Calcul Intégral II

STEP, MINES ParisTech*

22 octobre 2019 (#2f387a0)

Table des matières

*Ce document est un des produits du projet `boisgera/CDIS`, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS).

Introduction

L'intégrale de Henstock-Kurzweil, introduite dans "Calcul Intégral I", présente l'avantage de pouvoir intégrer une plus grande gamme de fonctions que l'intégrale de Riemann : moins régulières, non bornées et/ou définies sur des intervalles non-bornés [1].

Il faut néanmoins reconnaître qu'à ce stade de notre exposé l'intégrale de Riemann est parfois plus pratique. Par exemple : si avec l'intégrale de Henstock-Kurzweil, on sait que λf et $f+g$ sont intégrables quand f et g le sont, il n'est pas certain que le produit fg soit intégrable ; et nous ne disposons pas encore des outils adaptés pour étudier cette intégrabilité. Or dans le cadre Riemannien, rien de plus simple : si f et g sont des fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment, le produit fg est systématiquement intégrable au sens de Riemannn sur ce segment [2].

Cette remarque ne souligne pas à proprement parler un défaut de l'intégrale de Henstock-Kurzweil, mais plutôt une conséquence de sa généralité : en permettant d'intégrer des fonctions telles que $x \in [0,1] \mapsto 1/\sqrt{x}$ (presque partout), on s'expose à devoir refuser d'intégrer le produit d'une fonction par elle-même, ici $x \in [0,1] \mapsto 1/x$ (presque partout). Il est donc normal de devoir imposer des conditions supplémentaires pour garantir l'intégrabilité d'un produit.

Heureusement, comme dans le cas de l'intégrale de Riemann, un critère d'intégrabilité des fonctions – nécessaire et suffisant – existe pour établir ce type de résultat (et bien d'autres). Comme dans le cas de l'intégrale de Riemann, il se décompose en deux tests indépendants : pour être intégrable une fonction doit être "encadrée par des fonctions intégrables" et "suffisamment régulière". Bien sûr ici les fonctions qui jouent le rôle de bornes devront être intégrables au sens de Henstock-Kurzweil (et non plus de Riemann) ; quant à la régularité, il ne s'agira plus de tester la continuité presque partout, mais de vérifier la *mesurabilité* de la fonction considérée, une propriété que possèdent presque toutes les fonctions "imaginables".

1. Sans nécessiter de construction supplémentaire ; dans le cadre de l'intégrale de Riemann, certaines de ces intégrales peuvent être calculées comme des intégrales *impropres*, par un passage à la limite d'intégrales de Riemann de fonctions définies sur un sous-ensemble. Mais l'intégrale qui en résulte – on parle parfois d'intégrale de *Cauchy-Riemann* – perd une bonne partie des propriétés de l'intégrale de Riemann.

2. En première approche on pourra rapidement s'en convaincre en remplaçant "intégrables au sens de Riemann" par "continues". Dans le cas général, supposons que f et g sont intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire bornées et continues presque partout. De toute évidence, leur produit est borné. Si f est continue en tout point de $[a,b]$ à l'exception de l'ensemble négligeable A et g en tout point de $[a,b]$ à l'exception de l'ensemble négligeable B, l'ensemble C des points de discontinuité de fg est nécessairement dans $A \cup B$, donc négligeable. Le produit fg est donc intégrable au sens de Riemann.

Bien que n'étant un cas particulier, l'intégrabilité d'un produit revêt une importance particulière. En effet dans ce chapitre pour des raisons de simplicité, nous mettrons l'accent sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}$; par défaut le symbole intégrale sans bornes désignera donc l'intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$:

$$\int := \int_{-\infty}^{+\infty}.$$

Si une fonction n'est définie que sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ – qui pourra être un intervalle ou un ensemble plus complexe – il est naturel de l'étendre en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 0 en dehors de A puisque dans le cas des intervalles, cette opération ne change pas la valeur de l'intégrale. Le mouvement inverse – restreindre une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à un sous-ensemble nécessite de considérer le produit $1_A f$ de f par la fonction caractéristique de A, ce qui soulève la question de l'étude de l'intégrabilité de ces fonctions caractéristiques.

