# Calcul Intégral III

STEP, MINES ParisTech*

22 octobre 2019 (`#2f387a0`)

## Table des matières



*Ce document est un des produits du projet `boisgera/CDIS`, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). 

# Intégrales Multiples

## Définitions

Les pavés joueront dans $\mathbb{R}^n$ le rôle dévolu aux intervalles dans $\mathbb{R}$ :

### Pavés

On appelle *pavé* de $[-\infty,+\infty]^n$ tout ensemble $I$ de la forme

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n$$

où les $I_i$ sont des intervalles de $[-\infty,+\infty]$.

### Volume d'un pavé

On appelle *volume* du pavé $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ de $[-\infty, +\infty]^n$ la valeur

$$v(I) = \ell(I_1) \times \cdots \times \ell(I_n) \in [0, +\infty]\,,$$

en adoptant la convention que $0 \times \infty = 0$.

### Longeur, aire, volume

On pourra continuer à appeler cette grandeur *longueur* plutôt que *volume* si l'on travaille dans $\mathbb{R}$ (ou $[-\infty, +\infty]$) ; dans $\mathbb{R}^2$ (ou $[-\infty, +\infty]^2$) il est approprié de la désigner sous le terme d'*aire*. Si l'on souhaite distinguer le cas du volume "classique" dans $\mathbb{R}^3$ (ou $[-\infty, +\infty]^3$) et les autres dimensions, on pourra utiliser le terme d'*hypervolume* comme terme générique et réserver le terme de *volume* au cas tri-dimensionnel.

### Subdivision pointée

Une *subdivision pointée* du pavé fermé $I$ de $[-\infty, +\infty]^n$ est une famille finie

$$\{(t_i, J_i) \mid \; 0 \leq i \leq k-1\}$$

où les $J_i$ sont des pavés fermés de $I$ sans chevauchement – les intersections deux à deux de leurs intérieurs sont vides – qui recouvrent $I$ et tels que $t_i \in J_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

### Somme de Riemman

La somme de Riemann associée à la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où $I$ est un pavé fermé de $[-\infty, +\infty]^n$ et à la subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $I$ est la grandeur

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum f(t) v(J),\ (t, J) \in \mathcal{D},\ v(J) < +\infty.$$

### Jauge

Une jauge $\gamma$ sur un pavé fermé $I$ de $[-\infty, +\infty]^n$ est une fonction qui associe à tout $t \in I$ un pavé ouvert $\gamma(t)$ de $[-\infty, +\infty]^n$ contenant $t$.

### Subdivision pointée subordonnée à une jauge

Une subdivision $\mathcal{D}$ du pavé fermé $I$ de $[-\infty, +\infty]^n$ est *subordonnée à une jauge* $\gamma$ sur $I$ si pour tout $(t, J) \in \mathcal{D}$, $J \subset \gamma(t)$.

**Intégrale dans $\mathbb{R}^n$**

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil)* s'il existe un réel $A$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge $\gamma$ de $[-\infty, +\infty]^n$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[-\infty, +\infty]^n$ subordonnée à $\gamma$, on ait $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$. Le réel $A$ quand il existe est unique ; il est appelé *intégrale de $f$ sur* $\mathbb{R}^n$ et noté

$$\int f \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Comme dans le cas réel, la définition supposerait que $f$ soit a priori définie sur $[-\infty, +\infty]^n$ plutôt que sur $\mathbb{R}^n$ ; mais on peut étendre $f$ pour des arguments à l'infini (dont au moins l'une des composantes est infinie) sans que l'intégrabilité de cette extension ou la valeur de son intégrale ne soient affectés par le choix de ces valeurs.

## Propriétés élémentaires

Nous évoquons rapidement dans cette section la façon dont les propriétés de l'intégrale dans $\mathbb{R}$ se transposent à $\mathbb{R}^n$.

L'intégrale dans $\mathbb{R}^n$ est toujours linéaire et positive ; l'intégrabilité peut être testée par un critère de Cauchy analogue au cas réel. La notion d'ensemble négligeable est similaire au cas réel, à ceci près qu'on utilise des pavés au lieu d'intervalles et le volume au lieu de la longueur ; comme dans le cas réel, des fonctions égales presque partout sont intégrables simultanément et ont la même intégrale.

Un théorème de changement de variable existe, mais il diffère quelque peu du résultat élémentaire déjà traité dans $\mathbb{R}$ (par certains aspects, il est plus général) ; il possède dans sa propre sous-section dans ce chapitre. L'équivalent dans $\mathbb{R}^n$ du théorème fondamental du calcul est le théorème de la divergence [1] auquel une section entière de ce chapitre est consacrée.

Les théorème de convergence (dominée, monotone) et le critère d'intégrabilité dominée se transposent directement. La notion d'ensemble mesurable est inchangée (modulo le remplacement des intervalles compact de $\mathbb{R}$ par les pavés compacts de $\mathbb{R}^n$) ; les trois propriétés élémentaires de la collection des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ sont toujours vérifiées (la collection est une tribu), cette famille contient tous les fermés (et tous les ouverts) et "négligeable" et "(mesurable et) de volume nul" sont toujours synonymes.

Les fonctions mesurables ont la même definition (limite simple de fonctions intégrables) ; le critère de mesurabilité par l'image réciproque est toujours valide.

1. même si cela ne saute pas forcément aux yeux !

L'intégrabilité (et les intégrales) des fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ (ou $[-\infty, +\infty]^n$) sont toujours définies à partir de l'extension de la fonction par zéro. Les fonctions absolument et conditionnellement intégrables sont définies de manière identique.

## Théorème de Fubini

### Théorème de Fubini

Soit $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors la fonction partielle $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x, y)$ est intégrable pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$, la fonction définie presque partout

$$y \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, dx$$

est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

De même, la fonction partielle $y \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x, y)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^m$, la fonction définie presque partout

$$x \in \mathbb{R}^m \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, dy$$

est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

**Démonstration** Se reporter à Swartz (2001). ■

On peut noter que pour appliquer le théorème de Fubini, il faut savoir a priori que $f$ est intégrable, or fréquemment on souhaiterait pouvoir déduire l'intégrabilité de l'examen des intégrales itérées. Le théorème de Fubini peut alors être complété utilement par le théorème de Tonelli :

### Théorème de Tonelli

Soit $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Si pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$ la fonction $x \in \mathbb{R}^n \mapsto |f(x, y)|$ est intégrable et que la fonction définie presque partout

$$y \in \mathbb{R}^m \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)|\, dx$$

est intégrable, alors la fonction $f$ est (absolument) intégrable.

