Calcul Intégral IV

STEP, MINES ParisTech*

22 octobre 2019 (`#2f387a0`)

Table des matières

Mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ **2**
Mesure extérieure de Lebesgue 3
Paradoxe de Banach-Tarski 3
Mesure extérieure 4
Ensemble mesurable 5
Tribu 5
Mesure 5
Mesure associée à une mesure extérieure 6
Mesure de Lebesgue 6
Mesure de Lebesgue et intégrale de Henstock-Kurzweil 7

Mesure et intégrale **7**
Ensemble négligeable 7
Presque partout 7
Tribu engendrée par une collection 7
Tribu de Borel 8
Mesure 8
Fonction mesurable 8
L'infini 8
Conventions 9
Lebesgue/Borel-mesurable équivaut à H.-K.-mesurable 9
Image réciproque et tribus engendrées 9
Composition de fonctions mesurables 10
Les fonctions continues sont boréliennes 10
Limite simple de fonctions mesurables 11
Fonction étagée 11
TODO – retarder l'apparition du résultat suivant ? 11
Fonction mesurable 11
Fonction étagées mesurables 12
Intégrale d'une fonction étagée 12

*Ce document est un des produits du projet `boisgera/CDIS`, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS).

Intégrale d'une fonction positive 13
Intégrale d'une fonction à valeurs réelles 13
Intégrales finies, infinies et indéfinies 13
Une intégrale absolue 14
Intégrale de Lebesgue et de Henstock-Kurzweil 14

Propriétés de l'intégrale **14**
Linéarité 14
TODO – Pb causalité 15
Positivité et nullité 16
Théorème de convergence monotone 17
Intégrale d'une fonction positive II 18
Théorème de convergence dominée 18

Produit de mesures **18**
Tribu produit 18
Produit des boréliens 19
Mesure produit 19
Intégrale dans un espace produit 19
Mesure σ-finie 19
Théorème de Fubini 19
Symmétrie 20

Exercices **20**
Anagrame 20
Mesures de Dirac 20
Approximation par des ensembles mesurables 21
Mesure intérieure 21
Mesure image 21
Tribu engendrée 22
Complétion d'une mesure 22

Solutions **23**
Anagrame 23
Mesures de Dirac 23
Approximation par des ensembles mesurables 24
Mesure intérieure 25
Mesure image 26
Tribu engendrée 28
Complétion d'une mesure 28

Réferences **30**

Mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

Dans les volets précédents du "Calcul Intégral", nous avons défini le volume d'un pavé compact de $\mathbb{R}^n$

$$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

au moyen de la formule

$$v(P) := (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

L'intégrable de Henstock-Kurzweil nous permet de prolonger la fonction v en une fonction définie pour tous les ensembles mesurables A de $\mathbb{R}^n$, par la relation

$$v(A) = \int 1_A(x)\, dx$$

si 1_A est intégrable et $v(A) = +\infty$ sinon. Mais cette approche n'est pas totalement satisfaisante intellectuellement. D'une part on peut considérer l'usage de l'intégrale comme un chemin tortueux pour étendre v. D'autre part on peut avoir l'impression que cette approche – qui ne permet pas de mesure le volume de tout ensemble de $\mathbb{R}^n$ – n'atteint pas totalement son objectif ; cette limitation pourrait a être un artefact de la méthode choisie plutôt qu'une limitation intrinsèque. Dans cette section, nous allons donner une autre méthode, plus directe, due à Lebesgue et Carathéodory [1], qui nous permettra de définir la mesure (extérieure) du volume de tout ensemble de $\mathbb{R}^n$. Elle nous donnera également la raison pour laquelle notre construction initiale du volume se limite à la collection des ensembles qualifiés de “mesurables”.

Pour calculer le volume d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, nous généralisons la méthode utilisée pour définir les ensembles négligeables (de volume nul) : nous considérons l'ensemble des collections dénombrables de pavés recouvrant ce sous-ensemble et nous utilisons chacun des ces recouvrements pour produire une estimation (supérieure) du volume de l'ensemble. Formellement :

Mesure extérieure de Lebesgue

On appelle *mesure extérieure de Lebesgue* dans $\mathbb{R}^n$ la fonction

$$v^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty],$$

qui a tout ensemble A de $\mathbb{R}^n$ associe le nombre réel étendu positif défini par

$$v^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} v(P_k) \;\middle|\; P_k \text{ pavé compact de } \mathbb{R}^n, A \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} P_k \right\},$$

Cette définition “raisonnable” ne satisfait toutefois pas les propriétés que nous attendons (implicitement) d'un volume. Ce décalage est mis en évidence par un résultat paradoxal de la théorie des ensembles dans $\mathbb{R}^3$:

Paradoxe de Banach-Tarski

Il est possible de partitionner une sphère de rayon un de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini d'ensembles, qui, après rotations et translations, forment une partition de deux sphères disjointes de rayon un.

1. Henri Lebesgue (1875-1941) était un mathématicien français et Constantin Carathéodory (1873-1950) un mathématicien grec entrenant des liens étroits avec l'Allemagne. Ils font partie des fondateurs de la théorie abstraite de la mesure qui conduit à un renouveau de la théorie de l'intégration au début du XXème siècle.

Si le résultat est qualifié de paradoxe, c'est qu'il nous semble intuitivement que le volume devrait être préservé par les les opérations subies par la sphère initiale. Or, le volume d'une sphère de rayon un et de deux sphères disjointes de même rayon diffère d'un facteur 2. Pour dépasser ce paradoxe, nous allons devoir examiner un par un les résultats qui nous semblent "évidents" dans ce raisonnement pour débusquer notre erreur.

Soient $A_1, \dots, A_p$ des ensembles disjoints et non vides de $\mathbb{R}^3$ dont la réunion forme la sphère initiale $S_0 = A_1 \cup \dots \cup A_p$, et tels que des ensembles disjoints $B_1, \dots, B_p$ qui s'en déduisent par rotation et translation, vérifient $S_1 \cup S_2 = B_1 \cup \dots \cup B_p$ où S_1 et S_2 sont les deux sphère finales.

Tout d'abord, on a bien

$$v^*(S) = \frac{4\pi}{3} \text{ et } v^*(S_1 \cup S_2) = 2 \times \frac{4\pi}{3},$$

car les ensembles S_0, S_1 et S_2 considérés sont intégrables (au sens de l'intégrale de Henstock-Kurzweil) et nous verrons ultérieurement que dans ce cas, la mesure extérieure v^* coïncide avec v dont la définition exploite l'intégrable de Henstock-Kurzweil. Un simple calcul intégral fournit alors le résultat.

On peut croire que le point faible de notre raisonnement est la préservation de la valeur de $v^*(A)$ par translation et rotation ; s'il est facile d'établir que lorsque B se déduit de A par une translation, alors $v^*(A) = v^*(B)$, on peut douter du résultat pour les rotations. Après tout, la définition de $v^*(A)$ fait appel à des rectangles qui sont parallèles aux axes, une propriété qui n'est pas conservée par rotation. Mais si le résultat n'est pas évident, il s'avère pourtant que la mesure v^* est bien invariante par rotation (cf. (Hunter 2011, sec. 2.8)).

La propriété qui nous fait défaut est plus fondamentale : la fonction v^* n'est tout simplement pas additive ! Même si les ensembles $A_1, \dots, A_p$ sont disjoints, il est possible que

$$v^*(A_1 \cup \dots \cup A_p) \neq v^*(A_1) + \dots + v^*(A_p).$$

On peut par contre établir avec la définition de v^* qu'elle est sous-additive : pour tous les ensembles $A_1, \dots, A_p$ (disjoints ou non), on a

$$v^*(A_1 \cup \dots \cup A_p) \leq v^*(A_1) + \dots + v^*(A_p).$$

Elle est même σ-sous-additive : si A_k, $k \in \mathbb{N}$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$,

$$v^*\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v^*\left(A_k\right).$$

Cette propriété est une caractéristique des *mesures extérieures* :

Mesure extérieure

On appelle *mesure extérieure* sur l'ensemble X toute application

$$v^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

telle que :

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$ (*nullité en* $\varnothing$).
2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \subset \mu^*(B)$ (*croissance*).
3. $\mu^*\left(\cup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(A_k)$ (σ-*subadditivité*).

