tribu

Une *tribu* ou $\sigma$-*algèbre* $\mathcal{A}$ sur un ensemble $X$ est une collection d'ensembles de $X$ contenant l'ensemble vide et stable par passage au complémentaire et à l'union dénombrable :

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$, $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
3. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in \mathcal{A}$, alors $\cup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Un ensemble de $\mathcal{A}$ est dit *mesurable* ; l'ensemble $X$ muni de $\mathcal{A}$ est un *espace mesurable*.

### Mesure

Une *mesure* $\mu$ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une fonction

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et telle que pour toute suite $A_k$, $k \in \mathbb{N}$, d'ensembles de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, on ait

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k);$$

on dit que $\mu$ est $\sigma$-*additive*. L'ensemble $X$ muni de $\mathcal{A}$ et $\mu$ est un *espace mesuré*.

Notons qu'en prenant une suite de la forme $A_0, \ldots, A_n, \varnothing, \varnothing, \ldots$, on montre que pour toute suite finie $A_0, \ldots, A_n$ d'ensembles disjoints de $\mathcal{A}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k);$$

la mesure $\mu$ est donc *additive*. En particulier, si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$, en exploitant ce résultat pour $A$ et $B \setminus A$, qui sont deux ensembles disjoints de $\mathcal{A}$, on établit que $\mu(A) \subset \mu(B)$ ; $\mu$ est donc *croissante*[2].

**Mesure associée à une mesure extérieure**

Soit $X$ un ensemble et $\mu^*$ une mesure extérieure sur $X$. La collection $\mathcal{A}$ des ensembles $\mu^*$-mesurables de $X$ est une tribu sur $X$, et la restriction $\mu$ de $\mu^*$ à $\mathcal{A}$ est une mesure sur $X$.

**Démonstration** Cf. (Hunter 2011, théorème 2.9, pp. 15-17). ■

La spécialisation de ce procédé au cas de la mesure extérieure de Lebesgue, produit la mesure de Lebesgue.

**Mesure de Lebesgue**

La "mesure extérieure de Lebesgue" $v^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ précédemment définie est bien une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$. On appelle *tribu de Lebesgue* et on note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ la collection des ensembles $v^*$-mesurables (au sens de Caratheodory) ; la mesure $v : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ qui lui est associée est appelée *mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n$. La notation "$v$" pour cette mesure est dépourvue d'ambiguité car elle prolonge la fonction $v$ initialement définie sur les pavés compacts.

**Démonstration** Il est évident que $v^*$ satisfait $v^*(\varnothing) = 0$ (car le pavé $[0, 0]^n$ recouvre $\varnothing$ par exemple). Si $A \subset \mathbb{R}^n$ et $A_k \subset \mathbb{R}^n$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des pavés compacts $P_{jk}$ tels que

$$A_k \subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} P_{jk} \;\text{ et }\; \sum_{j=0}^{+\infty} v(P_{jk}) - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq v^*(A_k) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} v(P_{jk}).$$

Comme la famille des $\{P_{jk}\}_{jk}$ recouvre $A$, on a donc

$$v^*(A) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} v(P_{jk}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\left(v^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v^*(A_k)\right) + \varepsilon.$$

2. on trouvera également dans la littérature, le terme de *monotone* pour désigner cette propriété.

Le réel positif $\varepsilon$ étant arbitrairement petit, on en déduit que $v^*$ est bien $\sigma$-subadditive.

Nous renvoyons le lecteur intéressé par la preuve que la mesure de Lebesgue prolonge bien la mesure de volume des pavés compacts à (Hunter 2011, sec. 2.2). $\blacksquare$

On admettra sans preuve le résultat suivant :

#### Mesure de Lebesgue et intégrale de Henstock-Kurzweil

La tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec la tribu des ensembles mesurables définis au moyen de l'intégrale de Henstock-Kurzweil. La mesure de Lebesgue $v : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ vérifie

$$v(A) = \int 1_A(x)\, dx$$

si $1_A$ est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et $v(A) = +\infty$ sinon.

# Mesure et intégrale

#### Tribu engendrée par une collection

Dans un ensemble $X$, on appelle *tribu engendrée* par une collection $\mathcal{B}$ d'ensembles de $X$ la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$ de $X$ contenant $\mathcal{C}$. Autrement dit, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est une tribu de $X$, alors $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{C}$.

**Démonstration de l'existence de la tribu engendrée** Désignons par $\mathfrak{S}$ la (meta-)collection des tribus de $X$ incluant $\mathcal{B}$ (contenant $\mathcal{B}$ comme sous-ensemble).

$$\mathfrak{S} = \{\mathcal{C} \text{ tribu de } X \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{C}\}$$

Elle n'est pas vide : elle contient la collection $\mathcal{P}(X)$ des ensembles de $X$ (qui de toute évidence est un sur-ensemble de $\mathcal{B}$ et une tribu de $X$). Montrons que la plus petite tribu $\sigma(\mathcal{B})$ de $X$ contenant $\mathcal{B}$ est l'intersection de $\mathfrak{S}$

$$\sigma(\mathcal{B}) := \bigcap \mathfrak{S} = \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C},$$

ou encore $\sigma(\mathcal{B}) = \{A \subset X \mid A \in \mathcal{C} \text{ pour tout } \mathcal{C} \in \mathfrak{S}\}$. Il est clair que si $\mathcal{C}$ est une tribu de $X$ contenant $\mathcal{B}$, alors $\mathfrak{S} \subset \mathcal{C}$, car alors $\mathcal{C} \in \mathfrak{S}$. Il nous suffit donc de montrer que $\cap\mathfrak{S}$ est une tribu de $X$ pour conclure ; on vérifiera aisément que comme chaque élément de $\mathfrak{S}$ est une tribu, cette intersection en est également une. $\blacksquare$

### Tribu de Borel

On appelle *tribu de Borel* d'un espace topologique $X$ la plus petite tribu contenant tous les fermés (ou tous les ouverts) de $X$.

### Mesure

Une *mesure (positive)* $\mu$ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une fonction de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$ telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et pour toute collection dénombrable $\{A_k\}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, on ait

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k);$$

on dit que $\mu$ est $\sigma$*-additive*. L'ensemble $X$ muni de $\mathcal{A}$ et $\mu$ est un *espace mesuré*.

### Fonction mesurable

Une fonction $f : X \to Y$ associée aux espaces mesurables $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ est *mesurable* (ou $\mathcal{A}/\mathcal{B}$*-mesurable*) si l'image réciproque $A = f^{-1}(B)$ de tout ensemble $B$ de $\mathcal{B}$ par $f$ appartient à $\mathcal{A}$.