**Démonstration** Se reporter à Swartz (2001). ■

## Changement de variables

### Changement de variables

Soient $D_1$ et $D_2$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $h : D_1 \to D_2$ un $C^1$-difféomorphisme de $D_1$ sur $D_2$ : une fonction continûment différentiable et bijective dont l'inverse $h^{-1} : D_2 \to D_1$ également continûment différentiable. La matrice de Jacobi associée à la différentielle de $h$ étant notée $J_h$, la fonction $f : D_2 \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable si et seulement si la fonction $(f \circ h)|\det J_h| : D_1 \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable et dans ce cas,

$$\int_{D_2} f(y)\, dy = \int_{D_1} f(h(x))|\det J_h(x)|\, dx.$$

**Démonstration** Se reporter à (Swartz 2001, annexe 5). ■

L'absolue intégrabilité – et pas simplement l'intégrabilité – de la fonction est une hypothèse cruciale de ce théorème de changement de variables. On peut en effet exhiber une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui soit intégrable, mais telle que quand $h$ désigne la rotation centrée à l'origine d'angle $\pi/4$, la fonction $f \circ h$ ne soit pas intégrable [2]. Comme dans ce cas on a $|\det J_h| = 1$ sur tout $\mathbb{R}^2$, cela contredit la conclusion du théorème de changement de variables.

La situation est assez similaire à celles des séries réelles. On sait en effet que si la série $\sum_k a_k$ est absolue convergente, un réordonnancement des termes de la série n'a pas d'effet, ni sur la convergence de la série ni sur la valeur de la somme ; pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Par contre, si $\sum_k a_k$ est conditionnellement convergente (c'est-à-dire convergente, mais telle que $\sum_k |a_k|$ soit divergente ; par exemple, $a_k = (-1)^k/(k+1)$), il existe un réordonnancement $\sigma$ tel que $\sum_k a_{\sigma(k)}$ n'ait pas de limite (ni finie ni infinie). Pour toute valeur limite $\ell \in [-\infty, +\infty]$ souhaitée de la somme, on peut aussi construire un réordonnancement $\sigma$ tel que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{\sigma(k)} = \ell.$$

2. cf. (Swartz 2001, ex. 29, p. 98).

# Théorème de la divergence

### Compact à bord régulier

Un sous-ensemble $K$ de $\mathbb{R}^n$ est *un compact à bord* $C^1$ s'il est compact et peut être caractérisé au voisinage de tout point de sa frontière $\partial K$, et après un éventuel changement de repère, comme l'*hypographe* – l'ensemble des points en-dessous du graphe – d'une fonction continûment différentiable. Autrement dit, pour tout point $x_0 \in \partial K$, il existe une application affine inversible $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert $V$ de $x_0$ de la forme $V = T(U \times I)$, où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et une fonction $f : U \to I$ continûment différentiable tels que

$$K \cap V = T\left(\{(y_1, \dots, y_n) \in U \times I \mid y_n \leq f(y_1, \dots, y_{n-1})\}\right).$$

### Changement de repère orthonormé

Il est possible d'imposer dans la définition des compacts à bord $C^1$ que $T$ soit une isométrie directe (qui conserve la distance et l'orientation) ; cela revient à n'autoriser que les changements de repère orthonormés directs. La caractérisation des compacts à bord $C^1$ qui en résulte est inchangée.

### Caractérisation implicite des compacts à bord régulier

Un sous-ensemble compact $K$ de $\mathbb{R}^n$ est un compact à bord $C^1$ si pour tout point $x_0$ de sa frontière $\partial K$ il existe un voisinage ouvert $V$ de $x_0$ et une fonction continûment différentiable $g : V \to \mathbb{R}$ dont la différentielle est non nulle en $x_0$, telle que pour tout point $x$ de $V$, $x$ appartient à $K$ si et seulement si $g(x) \leq 0$.

**Démonstration** Si $K$ est un compact à bord $C^1$, il existe une application affine inversible $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert $V$ de $x_0$ de la forme $V = T(U \times I)$, où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et une fonction $f : U \to I$ continûment différentiable tels que

$$K \cap V = T\left(\{(y_1, \dots, y_n) \in U \times I \mid y_n \leq f(y_1, \dots, y_{n-1})\}\right).$$

Par conséquent, si l'on définit la fonction $g : V \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = y_n - f(y_1, \dots, y_{n-1}) \text{ où } (y_1, \dots, y_n) = T^{-1}(x),$$

on obtient la caractérisation implicite souhaitée. La seule vérification qui n'est pas évidente par construction est le caractère non-nul de la différentielle $dg$ en $x_0$. Si $T(x) = A \cdot x + b$ où $A$ est une application linéaire (nécessairement inversible) et $b \in \mathbb{R}^n$, en posant $\phi(y) = y_n - f(y_1, \dots, y_{n-1})$, on obtient

$$dg(x) = d(\phi \circ T^{-1})(x) = d\phi(T^{-1}(x)) \cdot dT^{-1}(x) = d\phi(T^{-1}(x)) \cdot A^{-1}.$$

Or, $\partial_n \phi(y) = 1$ en tout point $y$ de $U \times I$. L'application $A^{-1}$ étant inversible, il existe un vecteur $h$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $A^{-1} \cdot h = (0, \dots, 0, 1)$ ; pour un tel vecteur on a donc

$$dg(x) \cdot h = d\phi(T^{-1}(x)) \cdot A^{-1} \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \phi(T^{-1}(x))(A^{-1} \cdot h)_i = 1.$$

La différentielle de $g$ est donc bien non-nulle en tout point de $V$ (et donc a fortiori en $x_0$).

Réciproquement, considérons un $x_0 \in \partial K$ et supposons qu'il existe une fonction $g : V \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés de l'énoncé. La différentielle de $g$ étant non nulle en $x_0$, par continuité de l'application $x \mapsto dg(x) \cdot u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, il existe un vecteur de $u$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$dg(x) \cdot u > 0$$

dans un voisinage $V'$ de $x_0$ contenu dans $V$. Soit $T$ une application affine inversible de la forme $T(x) = A \cdot x + b$ telle que $A \cdot e_n = u$. La fonction $g \circ T$ définie sur de $T^{-1}(V')$ satisfait alors

$$\begin{aligned}
\partial_n (g \circ T)(y) &= dg(T(y)) \cdot dT(y) \cdot e_n \\
&= dg(T(y)) \cdot A \cdot e_n \\
&= dg(T(y)) \cdot u > 0.
\end{aligned}$$

L'application du théorème des fonctions implicites fournit un ouvert non vide $U \times I$ inclus dans $T^{-1}(V')$ où $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, ainsi qu'une fonction $f : U \to I$ continûment différentiable telle que dans $U \times I$,

$$g \circ T(y_1, \dots, y_n) = 0 \Leftrightarrow y_n = f(y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Par le théorème fondamental du calcul,

$$\begin{aligned}
g \circ T(y_1, \dots, y_n) &= g \circ T(y_1, \dots, f(y_1, \dots, y_{n-1})) \\
&\quad + \int_{f(y_1, \dots, y_{n-1})}^{y_n} \partial_n (g \circ T)(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \, dt \\
&= \int_{f(y_1, \dots, y_{n-1})}^{y_n} \partial_n (g \circ T)(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \, dt,
\end{aligned}$$

ce qui garantit que dans $T(U \times I)$, $g(x) \leq 0$ – c'est-à-dire $x \in K$ – si et seulement si $x = T(y)$ et $y_n \leq f(y_1, \dots, y_{n-1})$. ■

### Normale extérieure

Une *normale* à un compact à bord $C^1$ $K$ de $\mathbb{R}^n$ en un point $x \in \partial K$ de sa frontière est un vecteur $n(x) \in \mathbb{R}^n$ unitaire (de norme 1) tel que

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \partial K}} \left\langle n(x), \frac{y - x}{\|y - x\|} \right\rangle = 0.$$

Cette normale $n(x)$ est *extérieure* si pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $x + \varepsilon n(x) \notin K$.