Il existe un procédé général permettant de déduire d'une mesure extérieure une application qui soit additive – à condition d'accepter de réduire son domaine de définition ; la fonction qui en résulte est additive – et même σ-additive.

Ensemble mesurable

Soit μ^* une mesure extérieure sur l'ensemble X. Un ensemble $A \subset X$ est dit μ^*-*mesurable* (au sens de Carathéodory) si pour tout $B \subset X$, on a

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Une façon alternative de voir les choses : si l'on note $\mu^*|_A$ la trace de μ^* sur un ensemble A de X, définie pour tout sous-ensemble B de X par

$$\mu^*|_A(B) = \mu^*(B \cap A),$$

alors l'ensemble A est μ^* mesurable si et seulement si

$$\mu^* = \mu^*|_A + \mu^*|_{A^c}.$$

Tribu

Une *tribu* ou σ-*algèbre* $\mathcal{A}$ sur un ensemble X est une collection d'ensembles de X contenant l'ensemble vide et stable par passage au complémentaire et à l'union dénombrable :

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$, $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
3. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in \mathcal{A}$, alors $\cup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Un ensemble de $\mathcal{A}$ est dit *mesurable* ; l'ensemble X muni de $\mathcal{A}$ est un *espace mesurable*.

Mesure

Une *mesure* μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une fonction

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et telle que pour toute suite A_k, $k \in \mathbb{N}$, d'ensembles de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, on ait

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k);$$

on dit que μ est *σ-additive.* L'ensemble X muni de $\mathcal{A}$ et μ est un *espace mesuré.*

Notons qu'en prenant une suite de la forme $A_0, \dots, A_n, \varnothing, \varnothing, \dots$, on montre que pour toute suite finie $A_0, \dots, A_n$ d'ensembles disjoints de $\mathcal{A}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k);$$

la mesure μ est donc *additive.* En particulier, si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$, en exploitant ce résultat pour A et $B \setminus A$ qui sont deux ensembles disjoints de $\mathcal{A}$, on établit que $\mu(A) \subset \mu(B)$; μ est donc *croissante.*

Mesure associée à une mesure extérieure

Soit X un ensemble et μ^* une mesure extérieure sur X. La collection $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables de X est une tribu sur X, et la restriction μ de μ^* à $\mathcal{A}$ est une mesure sur X.

Démonstration Cf. (Hunter 2011, théorème 2.9, pp. 15-17). ■

La spécialisation de ce procédé au cas de la mesure extérieure de Lebesgue, produit la mesure de Lebesgue.

Mesure de Lebesgue

La "mesure extérieure de Lebesgue" $v^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ précédemment définie est bien une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$. On appelle *tribu de Lebesgue* et on note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ la collection des ensembles v^*-mesurables (au sens de Caratheodory) ; la mesure $v : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ qui lui est associée est appelée *mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration (partielle : v^* est une mesure extérieure.) Il est clair que v^* satisfait $v^*(\varnothing) = 0$ (car le pavé $[0, 0]^n$ recouvre $\varnothing$ par exemple). Si $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, alors tout recouvrement de B par des pavés compacts recouvre également A ; par conséquent $v^*(A) \leq v^*(B)$. Finalement, pour tout $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des pavés compacts P_{jk} tels que

$$A_k \subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} P_{jk} \ \text{ et } \ \sum_{j=0}^{+\infty} v(P_{jk}) - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq v^*(A_k) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} v(P_{jk}).$$

Comme la famille des $\{P_{jk}\}_{jk}$ recouvre $\cup_{k=0}^{+\infty} A_k$, on a donc

$$v^*(\cup_{k=0}^{+\infty} A_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} v(P_{jk}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(v^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v^*(A_k) \right) + \varepsilon.$$

Le réel positif ε étant arbitrairement petit, on en déduit que v^* est bien σ-subadditive. ■

On admettra également sans preuve le résultat suivant, qui montre que la notation "v" que nous avons employé deux fois est dépourvue d'ambiguité :

Mesure de Lebesgue et intégrale de Henstock-Kurzweil

La tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ des ensembles v^*-mesurables au sens de Caratheodory coïncide avec la tribu des ensembles mesurables définis au moyen de l'intégrale de Henstock-Kurzweil. La mesure de Lebesgue $v : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ vérifie

$$v(A) = \int 1_A(x)\, dx$$

si 1_A est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et $v(A) = +\infty$ sinon.

Mesure et intégrale

Ensemble négligeable

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un ensemble mesuré. Un ensemble $N \subset X$ est *μ-négligeable* s'il existe un ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

Presque partout

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un ensemble mesuré. Une propriété P dépendant d'un $x \in X$ est vraie *presque partout* si l'ensemble des éléments x où elle est fausse est un ensemble négligeable.

Tribu engendrée par une collection

Dans un ensemble X, on appelle *tribu engendrée* par une collection $\mathcal{B}$ d'ensembles de X la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$ de X contenant $\mathcal{C}$. Autrement dit :

— $\sigma(B)$ est une tribu.
— si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est une tribu de X, alors $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{C}$.

Quand il y a une ambiguité sur l'ensemble X hébergeant la collection $\mathcal{B}$, on pourra noter la tribu engendrée $\sigma_X(\mathcal{B})$.

Démonstration (existence de la tribu engendrée) Désignons par $\mathfrak{S}$ la collection des tribus de contenant $\mathcal{B}$ comme sous-ensemble.

$$\mathfrak{S} = \{\mathcal{C} \text{ tribu de } X \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{C}\}$$

Elle n'est pas vide : elle contient la collection $\mathcal{P}(X)$ des ensembles de X (qui de toute évidence est un sur-ensemble de $\mathcal{B}$ et une tribu de X). Montrons que la plus petite tribu $\sigma(\mathcal{B})$ de X contenant $\mathcal{B}$ est l'intersection de toutes les tribus de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire que

$$\sigma(\mathcal{B}) = \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C} = \{A \subset X \,|\, A \in \mathcal{C} \text{ pour tout } \mathcal{C} \in \mathfrak{S}\}.$$

Il est clair que si $\mathcal{A}$ est une tribu de X contenant $\mathcal{B}$, alors $\cap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, car $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}$. Il nous suffit donc de montrer que $\cap \mathfrak{S}$ est une tribu de X pour pouvoir conclure ; on vérifiera aisément que comme chaque élément de $\mathfrak{S}$ est une tribu, cette intersection en est également une. ■

Tribu de Borel

On appelle *tribu de Borel* d'un espace topologique X la plus petite tribu contenant tous les fermés (ou tous les ouverts) de X.

Mesure

Une *mesure (positive)* μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une fonction de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$ telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et pour toute collection dénombrable d'ensembles A_k de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, on ait

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k);$$

on dit que μ est *σ-additive*. L'ensemble X muni de $\mathcal{A}$ et μ est un *espace mesuré*.

Fonction mesurable

Une fonction $f : X \to Y$ associée aux espaces mesurables $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ est *mesurable* (ou *$\mathcal{A}/\mathcal{B}$-mesurable*) si l'image réciproque $A = f^{-1}(B)$ de tout ensemble B de $\mathcal{B}$ par f appartient à $\mathcal{A}$.

L'infini

Dans le cadre abstrait de l'intégration selon Lebesgue, on pourra si nécessaire considérer des fonctions prenant (éventuellement) des valeurs infinies, c'est-à-dire travailler avec des fonctions à valeurs dans $Y = [-\infty, +\infty]$ plutôt que dans $Y = \mathbb{R}$([2]). Cette extension simplifiera notamment l'énoncé du théorème de Fubini.