Mais notre première étape dans ce chapitre sera de nous doter d'un théorème de convergence dominée, qui permettra – sous certaines conditions qui sont plus simples que dans le cadre Riemannien classique – de calculer l'intégrale d'une fonction f à partir des intégrales d'une suite de fonctions convergeant vers f.

Théorèmes de Convergence

Théorème de convergence dominée

Si une suite de fonctions intégrables $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge simplement vers la fonction f, c'est-à-dire si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x) = f(x)$$

et qu'il existe deux fonctions intégrables g et h encadrant la suite f_k, c'est-à-dire telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \leq f_k(x) \leq h(x)$$

alors la fonction f est intégrable et

$$\int f(t)\, dt = \int \lim_{k \to +\infty} f_k(t)\, dt = \lim_{k \to +\infty} \int f_k(t)\, dt.$$

Démonstration Se reporter à Demailly (2011). ■

Dérivation sous le signe somme

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. pour tout $\lambda \in I$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(\lambda, t)$ est intégrable,
2. pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda \in I \mapsto f(\lambda, t)$ est dérivable et

   $$|\partial_\lambda f(\lambda, t)| \leq g(t)$$

   où $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ est une fonction intégrable.

Alors la fonction $S : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$S(\lambda) := \int f(\lambda, t)\, dt$$

est dérivable pour tout λ et

$$S'(\lambda) = \int \partial_\lambda f(\lambda, t)\, dt.$$

Démonstration Par linéarité de l'intégrale, pour tout $\lambda \in I$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda + h \in I$, on a

$$\frac{S(\lambda + h) - S(\lambda)}{h} = \int \frac{f(\lambda + h, t) - f(\lambda, t)}{h}\, dt.$$

Soit h_k une suite de réels non nuls tels que $\lambda + h_k \in I$ et $h_k \to 0$ quand $k \to +\infty$. En raison de la dérivabilité de f par rapport à son premier argument, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(\lambda + h_k, t) - f(\lambda, t)}{h_k} = \partial_\lambda f(\lambda, t).$$

De plus, par l'inégalité des accroissement finis, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f(\lambda + h_k, t) - f(\lambda, t)}{h_k} \right| \leq \sup_{\mu \in I} |\partial_\lambda f(\mu, t)| \leq g(t),$$

et donc

$$-g(t) \leq \frac{f(\lambda + h_k, t) - f(\lambda, t)}{h_k} \leq g(t).$$

Les taux d'accroissements de f sont donc encadrés par deux fonctions intégrables. Par le théorème de convergence dominée, on conclut que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{S(\lambda + h_k) - S(\lambda)}{h_k} = \int \partial_\lambda f(\lambda, t)\, dt,$$

ce qui achève la démonstration. ■

Théorème de convergence monotone

Si une suite de fonctions intégrables $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et majorée en tout point, c'est-à-dire si pour tout x de $\mathbb{R}$

$$\text{pour tout } \; k \in \mathbb{N}, \; f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \; \text{ et } \; \sup_k f_k(x) < +\infty,$$

alors la limite simple f des f_k est intégrable si et seulement si

$$\sup_k \int f_k(t)\, dt < +\infty.$$

et dans ce cas,

$$\int f(t)\, dt = \int \lim_{k \to +\infty} f_k(t)\, dt = \lim_{k \to +\infty} \int f(t)\, dt.$$

Démonstration Se reporter à Demailly (2011). ■

Ensembles mesurables

Il existe un lien étroit entre la notion de longueur d'un ensemble de réels et le calcul intégral. Nous savons par exemple que pour tout intervalle compact $E = [a, b]$, la longueur $b - a$ de l'intervalle peut être calculée par l'intégrale de la fonction caractéristique de E :

$$\ell(E) = \ell([a, b]) := b - a = \int_a^b dt = \int 1_{[a,b]}(t)\, dt = \int 1_E(t)\, dt.$$

Si E est une collection finie d'intervalles disjoints $[a_i, b_i]$, l'intégrale de 1_E vaut cette fois-ci $\sum_i b_i - a_i$, ce qui correspond toujours à la valeur "intuitive" de la longueur de l'ensemble.