On admettra l'unicité de la normale extérieure ainsi définie ; son expression peut être calculée simplement dans le cas d'une représentation implicite ou explicite (comme hypographe) du compact à bord.

**Normale extérieure et caractérisation implicite**

Si $K$ est un compact à bord $C^1$ caractérisé au voisinage de $x_0 \in \partial K$ par l'inégalité $g(x) \leq 0$, où $V$ est un voisinage ouvert de $x$ et $g : V \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable de différentielle non nulle sur $V$, alors la *normale extérieure* de $K$ en $x \in \partial K \cap V$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$n(x) = \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|}.$$

**Démonstration** La fonction $g$ étant différentiable en $x \in \partial K$, on a localement

$$g(y) = g(x) + dg(x) \cdot (y - x) + o(\|y - x\|) = \langle \nabla g(x), y - x \rangle + o(\|y - x\|).$$

Si $y \in \partial K$, $g(y) = 0$, donc

$$\left\langle \nabla g(x), \frac{y - x}{\|y - x\|} \right\rangle = o(1) \to 0 \text{ quand } y \to x.$$

Si $y = x + \varepsilon \nabla g(x)/\|\nabla g(x)\|$, avec $\varepsilon > 0$,

$$g(y) = \langle \nabla g(x), y - x \rangle + o(\|y - x\|) = \varepsilon \|\nabla g(x)\| + o(\varepsilon),$$

et donc $g(y) > 0$ – soit $y \notin K$ – pour $\varepsilon$ suffisamment petit. ■

**Normale extérieure et hypographe**

Si $K$ est un compact à bord $C^1$ caractérisé au voisinage de $x_0 \in \partial K$ comme l'hypographe de la fonction $f : U \to I$ où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors la normale extérieure de $K$ en $x \in \partial K \cap V$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$n(x_1, \dots, x_n) = \frac{(-\partial_1 f(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, -\partial_{n-1} f(x_1, \dots, x_{n-1}), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x_1, \dots, x_{n-1})\|^2}}.$$

**Démonstration** Il suffit de constater qu'on peut associer à l'hypographe de $f$ la description implicite $g(x) \leq 0$ avec

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

puis d'exploiter la caractérisation de la normale dans ce cas. Comme

$$\nabla g(x_1, \ldots, x_n) = (-\partial_1 f(x_1, \ldots, x_{n-1}), \ldots, -\partial_{n-1} f(x_1, \ldots, x_{n-1}), 1)$$

et que par conséquent

$$\|\nabla g(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{1 + \|\nabla f(x_1, \ldots, x_{n-1})\|^2},$$

le résultat s'en déduit. ■

Nous allons maintenant définir l'intégrale de surface d'une fonction continue sur la frontière d'un compact à bord. Pour arriver à nos fins, nous allons tout d'abord définir l'intégrale de surface pour des fonctions continues nulles en dehors d'un voisinage – arbitrairement petit – d'un point du compact. Le résultat suivant de partition de l'unité nous permettra de "recoller" ces contributions à l'intégrale globale.

### Partition de l'unité

Pour toute famille finie d'ouverts $V_i$ de $\mathbb{R}^n$ recouvrant un ensemble compact $K$, il existe une famille $\rho_i : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ de fonctions continûment différentiables dont le *support*

$$\mathrm{supp}(\rho_i) = \overline{\{x \in \mathrm{dom}(\rho_i) \mid \rho_i(x) \neq 0\}}.$$

est compact et inclus dans $V_i$ et telles que

$$\sum_i \rho_i(x) = 1 \text{ pour tout } x \in K.$$

La démonstration est donnée en annexe.

### Intégrale de surface

Soit $\phi : \partial K \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Si $K$ est caractérisé dans un voisinage ouvert $V$ de $x_0 \in \partial K$ comme l'hypographe de la fonction $f : U \to I$ après une transformation $T$ qui soit une isométrie directe, la *contribution de $V = T(U \times I)$ à l'intégrale de surface de $\phi$* est définie par la relation

$$\int_{\partial K \cap V} \phi(x)\sigma(dx) := \int_U \phi(z, f(z))\sqrt{1 + \|\nabla f(z)\|^2}\, dz.$$

Si les $V_i$ sont de tels ouverts consituant un recouvrement fini de $\partial K$ et les $\rho_i$ une partition de l'unité associée, alors *l'intégrale de surface de $\phi$ sur $\partial K$* est définie par

$$\int_{\partial K} \phi(x)\sigma(dx) := \sum_i \int_{\partial K \cap V_i} \rho_i(x)\phi(x)\sigma(dx)$$

On admettra que cette définition est indépendante du choix de la décomposition de $\partial K$.

**Définition**

Soit $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle *divergence* d'une fonction différentiable

$$v : V \to \mathbb{R}^n, \ v = (v_1, \ldots, v_n)$$

la fonction $\operatorname{div} v : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i v_i(x)$$

**Lemme de la divergence**

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ où $U$ est un pavé ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit $v : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^1$ de support compact dans $U \times \mathbb{R}^{n-1}$ (3). L'ensemble $\Omega$ désignant l'hypographe strict de $f$ – soit $\Omega = \{(y, z) \,|\, y \in U, z \in \mathbb{R}, z < f(y)\}$ – et $\Gamma$ le graphe de $f$ – soit $\Gamma = \{(y, f(y)) \,|\, y \in U\}$ – et $n$ la normale extérieure associée, on a la relation

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_\Gamma \langle v(x), n(x)\rangle \ \sigma(dx).$$

**Démonstration** On remarque que si $v = we_i$ où $w : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, comme $\operatorname{div} v = \partial_i w$ et $\langle v(x), n(x)\rangle = w(x)n_i(x)$, le résultat du lemme devient

$$\int_\Omega \partial_i w(x)\, dx = \int_\Gamma w(x) n_i(x)\, \sigma(dx).$$

Réciproquement, que si cette relation est valable pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la conclusion du lemme de Stokes s'en déduit facilement. Démontrer la relation ci-dessus suffit donc à prouver le lemme.