2. dans le cadre de l'intégration de Henstock-Kurzweil, c'est pour l'ensemble de départ que nous avions l'habitude de prendre $[-\infty, +\infty]$; il s'agissait d'une "astuce" technique qui

Conventions

Lorsque l'ensemble d'arrivée Y de f a une structure topologique, par exemple $Y = [-\infty, +\infty]$ ou $Y = [-\infty, +\infty]^m$, on supposera par défaut que la tribu associée est la tribu de Borel. Lorsque l'ensemble de départ de f est $X = \mathbb{R}^n$ on supposera par défaut que la tribu associée est la tribu de Lebesgue. Lorsque l'on souhaitera plutôt munir X et Y de la tribu de Borel, on parlera de fonction *borélienne* (tribu de Borel au départ et à l'arrivée). Il existe une bonne raison pour adopter par défaut la convention hybride (avec des tribus d'un type différent au départ et à l'arrivée) pour la définition de "mesurable" :

Lebesgue/Borel-mesurable équivaut à H.-K.-mesurable

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est limite simple de fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil – c'est-à-dire "mesurable" au sens de "Calcul Intégral III" – si et seulement si elle est $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-mesurable.

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant :

Image réciproque et tribus engendrées

Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{B}$ une collection d'ensembles de Y. Alors

$$\mathcal{F} := \sigma_X(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \sigma_Y(\mathcal{B})\}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} & \arrow[l, "f^{-1}"'] \\ \arrow[u, "\sigma_X"] & \mathcal{B} \arrow[l, "f^{-1}"] \arrow[u, "\sigma_Y"'] \end{tikzcd}$$

FIGURE 1 – Ce diagramme est *commutatif.*

Démonstration Notons $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$. Comme $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, on a

$$\{f^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{B}\} \subset \{f^{-1}(A) \,|\, A \in \mathcal{A}\}.$$

Si nous montrons que $\mathcal{C} := \{f^{-1}(A) \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu nous pouvons en déduire que

$$\sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}) \subset \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

---

permettait d'intégrer des fonctions définies au départ sur $\mathbb{R}$ avec des techniques déjà développées pour les intervalles compacts $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Avec l'intégrale de Lebesgue il n'est plus nécessaire d'étendre $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ.

La théorie de Henstock-Kurzweil accepte donc volontiers les fonctions dont les **arguments** sont infinis – $f(+\infty) = 0$ par exemple a du sens – mais est "allergique" aux fonctions à **valeurs** infinies. Par exemple, si l'on essayait de calculer l'intégrale de Henstock-Kurzweil de la fonction

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } x = 0, \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } x \in \,]0, 1] \end{array} \right.$$

on obtiendrait $+\infty$, alors même que l'intégrale vaut 2 pour toute valeur finie de $f(0)$. L'intégrale de Lebesgue n'a pas cette difficulté, et produira la valeur 2 dans tous les cas.

L'ensemble vide appartient à $\mathcal{C}$ car $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$. Si $A \in \mathcal{A}$, $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ et $Y \setminus A \in \mathcal{A}$, donc $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{C}$. Finalement, si $A_0, A_1, \cdots \in \mathcal{A}$, $\cup_k f^{-1}(A_k) = f^{-1}(\cup_k A_k) \in \mathcal{C}$. La collection $\mathcal{C}$ est donc une tribu.

Réciproquement, posons $\mathcal{E} = \sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\})$ et considérons

$$\mathcal{D} = \{A \in Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}.$$

La collection $\mathcal{D}$ est également une tribu. En effet, $f^{-1}(\varnothing) \in \mathcal{E}$, si $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ alors $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ et si $f^{-1}(A_0), f^{-1}(A_1), \cdots \in \mathcal{E}$, alors $f^{-1}(\cup_k A_k) = \cup_k f^{-1}(A_k) \in \mathcal{E}$. Par conséquent, comme $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Donc pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$, soit

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{E} = \sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}).$$

■

Démonstration "L./B.-mesurable ⇔ H.-K.-mesurable" La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est limite simple de fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil si et seulement si elle vérifie le critère de l'image réciproque des sections II et III, c'est-à-dire si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est un ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$-mesurable.

De toute évidence, si f est Lebesgue/Borel-mesurable, ce critère est satisfait. Réciproquement, si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est Lebesgue-mesurable, alors la tribu engendrée par les images réciproques des ouverts de $\mathbb{R}^m$ est incluse dans la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Comme cette tribu est d'après le lemme précédent l'ensemble des images réciproques de la tribu engendrée par les ouverts dans $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire la tribu de Borel dans $\mathbb{R}^m$, l'image réciproque de tout borélien est un ensemble de la tribu de Lebesgue : la fonction f est Lebesgue/Borel-mesurable. ■

Composition de fonctions mesurables

Soient $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ et $(Z, \mathcal{C})$ des espaces mesurables. Soit $f : X \to Y$ une fonction $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-mesurable et $g : Y \to X$ une fonction $\mathcal{B}/\mathcal{C}$-mesurable. Alors la composition $g \circ f$ de f et g est $\mathcal{A}/\mathcal{C}$-mesurable.

Démonstration Pour tout ensemble $C \in \mathcal{C}$, on a $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ et donc $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. ■

Les fonctions continues sont boréliennes

Soient X et Y deux espaces topologiques. Toute fonction continue $f : X \to Y$ est borélienne.

Démonstration Notons $\mathcal{F}_X$ et $\mathcal{F}_Y$ les collections de tous les ensembles fermés de X et Y respectivement. Comme les boréliens de Y sont engendrés par les fermés de $\mathcal{F}_Y$, on a

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(Y)\} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \sigma_Y(\mathcal{F}_Y)\}$$

et par conséquent, par commutativité,

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(Y)\} = \sigma_X(\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_Y\}).$$

Or la fonction f étant continue, $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_Y\} \subset \mathcal{F}_X$ et par conséquent

$$\sigma_X(\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_Y\}) \subset \sigma_X(\mathcal{F}_X) = \mathcal{B}(X).$$

Au final, $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(Y)\} \subset \mathcal{B}(X)$ et la fonction f est bien $\mathcal{B}(X)/\mathcal{B}(Y)$-mesurable, c'est-à-dire borélienne. ■

Limite simple de fonctions mesurables

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $Y = [-\infty, +\infty]$, muni de la tribu de Borel. Si les fonctions $f_k : X \to Y$, $k \in \mathbb{N}$, sont mesurables et convergent simplement vers f, alors f est mesurable.

Démonstration Par le lemme liant image réciproque et tribus engendrées, il suffit de prouver que l'image réciproque par f de tout ouvert U de Y appartient à $\mathcal{A}$. Or $f(x) \in U$ si et seulement si $f_k(x) \in U$ pour k assez grand, ce qui se traduit par la formule

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcap_{k=j}^{+\infty} f_k^{-1}(U)$$

qui établit que $f^{-1}(U)$ est un ensemble mesurable, comme union (dénombrable) d'intersections (dénombrable) d'ensembles mesurables. ■

Fonction étagée

On appelle *fonction étagée* toute fonction $f : X \to Y$ qui ne prenne qu'un nombre fini de valeurs distinctes (ou telle que l'image réciproque de Y par f soit finie).

TODO – retarder l'apparition du résultat suivant ?

Fonction mesurable

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur l'ensemble X. Une fonction $f : X \to [-\infty, +\infty]$ est $\mathcal{A}$/Borel-mesurable si et seulement si f est la limite simple de fonctions étagées $X \to \mathbb{R}$ qui soient $\mathcal{A}$/Borel-mesurables.

TODO – Démonstration ■

Fonction étagées mesurables

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est simple et mesurable si et seulement s'il existe une collection finie d'ensembles mesurables $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{A}$ et de valeurs $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ telles que

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k}.$$

La preuve de ce résultat montre qu'il est possible d'être plus prescriptif si nécessaire sur les ensembles A_k et les valeurs y_k : une fonction est en effet simple et mesurables si et seulement s'il existe une collection finie d'ensembles mesurable **disjoints** $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{A}$ et de valeurs **distinctes et non nulles** $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ telles que

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k}.$$

Démonstration Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction simple ; il existe donc des réels $y_0, \dots, y_{n-1}$ tels que $f(X) = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. On a alors

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k} \ \text{ avec } \ A_k = f^{-1}(y_k).$$

Si de plus f est mesurable, les singletons de $\mathbb{R}$ étant (Borel-)mesurables (car fermés), les ensembles A_k sont nécessairement ($\mathcal{A}$-)mesurables.