Il apparait donc légitime pour définir la longueur d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ aussi général que possible [3] de $\mathbb{R}$ de prendre cette égalité comme une définition, ce qui suppose toutefois que la fonction caractéristique soit intégrable ; on parle

3. Il existe des ensembles dont on ne peut pas définir raisonnablement la longueur, sauf à accepter un concept de longueur aux propriétés très étranges. Cette situation ne résulte pas de la méthode de définition de la longueur par l'intégrale ; c'est au contraire une limitation intrinsèque de la théorie de la mesure que nous étudierons plus en détail par la suite. Malheureusement pour la didactique, il n'existe aucun exemple explicite (élaboré par un procédé constructif) d'ensemble qui ne soit pas mesurable (et c'est une chose que l'on peut prouver !). On peut se consoler en apprenant que, du point de vue logique, si l'on suppose que tous les ensembles sont mesurables – ce qui peut sembler relativement anodin – on peut alors prouver des propositions beaucoup plus perturbantes, comme l'existence de partitions de $\mathbb{R}$ "strictement plus grandes" que $\mathbb{R}$ lui-même.

alors d'*ensemble intégrable* ou *de longueur finie*. Cette définition laisse toutefois de coté les ensembles "trop grands" pour être intégrables, mais par ailleurs parfaitement inoffensifs, comme $\mathbb{R}$ tout entier ou l'ensemble des réels positifs. Nous préférons donc mettre l'accent sur la notion d'ensemble *mesurable* :

Ensemble mesurable

Un ensemble E de $\mathbb{R}$ est *de longueur finie* si sa fonction caractéristique 1_E est intégrable sur $\mathbb{R}$; il est *mesurable* si sa fonction caractéristique est intégrable sur tout intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. La (mesure de) *longueur* d'un ensemble E mesurable est définie par

$$\ell(E) := \int 1_E(t)\, dt$$

si E est de longueur finie et

$$\ell(E) := +\infty$$

dans le cas contraire (si E mesurable mais pas de longueur finie).

Interprétation

Il faut comprendre le terme "mesurable" littéralement, comme signifiant "dont on peut définir la mesure (de longueur)", qui est un nombre fini ou infini. Cette interprétation est cohérente, puisque tous les ensembles E de longueur finie sont bien mesurables ; en effet si la fonction caractéristique 1_E est intégrable, sa restriction à tout intervalle compact $[a, b]$ également.

Un ensemble est *dénombrable* s'il est fini ou bien en bijection avec $\mathbb{N}$.

Propriétés élémentaires

1. L'ensemble vide est mesurable.
2. Le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable.
3. L'union d'une collection dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

Complémentaire absolu et relatif

Le complémentaire (absolu) d'un ensemble A, relativement au sur-ensemble $X = \mathbb{R}$ dans ce chapitre – mais le concept peut facilement être généralisé – désigne l'ensemble des points de X qui ne sont pas dans A. Quand le choix de X est clair dans le contexte, on pourra le noter

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Pour être plus explicite, on peut utiliser la notation du complémentaire relatif : le complémentaire de A dans B est l'ensemble des points de B qui n'appartiennent pas à A :

$$B \setminus A = \{x \in B \,|\, x \notin A\}.$$

Cette notation ne suppose pas a priori que A soit inclus dans B ; on a bien sûr

$$A^c = X \setminus A.$$

Démonstration des propriétés élémentaires

1. La fonction caractéristique $1_{\varnothing}$ est identiquement nulle ; l'ensemble vide $\varnothing$ est donc de longueur finie et par conséquent mesurable.
2. Si l'ensemble A est mesurable et $B = \mathbb{R} \setminus A$, pour tout $[a, b]$, l'ensemble $A \cap [a, b]$ est de longueur finie. Par ailleurs, l'ensemble $[a, b]$ est de longueur finie. Donc, comme

$$1_{B \cap [a,b]} = 1_{[a,b]} - 1_{A \cap [a,b]},$$

l'ensemble $B \cap [a, b]$ est de longueur finie ; l'ensemble B est donc mesurable.
3. Montrons tout d'abord que l'union d'une collection finie d'ensembles mesurables est mesurable ; il suffit d'établir que si A et B sont mesurables, alors leur union $A \cup B$ l'est également. Or, pour tout intervalle compact $[a, b]$, on a

$$(A \cup B) \cap [a, b] = (A \cap [a, b]) \cup (B \cap [a, b]),$$

ce qui se traduit au moyen des fonctions caractéristiques par la relation

$$1_{(A \cup B) \cap [a,b]} = \max \left(1_{A \cap [a,b]}, 1_{B \cap [a,b]}\right).$$