La transformation $h : U \times \left]-\infty, 0\right[ \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

est une application de classe $C^1$. Par construction,

$$h(U \times \left]-\infty, 0\right[) = \Omega$$

et admet une inverse, donnée par

$$h^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - f(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

3. La fonction $v$ étant continue et définie dans un ouvert ($U \times \mathbb{R}^{n-1}$), son support est compact dans cet ensemble si et seulement si l'ensemble $\{x \,|\, v(x) \neq 0\}$ est borné et sa distance au complémentaire de $U \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ est strictement positive.

qui est également de classe $C^1$. La matrice jacobienne associée à $h$ vaut

$$J_h(x) = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline J_f(x) & 1 \end{array}\right]$$

et par conséquent son déterminant jacobien satisfait

$$\det J_h(x) = 1.$$

Par conséquent, le changement de variable associé à $h$ fournit

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i w(x)\, dx &= \int_{h(U\times]-\infty,0[)} \partial_i w(x)\, dx \\ &= \int_{U\times]-\infty,0[} \partial_i w(h(x))|\det J_h(x)|\, dx \\ &= \int_{U\times]-\infty,0[} \partial_i w(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \dots, x_{n-1}))\, dx\end{aligned}$$

ou encore, en notant $\pi(x) = (x_1, \dots, x_{n-1})$,

$$\int_\Omega \partial_i w(x)\, dx = \int_{U\times]-\infty,0[} \partial_i w(\pi(x), x_n + f(\pi(x)))\, dx.$$

Nous allons évaluer cette expression en comparant l'intégrande dans le membre de droite de cette équation avec la dérivée partielle de $w(\pi(x), x_n + f(\pi(x)))$ par rapport à $x_i$.

Si $i \in \{1, \dots, n-1\}$, la règle de dérivation en chaîne fournit

$$\begin{aligned}\partial_i \left(w(\pi(x), x_n + f(\pi(x))\right) = \partial_i w(\pi(x), x_n + f(\pi(x)) \\ + \partial_n w(\pi(x), x_n + f(\pi(x)) \times \partial_i f(\pi(x))\end{aligned}$$

et dans le cas contraire,

$$\partial_n \left(w(\pi(x), x_n + f(\pi(x))\right) = \partial_n w(\pi(x), x_n + f(\pi(x))).$$

Si $U = I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$ et si pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $I_i = ]a_i, b_i[$, alors par le théorème fondamental du calcul,

$$\begin{aligned}\int_{I_i} \partial_i (w(\pi(x), x_n + f(\pi(x)))\, dx_i &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a_i+\varepsilon}^{b_i-\varepsilon} \partial_i (w(\pi(x), x_n + f(\pi(x)))\, dx_i \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[w(\pi(x), x_n + f(\pi(x)))\right]_{a_i+\varepsilon}^{b_i-\varepsilon}\end{aligned}$$

Comme $w$ est de support compact, pour toute valeur de $x_1$, $x_2$, …, $x_{i-1}$, $x_{i+1}$, …, $x_n$, la fonction partielle

$$x_i \in ]a_i, b_i[ \to w(\pi(x), x_n + f(\pi(x)))$$

est également de support compact. Par conséquent,

$$S_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots) := \int_{I_i} \partial_i(w(\pi(x),x_n+f(\pi(x))))\,dx_i = 0.$$

Par le théorème de Fubini, on peut alors déduire que

$$\int_{U\times]-\infty,0[} \partial_i(w(\pi(x),x_n+f(\pi(x))))\,dx =$$
$$\int_{I_1\times\dots I_{i-1}\times I_{i+1}\times\dots\times]-\infty,0[} S_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots)\,d(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots) = 0.$$

Si $i\in\{1,\dots,n-1\}$, on a donc

$$\int_\Omega \partial_i w(x)\,dx = \int_{U\times]-\infty,0[} \partial_n w(\pi(x),x_n+f(\pi(x))\times(-\partial_i f(\pi(x)))\,dx$$

et pour $i=n$,

$$\int_\Omega \partial_n w(x)\,dx = \int_{U\times]-\infty,0[} \partial_n w(\pi(x),x_n+f(\pi(x))\,dx.$$

Dans ce second cas, en raison de la compacité du support $w$, le théorème fondamental du calcul fournit

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \partial_n w(\pi(x),x_n+f(\pi(x))\,dx_n &= \lim_{z\to-\infty}\left[x_n\mapsto w(\pi(x),x_n+f(\pi(x)))\right]_z^0\\ &= w(\pi(x),f(\pi(x)),\end{aligned}$$

et donc par le théorème de Fubini,

$$\int_\Omega \partial_n w(x)\,dx = \int_U w(y,f(y))\,dy.$$

Quand $i\in\{1,\dots,n-1\}$, un calcul analogue fournit

$$\int_\Omega \partial_n w(x)\,dx = \int_U w(y,f(y))\times(-\partial_i f(y))\,dy.$$

Quel que soit la valeur de $i\in\{1,\dots,n\}$, comme la normale extérieure $n$ est donnée par

$$n(y,f(y)) = \frac{(-\partial_1 f(y),\dots,-\partial_{n-1}f(y),1)}{\sqrt{1+\|\nabla f(y)\|^2}},$$

on constate que l'on a

$$\int_\Omega \partial_i w(x)\,dx = \int_U w(y,f(y))n_i(y,f(y))\sqrt{1+\|\nabla f(y)\|^2}\,dy,$$

et par conséquent

$$\int_\Omega \partial_i w(x)\,dx = \int_\Gamma w(x)n_i(x)\,d\sigma(x).$$

■

**Théorème de la divergence**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $K$ un ensemble compact $K$ à bord $C^1$ inclus dans $U$. Pour toute fonction $v : U \to \mathbb{R}^n$ continûment différentiable,

$$\int_K \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_{\partial K} \langle v(x), n(x)\rangle \ \sigma(dx).$$

Pour toute fonction $f : U \to \mathbb{R}$ continûment différentiable et tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\int_K \partial_i f(x)\, dx = \int_{\partial K} n_i(x) f(x)\, \sigma(dx).$$

**Démonstration** Comme dans la démonstration du lemme de la divergence, il suffit d'établir une version du résultat, par exemple la première, et la seconde version s'en déduit.

Pour tout $x \in \partial K$, il existe un pavé ouvert borné $U_x$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, un intervalle ouvert $I_x$ de $\mathbb{R}$, une isométrie affine directe $T_x$ et une fonction continûment différentiable $f_x : U_x \to I_x$ telle que $T_x(U_x \times I_x)$ soit un voisinage de $x$ et $K \cap T_x(U_x \times I_x)$ soit l'image de l'hypographe de $f_x$ par $T_x$. Si $x \in \mathring{K}$, il existe un pavé ouvert borné $U_x$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ et un intervalle ouvert $I_x$ de $\mathbb{R}$ tels que $U_x \times I_x \subset \mathring{K}$ ; on prendra ici $T_x = I$ (l'identité) et pour $f_x : U_x \to \mathbb{R}$ une fonction constante dont la valeur soit un majorant de $I_x$.