### Conventions

Lorsque l'ensemble d'arrivée $Y$ a une structure topologique, par exemple $Y = \mathbb{R}^m$ ou $Y = [-\infty, +\infty]^m$, on supposera par défaut que la tribu associée est la tribu de Borel. Lorsque l'ensemble de départ est $X = \mathbb{R}^n$ on supposera par défaut que la tribu associée est la tribu de Lebesgue. Lorsque l'on souhaitera munir également $X$ de la tribu de Borel, on parlera de fonctions *borélienne* (tribu de Borel au départ et à l'arrivée). Il existe une bonne raison pour adopter cette convention hybride (avec des tribus d'un type différent au départ et à l'arrivée) par défaut :

### Lebesgue/Borel-mesurable équivaut à H.-K.-mesurable

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est limite simple de fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil – c'est-à-dire "mesurable" au sens de "Calcul Intégral III" – si et seulement si elle est $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-mesurable.

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant :

**Image réciproque et tribus engendrées**

Soit $f : X \to Y$ une application, $\mathcal{B}$ une collection d'ensembles de $Y$ et $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$ sa tribu engendrée dans $Y$. Alors

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\} = \sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}).$$

**Démonstration** Comme $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, on a

$$\{f^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{B}\} \subset \{f^{-1}(A) \,|\, A \in \mathcal{A}\}.$$

Si nous montrons que $\mathcal{C} := \{f^{-1}(A) \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu nous pouvons en déduire que

$$\sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}) \subset \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

L'ensemble vide appartient à $\mathcal{C}$ car $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$. Si $A \in \mathcal{A}$, $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ et $Y \setminus A \in \mathcal{A}$, donc $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{C}$. Finalement, si $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}$, $\cup_k f^{-1}(A_k) = f^{-1}(\cup_k A_k) \in \mathcal{C}$. La collection $\mathcal{C}$ est donc une tribu.

Réciproquement, posons $\mathcal{E} = \sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\})$ et considérons

$$\mathcal{D} = \{A \in Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}.$$

La collection $\mathcal{D}$ est également une tribu. En effet, $f^{-1}(\varnothing) \in \mathcal{E}$, si $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ alors $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ et si $f^{-1}(A_0), f^{-1}(A_1), \dots \in \mathcal{E}$, alors $f^{-1}(\cup_k A_k) = \cup_k f^{-1}(A_k) \in \mathcal{E}$. Par conséquent, comme $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Donc pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$, soit

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{E} = \sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}).$$

$\blacksquare$

**Démonstration "L./B.-mesurable $\Leftrightarrow$ H.-K.-mesurable"** La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est limite simple de fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil si et seulement si elle vérifie le critère de l'image réciproque des sections II et III, c'est-à-dire si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est un ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$-mesurable.

De toute évidence, si $f$ est Lebesgue/Borel-mesurable, ce critère est satisfait. Réciproquement, si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est Lebesgue-mesurable, alors la tribu engendrée par les images réciproques des ouverts de $\mathbb{R}^m$ est incluse dans la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Comme cette tribu est d'après le lemme précédent l'ensemble des images réciproques de la tribu engendrée par les ouverts dans $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire la tribu de Borel dans $\mathbb{R}^m$, l'image réciproque de tout borélien est un ensemble de la tribu de Lebesgue : la fonction $f$ est Lebesgue/Borel-mesurable. $\blacksquare$

**Composition de fonctions mesurables**

Soient $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ et $(Z, \mathcal{C})$ des espaces mesurables. Soit $f : X \to Y$ une fonction $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-mesurable et $g : Y \to X$ une fonction $\mathcal{B}/\mathcal{C}$-mesurable. Alors la composition $g \circ f$ de $f$ et $g$ est $\mathcal{A}/\mathcal{C}$-mesurable.

**Démonstration** Pour tout ensemble $C \in \mathcal{C}$, on a $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ et donc $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. ■

**TODO – Conséquence avec les fcts continues / boréliennes.**

Ex: combinaison linéaire, max, etc.

**TODO**

Un intérêt ici à abstraire / espace métrique ? Bon ...

**Limite simple de fonctions mesurables**

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $Y$ un espace métrique, muni de la tribu de Borel $\mathcal{B}(Y)$. Si les fonctions $f_k : X \to Y$, $k \in \mathbb{N}$, sont mesurables et convergent simplement vers $f$, alors $f$ est mesurable.

**Démonstration** Par le lemme liant image réciproque et tribus engendrées, il suffit de prouver que l'image réciproque par $f$ de tout ouvert $U$ de $Y$ appartient à $\mathcal{A}$. Or $f(x) \in U$ si et seulement si $f_k(x) \in U$ pour $k$ assez grand, ce qui se traduit par la formule

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcap_{k=j}^{+\infty} f_k^{-1}(U)$$

qui établit que $f^{-1}(U)$ est un ensemble mesurable, comme union (dénombrable) d'intersections (dénombrable) d'ensembles mesurables. ■

**TODO**

Voir s'il faut autoriser les fonction simples à prendre la valeur $+\infty$ ... et se tenir ensuite à la même convention partout.

**Fonction étagée**

On appelle *fonction étagée* (ou *fonction simple*) toute fonction $f : X \to Y$ telle que l'image réciproque de $Y$ par $f$ soit finie (telle que $f$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs).

**Fonction mesurable**

Une fonction $f : X \to [-\infty, +\infty]$ associée aux espaces mesurables $(X, \mathcal{A})$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est *mesurable* si et seulement si $f$ est la limite simple de fonctions étagées $X \to \mathbb{R}$ mesurables.

**TODO – Démonstration** ■

**Fonction étagées mesurables**

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est simple et mesurable si et seulement s'il existe une collection finie d'ensembles mesurables $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{A}$ et de valeurs $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ telles que

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k}.$$

La preuve de ce résultat montre qu'il est possible d'être plus prescriptif si nécessaire sur les ensembles $A_k$ et les valeurs $y_k$ : une fonction est en effet simple et mesurables si et seulement s'il existe une collection finie d'ensembles mesurable **disjoints** $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{A}$ et de valeurs **distinctes et non nulles** $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ telles que

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k}.$$

**Démonstration** Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction simple ; il existe donc des réels $y_0, \dots, y_{n-1}$ tels que $f(X) = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. On a alors

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k} \ \text{ avec } \ A_k = f^{-1}(y_k).$$

Si de plus $f$ est mesurable, les singletons de $\mathbb{R}$ étant (Lebesgue-)mesurables (car fermés), les ensembles $A_k$ sont nécessairement ($\mathcal{A}$-)mesurables.