Réciproquement, si f est de la forme $f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k}$ où les ensembles A_k sont mesurables, il est clair que la fonction f est simple. En considérant les ensembles – mesurables – B_k définis par $B_0 = A_0$ et $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k$ on obtient une somme $\sum_k w_k 1_{B_k}$ du même type mais basée sur des ensembles disjoints B_k. En faisant l'union C_j des B_k qui correspondent à des valeurs $z_j = w_k$ identiques, on peut de plus s'assurer d'avoir une somme de la forme $f = \sum_j z_j 1_{C_j}$ où les valeurs z_j sont distinctes et les C_j sont mesurables. Le cas échéant, si l'un des z_j est nul, on peut même omettre le terme correspondant de la somme. Il devient maintenant clair que f est également mesurable : si A est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, l'image réciproque de A par f est l'union d'une sous-collection des C_j (C_j étant inclus dans la collection si et seulement si $z_j \in A$) et si $0 \in A$, de $X \setminus \cup_j C_j$. ■

Intégrale d'une fonction étagée

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \mapsto [0, +\infty[$ une fonction étagée positive et mesurable. On appelle *intégrale de Lebesgue de f relativement à la mesure μ* la grandeur positive (finie ou infinie)

$$\int f\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \sum_{y \in [0,+\infty[} y \times \mu(f^{-1}(y))),$$

avec la convention que $0 \times (+\infty) = 0$. Si $A_0, \ldots, A_{n-1} \in \mathcal{A}$ et $y_0, \ldots, y_{n-1} \in [0, +\infty[$, alors cette définition se traduit par

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k} \to \int f\mu = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \times \mu(A_k).$$

A noter que dans la somme définissant l'intégrale, si y ne fait pas partie des valeurs prises par f, alors $\mu(f^{-1}(y)) = \mu(\varnothing) = 0$. Comme f est supposée simple, cette somme est donc composée d'un nombre fini de termes non nuls. Si l'on veut mettre cela mieux en évidence, on peut remplacer la somme dans l'énoncé ci-dessus par

$$\sum_{y \in f(X)} y \times \mu(f^{-1}(\{y\})),$$

voire

$$\sum_{y \in f(X) \setminus \{0\}} y \times \mu(f^{-1}(\{y\}))$$

ce qui permet également de se dispenser de la convention $0 \times (+\infty) = 0$.

Intégrale d'une fonction positive

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Soit $\mathcal{F}(f)$ la collection des fonctions étagées positives (à valeurs finies) et mesurables qui soient inférieures à f. On appelle *intégrale de Lebesgue de f relativement à la mesure μ* la grandeur positive (finie ou infinie)

$$\int f\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g\mu.$$

Intégrale d'une fonction à valeurs réelles

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \mapsto [-\infty, +\infty]$ une fonction mesurable. On dit que la fonction f est *intégrable au sens de Lebesgue relativement à la mesure μ* si elle est mesurable et que les intégrales des fonctions positives $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = -\min(f, 0)$ sont finies. *L'intégrale de Lebesgue de f relativement à la mesure μ* est alors la grandeur réelle (finie)

$$\int f\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \int_X f_+\mu - \int_X f_-\mu.$$

Intégrales finies, infinies et indéfinies

Une fonction positive peut avoir une intégrale bien définie – il faut et il suffit qu'elle soit mesurable – sans être pour autant intégrable. Elle est intégrable si et seulement si elle est mesurable et que son intégrale est finie. Pour les fonctions positives, la formule

$$\int f\mu < +\infty$$

signifera donc à la fois "l'intégrale est bien définie" (mesurable) et "l'intégrale est finie" (c'est-à-dire : la fonction est intégrable). Pour les fonctions signées par contre, il est nécessaire d'être plus strict et l'intégrale n'est définie que pour les fonctions intégrables. En effet, même si l'on peut définir

$$\int f_+ \mu \ \text{ et } \ \int f_- \mu$$

dès que f est mesurable, il est possible que ces deux intégrales soit égales à $+\infty$; il n'y a alors pas de façon "raisonnable" de définir la différence des deux grandeurs [3].

Une intégrale absolue

On remarquera que l'essentiel de la complexité de l'intégrale de Lebesgue est encapsulée dans l'intégrale des fonctions positives ; la définition (et les propriétés) de l'intégrale de fonctions signées s'en déduisent facilement. En particulier, comme la valeur absolue d'une fonction vérifie $|f| = f_+ + f_-$, on constate que si f est intégrable, alors $|f|$ également ; par construction, l'intégrale de Lebesgue est absolue, contrairement à l'intégrale de Henstock-Kurzweil sur $\mathbb{R}^n$. On a le résultat plus précis suivant, que l'on admettra :

Intégrale de Lebesgue et de Henstock-Kurzweil

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La fonction f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue v si et seulement si f est absolument intégrable (f et $|f|$ sont intégrables) pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil. Dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

Propriétés de l'intégrale

On mettra en avant dans cette section sur les propriétés de l'intégrale de fonctions positives ; les propriétés correspondantes de l'intégrale de fonctions signées s'en déduisent simplement.

Linéarité

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'intégrale par rapport à μ de fonctions positives (à valeurs finies ou infinies) est homogène et additive : si $\lambda \in [0, +\infty[$ et $f, g : X \to [0, +\infty]$ sont deux applications μ-mesurables,

$$\int (\lambda f) \mu = \lambda \int f \mu \ \text{ et } \ \int (f+g)\mu = \int f \mu + \int g \mu.$$

3. sauf à introduire un nouveau nombre "indéfini" $\perp$, absorbant pour l'addition, tel que $\perp = +\infty - \infty$ (le NaN ou *not-a-number* des numériciens est un concept très proche). Mais à ce stade nous n'allons pas explorer cette piste.

TODO – Pb causalité

La preuve utilise la version "concrête" de l'intégrale, par les suites, qui n'est vue que plus tard. Même chose pour TCM. Au minimum, en ante, pointer sur cette inversion.

Démonstration La preuve de l'homogénéité est immédiate si $\lambda = 0$; dans le cas contraire, l'application

$$h \in \mathcal{F}(f) \mapsto \lambda h \in \mathcal{F}(\lambda f)$$

qui associe à une application h mesurable, étagée et inférieure à f l'application λh qui est mesurable, étagée et inférieure à λf est bijective. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int (\lambda f)\mu &= \sup_{h \in \mathcal{F}(\lambda f)} \sum_{y \in [0,+\infty[} y \times \mu(g^{-1}(y)) \\
&= \sup_{k \in \mathcal{F}(f)} \sum_{y \in [0,+\infty[} y \times \mu((\lambda k)^{-1}(y)) \\
&= \sup_{k \in \mathcal{F}(f)} \sum_{z \in [0,+\infty[} (\lambda z) \times \mu((\lambda k)^{-1}(\lambda z)) \\
&= \lambda \sup_{k \in \mathcal{F}(f)} \sum_{z \in [0,+\infty[} z \times \mu(k^{-1}(z)) \\
&= \lambda \int f\mu.
\end{aligned}$$

L'application

$$(h, k) \in \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g) \mapsto h + k \in \mathcal{F}(f + g)$$

est également bien définie mais il n'est pas immédiat qu'elle soit bijective. Mais heureusement, la définition alternative, concrête, à l'intégrale d'une fonction positive nous fournit des suites croissantes de fonctions positives, mesurables et étagées f_k et g_k, convergeant respectivement vers f et g. Pour ces suites,

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k\mu = \int f\mu \;\text{ et }\; \lim_{k \to +\infty} \int g_k\mu = \int g\mu.$$

La suite $h_k = f_k + g_k$ est croissante, composée de fonctions positives étagées et mesurable ; elle converge simplement vers $f + g$, par conséquent, par le théorème de convergence monotone, on a

$$\int (f + g)\mu = \lim_{k \to +\infty} \int (f_k + g_k)\mu.$$

On pourra aisément se convaincre que l'intégrale des fonctions positives étagées et mesurables est additive ; par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int (f + g)\mu &= \lim_{k \to +\infty} \int f_k\mu + \int g_k\mu \\
&= \lim_{k \to +\infty} \int f_k\mu + \lim_{k \to +\infty} \int g_k\mu \\
&= \int f\mu + \int g\mu.
\end{aligned}$$

■

Positivité et nullité

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. L'intégrale de f par rapport à μ est positive ; elle est nulle si et seulement si f est nulle μ-presque partout :

$$\int f\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = 0.$$

Notons que comme l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) > 0\}$ – c'est-à-dire $f^{-1}(]0, +\infty[)$ – est mesurable par construction, “négligeable” est bien équivalent à “de mesure nulle” le concernant.