Par compacité, $K$ peut être recouvert par un nombre fini des ensembles $V_x := T_x(U_x \times I_x)$, associés au points $x_1, \dots, x_k$. Soit $\rho_j$, $j \in \{1, \dots, k\}$ une partition de l'unité associée. On a alors

$$\begin{aligned}\int_K \operatorname{div} v(x)\, dx &= \int_K \operatorname{div} \left(\textstyle\sum_{j=1}^k \rho_j(x) v(x)\right) dx \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{K \cap V_{x_j}} \operatorname{div}\left(\rho_j(x) v(x)\right) dx.\end{aligned}$$

L'application du lemme de la divergence quand $x_j$ est un point intérieur à $K$ fournit

$$\int_{K \cap V_{x_j}} \operatorname{div}\left(\rho_j(x) v(x)\right) dx = 0,$$

car $v$ est nulle sur le graphe de $f_{x_j}$, et quand $x_j$ est un point frontière

$$\begin{aligned}\int_{K \cap V_{x_j}} \operatorname{div}\left(\rho_j(x) v(x)\right) dx &= \int_{\partial K \cap V_{x_j}} \langle \rho_j(x) v(x), n(x)\rangle \ d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial K \cap V_{x_j}} \rho_j(x) \langle v(x), n(x)\rangle \ d\sigma(x).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_K \operatorname{div} v(x)\, dx &= \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial K \cap V_{x_j}} \rho_j(x) \left\langle v(x), n(x) \right\rangle \, d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial K} \left\langle v(x), n(x) \right\rangle \, d\sigma(x).\end{aligned}$$

■

# Annexes

## Partition de l'unité

La preuve de l'existence d'une partition de l'unité repose sur le lemme suivant :

#### Lemme de recouvrement de Lebesgue

Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$ et une famille arbitraire d'ouverts $V_i$ recouvrant $K$. Alors il existe un rayon $r > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe un indice $i$ telle que la boule ouverte $B(x, r)$ de rayon $r$ centrée en $x$ soit incluse dans $V_i$.

**Démonstration** Supposons au contraire que pour tout $r > 0$ il existe un $x \in K$ tel que pour tout indice $i$, la distance entre $x$ et le complémentaire de $V_i$ soit (strictement) inférieure à $r$. Soit $x_k$ une suite de points de $K$ tels que pour tout $i$, $d(x_k, \mathbb{R}^n \setminus V_i) \leq 2^{-k}$ ; par compacité de $K$, il existe une suite extraite des $x_k$ qui converge vers un $\ell \in K$. En passant à la limite sur cette suite, on établit que pour tout indice $i$ on a $d(\ell, \mathbb{R}^n \setminus V_i) = 0$, soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus V_i$ puisque $\mathbb{R}^n \setminus V_i$ est fermé. Par conséquent, pour tout $i$, $x \notin V_i$, ce qui contredit l'hypothèse que les $V_i$ forment un recouvrement de $K$. ■

**Démonstration de l'existence d'une partition de l'unité** Nous allons initialement établir l'existence d'une suite de fonctions $\rho_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continues, nulles en dehors de $V_i$ dont la somme vaut 1 sur un voisinage ouvert $V$ de $K$, puis déduire de cette construction l'existence de fonctions continûment différentiables $\rho_i'$ satisfaisant satisfaisant le théorème.

Notons $V = \cup_i V_i$ ; l'ensemble $V_i$ étant ouvert, la fonction $x \in V \mapsto d(x, \mathbb{R}^n \setminus V_i)$, qui est continue, est strictement positive sur $V_i$ et nulle ailleurs. La somme $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_j d(x, \mathbb{R}^n \setminus V_j)$, également continue, est donc strictement positive sur $V$. Les fonctions $\rho_i$ définies par

$$\rho_i(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus V_i)}{\sum_j d(x, \mathbb{R}^n \setminus V_j)}$$

satisfont donc les propriétés requises pour l'étape 1.

Le lemme de recouvrement de Lebesgue établit l'existence d'un $r > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe au moins un indice $i$ tel que $B(x, r) \subset V_i$. Notons $V'_i$ l'union des boules ouverts $B(x, r)$ pour lequel l'incide $i$ convient quand $x$ décrit $K$. Par construction, les $V'_i$ sont ouverts et recouvrent $K$ ; de plus, les adhérences $\overline{V'_i}$ sont bornées (ce sont des sous-ensembles de $\{x \in K \mid d(x, K) \leq r\}$) et vérifient $d(\overline{V'}_i, \mathbb{R}^n \setminus V_i) \geq r$.

Considérons les fonctions $\rho_i$ de l'étape initiale associées à la famille des $V'_i$ et prolongées par 0 en dehors de $\bigcup_i V'_i$. Définissons alors les fonctions $\rho'_i : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ par

$$\rho'_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_i(y)\phi(x - y)\, dy$$

où $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ est une fonction continûment différentiable, de support inclus dans $\overline{B}(0, r/2)$ et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1.$$

Le théorème de dérivation sous le signe somme établit que les $\rho'_i$ sont continûment différentiables. Par construction, le support de $\rho'_i$ est inclus dans $V'_i + \overline{B}(x, r/2)$, ce qui garantit que $\text{supp}(\rho'_i) \subset V_i$. Finalement, pour tout $x \in K$,

$$\begin{aligned}
\sum_i \rho'_i(x) &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \rho_i(y)\phi(x - y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \rho_i(y)\phi(x - y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y)\, dy \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

# Exercices

## Changement de variables linéaire

**Question 1** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que pour tout réel $\lambda$ non nul, $x \in \mathbb{R} \mapsto f(\lambda x)$ est intégrable et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)\, dx.$$

Même question pour

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)\,dx$$

où $h \in \mathbb{R}$. **(?)**

**Question 2** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ et $\lambda$ un réel non nul. Montrer que les intégrales suivantes existent et les calculer en fonction de l'intégrale de $f$ :

$$S_1 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,dx,$$

$$S_2 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_i, x_i + \lambda x_j, x_{i+2}, \ldots, x_j, \ldots, x_n)\,dx,$$

$$S_3 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_i, x_j, x_{i+2}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1} \ldots, x_n)\,dx.$$

**(?)**

**Question 3** Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire inversible. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(A \cdot x)|\det[A]|$ est intégrable et que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(A \cdot x)|\det[A]|\,dx.$$

**(?)**

## Déformations d'un compact à bord régulier

Soit $K$ un compact à bord $C^1$ de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continûment différentiable telle que $T = I + H$, où l'application continûment différentiable $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfait $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|dH(x)\| < 1$.