La fonction caractéristique de $(A \cup B) \cap [a, b]$ est donc intégrable comme maximum de deux fonctions positives intégrables (cf. annexe). L'union $A \cup B$ est donc mesurable.

Considérons désormais une suite d'ensembles mesurables A_k, pour $k \in \mathbb{N}$. Quitte à remplacer A_k par $\cup_{j=0}^{k} A_j$ – ce qui ne change pas le caractère mesurable des A_k ou leur union jusqu'à l'ordre k – on peut supposer que $A_k \subset A_{k+1}$. Pour tout intervalle compact $[a, b]$,

$$\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \cap [a, b] = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (A_k \cap [a, b])\,;$$

les ensembles $A_k \cap [a, b]$ sont de longueur finie, c'est-à-dire que $1_{A_k \cap [a,b]}$ est intégrable. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq 1_{A_k \cap [a,b]} \leq 1_{[a,b]}$; les ensembles $A_k \cap [a, b]$ formant une suite croissante pour l'inclusion, la suite des fonctions caractéristiques $1_{A_k \cap [a,b]}$ est croissante et majorée par $1_{[a,b]}$; pour tout réel x on a donc

$$1_{\left(\cup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \cap [a,b]}(x) = \lim_{k \to +\infty} 1_{A_k \cap [a,b]}(x)$$

Par le théorème de convergence dominée, la fonction caractéristique de $\left(\cup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \cap [a,b]$ est intégrable ; cet ensemble est donc mesurable.

■

Intersection d'ensemble mesurables

L'intersection d'une collection dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

Démonstration Notons que pour toute collection $\mathcal{A}$ d'ensembles de $\mathbb{R}$,

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c \right)^c.$$

La conclusion quand $\mathcal{A}$ est dénombrable résulte alors des propriétés élémentaires des ensembles mesurables. ■

Complémentaire relatif

Si les ensembles A et B sont mesurables, le complémentaire $B \setminus A$ de A dans B est mesurable.

Démonstration Les ensembles A et B appartenant à $\mathbb{R}$, on a $B \setminus A = B \cap A^c$; le complément de A dans B est donc mesurable comme intersection d'ensembles mesurables. ■

Topologie et ensembles mesurables

Tout ensemble fermé (ou ouvert) est mesurable.

Démonstration Les ensembles fermés et ouverts étant complémentaires les uns des autres et le complémentaire d'un ensemble mesurable étant mesurable, on peut se contenter de démontrer le résultat soit pour les ouverts soit pour les fermés ; la preuve s'avère plus simple dans le cas des ouverts.

Tout intervalle ouvert I est mesurable : en effet, son intersection avec un intervalle compact $[a,b]$ est un intervalle inclus dans $[a,b]$. La fonction caractéristique associée est de la forme $1_{[c,d]}$, ou en diffère au plus en deux points ; dans tous les cas, elle est intégrable.

Si maintenant U est un ensemble ouvert, pour chaque point x de U on peut construire le plus grand intervalle ouvert I_x contenant x et inclus dans U (c'est l'union de tous les intervalles ouvert vérifiant ces deux propriétés). Pour un couple x et y dans U, soit $I_x = I_y$, soit I_x et I_y sont disjoints et l'union de tous les intervalles I_x est égale à U. Comme dans chaque I_x on peut choisir un nombre rationnel y tel que $I_x = I_y$, la collection de I_x est dénombrable. L'ouvert U est donc une union dénombrable d'intervalles ouverts [4], qui sont tous mesurables, il est donc mesurable. ■

Ensembles négligeables

Un ensemble est de longueur nulle si et seulement s'il est négligeable.