Réciproquement, si $f$ est de la forme $f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k}$ où les ensembles $A_k$ sont mesurables, il est clair que la fonction $f$ est simple. En considérant les ensembles

– mesurables – $B_k$ définis par $B_0 = A_0$ et $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k$ on obtient une somme $\sum_k w_k 1_{B_k}$ du même type mais basée sur des ensembles disjoints $B_k$. En faisant l'union $C_j$ des $B_k$ qui correspondent à des valeurs $z_j = w_k$ identiques, on peut de plus s'assurer d'avoir une somme $\sum_j z_j 1_{C_j}$ où les valeurs $z_j$ sont distinctes et les $C_j$ sont mesurable. Le cas échéant, si l'un des $z_j$ est nul, on peut omettre le terme correspondant de la somme. Il devient maintenant clair que $f$ est également mesurable : si $A$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, l'image réciproque de $A$ par $f$ est l'union d'une sous-collection des $C_j$ ($C_j$ devant être inclus si et seulement si $z_j \in A$) et si $0 \in A$, de $X \setminus \cup_j C_j$. ■

### Intégrale d'une fonction étagée

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \mapsto [0, +\infty[$ une fonction étagée positive et mesurable. On appelle *intégrale de Lebesgue de $f$ relativement à la mesure $\mu$* la grandeur positive (finie ou infinie)

$$\int f\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \sum_{y \in [0,+\infty[} y \times \mu(f^{-1}(y))),$$

avec la convention que $0 \times (+\infty) = 0$. Si $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{A}$ et $y_0, \dots, y_{n-1} \in [0, +\infty[$, alors cette définition se traduit par

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k} \to \int f\mu = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu(A_k).$$

A noter que dans la somme définissant l'intégrale, si $y$ ne fait pas partie des valeurs prises par $f$, alors $\mu(f^{-1}(y)) = \mu(\varnothing) = 0$. Comme $f$ est supposée simple, cette somme est donc composée d'un nombre fini de termes non nuls. Si l'on veut mettre cela mieux en évidence, on peut remplacer la somme dans l'énoncé ci-dessus par

$$\sum_{y \in f(X)} y \times \mu(f^{-1}(\{y\})),$$

voire

$$\sum_{y \in f(X) \setminus \{0\}} y \times \mu(f^{-1}(\{y\}))$$

ce qui permet de se dispenser de la convention $0 \times (+\infty) = 0$.

### Intégrale d'une fonction positive

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \mapsto [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Soit $\mathcal{F}(f)$ la collection des fonctions étagées positives et mesurables inférieures à

$f$. On appelle *intégrale de Lebesgue de $f$ relativement à la mesure $\mu$* la grandeur positive (finie ou infinie)

$$\int f\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int_X g\mu.$$

#### Intégrale d'une fonction à valeurs réelles

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \mapsto [-\infty, +\infty]$ une fonction mesurable. On dit que la fonction $f$ est *intégrable au sens de Lebesgue relativement à la mesure $\mu$* si elle est mesurable et que les intégrales des fonctions positives $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = -\min(f, 0)$ sont finies. *L'intégrale de Lebesgue de $f$ relativement à la mesure $\mu$* est alors la grandeur réelle (finie)

$$\int f\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \int_X f_+\mu - \int_X f_-\mu.$$

#### Intégrales finies, infinies et indéfinies

Une fonction positive peut avoir une intégrale bien définie – il faut et il suffit qu'elle soit mesurable – sans être pour autant intégrable : c'est le cas si (et seulement si) son intégrale est infinie. Pour les fonctions positives, la formule

$$\int f\mu < +\infty$$

signifera donc à la fois "l'intégrale est bien définie" (mesurable) et "l'intégrale est finie" (c'est-à-dire : la fonction est intégrable). Pour les fonctions signées par contre, il est nécessaire d'être plus strict et l'intégrale n'est définie que pour les fonctions intégrables. En effet, même si on peut définir

$$\int f_+\mu \;\text{ et }\; \int f_-\mu$$

dès que $f$ est mesurable, il est possible que ce deux intégrales soit égales à $+\infty$ ; il n'y a alors pas de façon "raisonnable" de définir la différence des deux grandeurs[3].

#### Une intégrale absolue

On remarquera que l'essentiel de la complexité de l'intégrale de Lebesgue est encapsulée dans l'intégrale des fonctions positives ; la définition (et les propriétés)

3. sauf à introduire un nouveau nombre "indéfini" $\perp$, absorbant pour l'addition, tel que $\perp = +\infty - \infty$ (le NaN ou *not-a-number* des numériciens est un concept très proche). Mais à ce stade nous n'allons pas explorer cette piste.

de l'intégrale de fonctions signées s'en déduisent facilement. En particulier, comme la valeur absolue d'une fonction vérifie $|f| = f_+ + f_-$, on constate que si $f$ est intégrable, alors $|f|$ également ; par construction, l'intégrale de Lebesgue est absolue, contrairement à l'intégrale de Henstock-Kurzweil sur $\mathbb{R}^n$. On a le résultat plus précis suivant, que l'on admettra :

#### Intégrale de Lebesgue et de Henstock-Kurzweil

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La fonction $f$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue $v$ si et seulement si $f$ est absolument intégrable ($f$ et $|f|$ sont intégrable) pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil. Dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

## Propriétés de l'intégrale

On mettra en avant dans cette section sur les propriétés de l'intégrale de fonctions positives ; les propriétés correspondantes de l'intégrale de fonctions signées s'en déduisent simplement.