Montrer que l'ensemble

$$T(K) = \{x + T(x) \,|\, x \in K\}$$

est un compact à bord $C^1$ de $\mathbb{R}^n$. **(?)**

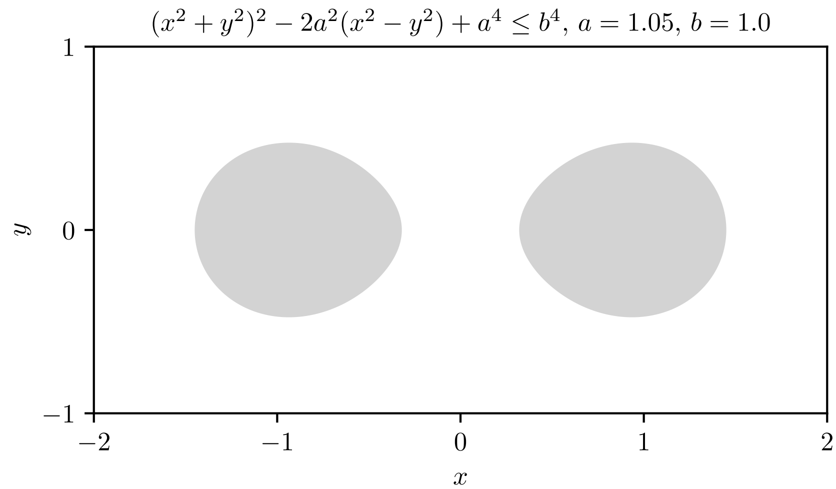


FIGURE 1 – Compact à bord $C^1$ délimité par les ovales de Cassini.

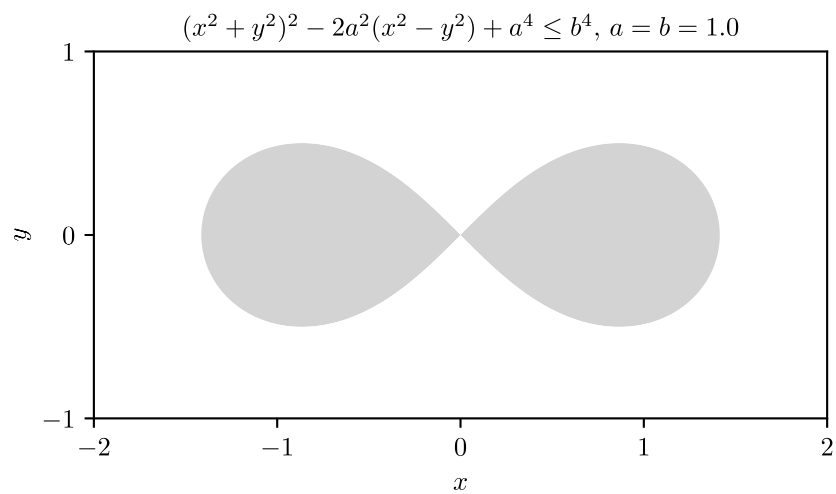


FIGURE 2 – Ensemble délimité par les ovales de Cassini quand $a = b = 1$.

## Ovales de Cassini

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels strictements positifs. On désigne par $K$ l'ensemble du plan délimité par les *ovales de Cassini*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 \leq b^4\}.$$

Montrer que si $a \neq b$, l'ensemble $K$ est un compact à bord $C^1$.

**(?)**

## Aire du disque unité

Soit $B = \overline{B}(0, 1)$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. Calculer l'aire de $B$

$$A := \int_B dx$$

**(?)**

## Intégrales de surface

Soit $B = \overline{B}(0, 1)$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. Calculer

$$\int_{\partial B} \sigma(dx) \text{ et } \int_{\partial B} x_1^2 \, \sigma(dx).$$

**(?)**

## Rétraction

Soit $B = \overline{B}(0, 1)$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$ et $f : B \to B$ une fonction de classe $C^2$ (c'est-à-dire admettant un prolongement de classe $C^2$ sur un ouvert $U$ contenant $B$). Une telle fonction $f$ est une *rétraction* de $B$ sur $\partial B$ si $f(B) = \partial B$ et pour tout $x \in \partial B$, $f(x) = x$.

**Question 1** Montrer que pour une telle rétraction $f$, on a

$$\int_B \det J_f(x) \, dx = 0.$$

**(?)**

**Question 2** En déduire l'impossibilité d'une telle rétraction. **(?)**

### Intégration par parties

Si l'équivalent dans $\mathbb{R}^n$ du théorème fondamental du calcul est le théorème de la divergence, quel résultat est l'équivalent dans $\mathbb{R}^n$ de l'intégration par parties ? **(?)**

## Solutions

### Changement de variables linéaire

**Question 1** Supposons tout d'abord que $\lambda > 0$ ; si la fonction $f$ est intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge $\gamma$ sur $[-\infty, +\infty]$ telle que pour toute subdvision pointée $\mathcal{D}$ de $[-\infty, +\infty]$ subordonnée à $\gamma$ on ait

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $\mathcal{C}$ une subdivision pointée de $[-\infty, +\infty]$ ; la somme de Riemann associée à $\mathcal{C}$ et la fonction $x \mapsto f(\lambda x)$ s'écrit

$$S(x \mapsto f(\lambda x), \mathcal{C}) = \sum f(\lambda t) \ell(J),\ (t, J) \in \mathcal{C},\ \ell(J) < +\infty.$$

L'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(\lambda t, \lambda J) \,|\, (t, J) \in \mathcal{C}\}$$

est une subdivision pointée de $[-\infty, +\infty]$, surbordonné à la jauge $\gamma$ – tel que $\gamma(\lambda t) \subset \lambda J$ – si et seulement si $\mathcal{C}$ est subordonné à la jauge définie par $\nu(t) = \gamma(\lambda t)/\lambda$. Comme $f(\lambda t)\ell(J) = f(\lambda t)\ell(\lambda J)/\lambda$, on a

$$S(x \mapsto f(\lambda x), \mathcal{C}) = \frac{1}{\lambda} S(f, \mathcal{D}).$$

Si $\mathcal{C}$ est subordonnée $\nu$, on a donc

$$\left| S(x \mapsto f(\lambda x), \mathcal{C}) - \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

La fonction $x \mapsto f(\lambda x)$ est donc intégrable, d'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

On montrerait de manière similaire que si $\lambda < 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)\, dx = -\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

et la validité de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

**Question 2** Par le changement de variable linéaire dans $\mathbb{R}$ de la question 1 et le théorèmes de Fubini et Tonelli,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\,dx_i\right] dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_{i-1},\lambda x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\,dx_i\right] dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n \\
&= S_1
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\,dx_i\right] dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\lambda x_j,x_{i+1},\dots,x_n)\,dx_i\right] dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_i,x_i+\lambda x_j,x_{i+2},\dots,x_j,\dots,x_n)\,dx \\
&= S_2.
\end{aligned}$$

Quant à l'identité

$$\begin{aligned}
S_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_i,x_j,x_{i+2},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1}\dots,x_n)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

elle résulte directement du théorème de Fubini.