Démonstration Si l'ensemble A est négligeable, sa fonction caractéristique est égale presque partout à la fonction identiquement nulle, qui est intégrable et d'intégrale nulle. Par conséquent, 1_A est intégrable et d'intégrale nulle, donc l'ensemble A est intégrable et de longueur nulle.

Réciproquement, supposons l'ensemble A de longueur nulle ; nous cherchons à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable d'intervalles I_i de $\mathbb{R}$ qui recouvre A et telle que

$$\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Supposons temporairement que A soit inclus dans un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. La fonction caractéristique 1_A de A est intégrable, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge γ sur $[a, b]$ telle que, si la subdivision pointée (totale ou partielle) $\mathcal{D} = \{(t_i, I_i)\}_i$ est subordonnée à γ, on a

$$S(1_A, \mathcal{D}) = \left| S(1_A, \mathcal{D}) - \sum_i \int_{I_i} 1_A(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Pour conclure, nous allons construire une famille dénombrable $\{(t_i, I_i)\}_i$ où les I_i sont des intervalles compacts de $[a, b]$ sans chevauchement, tels que pour tout i, $t_i \in A$, $I_i \subset \gamma(t_i)$ et tels que la famille des I_i recouvre A. Si cette construction est acquise et que $\mathcal{D}_k$ désigne la collection des $\{(t_i, I_i)\}$ pour $0 \leq i \leq k-1$, alors c'est une subdivision pointée partielle de $[a, b]$ subordonnée à γ et donc

$$S(1_A, \mathcal{D}_k) = \sum_{i=0}^{k-1} 1_A(t_i)\ell(I_i) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

4. le résultat correspondant est faux pour les intervalles fermés.

En passant à la limite sur k, cette inégalité fournit comme souhaité

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Procédons à la construction de la collection de (t_i, I_i), par dichotomie. S'il existe un $t \in [a, b]$ tel que $t \in A$ et $[a, b] \subset \gamma(t)$, alors on prend pour collection le singleton $\{(t, [a, b])\}$. Dans le cas contraire, on considère la décomposition de $[a, b]$ en $[a, (a + b)/2]$ et $[(a + b)/2, b]$. On examine chacun de ces intervalles J et s'il existe un $t \in A \cap J$ tel que $J \subset \gamma(t)$, on inclut la paire (t, J) dans la collection ; dans le cas contraire, on poursuit la dichotomie. Cette procédure définit par construction une famille dénombrable $\{(t_i, I_i)\}_i$ où $t_i \in A$ et les I_i sont des intervalles compacts de $[a, b]$ sans chevauchement tels que pour tout t_i, $I_i \subset \gamma(t_i)$. De plus, les I_i recouvrent A : en effet si l'on considère $t \in A$, il existe nécessairement un entier k tel que tout intervalle compact I de longueur inférieure ou égale à $(b - a)/2^k$ contenant t vérifie $I \subset \gamma(t)$. Par conséquent, t appartient à l'un des intervalles inclus par le procédé au plus tard à l'étape k de la dichotomie.

Finalement, supposons A de longueur nulle mais plus nécessairement borné. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A \cap [-k, k]$ est de longueur nulle et borné ; il peut donc être recouvert par une famille dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure $\varepsilon/2^{k+1}$. Comme $A = \cup_{k=0}^{+\infty}(A \cap [-k, k])$, la collection de tous ces intervalles recouvre A ; la somme de leur longueur est majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon/2^{k+1} = \varepsilon$. L'ensemble A est donc négligeable. ■

Complétude de la longueur

Un sous-ensemble d'un ensemble de longueur nulle est de longueur nulle.

Démonstration Un sous-ensemble A d'un ensemble négligeable B est négligeable car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable d'intervalles I_i recouvrant B et tels que $\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon$; or cette famille recouvre aussi A. Comme un ensemble est négligeable si et seulement si il est de longueur nulle, cet argument conclut la démonstration. ■

Fonctions mesurables

Fonction mesurable

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *mesurable* si elle est la limite simple d'une suite de fonctions intégrables, c'est-à-dire s'il existe une suite de fonctions intégrables

$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) \to f(x)$ quand $k \to +\infty$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est mesurable si chacune de ses composantes est mesurable.