#### Linéarité

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'intégrale par rapport à $\mu$ de fonctions positives (étendues) est homogène et additive : si $\lambda \in [0, +\infty[$ et $f, g : X \to [0, +\infty]$ sont deux applications $\mu$-mesurables,

$$\int (\lambda f)\mu = \lambda \int f\mu \quad \text{et} \quad \int (f+g)\mu = \int f\mu + \int g\mu.$$

**Démonstration** La preuve de l'homogénéité est immédiate si $\lambda = 0$ ; dans le cas contraire, l'application

$$h \in \mathcal{F}(f) \mapsto \lambda h \in \mathcal{F}(\lambda f)$$

qui associe à une application $h$ mesurable, étagée et inférieure à $f$ l'application $\lambda h$ qui est mesurable, étagée et inférieure à $\lambda f$ est bijective. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int (\lambda f)\mu &= \sup_{h \in \mathcal{F}(\lambda f)} \sum_{y \in h(X)} y \times \mu(g^{-1}(y)) \\
&= \sup_{k \in \mathcal{F}(f)} \sum_{y \in (\lambda k)(X)} y \times \mu((\lambda k)^{-1}(y)) \\
&= \sup_{k \in \mathcal{F}(f)} \sum_{z \in k(X)} (\lambda z) \times \mu((\lambda k)^{-1}(\lambda z)) \\
&= \lambda \sup_{k \in \mathcal{F}(f)} \sum_{z \in k(X)} z \times \mu(k^{-1}(z)) \\
&= \lambda \int f\mu.
\end{aligned}$$

L'application

$$(h, k) \in \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g) \mapsto h + k \in \mathcal{F}(f + g)$$

est également bien définie mais il n'est pas immédiat qu'elle soit bijective. Mais la définition alternative à l'intégrale d'une fonction positive nous fournit des suites croissantes de fonction positives, mesurables et étagées $f_k$ et $g_k$, convergeant respectivement vers $f$ et $g$. Pour ces suites,

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k\mu = \int f\mu \ \text{ et } \ \lim_{k \to +\infty} \int g_k\mu = \int g\mu.$$

La suite $h_k = f_k + g_k$ est croissante, composée de fonctions positives étagées et mesurable ; elle converge simplement vers $f + g$, par conséquent, par le théorème de convergence monotone, on a

$$\int (f + g)\mu = \lim_{k \to +\infty} \int (f_k + g_k)\mu.$$

On pourra aisément se convaincre que l'intégrale limitée aux fonctions positives étagées et mesurable est additive ; par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int (f + g)\mu &= \lim_{k \to +\infty} \int f_k\mu + \int g_k\mu \\
&= \lim_{k \to +\infty} \int f_k\mu + \lim_{k \to +\infty} \int g_k\mu \\
&= \int f\mu + \int g\mu.
\end{aligned}$$

■

**Positivité et nullité**

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. L'intégrale de $f$ par rapport à $\mu$ est positive ; elle est nulle si et seulement si $f$ est nulle $\mu$-presque partout :

$$\int f\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = 0.$$

**Démonstration** Si $f$ est nulle presque partout, comme pour toute fonction $g$ positive, mesurable et étagée inférieure à $f$ et tout $y \in g(X)$, soit $y = 0$, soit

$$g^{-1}(y) \subset f^{-1}(]0, +\infty]),$$

et donc

$$\mu(g^{-1}(y)) \leq \mu(f^{-1}(]0, +\infty])) = 0,$$

l'intégrale de $g$ par rapport à $\mu$ vérifie

$$\int g\mu = \sum_{y \in g(X)} y \times \mu(g^{-1}(y)) = 0.$$

Par conséquent,

$$\int f\mu = \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g\mu = 0.$$

Réciproquement, si la fonction $f$ n'est pas nulle $\mu$-presque partout, c'est-à-dire si $\mu(f^{-1}(]0, +\infty[)) \neq 0$, alors il existe nécessairement [4] un $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu(f^{-1}(\left]2^{-n}, +\infty\right[)) > 0.$$

Notons $A_n = f^{-1}(]2^{-n}, +\infty[)$ ; c'est un ensemble mesurable de mesure positive. La fonction $2^{-n}1_{A_n}$ est positive, étagée, mesurable et inférieure à $f$. On a donc

$$0 < 2^{-n}\mu(A_n) = \int 2^{-n}1_{A_n}\mu \leq 2^{-n} \int f\mu.$$

L'intégrale de $f$ par rapport $\mu$ est donc strictement positive. ■

**TODO :**

rk expliquer ici shift justifié entre négligeable et ce qui est exploité, car mesurable + inclus dans mesurable de mesure nulle est équivalent à être de mesure nulle.

**TODO – Démonstration** ■

4. En effet, les ensembles $f^{-1}\left(\left]2^{-n}, +\infty\right[\right)$ forment une suite croissante d'ensembles mesurables dont l'union est $f^{-1}(]0, +\infty[)$. Par $\sigma$-additivité de la mesure, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\left(f^{-1}\left(\left]2^{-n}, +\infty\right[\right)\right) = \mu\left(f^{-1}(]0, +\infty[)\right).$$

**TODO**

exo caractérisation “nulle pp” avec une mesure qui ne soit pas Lebesgue (par exemple, la mesure de comptage). Fil rouge sur ce thème ? (car fct mesurable, intégrale, ensembles négligeable, etc.? ) Faire la même chose avec le dirac en 0 ?

**TODO**

Voir ce que Tao liste dans les pptés élémentaires (par exemple, $\int f\mu = 0$ et $f \geq 0$ implique $f = 0$ $\mu$-pp) p. 100

**Théorème de convergence monotone**

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_k : X \to [0, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$, une suite croissante de fonctions mesurables et positives ; pour tout $x \in X$,

$$0 \leq f_0(x) \leq \cdots \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq \cdots$$

La limite simple $f : X \to [0, +\infty]$ des $f_k$, telle que pour tout $x \in X$,

$$f_k(x) \to f(x) \text{ quand } k \to +\infty,$$

est mesurable et

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k(x)\, \mu(dx) = \int f(x)\, \mu(dx).$$

**Démonstration** La fonction $f$ est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. La positivité de l'intégrale entraîne

$$\int f_0\mu \leq \cdots \leq \int f_k\mu \leq \ldots \int f_k\mu \leq \int f\mu.$$

et donc

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k\mu \leq \int f\mu.$$

Soit $g : X \to [0, +\infty[$ une fonction étagée mesurable, donc de la forme

$$g(x) = \sum_{j=0}^{p} c_j 1_{E_j}$$

avec $c_k \in [0, +\infty[$ et $E_k$ mesurable. Soit $t \in [0, 1[$. Comme la suite des $f_k$ est croissante et converge simplement vers $f$, les ensembles $A_k = \{x \in X \mid f_k(x) \geq tg(x)\}$ vérifient

$$A_0 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = X.$$

Les $f_k$ et $g$ étant mesurables, les ensembles $A_k$ sont mesurables. On a

$$\int f_k \mu \geq \int g 1_{A_k} = t \sum_{j=0}^{p} c_k \mu(A_k \cap E_j).$$

et comme $\cup_{k=0}^{+\infty} A_k \cap E_j = E_j$, par $\sigma$-additivité de $\mu$,

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu \geq t \lim_{k \to +\infty} \sum_{j=0}^{p} c_k \mu(A_k \cap E_j) = t \left( \sum_{j=0}^{p} c_k \mu(E_j) \right) = t \int g \mu.$$

Cette inégalité étant valable pour tout $t \in [0, 1[$ et pour toute fonction positive étagée et mesurable $g$, on en déduit

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu \geq \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g \mu = \int f \mu.$$

■

Le théorème de convergence monotone fournit une alternative concrète à la construction initiale de l'intégrale.