Démonstration La positivité est évidente par construction. Si f est nulle presque partout, comme pour toute fonction g positive, mesurable et étagée inférieure à f et tout $y \in [0, +\infty[$, soit $y = 0$, soit

$$g^{-1}(y) \subset f^{-1}(]0, +\infty]),$$

et donc

$$\mu(g^{-1}(y)) \leq \mu(f^{-1}(]0, +\infty])) = 0,$$

l'intégrale de g par rapport à μ vérifie

$$\int g\mu = \sum_{y \in [0, +\infty[} y \times \mu(g^{-1}(y)) = 0.$$

Par conséquent,

$$\int f\mu = \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g\mu = 0.$$

Réciproquement, si la fonction f n'est pas nulle μ-presque partout, c'est-à-dire si $\mu(f^{-1}(]0, +\infty])) \neq 0$, alors il existe nécessairement un $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu(f^{-1}([2^{-n}, +\infty])) > 0.$$

En effet, les ensembles $f^{-1}\left([2^{-n}, +\infty]\right)$ forment une suite croissante d'ensembles mesurables dont l'union est $f^{-1}\left(]0, +\infty]\right)$. Par σ-additivité de la mesure μ, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\left(f^{-1}\left([2^{-n}, +\infty]\right)\right) = \mu\left(f^{-1}\left(]0, +\infty]\right)\right).$$

Notons $A_n = f^{-1}([2^{-n}, +\infty])$; c'est un ensemble mesurable de mesure positive. La fonction $2^{-n} 1_{A_n}$ est positive, étagée, mesurable et inférieure à f. On a donc

$$0 < 2^{-n}\mu(A_n) = \int 2^{-n} 1_{A_n}\mu \leq \int f\mu.$$

L'intégrale de f par rapport μ est donc strictement positive. ■

Théorème de convergence monotone

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_k : X \to [0, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$, une suite croissante de fonctions mesurables et positives ; pour tout $x \in X$,

$$0 \leq f_0(x) \leq \cdots \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq \cdots$$

La limite simple $f : X \to [0, +\infty]$ des f_k, telle que pour tout $x \in X$,

$$f_k(x) \to f(x) \text{ quand } k \to +\infty,$$

est mesurable et

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu = \int f \mu.$$

Démonstration La fonction f est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. La positivité et la linéarité de l'intégrale entraînent

$$\int f_0 \mu \leq \cdots \leq \int f_k \mu \leq \ldots \int f_k \mu \leq \int f \mu.$$

et donc

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu \leq \int f \mu.$$

Soit $g : X \to [0, +\infty[$ une fonction étagée mesurable, donc de la forme

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j 1_{A_j}$$

avec $y_j \in [0, +\infty[$ et A_j mesurable. Soit $t \in [0, 1[$. Comme la suite des f_k est croissante et converge simplement vers f, les ensembles $E_k = \{x \in X \mid f_k(x) \geq tg(x)\}$ vérifient

$$E_0 \subset \cdots \subset E_k \subset \cdots \text{ et } \bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k = X.$$

Les f_k et g étant mesurables, les ensembles E_k sont mesurables. On a

$$\int f_k \mu \geq \int tg 1_{E_k} = t \sum_{j=0}^{n-1} y_j \mu(A_j \cap E_k).$$

et comme $\cup_{k=0}^{+\infty} A_j \cap E_k = A_j$, par σ-additivité de μ,

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu \geq t \lim_{k \to +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \mu(A_j \cap E_k) = t \left(\sum_{j=0}^{n-1} y_j \mu(A_j) \right) = t \int g \mu.$$

Cette inégalité étant valable pour tout $t \in [0, 1[$ et pour toute fonction positive étagée et mesurable g, on en déduit

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu \geq \sup_{g \in \mathcal{F}(f)} \int g \mu = \int f \mu.$$

■

Le théorème de convergence monotone fournit une alternative concrète à la construction initiale de l'intégrale.

Intégrale d'une fonction positive II

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Il existe une suite croissante de fonctions f_k étagées positives finies et mesurables, convergeant simplement vers f ; pour toute suite de ce type,

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu = \int f \mu$$

Démonstration Soit $\varepsilon_k \geq 0$ une suite de valeurs telles que

$$\lim_{k \to +\infty} \varepsilon_k = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k = +\infty.$$

La suite des fonctions f_k définies par $f_0 = 0$, puis

$$f_{k+1} = f_k + \varepsilon_k 1_{E_k} \text{ où } E_k = \{x \in X \mid f(x) \geq f_k(x) + \varepsilon_k\}$$

est croissante, et composée de fonctions étagées positives et mesurables. Sa limite simple est la fonction f. Par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu = \int f \mu$$

pour toute suite de ce type. ■

Théorème de convergence dominée

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_k : X \to [0, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions mesurables, dominées par la fonction intégrable $g : X \to [0, +\infty]$ c'est-à-dire telles que pour tout tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$,

$$0 \leq f_k(x) \leq g(x) \text{ et } \int_X g\mu < +\infty.$$

Si la suite des f_k à une limite simple $f : X \to [0, +\infty]$, c'est-à-dire si pour tout $x \in X$, $f_k(x) \to f(x)$ quand $k \to +\infty$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k \mu = \int f \mu.$$

TODO – Démonstration ■

Produit de mesures

Tribu produit

Soit $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle *tribu produit* de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et l'on note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la tribu sur le produit cartésien $X \times Y$ engendrée par les ensembles de la forme $A \times B$ où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma_{X \times Y} (\{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}).$$

Produit des boréliens

On peut montrer que pour tout couple d'entiers m et n, la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^{m+n}$ est le produit des tribus des boréliens sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Le résultat analogue n'est pas vrai pour la mesure de Lebesgue : il est nécessaire de compléter la tribu produit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{m+n}$ pour obtenir $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n})$ (cf. exercice “Complétion d'une mesure”).

Mesure produit

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés. On appelle *mesure produit* de μ et ν et l'on note $\mu \otimes \nu$ la fonction définie sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ par

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)\nu(B_k) \;\middle|\; A_k \in \mathcal{A},\; B_k \in \mathcal{B},\, C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \times B_k \right\}.$$

Démonstration Cf. Hunter (2011). ■

Intégrale dans un espace produit

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espace mesurés. Pour toute fonction $\mu \otimes \nu$-mesurable $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ ou toute fonction $\mu \otimes \nu$-intégrable $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, on notera

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\mu(dx)\nu(dy) := \int f(\mu \otimes \nu).$$

Mesure σ-finie

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que la mesure μ est σ-finie s'il existe une suite d'ensembles mesurables $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, telle que

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = X \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \mu(A_k) < +\infty.$$

Théorème de Fubini

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espace mesurés, tels que les mesures μ et ν soient σ-finies. Une fonction mesurable $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement l'intégrale itérée

$$\int_Y \left(\int_X |f(x, y)|\mu(dx) \right) \nu(dy)$$

est finie. Dans ce cas,

$$\int f\,(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Démonstration cf Hunter (2011). ■

Symmétrie

Le rôle joué par X et Y étant symétrique dans l'énoncé du théorème de Fubini,on peut également dire qu'une fonction mesurable $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement l'intégrale itérée

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\nu(dy) \right) \mu(dx)$$

est finie et que dans ce cas,

$$\int f\,(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(dy) \right) \mu(dx).$$

Exercices

Anagrame

Quel est l'anagrame de "Banach-Tarski" ? **(?)**

Mesures de Dirac

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\delta_x^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ l'application définie par

$$\delta_x^*(A) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Question 1 Montrer que δ_x^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$. **(?)**

Question 2 Déterminer les ensembles mesurables associés. **(?)**

On note δ_x la mesure correspondante que l'on appelle *mesure de Dirac en* x.