Mesurabilité sur un intervalle

Nous nous limitons dans ce chapitre à l'étude des fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}$. La notion peut être très facilement étendue à une fonction f définie sur un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ de la façon suivante : on dira que f est mesurable si son prolongement par 0 dans le complémentaire de I est mesurable. Nous vous laissons le soin de généraliser en conséquence les énoncés qui vont suivre.

Critère d'intégrabilité dominée

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si f est mesurable et il existe deux fonctions intégrables $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g \leq f \leq h$.

Interprétation

Souvenons-nous qu'une fonction définie sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est encadrée par deux fonctions intégrables au sens de Riemann et continue presque partout.

Dans le cas de l'intégrale de Riemann comme de Henstock-Kurzweil, l'intégrabilité est donc caractérisée par une structure analogue qui repose sur deux propriétés distinctes : être encadrée par deux fonctions intégrables (pour la notion d'intégrale considérée) et être "suffisamment régulière". La différence est que dans le cas de l'intégrale de Riemann l'exigence de régularité est forte – être continue presque partout – alors que dans le cas de l'intégrale de Henstock-Kurzweil, la régularité demandée – la mesurabilité – s'avère être une condition très peu contraignante [5].

Plusieurs propriétés des fonctions mesurables se déduisent directement de leur définition :

Les fonctions intégrables sont mesurables

Démonstration Si f est une fonction intégrable, elle est la limite simple de la suite constante égale à f. ■

5. A tel point que s'il l'on peut prouver l'existence d'une fonction non-mesurable, sa "construction explicite" est impossible. Les fonctions non-mesurables font partie des objets "intangibles" (cf. Schechter (1996)) dont l'existence est prédite par la théorie mais que l'on ne rencontre jamais en pratique ...

Les fonctions mesurables forment un espace vectoriel

Démonstration Si f et g sont mesurables et λ est un nombre réel, il existe des suites f_k et g_k de fonctions intégrables convergeant simplement vers f et g respectivement. Les fonctions $f_k + g_k$ et λf_k sont intégrables et convergent alors simplement vers $f + g$ et λf respectivement. ■

Les fonctions continues (presque partout) sont mesurables

Démonstration Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue presque partout. Soit $k \in \mathbb{N}$; on note $\sigma_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\sigma_k(x) = \left| \begin{array}{rl} -k & \text{si } x \in \,]-\infty, -k], \\ x & \text{si } x \in \,]-k, k[, \\ k & \text{si } x \in [k, +\infty[. \end{array} \right.$$

Comme σ_k est continue et bornée, la fonction $g_k : [-k, k] \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \in [-k, k] \mapsto (\sigma_k \circ f)(x)$$

est continue presque partout sur $[-k, k]$ et bornée. Par conséquent, elle est intégrable au sens de Riemann – et donc de Henstock-Kurzweil – sur $[-k, k]$. Son extension f_k par zéro au reste de $\mathbb{R}$ est donc intégrable au sens de Henstock-Kurzweil. De plus, la suite des f_k converge simplement vers f ; la fonction f est donc mesurable. ■

Critère de l'image réciproque

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est mesurable si et seulement l'image réciproque de tout fermé (ou de tout ouvert) de $\mathbb{R}^n$ par f est mesurable.

Ce critère ressemble beaucoup à la caractérisation abstraite des fonctions continues, qui exige que l'image de tout fermé (ou de tout ouvert) soit un fermé (ou un ouvert). Comme tout fermé (et tout ouvert) est mesurable, ce critère montre de façon particulièrement simple que toute fonction continue est mesurable.

En se basant exclusivement sur ce critère de mesurabilité par les images réciproques (donc en comprenant temporairement “mesurable” comme “satisfaisant le critère de l'image réciproque” en attendant la preuve de l'équivalence des deux propriétés), on peut montrer les résultats suivants:

Stabilité par passage à la limite

Les limites simples de fonctions mesurables sont mesurables.