### Intégrale d'une fonction positive II

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \mapsto [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Il existe une suite croissante de fonctions $f_k$ étagées positives et mesurables, convergeant simplement vers $f$ ; pour toute suite de ce type,

$$\int f(x) \mu(dx) = \lim_{k \to +\infty} \int f_k(x) \mu(dx).$$

**Démonstration** Soit $\varepsilon_k \geq 0$ une suite de valeurs telles que

$$\lim_{k \to +\infty} \varepsilon_k = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k = +\infty.$$

La suite des fonctions $f_k$ définies par $f_0 = 0$, puis

$$f_{k+1} = f_k + \varepsilon_k 1_{E_k} \text{ où } E_k = \{x \in X \mid f(x) \geq f_k(x) + \varepsilon_k\}$$

est croissante, et composée de fonctions étagées positives et mesurables. Sa limite simple est la fonction $f$. Par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu = \int f \mu$$

pour toute suite de ce type. ■

**Théorème de convergence dominée**

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_k : X \to [-\infty, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions mesurables, dominées par la fonction intégrable $g : X \to [-\infty, +\infty]$ c'est-à-dire telles que pour tout tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$,

$$|f_k(x)| \leq g(x) \;\text{ et }\; \int g(x)\, \mu(dx) < +\infty.$$

Si la suite des $f_k$ à une limite simple $f : X \to [0, +\infty]$ c'est-à-dire si pour tout $x \in X$,

$$f_k(x) \to f(x) \text{ quand } k \to +\infty,$$

alors

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k(x)\, \mu(dx) = \int f(x)\, \mu(dx).$$

**TODO – Démonstration** ■

# Produit de mesures

**Tribu produit**

Soit $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle *tribu produit* de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et l'on note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la tribu sur le produit cartésien $X \times Y$ engendrée par les ensembles de la forme $A \times B$ où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\left(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\; B \in \mathcal{B}\}\right).$$

**Mesure produit**

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espace mesurés. On appelle *mesure produit* de $\mu$ et $\nu$ et l'on note $\mu \otimes \nu$ la fonction définie sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ par

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)\nu(B_k) \;\middle|\; A_k \in \mathcal{A},\; B_k \in \mathcal{B},\, C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \times B_k \right\}$$

**TODO – Démonstration : la "mesure produit" est une mesure**

- introduire $(\mu \otimes \nu)^*(C)$ pour tout $C$, montrer qu'on a affaire à une mesure extérieure.
- montrer que tout ensemble de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et $(\mu \otimes \nu)^*$-mesurable (suffit de montrer que $A \times B$ est $(\mu \otimes \nu)^*$-mesurable).

■

**Intégrale dans un espace produit**

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espace mesurés. Pour toute fonction $\mu \otimes \nu$-mesurable $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ ou toute fonction intégrable $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, on notera

$$\int f(x, y)\mu(dx)\nu(dy) := \int f(\mu \otimes \nu).$$

**TODO – Mesure $\sigma$-finie (plus tôt ? Bof.)**

**TODO – remark**

Gérer la subtilité que la première intégrale est définie uniquement presque partout, ce qui suffit à montrer que la seconde est définie (à détailler aussi en amont).

**Théorème de Fubini**

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés $\sigma$-finis. Une fonction mesurable $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement l'intégrale itérée

$$\int_Y \left( \int_X |f(x, y)| \mu(dx) \right) \nu(dy)$$

est finie. Dans ce cas,

$$\int_{X \times Y} f\,(\mu \otimes \nu) = \int_{X \times Y} f(x, y)\mu(dx)\nu(dy) = \int_Y \left( \int_X |f(x, y)| \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

**TODO – Complétion**

Etudier `https://www.math.fsu.edu/~roberlin/maa5616.f15/homework9sln.pdf`

Aussi, `https://terrytao.wordpress.com/2010/10/30/245a-notes-6-outer-measures-pre-measures-and-product-measures/`

**TODO – remarque**

remarque évidente sur l'autre intégrale itérée.

**Démonstration** ■

# Exercices

## Anagrame

Quel est l'anagrame de "Banach-Tarski" ? **(?)**

## Approximation par des ensembles mesurables

Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

**Question 1** Montrer qu'il existe un ensemble $v^*$-mesurable $B$ contenant $A$ et tel que $v^*(A) = v^*(B)$. **(?)**

**Question 2** A quelle condition portant sur $v^*(B \setminus A)$ l'ensemble $A$ est-il $v^*$-mesurable ? **(?)**

## Mesure intérieure

Soit $A$ un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ et $P$ un pavé compact de $\mathbb{R}^n$ contenant $A$. On appelle *mesure intérieure de* $A$ la grandeur

$$v_*(A) = v^*(P) - v^*(P \setminus A).$$

**Question 1** Montrer que la définition de $v_*(A)$ ne dépend pas du choix du pavé $P$. **(?)**

**Question 2** Montrer que $v_*(A) \leq v^*(A)$, avec égalité si $A$ est $v^*$-mesurable. **(?)**

**Question 3** Montrer la réciproque de la question précédente : si $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné et $v_*(A) = v^*(A)$, alors $A$ est $v^*$-mesurable. **(?)**

## Mesure image

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $h : X \to Y$ une application. On définit la collection

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y \,|\, h^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

et la fonction $\mu \circ h^{-1} : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ par

$$\mu \circ h^{-1}(B) = \mu(h^{-1}(B)).$$

**Question 1** Montrer que $\mathcal{B}$ est une tribu. **(?)**

**Question 2** Montrer que $\mu \circ h^{-1}$ est une mesure sur $\mathcal{B}$ ; on l'appelle la *mesure image de $\mu$ par $h$.* **(?)**

**Question 3** Montrer que la fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ est $\mu \circ h^{-1}$-intégrable si et seulement si $f \circ h$ est $\mu$-intégrable et qu'alors,

$$\int_Y f \,(\mu \circ h^{-1})(dx) = \int_X (f \circ h)\mu(dx).$$

**(?)**

## Tribu engendrée

Une collection $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de $X$ est une *algèbre (d'ensembles)* si elle contient $\varnothing$ et est stable par complémentation et par union finie.