Question 3 Qu'est-ce qu'un ensemble négligeable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Dirac en x ? A quelle condition une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle nulle presque partout ? **(?)**

Question 4 A quelle condition la fonction $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ est-elle δ_x-mesurable ? δ_x-intégrable ? Calculer alors

$$\int f \delta_x.$$

(?)

Approximation par des ensembles mesurables

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Question 1 Montrer qu'il existe un ensemble v^*-mesurable B contenant A et tel que $v^*(A) = v^*(B)$. **(?)**

Question 2 A quelle condition portant sur $v^*(B \setminus A)$ l'ensemble A est-il v^*-mesurable ? **(?)**

Mesure intérieure

Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ et P un pavé compact de $\mathbb{R}^n$ contenant A. On appelle *mesure intérieure de A* la grandeur

$$v_*(A) = v^*(P) - v^*(P \setminus A).$$

Question 1 Montrer que la définition de $v_*(A)$ ne dépend pas du choix du pavé P. **(?)**

Question 2 Montrer que $v_*(A) \leq v^*(A)$, avec égalité si A est v^*-mesurable. **(?)**

Question 3 Montrer la réciproque de la question précédente : si $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné et $v_*(A) = v^*(A)$, alors A est v^*-mesurable. **(?)**

Mesure image

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $h : X \to Y$ une application. On définit la collection

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y \,|\, h^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

et la fonction $\mu \circ h^{-1} : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ par

$$\mu \circ h^{-1}(B) = \mu(h^{-1}(B)).$$

Question 1 Montrer que $\mathcal{B}$ est une tribu. **(?)**

Question 2 Montrer que $\mu \circ h^{-1}$ est une mesure sur $\mathcal{B}$; on l'appelle la *mesure image de μ par h.* **(?)**

Question 3 Montrer que la fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ est $\mu \circ h^{-1}$-intégrable si et seulement si $f \circ h$ est μ-intégrable et qu'alors,

$$\int_Y f \, (\mu \circ h^{-1})(dx) = \int_X (f \circ h)\mu(dx).$$

(?)

Tribu engendrée

Une collection $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de X est une *algèbre (d'ensembles)* si elle contient $\varnothing$ et est stable par complémentation et par union finie.

De manière similaire au cas des tribus, pour toute collection d'ensembles de X il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) algèbre qui la contient : c'est *l'algèbre engendrée* par cette collection.

Question 1 Déterminer l'algèbre engendrée sur $\mathbb{R}$ par la collection

$$\{[a, b[\ | \ -\infty < a \leq b \leq +\infty\}$$

(?)

Question 2 Déterminer la tribu engendrée (ou σ-algèbre) sur $\mathbb{R}$ par la même collection. **(?)**

Complétion d'une mesure

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note $A \,\Delta\, B$ la différence symétrique de deux sous-ensembles A et B de X l'ensemble, définie par

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Question 1 Caractériser au moyen de la différence symétrique Δ la tribu – notée $\overline{\mathcal{A}}$ – engendrée par l'union entre $\mathcal{A}$ et la collection $\mathcal{N}$ des ensembles négligeables pour μ :

$$\mathcal{N} = \{N \subset X \mid \text{il existe } A \in \mathcal{A} \text{ tel que } N \subset A \text{ et } \mu(A) = 0.\}.$$

(?)

Question 2 Montrer que la mesure μ peut être étendue d'une façon unique en une mesure $\overline{\mu}$ définie sur $\overline{\mathcal{A}}$. **(?)**

Solutions

Anagrame

"Banach-Tarski Banach-Tarski".

Mesures de Dirac

Question 1 Le réel x n'appartient pas à l'ensemble vide, donc $\delta_x^*(\varnothing) = 0$. Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$ et si $x \in A$, alors $x \in B$; on a donc $\delta_x^*(A) \leq \delta_x^*(B)$. Finalement, si $A = \cup_{k=0}^{+\infty} A_k$ et si $x \in A$, alors il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_k$, donc $1 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_x^*(A_k)$; en conséquence, $\delta_x^*(A) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_x^*(A_k)$. La fonction δ_x^* est donc une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.

Question 2 Soient $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Si $x \notin B$, alors $x \notin A \cap B \subset B$ et $x \notin A^c \cap B \subset B$, donc

$$\delta_x^*(A \cap B) + \delta_x^*(A^c \cap B) = \delta_x^*(B) = 0.$$

Dans le cas contraire, x appartient $A \cap B$ ou à $A^c \cap B$, mais pas au deux ensembles simultanément car ils sont disjoints ; on a donc

$$\delta_x^*(A \cap B) + \delta_x^*(A^c \cap B) = \delta_x^*(B) = 0.$$

Tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont donc δ_x^*-mesurables.

Question 3 Comme tout ensemble A de $\mathbb{R}$ est mesurable, A est négligeable pour la mesure de Dirac en x si et seulement si $\delta_x(A) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \notin A$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donc nulle presque partout si et seulement si $f(x) = 0$.

Question 4 Quelle que soit la fonction $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ et l'ouvert U de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et donc est δ_x-mesurable. La fonction f est donc mesurable. Elle est intégrable si et seulement si f_+ et f_- sont d'intégrales finies. Or, les fonctions simples positives et δ_x-mesurable inférieure f_+ sont de la forme

$$g(y) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k}(y) \quad \text{où} \quad g(y) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k}(y) \leq f_+(y)$$

avec $y_k \geq 0$ et $A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a donc

$$\int g \delta_x = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{A_k}(x) \leq f_+(x).$$

Comme par ailleurs, la fonction $g = f_+(x)1_{\{x\}}$ est simple, positive, δ_x-mesurable, inférieure à f_+ et vérifie

$$\int g\delta_x = f_+(x),$$

on a par conséquent

$$\int f_+\delta_x = \sup_{g\in\mathcal{F}(f_+)} \int g\delta_x = f_+(x).$$

De façon similaire, on peut montrer que

$$\int f_-\delta_x = f_-(x).$$

La fonction f est donc δ_x^*-intégrable si et seulement si les valeurs $f_-(x)$ et $f_+(x)$ sont finies, c'est-à-dire si et seulement si $f(x) \notin \{-\infty, +\infty\}$. On a alors

$$\int f\delta_x = f_+(x) - f_-(x) = f(x).$$

Approximation par des ensembles mesurables

Question 1 Par définition de $v^*(A)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une collection dénombrable de pavés P_k^j tels que

$$v^*(A) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v(P_k^j) \leq v^*(A) + 2^{-j}.$$

Les ensembles $B_j = \cup_k P_k^j$ sont v^*-mesurables comme unions dénombrables d'ensembles mesurables. De plus, comme $A \subset B_j$, et par σ-subadditivité de v^*

$$v^*(A) \leq v^*(B_j) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v^*(P_k^j) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v(P_k^j) \leq v^*(A) + 2^{-j}.$$

L'intersection $B = \cap_j B_j$ est un ensemble mesurable qui recouvre A et est contenu dans chaque B_j ; par conséquent pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$v^*(A) \leq v(B) \leq v(B_j) \leq v^*(A) + 2^{-j}.$$

On en déduit donc que $A \subset B$ et $v^*(A) = v^*(B)$ avec B mesurable.