**Question 3** Nous avons établi dans la question précédente que pour les 3 types d'opérations linéaires

$$A\cdot(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,\lambda x_i,\dots,x_n),$$
$$A\cdot(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\lambda x_j,x_{i+1},\dots,x_n)$$

et

$$A\cdot(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n)$$

nous avions

$$\int f(A \cdot x) |\det[A]|\, dx = \int f(x) dx.$$

Mais toute application linéaire inversible $A$ peut être décomposée – par le pivot de Gauss – en la succession d'un nombre fini de ces opérations. Or si $A = A_1 \cdots A_k$, comme $|\det[A]| = |\det[A_k] \cdots \det[A_k]|$, on peut établir par récurrence que

$$\int f(A \cdot x) |\det[A]|\, dx = \int f(A_1 \cdots A_k \cdot x) |\det[A_1] \cdots \det[A_k]|\, dx = \int f(x) dx.$$

## Déformations d'un compact à bord régulier

Sous les hypothèses de l'énoncé, nous avons établi en exercice de "Calcul Différentiel II" que la fonction $T$ est un $C^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ dans l'ouvert $T(\mathbb{R}^n)$.

L'ensemble $T(K)$ est un ensemble compact comme image d'un ensemble compact par une application continue. Comme $T$ est un difféomorphisme, un point $y$ de $\mathbb{R}^n$ est intérieur à $T(K)$ si et seulement si $x = T^{-1}(y)$ est intérieur à $K$. Les points de la frontière $\partial T(K)$ sont donc les images des points de $\partial K$ par $T$.

Soit $y_0 \in \partial T(K)$ et $x_0 = T^{-1}(y_0) \in \partial K$. Dans un voisinage $V$ de $x_0$, il existe une fonction continûment différentiable $g : V \to \mathbb{R}$ de différentielle non nulle en $x_0$ telle que $g(x) \leq 0$ équivaut à $x \in K$. Par conséquent, $y \in T(V)$ appartient à $T(K)$ si et seulement si $g \circ T^{-1}(y) \leq 0$. La fonction $g \circ T^{-1}$ est continûment différentiable et

$$d(g \circ T^{-1})(y_0) = dg(T^{-1}(y_0)) \cdot dT^{-1}(y_0) = dg(x_0) \cdot (dT(x_0))^{-1}.$$

Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $dg(x_0) \cdot u \neq 0$ ; si $v = (dT(x_0)) \cdot u$, $d(g \circ T^{-1})(y_0) \cdot v \neq 0$. La différentielle de $g \circ T^{-1}$ est donc non nulle en $y_0$. Par la caractérisation implicite des compacts à bord $C^1$, $T(K)$ est donc un compact à bord $C^1$ de $\mathbb{R}^n$.

## Ovales de Cassini

Montrons tout d'abord que l'ensemble $K$ est compact. Si les points $(x_k, y_k)$ de $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $K$, ils vérifient $(x_k^2 + y_k^2)^2 - 2a^2(x_k^2 - y_k^2) + a^4 \leq b^4$ ; si la suite converge vers $(x, y)$, par continuité $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 \leq b^4$ et donc $(x, y) \in K$. L'ensemble $K$ est donc fermé. De plus pour tout $(x, y) \in K$, comme

$$\|(x, y)\|^4 = (x^2 + y^2)^2 \text{ et } x^2 - y^2 \leq \|(x, y)\|^2,$$

on a $\|(x, y)\|^4 \leq b^4 - a^4 + 2a^2\|(x, y)\|^2$, donc si

$$\frac{\|(x, y)\|^4}{2} \geq b^4 \text{ et } \frac{\|(x, y)\|^2}{2} \geq 2a^2,$$

le point $(x, y)$ n'appartient pas à $K$ ; l'ensemble $K$ est donc borné. Fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $K$ est donc compact.

Pour montrer que l'on a affaire à un ensemble compact à bord $C^1$, nous souhaitons utiliser le résultat sur la caractérisation implicite de ces ensembles. La fonction $g$ de ce théorème prend bien sûr ici la forme

$$g(x, y) := (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - b^4$$

puisque $x \in K$ si et seulement si $g(x, y) \neq 0$. Il nous suffit donc de vérifier que $g$ est $C^1$, ce qui est évident, et qu'en tout point de la frontière de $K$, la différentielle de $g$ – ou son gradient – est non-nulle. On se convaincra que tout point $(x, y)$ de la frontière de $K$ vérifie nécessairement $g(x, y)$ en exploitant la continuité de $g$. Par conséquent, notre démonstration sera achevée si nous montrons qu'aucun point $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ ne satisfait simultanément

$$g(x, y) = 0,\ \partial_x g(x, y) = 0 \text{ et } \partial_y g(x, y) = 0.$$

Or $\partial_x g(x, y) = 4(x^2 + y^2)x - 4a^2x$ et $\partial_x g(x, y) = 4(x^2 + y^2)y + 4a^2y$ ; de la nullité de ces deux dérivées partielles, on déduit

$$(x^2 + y^2)x = a^2x \text{ et } (x^2 + y^2)y = -a^2y.$$

Il nous faut désormais envisager les cas possibles selon que $x$ et $y$ sont nuls ou non:

- $x \neq 0$ et $y \neq 0$ est impossible car les deux équations ci-dessus entraînent alors $(x^2 + y^2) = a^2 = -a^2$ or $a > 0$.
- $x = y = 0$ est impossible car $g(0, 0) = a^4 - b^4 \neq 0$, car $a > 0$, $b > 0$ et $a \neq b$.
- $x = 0$ et $y \neq 0$ entraîne $x^2 + y^2 = y^2 = -a^2$, impossible car $a > 0$.
- finalement, si $x \neq 0$ et $y = 0$, $x^2 + y^2 = x^2 = a^2$, ce qui réinjecté dans $g(x, 0) = 0$ fournit $a^4 - 2a^4 + a^4 - b^4 = 0$, soit $b^4 = 0$, également impossible car $b > 0$.

Aucun point $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ n'annule simulanément $g$ et son gradient ; l'ensemble $K$ est donc bien un compact à bord $C^1$.

## Aire du disque unité

La fonction $f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1_B(x)$ est intégrable: l'ensemble $B$ est fermé, donc mesurable, et la fonction $f$ est par exemple dominée par la fonction caractéristique du pavé fermé $[-1, 1]^2$, qui est intégrable.