**Question 0** Montrer que pour toute collection d'ensembles de $X$ il existe une plus petite algèbre qui la contient (au sens de l'inclusion) : c'est *l'algèbre engendrée* par cette collection. **(?)**

**Question 1** Déterminer l'algèbre engendrée sur $\mathbb{R}$ par la collection

$$\{[a, b[ \ | \ -\infty < a \leq b < +\infty\}$$

**(?)**

**Question 2** Déterminer la tribu engendrée (ou $\sigma$-algèbre) sur $\mathbb{R}$ par la même collection. **(?)**

## Complétion d'une mesure

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note $A \Delta B$ la différence symétrique de deux sous-ensembles $A$ et $B$ de $X$ l'ensemble, définie par

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

**Question 1** Caractériser au moyen de la différence symétrique $\Delta$ la tribu – notée $\overline{\mathcal{A}}$ – engendrée par l'union entre $\mathcal{A}$ et la collection $\mathcal{N}$ des ensembles négligeables pour $\mu$ :

$$\mathcal{N} = \{N \subset X \mid \text{il existe } A \in \mathcal{A} \text{ tel que } N \subset A \text{ et } \mu(A) = 0.\}.$$

**(?)**

**Question 2** Montrer que la mesure $\mu$ peut être étendue d'une façon unique en une mesure $\overline{\mu}$ définie sur $\overline{\mathcal{A}}$. **(?)**

## TODO – Fonctions mesurables

(pour des mesures "exotiques" ... mesure de comptage, densité uniforme, sur $[0, 1]$, mesure de dirac en 0 ?)

## TODO – Mesures de Hausdorff

Que faire ? Définir le volume, la surface et la longueur dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'on a affaire à des mesures extérieures ?

Travailler sur une mesure de Hausdorff "rectangulaire" plutôt que sur la "vraie" ?

Ou mesure de Hausdorff de dimension 1/2 dans $\mathbb{R}$, telle que présentée dans `https://terrytao.wordpress.com/2009/05/19/245c-notes-5-hausdorff-dimension-optional/` ?

## TODO – Extension

Tribu générée à partir d'un anneau (e.g. ens. des intervalles $[a, b[$), extension d'une prémesure ? Problématique de non-unicité ? Unicité sous caractère $\sigma$-fini ? cf `https://mpaldridge.github.io/teaching/ma40042-notes-06.pdf`

## TODO – Mesure produit

#### Question 1

Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

#### Question 2

Est-ce que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ?

## TODO – Intégrale itérée

Exemple classique (e.g. `https://en.wikipedia.org/wiki/Fubini's_theorem#Failure_of_Fubini's_theorem_for_non-integrable_functions`) de calcul et comparaison de

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \right) dx$$

et

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \right) dy.$$

#### TODO

check / version conditionnellement continue de Fubini. Pourquoi ça ne marche pas ?

# Solutions

## Anagrame

"Banach-Tarski Banach-Tarski".

## Approximation par des ensembles mesurables

**Question 1** Par définition de $v^*(A)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une collection dénombrable de pavés $P_k^j$ tels que

$$v^*(A) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v(P_k^j) \leq v^*(A) + 2^{-j}.$$

Les ensembles $B_j = \cup_k P_k^j$ sont $v^*$-mesurables comme unions dénombrables d'ensembles mesurables. De plus, comme $A \subset B_j$, et par $\sigma$-subadditivité de $v^*$

$$v^*(A) \leq v^*(B_j) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v^*(P_k^j) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v(P_k^j) \leq v^*(A) + 2^{-j}.$$

L'intersection $B = \cap_j B_j$ est un ensemble mesurable qui recouvre $A$ et est contenu dans chaque $B_j$ ; par conséquent pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$v^*(A) \leq v(B) \leq v(B_j) \leq v^*(A) + 2^{-j}.$$

On en déduit donc que $A \subset B$ et $v^*(A) = v^*(B)$ avec $B$ mesurable.

**Question 2** Notons au préalable que si $v^*(A) = +\infty$, alors $A$ est automatiquement mesurable. Dans le cas contraire ($v^*(A) < +\infty$) l'ensemble $A$ est $v^*$-mesurable si et seulement si $v^*(B \setminus A) = 0$. En effet, si $A$ est $v^*$-mesurable et de mesure finie, comme $A \subset B$, on a

$$v^*(B) = v^*(A \cap B) + v^*(A^c \cap B) = v^*(A) + v^*(B \setminus A) = v^*(B) + v^*(B \setminus A).$$

Comme la mesure $v^*(A)$ est finie, $v^*(B \setminus A) = 0$. Réciproquement, si $v^*(B \setminus A) = 0$, alors $B \setminus A$ (et donc $A$) est mesurable. En effet, pour tout ensemble $C$ de $\mathbb{R}^n$, on a d'une part

$$v^*(C) \leq v^*((B \setminus A) \cap C) + v^*((B \setminus A)^c \cap C)$$

par subbadditivité de $v^*$. D'autre part, comme $(B \setminus A) \cap C \subset B \setminus A$, $v^*((B \setminus A) \cap C) \leq v^*(B \setminus A) = 0$. Par ailleurs, $C \supset (B \setminus A)^c \cap C$, donc

$$v^*(C) \geq v^*((B \setminus A)^c \cap C) = v^*((B \setminus A) \cap C) + v^*((B \setminus A)^c \cap C).$$

On a donc l'égalité $v^*(C) = v^*((B \setminus A) \cap C) + v^*((B \setminus A)^c \cap C)$ ; l'ensemble $B \setminus A$ est donc mesurable, ainsi que $A = B \setminus (B \setminus A)$.

## Mesure intérieure

**Question 1** Pour montrer que la définition de $v_*(A)$ ne dépend pas du choix du pavé $P$ contenant $A$, il suffit de prouver qu'on peut remplacer $P$ par un pavé compact $P'$ contenant $P$ sans changer la valeur de $v_*(A)$ (pour toute paire de pavés compacts on peut en effet trouver un pavé compact les contenant).