Question 2 Notons au préalable que si $v^*(A) = +\infty$, alors A est automatiquement mesurable. Dans le cas contraire ($v^*(A) < +\infty$) l'ensemble A est v^*-mesurable si et seulement si $v^*(B \setminus A) = 0$. En effet, si A est v^*-mesurable et de mesure finie, comme $A \subset B$, on a

$$v^*(B) = v^*(A \cap B) + v^*(A^c \cap B) = v^*(A) + v^*(B \setminus A) = v^*(B) + v^*(B \setminus A).$$

Comme la mesure $v^*(A)$ est finie, $v^*(B\backslash A) = 0$. Réciproquement, si $v^*(B\backslash A) = 0$, alors $B \setminus A$ (et donc A) est mesurable. En effet, pour tout ensemble C de $\mathbb{R}^n$, on a d'une part

$$v^*(C) \leq v^*((B \setminus A) \cap C) + v^*((B \setminus A)^c \cap C)$$

par subbadditivité de v^*. D'autre part, comme $(B \setminus A) \cap C \subset B \setminus A$, $v^*((B \setminus A) \cap C) \leq v^*(B \setminus A) = 0$. Par ailleurs, $C \supset (B \setminus A)^c \cap C$, donc

$$v^*(C) \geq v^*((B \setminus A)^c \cap C) = v^*((B \setminus A) \cap C) + v^*((B \setminus A)^c \cap C).$$

On a donc l'égalité $v^*(C) = v^*((B \setminus A) \cap C) + v^*((B \setminus A)^c \cap C)$; l'ensemble $B \setminus A$ est donc mesurable, ainsi que $A = B \setminus (B \setminus A)$.

Mesure intérieure

Question 1 Pour montrer que la définition de $v_*(A)$ ne dépend pas du choix du pavé P contenant A, il suffit de prouver qu'on peut remplacer P par un pavé compact P' contenant P sans changer la valeur de $v_*(A)$ (pour toute paire de pavés compacts on peut en effet trouver un pavé compact les contenant).

Comme les pavés compacts P et P' sont mesurables (au sens de Carathéodory, pour la mesure extérieure v^*), l'ensemble $P' \setminus P$ l'est également ; on a donc

$$v^*(P') = v^*(P' \setminus P) + v^*(P)$$

et

$$v^*(P' \setminus A) = v^*(P' \setminus P) + v^*(P \setminus A),$$

ce qui établit

$$v^*(P') - v*(P' \setminus A) = v^*(P) - v^*(P \setminus A).$$

Question 2 La fonction v^* étant subadditive, on a

$$v^*(P) \leq v^*(A) + v^*(P \setminus A)$$

et donc $v_*(A) \leq v^*(A)$. Si A est mesurable, l'inégalité initiale devient une égalité et donc $v_*(A) = v^*(A)$.

Question 3 Montrons que la réciproque est également vraie. Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $v_*(A) = v^*(A)$, et soit B un ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. Nous cherchons à établir que $v^*(B) = v^*(A \cap B) + v^*(A^c \cap B)$. Remarquons tout d'abord que si le pavé compact P – qui est mesurable – contient A, on a

$$v^*(B) = v^*(P \cap B) + v^*(P^c \cap B) \;;$$

si nous réussissons à établir que

$$v^*(P \cap B) = v^*(A \cap (P \cap B)) + v^*(A^c \cap (P \cap B)),$$

on pourra alors conclure que

$$\begin{aligned}
v^*(B) &= v^*(P \cap B) + v^*(P^c \cap B) \\
&= v^*(A \cap (P \cap B)) + v^*(A^c \cap (P \cap B)) + v^*(P^c \cap B) \\
&= v^*(A \cap B) + v^*(P \cap (A^c \cap B)) + v^*(P^c \cap (A^c \cap B)) \\
&= v^*(A \cap B) + v^*(A^c \cap B).
\end{aligned}$$

Autrement dit, il nous suffit d'établir le résultat cherché quand B est un ensemble de $\mathbb{R}^n$ contenu dans le pavé compact P.

Pour cela, nous exploitons les résultats de l'exercice “Approximation par des ensembles mesurables”. A l'ensemble A on peut associer un sur-ensemble v^*-mesurable B tel que $v^*(A) = v^*(B)$; quitte à remplacer B par $P \cap B$, on peut également supposer que $B \subset P$. On a

$$v^*(P) = v^*(A) + v^*(P \setminus A) = v^*(B) + v^*(P \setminus B)$$

et donc $v^*(P \setminus A) = v^*(P \setminus B)$. D'autre part

$$\begin{aligned}
v^*(P) &= v^*(B) + v^*(P \setminus B) \\
&= v^*(A) + v^*(B \setminus A) + v^*(P \setminus B) \\
&= v^*(A) + v^*(B \setminus A) + v^*(P \setminus A)
\end{aligned}$$

et donc $v^*(B \setminus A) = 0$. Par les résultats de l'exercice “Approximation par des ensembles mesurables”, on en déduit que A est mesurable.

Mesure image

Question 1 L'ensemble $\mathcal{B}$ est une tribu ; en effet :

- $\varnothing \in \mathcal{A}$ et $\varnothing = h^{-1}(\varnothing)$, donc $\varnothing \in \mathcal{B}$.
- Si $B \in \mathcal{B}$, l'ensemble $A = h^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{A}$. Le complémentaire $Y \setminus B$ de B dans Y vérifie $h^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus h^{-1}(B) = X \setminus A$ et appartient donc à $\mathcal{A}$. L'ensemble $Y \setminus B$ appartient donc à $\mathcal{B}$.
- Si les ensembles B_k, $k \in N$ appartiennent à $\mathcal{B}$, comme $h^{-1}(\cup_k B_k) = \cup_k h^{-1}(B_k)$, cet ensemble appartient à $\mathcal{A}$. L'union dénombrable $\cup_k B_k$ appartient donc à $\mathcal{B}$.

Question 2 Montrons que $\mu \circ h^{-1}$ est une mesure sur $\mathcal{B}$.

- On a $\mu \circ h^{-1}(\varnothing) = \mu(h^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$.
- Si les ensembles B_k, $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\mathcal{B}$ et sont disjoints, alors les ensembles $h^{-1}(B_k)$ appartiennent à $\mathcal{A}$, et sont disjoints. Comme

$h^{-1}(\cup_k B_k) = \cup_k h^{-1}(B_k)$, on a

$$\begin{aligned}
\mu \circ h^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right) &= \mu\left(h^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_k h^{-1}\left(B_k\right)\right) \\
&= \sum_k \mu\left(h^{-1}\left(B_k\right)\right) \\
&= \sum_k \mu \circ h^{-1}\left(B_k\right)
\end{aligned}$$

Question 3 Montrons tout d'abord que la fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $f \circ h$ est mesurable. Par définition, f est mesurable si pour tout ensemble borélien B de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(B)$ appartient $\mathcal{B}$, c'est-à-dire si et seulement si

$$h^{-1}(f^{-1}(B)) = (f \circ h)^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

c'est-à-dire si et seulement si $f \circ h$ est mesurable.

Comme $(f \circ h)_+ = f_+ \circ h$ et $(f \circ h)_- = f_- \circ h$, il nous suffit de montrer que pour toute fonction mesurable $f : Y \to [0, +\infty]$, on a

$$\int (f \circ h)\mu = \int f(\mu \circ h^{-1})$$

pour pouvoir conclure que $f : Y \to \mathbb{R}$ est $\mu \circ h^{-1}$-intégrable si et seulement si $f \circ h$ est μ-intégrable et que l'égalité ci-dessus est valable.