Le théorème de Fubini nous fournit donc

$$\int_B dx = \int_{-1}^{1} \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Comme

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{]-1,1[} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

On peut donc opérer le changement de variable

$$\theta \in ]0,\pi[ \mapsto x = -\cos\theta \in ]-1,1[$$

(bijectif, continûment différentiable ainsi que son inverse). Comme $(-\cos\theta)' = \sin\theta$, on a

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1-(-\cos^2\theta)}\sin\theta\,d\theta = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

et donc

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

et finalement

$$\int_B dx = \pi.$$

Alternativement, on peut noter que l'union $N$ de $\partial B$ et du segment $\{(x,0)\,|\,x \in [-1,0]\}$ est négligeable dans $\mathbb{R}^2$ et donc que

$$\int_B dx = \int_{B\setminus N} dx,$$

ce qui nous permet de considérer le changement de variable

$$\phi : (r,\theta) \in ]0,1[\times]-\pi,\pi[ \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in B \setminus N$$

(bijectif, continûment différentiable ainsi que son inverse). On calcule la matrice jacobienne

$$J_\phi(r,\theta) = \left[\begin{array}{cc} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{array}\right],$$

dont le déterminant vaut

$$\det J_\phi(r,\theta) = (\cos\theta)(r\cos\theta) - (\sin\theta)(-r\sin\theta) = r.$$

On a donc

$$\int_{]0,1[\times]-\pi,\pi[} r\,dr d\theta = \int_B dx,$$

et donc par le théorème de Fubini,

$$\int_B dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^1 r\,dr\right] d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,d\theta = \pi.$$

## Intégrales de surface

Comme la normale extérieure à $B$ en $\partial B$ vaut $n(x) = (x_1, x_2)$ et que $x_1^2 + x_2^2 = 1$ sur $\partial B$, on a en posant $v(x) = (x_1, x_2)$ sur $B$ l'égalité

$$\int_{\partial B} \sigma(dx) = \int_{\partial B} (x_1^2 + x_2^2)\, \sigma(dx) = \int_{\partial B} \langle v(x), n(x)\rangle\, \sigma(dx)$$

et donc par le théorème de la divergence

$$\int_{\partial B} \sigma(dx) = \int_B \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_B (\partial_1 x_1 + \partial_2 x_2)\, dx = 2 \int_B dx.$$

L'intégrale initiale est donc égale au double de l'aire du disque unité, soit $2\pi$. Concernant la seconde intégrale, on à l'égalité

$$\int_{\partial B} x_1^2 \sigma(dx) = \int_{\partial B} \langle v(x), n(x)\rangle\, \sigma(dx) \;\text{ avec }\; v(x) = (x_1, 0)$$

et donc par le théorème de la divergence

$$\int_{\partial B} x_1^2 \sigma(dx) = \int_B \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_B (\partial_1 x_1 + \partial_2 0)\, dx = \int_B dx.$$

L'intégrale initiale est donc égale à l'aire du disque unité, soit $\pi$.

## Rétraction

Source: (Kannai 1981)

**Question 1** On déduit de l'identité $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = 1$ valable sur $B$ que pour tout $h \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle df(x) \cdot h, f(x)\rangle + \langle f(x), df(x) \cdot h\rangle = 2\, \langle df(x)^* \cdot f(x), h\rangle = 0$$

et donc la relation $J_f(x)^t f(x) = 0$. La valeur $f(x)$ étant non nulle, cela entraîne la non-inversibilité de la matrice jacobienne $J_f(x)$, ou ce qui est équivalent, la nullité du déterminant jacobien $\det J_f(x)$. En conséquence,

$$\int_B \det J_f(x)\, dx = 0.$$

**Question 2** La fonction $f$ étant de classe $C^2$, on a

$$\begin{aligned}
\det J_f &= (\partial_1 f_1)(\partial_2 f_2) - (\partial_1 f_2)(\partial_2 f_1) \\
&= \partial_1 (f_1 \partial_2 f_2) - f_1 \partial_{12}^2 f_2 - \partial_2 (f_1 \partial_1 f_2) + f_1 \partial_{21}^2 f_2 \\
&= \partial_1 (f_1 \partial_2 f_2) - \partial_2 (f_1 \partial_1 f_2)
\end{aligned}$$

Par le théorème de la divergence, on a donc

$$\begin{aligned}\int_B \det J_f(x)\,dx &= \int_{\partial B} (n_1(f_1\partial_2 f_2) - n_2(f_1\partial_1 f_2))\sigma \\ &= \int_{\partial B} f_1 \langle \nabla f_2, t\rangle\,\sigma\end{aligned}$$

où $t(x)$ désigne le vecteur tangent à $\partial B$ en $x$ :

$$t(x) = (-n_2(x), n_1(x)).$$

Comme la normale extérieure à $B$ en $x = (x_1, x_2) \in \partial B$ est donnée par $n(x) = (x_1, x_2)$, on a $t(x) = (-x_2, -x_1)$. Par ailleurs, comme $f(x)$ vaut identiquement $x$ sur $\partial B$, $f_2(x)$ vaut $x_2$ et par conséquent

$$\langle \nabla f_2(x), t(x)\rangle = \langle \nabla(x_2), t(x)\rangle = x_1,$$

soit, puisque $f_1(x) = x_1$ sur $\partial B$,

$$\int_B \det J_f(x)\,dx = \int_{\partial B} x_1^2\,\sigma(dx) > 0.$$

Si une telle rétraction existait, on aurait donc une contradiction.

## Intégration par parties

On obtient le théorème d'intégration par parties en appliquant le théorème fondamental du calcul à la dérivée du produit $fg$.

Supposons de façon analogue que $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $K$ un ensemble compact à bord $C^1$ de $U$ et que $f, g : U \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $C^1$. Le produit $fg$ est également de classe $C^1$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\int_K \partial_i(fg)(x)\,dx = \int_{\partial K} n_i(x) f(x) g(x)\,\sigma(dx),$$

soit

$$\int_K (\partial_i f(x)) g(x)\,dx = \int_{\partial K} n_i(x) f(x) g(x)\,\sigma(dx) - \int_K f(x)(\partial_i g(x))\,dx.$$

Alternativement, si $f : U \to \mathbb{R}$ et $v : U \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions de classe $C^1$, comme $fv$ est de classe $C^1$ et que $\operatorname{div} fv = f \operatorname{div} v + \langle \nabla f, v\rangle$, par le théorème de la divergence appliqué à $fv$ on obtient

$$\int_K \langle \nabla f(x), v(x)\rangle\,dx = \int_{\partial K} f(x)\,\langle v(x), n(x)\rangle\,\sigma(dx) - \int_K f(x) \operatorname{div} v(x)\,dx.$$

## Réferences

Kannai, Yakar. 1981. “An Elementary Proof of the No-Retraction Theorem.” *American Mathematical Monthly* 88: 264–68.

Swartz, Charles. 2001. *Introduction to Gauge Integrals.* Singapore: World Scientific.