Comme les pavés compacts $P$ et $P'$ sont mesurables (au sens de Carathéodory, pour la mesure extérieure $v^*$), l'ensemble $P' \setminus P$ l'est également ; on a donc

$$v^*(P') = v^*(P' \setminus P) + v^*(P)$$

et
$$v^*(P' \setminus A) = v^*(P' \setminus P) + v^*(P \setminus A),$$
ce qui établit
$$v^*(P') - v*(P' \setminus A) = v^*(P) - v^*(P \setminus A).$$

**Question 2** La fonction $v^*$ étant subadditive, on a
$$v^*(P) \leq v^*(A) + v^*(P \setminus A)$$
et donc $v_*(A) \leq v^*(A)$. Si $A$ est mesurable, l'inégalité initiale devient une égalité et donc $v_*(A) = v^*(A)$.

**Question 3** Montrons que la réciproque est également vraie. Soit $A$ un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $v_*(A) = v^*(A)$, et soit $B$ un ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. Nous cherchons à établir que $v^*(B) = v^*(A \cap B) + v^*(A^c \cap B)$. Remarquons tout d'abord que si le pavé compact $P$ – qui est mesurable – contient $A$, on a
$$v^*(B) = v^*(P \cap B) + v^*(P^c \cap B) \;;$$
si nous réussissons à établir que
$$v^*(P \cap B) = v^*(A \cap (P \cap B)) + v^*(A^c \cap (P \cap B)),$$
on pourra alors conclure que
$$\begin{aligned} v^*(B) &= v^*(P \cap B) + v^*(P^c \cap B) \\ &= v^*(A \cap (P \cap B)) + v^*(A^c \cap (P \cap B)) + v^*(P^c \cap B) \\ &= v^*(A \cap B) + v^*(P \cap (A^c \cap B)) + v^*(P^c \cap (A^c \cap B)) \\ &= v^*(A \cap B) + v^*(A^c \cap B). \end{aligned}$$
Autrement dit, il nous suffit d'établir le résultat cherché quand $B$ est un ensemble de $\mathbb{R}^n$ contenu dans le pavé compact $P$.

Pour cela, nous exploitons les résultats de l'exercice "Approximation par des ensembles mesurables". A l'ensemble $A$ on peut associer un sur-ensemble $v^*$-mesurable $B$ tel que $v^*(A) = v^*(B)$ ; quitte à remplacer $B$ par $P \cap B$, on peut également supposer que $B \subset P$. On a
$$v^*(P) = v^*(A) + v^*(P \setminus A) = v^*(B) + v^*(P \setminus B)$$
et donc $v^*(P \setminus A) = v^*(P \setminus B)$. D'autre part
$$\begin{aligned} v^*(P) &= v^*(B) + v^*(P \setminus B) \\ &= v^*(A) + v^*(B \setminus A) + v^*(P \setminus B) \\ &= v^*(A) + v^*(B \setminus A) + v^*(P \setminus A) \end{aligned}$$
et donc $v^*(B \setminus A) = 0$. Par les résultats de l'exercice "Approximation par des ensembles mesurables", on en déduit que $A$ est mesurable.

## Mesure image

**Question 1** L'ensemble $\mathcal{B}$ est une tribu ; en effet :

- $\varnothing \in \mathcal{A}$ et $\varnothing = h^{-1}(\varnothing)$, donc $\varnothing \in \mathcal{B}$.
- Si $B \in \mathcal{B}$, l'ensemble $A = h^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{A}$. Le complémentaire $Y \setminus B$ de $B$ dans $Y$ vérifie $h^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus h^{-1}(B) = X \setminus A$ et appartient donc à $\mathcal{A}$. L'ensemble $Y \setminus B$ appartient donc à $\mathcal{B}$.
- Si les ensembles $B_k$, $k \in N$ appartiennent à $\mathcal{B}$, comme $h^{-1}(\cup_k B_k) = \cup_k h^{-1}(B_k)$, cet ensemble appartient à $\mathcal{A}$. L'union dénombrable $\cup_k B_k$ appartient donc à $\mathcal{B}$.

**Question 2** Montrons que $\mu \circ h^{-1}$ est une mesure sur $\mathcal{B}$.

- On a $\mu \circ h^{-1}(\varnothing) = \mu(h^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$.
- Si les ensembles $B_k$, $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\mathcal{B}$ et sont disjoints, alors les ensembles $h^{-1}(B_k)$ appartiennent à $\mathcal{A}$, et sont disjoints. Comme $h^{-1}(\cup_k B_k) = \cup_k h^{-1}(B_k)$, on a

$$\begin{aligned}
\mu \circ h^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right) &= \mu\left(h^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_k h^{-1}\left(B_k\right)\right) \\
&= \sum_k \mu\left(h^{-1}\left(B_k\right)\right) \\
&= \sum_k \mu \circ h^{-1}\left(B_k\right)
\end{aligned}$$

**Question 3** Montrons tout d'abord que la fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $f \circ h$ est mesurable. Par définition, $f$ est mesurable si pour tout ensemble borélien $B$ de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(B)$ appartient $\mathcal{B}$, c'est-à-dire si et seulement si

$$h^{-1}(f^{-1}(B)) = (f \circ h)^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

c'est-à-dire si et seulement si $f \circ h$ est mesurable.

Comme $(f \circ h)_+ = f_+ \circ h$ et $(f \circ h)_- = f_- \circ h$, il nous suffit de montrer que pour toute fonction mesurable $f : Y \to [0, +\infty]$, on a

$$\int (f \circ h)\mu = \int f(\mu \circ h^{-1})$$

pour pouvoir conclure que $f : Y \to \mathbb{R}$ est $\mu \circ h^{-1}$-intégrable si et seulement si $f \circ h$ est $\mu$-intégrable et que l'égalité ci-dessus est valable.

Or pour une telle fonction $f$, il existe une suite croissante de fonctions $f_k$ simples, positives et mesurables convergeant simplement vers $f$, et l'on a

$$\int f(\mu \circ h^{-1}) = \lim_{k \to +\infty} \int f_k(\mu \circ h^{-1}).$$

Comme

$$\begin{aligned}\int f_k(\mu \circ h^{-1}) &= \sum_{y \in f_k(Y)} y \times (\mu \circ h^{-1})(f_k^{-1}(\{y\})) \\ &= \sum_{y \in f_k(Y)} y \times \mu(h^{-1}(f_k^{-1}(\{y\})) \\ &= \sum_{y \in f_k(Y)} y \times \mu((f_k \circ h)^{-1}(\{y\}))\end{aligned}$$

si $y \in f_k(Y)$, mais $y \notin f_k(h(X))$, alors $\mu((f_k \circ h)^{-1}(\{y\})) = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int f_k(\mu \circ h^{-1}) &= \sum_{y \in (f_k \circ h)(X)} y \times \mu((f_k \circ h)^{-1}(\{y\})) \\ &= \int (f_k \circ h)\mu.\end{aligned}$$