Or pour une telle fonction f, il existe une suite croissante de fonctions f_k simples, positives et mesurables convergeant simplement vers f, et l'on a

$$\int f(\mu \circ h^{-1}) = \lim_{k \to +\infty} \int f_k(\mu \circ h^{-1}).$$

Comme

$$\begin{aligned}
\int f_k(\mu \circ h^{-1}) &= \sum_{y \in f_k(Y)} y \times (\mu \circ h^{-1})(f_k^{-1}(\{y\})) \\
&= \sum_{y \in f_k(Y)} y \times \mu(h^{-1}(f_k^{-1}(\{y\})) \\
&= \sum_{y \in f_k(Y)} y \times \mu((f_k \circ h)^{-1}(\{y\}))
\end{aligned}$$

si $y \in f_k(Y)$, mais $y \notin f_k(h(X))$, alors $\mu((f_k \circ h)^{-1}(\{y\})) = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int f_k(\mu \circ h^{-1}) &= \sum_{y \in (f_k \circ h)(X)} y \times \mu((f_k \circ h)^{-1}(\{y\})) \\
&= \int (f_k \circ h)\mu.
\end{aligned}$$

Les fonctions $f_k \circ h$ sont simples, positives et mesurables, leur suite est croissante et converge simplement vers $f \circ h$. Par le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\int f(\mu \circ h^{-1}) = \int (f \circ h)\mu.$$

Tribu engendrée

Question 1 Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de X contenant tous les intervalles $[a, b[$ quand $-\infty < a \leq b \leq +\infty$, alors par complémentation de $[a, +\infty[$, elle contient nécessairement les ensembles de la forme $]-\infty, a[$ et donc par union finie tous les ensembles de la forme

$$]-\infty, a_0[\cup \cdots \cup [a_k, b_k[\cup \cdots \cup [a_m, +\infty[$$

où les a_k et les b_k sont finis et le premier et dernier terme de cette union peuvent être omis. On vérifiera alors que cet ensemble est stable par union finie et par complémentation : c'est une algèbre de $\mathbb{R}$. Par conséquent, c'est la plus petite algèbre de $\mathbb{R}$ qui contienne la collection initiale ; c'est donc l'algèbre engendrée recherchée.

Question 2 Si $\mathcal{A}$ est une tribu de X contenant tous les intervalles $[a, b[$ quand $-\infty < a \leq b \leq +\infty$, alors elle contient aussi

$$]a, b[= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left[a + \frac{b-a}{2^k}, b\right[$$

et donc tout ouvert de $\mathbb{R}$ puisqu'un tel ensemble est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Par conséquent, elle contient tous les Boréliens. Comme l'ensemble des Boréliens est une tribu de $\mathbb{R}$, c'est donc la tribu engendrée par la collection initiale.

Complétion d'une mesure

Question 1 Nous allons établir que la tribu engendrée par $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ est l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{A \,\Delta\, N \mid A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}\}.$$

Tout d'abord, comme tout $A \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}$ appartiennent à cette tribu engendrée, A^c et N^c également et donc $(A \cap N^c) \cup (A^c \cap N) = A \,\Delta\, N$ également. L'ensemble $\mathcal{B}$ est donc inclus dans la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$. Il suffit donc de montrer qu'il s'agit bien d'une tribu pour pouvoir conclure qu'elle est la tribu engendrée recherchée.

Il est clair que $\varnothing$ appartient à $\mathcal{B}$, comme différence symétrique entre $\varnothing$ et $\varnothing$. Si $B = A \,\Delta\, N$ appartient à $\mathcal{B}$, alors

$$B^c = ((A \cap N^c) \cup (A^c \cap N))^c = (A^c \cup N) \cap (A \cup N^c).$$

Comme $B^c = X \cap B^c = (A \cup A^c) \cap B^c$, par distributivité on a

$$\begin{aligned}
B^c &= (A^c \cap A) \cup (A^c \cap N^c) \cup (N \cap A) \cup (N \cap N^c) \\
&= (A^c \cap N^c) \cup (A \cap N) \\
&= ((A^c) \cap N^c) \cup ((A^c)^c \cap N) \\
&= A^c \,\Delta\, N
\end{aligned}$$

et par conséquent $B^c \in \mathcal{B}$.

Si les A_k, $k \in \mathbb{N}$, appartiennent $\mathcal{A}$ et les N_k, $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\mathcal{N}$, alors on pourra se convaincre que

$$(\cup_k A_k) \setminus (\cup_k N_k) \subset \cup_k (A_k \,\Delta\, N_k) \subset (\cup_k A_k) \cup (\cup_k N_k),$$

ce qui prouve que

$$\cup_k (A_k \,\Delta\, N_k) = (\cup_k A_k) \,\Delta\, M \quad \text{avec} \quad M \subset N := \cup_k N_k.$$

Comme $N_k \subset B_k \in \mathcal{A}$ avec $\mu(B_k) = 0$,

$$N = \cup_k N_k \subset \cup_k B_k \in \mathcal{A},$$

avec $\mu(\cup_k B_k) = 0$ par σ-additivité de μ. L'ensemble N (et donc l'ensemble M) appartient donc à $\mathcal{N}$. Comme $\cup_k A_k \in \mathcal{A}$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est stable par union dénombrable. Cet collection contient l'ensemble vide, est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable ; c'est donc une tribu.

Question 2 Supposons que $\overline{\mu}$ soit une mesure sur $\overline{\mathcal{A}}$ qui prolonge μ. Alors, nécessairement, pour tout ensemble $N \in \mathcal{N}$, on a $\overline{\mu}(N) = 0$. En effet, il existe un $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$, donc par croissance de $\overline{\mu}$,

$$\overline{\mu}(N) \subset \overline{\mu}(A) = \mu(A) = 0.$$

Soit alors $A \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}$. Les ensembles $N_1 := A \cap N$ et $N_2 = A^c \cap N$ sont inclus dans N et donc appartiennent à $\mathcal{N}$, par conséquent

$$\overline{\mu}(A \,\Delta\, N) = \overline{\mu}((A \setminus N_1) \cup N_2) = \overline{\mu}(A) - \overline{\mu}(N_1) + \overline{\mu}(N_2) = \overline{\mu}(A).$$

Cette équation définit uniquement $\overline{\mu}$; il faut toutefois s'assurer que cette définition est cohérente, c'est-à-dire que si $A \,\Delta\, N = B \,\Delta\, M$ où $A, B \in \mathcal{A}$ et $N, M \in \mathcal{N}$, alors $\mu(A) = \mu(B)$. En utilisant l'associativité de Δ, on montre que

$$A \,\Delta\, (N \,\Delta\, M) = (A \,\Delta\, N) \,\Delta\, M = (B \,\Delta\, M) \,\Delta\, M = B \,\Delta\, (M \,\Delta\, M) = B.$$

Par conséquent, $N \,\Delta\, M \in \mathcal{A}$, et comme $N \,\Delta\, M \subset N \cup M$, on en déduit que $\mu(N \,\Delta\, M) = 0$, et donc

$$\mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap (N \,\Delta\, M)) + \mu(A^c \cap (N \,\Delta\, M)) = \mu(A).$$

Il est ensuite nécessaire de prouver que $\overline{\mu}$ est bien une mesure. Soit $A_k \in \mathcal{A}$ et $N_k \in \mathcal{N}$ deux suites d'ensembles tels que les $A_k \,\Delta\, N_k$ soient deux à deux disjoints. Soit M_k un ensemble de $\mathcal{A}$ contenant N_k et tel que $\mu(M_k) = 0$. L'ensemble

$B_k := A_k \setminus M_k$ appartient $\mathcal{A}$ et $\mu(B_k) = \mu(A_k)$; de plus, comme $B_k \subset A_k \,\Delta\, N_k$, les B_k sont disjoints deux à deux. On a déjà vu à la question précédente que

$$\overline{\mu}(\cup_k A_k \,\Delta\, N_k) = \overline{\mu}((\cup_k A_k) \,\Delta\, N) \quad \text{où} \quad N \in \mathcal{N},$$

donc

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(\cup_k A_k \,\Delta\, N_k) &= \mu(\cup_k A_k) = \mu(\cup_k B_k) \\ &= \sum_k \mu(B_k) = \sum_k \mu(A_k) = \sum_k \overline{\mu}(A_k \,\Delta\, N_k).\end{aligned}$$

La fonction $\overline{\mu}$ est donc σ-additive.

Réferences

Hunter, John K. 2011. *Measure Theory*. Department of Mathematics, University of California at Davis. https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_theory.html.