Les fonctions $f_k \circ h$ sont simples, positives et mesurables, leur suite est croissante et converge simplement vers $f \circ h$. Par le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\int f(\mu \circ h^{-1}) = \int (f \circ h)\mu.$$

## TODO – Tribu engendrée

**TODO – Question 0**

**TODO – Question 1**

**TODO – Question 2**

## Complétion d'une mesure

**Question 1** Nous allons établir que la tribu engendrée par $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ est l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{A \,\Delta\, N \mid A \in \mathcal{A},\, N \in \mathcal{N}\}.$$

Tout d'abord, comme tout $A \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}$ appartiennent à cette tribu engendrée, $A^c$ et $N^c$ également et donc $(A \cap N^c) \cup (A^c \cap N) = A \,\Delta\, N$ également. L'ensemble $\mathcal{B}$ est donc inclus dans la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$. Il suffit donc de montrer qu'il s'agit bien d'une tribu pour pouvoir conclure qu'elle est la tribu engendrée recherchée.

Il est clair que $\varnothing$ appartient à $\mathcal{B}$, comme différence symétrique entre $\varnothing$ et $\varnothing$. Si $B = A \,\Delta\, N$ appartient à $\mathcal{B}$, alors

$$B^c = ((A \cap N^c) \cup (A^c \cap N))^c = (A^c \cup N) \cap (A \cup N^c).$$

Comme $B^c = X \cap B^c = (A \cup A^c) \cap B^c$, par distributivité on a

$$\begin{aligned}
B^c &= (A^c \cap A) \cup (A^c \cap N^c) \cup (N \cap A) \cup (N \cap N^c) \\
&= (A^c \cap N^c) \cup (A \cap N) \\
&= ((A^c) \cap N^c) \cup ((A^c)^c \cap N) \\
&= A^c \,\Delta\, N
\end{aligned}$$

et par conséquent $B^c \in \mathcal{B}$.

Si les $A_k$, $k \in \mathbb{N}$, appartiennent $\mathcal{A}$ et les $N_k$, $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\mathcal{N}$, alors on pourra se convaincre que

$$(\cup_k A_k) \setminus (\cup_k N_k) \subset \cup_k (A_k \,\Delta\, N_k) \subset (\cup_k A_k) \cup (\cup_k N_k),$$

ce qui prouve que

$$\cup_k (A_k \,\Delta\, N_k) = (\cup_k A_k) \,\Delta\, M \;\text{ avec }\; M \subset N := \cup_k N_k.$$

Comme $N_k \subset B_k \in \mathcal{A}$ avec $\mu(B_k) = 0$,

$$N = \cup_k N_k \subset \cup_k B_k \in \mathcal{A},$$

avec $\mu(\cup_k B_k) = 0$ par $\sigma$-additivité de $\mu$. L'ensemble $N$ (et donc l'ensemble $M$) appartient donc à $\mathcal{N}$. Comme $\cup_k A_k \in \mathcal{A}$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est stable par union dénombrable. Cet collection contient l'ensemble vide, est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable ; c'est donc une tribu.

**Question 2** Supposons que $\overline{\mu}$ soit une mesure sur $\overline{\mathcal{A}}$ qui prolonge $\mu$. Alors, nécessairement, pour tout ensemble $N \in \mathcal{N}$, on a $\overline{\mu}(N) = 0$. En effet, il existe un $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$, donc par croissance de $\overline{\mu}$,

$$\overline{\mu}(N) \subset \overline{\mu}(A) = \mu(A) = 0.$$

Soit alors $A \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}$. Les ensembles $N_1 := A \cap N$ et $N_2 = A^c \cap N$ sont inclus dans $N$ et donc appartiennent à $\mathcal{N}$, par conséquent

$$\overline{\mu}(A \,\Delta\, N) = \overline{\mu}((A \setminus N_1) \cup N_2) = \overline{\mu}(A) - \overline{\mu}(N_1) + \overline{\mu}(N_2) = \overline{\mu}(A).$$

Cette équation définit uniquement $\overline{\mu}$ ; il faut toutefois s'assurer que cette définition est cohérente, c'est-à-dire que si $A \,\Delta\, N = B \,\Delta\, M$ où $A, B \in \mathcal{A}$ et $N, M \in \mathcal{N}$, alors $\mu(A) = \mu(B)$. En utilisant l'associativité de $\Delta$, on montre que

$$A \,\Delta\, (N \,\Delta\, M) = (A \,\Delta\, N) \,\Delta\, M = (B \,\Delta\, M) \,\Delta\, M = B \,\Delta\, (M \,\Delta\, M) = B.$$

Par conséquent, $N \,\Delta\, M \in \mathcal{A}$, et comme $N \,\Delta\, M \subset N \cup M$, on en déduit que $\mu(N \,\Delta\, M) = 0$, et donc

$$\mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap (N \,\Delta\, M)) + \mu(A^c \cap (N \,\Delta\, M)) = \mu(A).$$

Il est ensuite nécessaire de prouver que $\overline{\mu}$ est bien une mesure. Soit $A_k \in \mathcal{A}$ et $N_k \in \mathcal{N}$ deux suites d'ensembles tels que les $A_k \,\Delta\, N_k$ soient deux à deux disjoints. Soit $M_k$ un ensemble de $\mathcal{A}$ contenant $N_k$ et tel que $\mu(M_k) = 0$. L'ensemble $B_k := A_k \setminus M_k$ appartient $\mathcal{A}$ et $\mu(B_k) = \mu(A_k)$ ; de plus, comme $B_k \subset A_k \,\Delta\, N_k$, les $B_k$ sont disjoints deux à deux. On a déjà vu à la question précédente que

$$\overline{\mu}(\cup_k A_k \,\Delta\, N_k) = \overline{\mu}((\cup_k A_k) \,\Delta\, N) \;\text{ où }\; N \in \mathcal{N},$$

donc

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(\cup_k A_k \,\Delta\, N_k) &= \mu(\cup_k A_k) = \mu(\cup_k B_k) \\ &= \sum_k \mu(B_k) = \sum_k \mu(A_k) = \sum_k \overline{\mu}(A_k \,\Delta\, N_k).\end{aligned}$$

La fonction $\overline{\mu}$ est donc $\sigma$-additive.

## Réferences

Hunter, John K. 2011. *Measure Theory*. Department of Mathematics, University of California at Davis. `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_theory.html`.