Démonstration Soit $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions vérifiant le critère de l'image réciproque, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) \to f(x)$ quand $k \to +\infty$. Montrons que f vérifie également ce critère. Il suffit pour cela de remarquer que comme U est ouvert et que $f_k(x) \to f(x)$, $f(x) \in U$ si et seulement si $f_k(x) \in U$ pour k assez grand. Cette déclaration se traduit par la formule

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcap_{k=j}^{+\infty} f_k^{-1}(U)$$

qui établit que $f^{-1}(U)$ est un ensemble mesurable, comme union (dénombrable) d'intersections (dénombrable) d'ensembles mesurables. ■

Fonctions égales presque partout

Toute fonction égale presque partout à une fonction mesurable est mesurable.

Démonstration Toute fonction f égale presque partout à une fonction g qui vérifie le critère de l'image réciproque vérifie également le critère de l'image réciproque. En effet, si pour tout ouvert U l'ensemble $g^{-1}(U)$ est mesurable, alors

$$f^{-1}(U) = (g^{-1}(U) \setminus E) \cup F$$

où E et F sont négligeables (et donc mesurables puisque la mesure de Lebesgue est complète) ; par conséquent, $f^{-1}(U)$ est mesurable. ■

Démonstration du critère de l'image réciproque Il suffit de démontrer le critère pour les ensembles ouverts : si une fonction satisfait le critère de d'image réciproque pour tout ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$, en utilisant l'égalité $f^{-1}(F) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus F)$, le fait que le complémentaire d'un fermé soit un ouvert et que le complémentaire d'un ensemble mesurable soit mesurable, on établit le critère pour les fermés.

Montrons tout d'abord le résultat pour les fonctions scalaires ($n = 1$). Supposons le critère de l'image réciproque satisfait. La démonstration repose sur la construction explicite d'une suite $f_k(x)$ de fonctions intégrables qui soient étagées, c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs possibles.

Définissons $f_0(x) = 0$ et $f_k(x)$ par la relation de récurrence

$$f_{k+1}(x) = f_k(x) + \left| \begin{array}{rl} -1/k & \text{si } f(x) \leq f_k(x) - 1/k \text{ et } |x| \leq k, \\ +1/k & \text{si } f_k(x) + 1/k \leq f(x) \text{ et } |x| \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Par construction, si $f(x) = 0$, $f_k(x) = 0$. Si $f(x) \geq 0$, les $f_k(x)$ forment une suite croissante convergeant vers $f(x)$, car la suite des $1/k$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, mais leur somme est divergente. La situation est similaire si $f(x) \leq 0$, mais avec une suite $f_k(x)$ décroissante.

Montrons que la suite des f_k est intégrable, ce qui concluera cette section de la preuve. L'ensemble des valeurs $\{y_j\}$ que prend chaque f_k est bien fini ; il comprend la valeur $y_0 = 0$ et la fonction peut s'écrire sous la forme

$$f_k = \sum_j y_j 1_{A_j}$$

où les $A_j = f_k^{-1}(y_j)$ sont en nombre fini et disjoints. A part A_0, les A_j sont également bornés, car f_k est nulle en dehors de $[-k, k]$. Montrons qu'à tout rang k, les ensembles A_j sont mesurables, ce qui prouvera que chaque f_k est intégrable par le critère d'intégrabilité dominé. C'est évident au rang 0 où $\{y_j\} = \{0\}$ et la collection des A_j se réduit à $\{A_0\} = \{\mathbb{R}\}$. Supposons cette propriété valable au rang k ; l'ensemble E des réels x tels que $f_k(x) + 1/k \leq f(x)$ et $|x| \leq k$ peut être écrit comme

$$E = \left(\bigcup_j \{x \in \mathbb{R} \,|\, y_j + 1/k \leq f(x)\} \cap A_j \right) \cap [-k, k],$$

qui est mesurable. De même, on peut montrer que l'ensemble F des réels x tels que $f(x) \leq f_k(x) - 1/k$ et $|x| \leq k$ est mesurable. On a alors par construction:

$$f_{k+1} = \sum_j y_j 1_{A_j} + \frac{1}{k} 1_E - \frac{1}{k} 1_F$$

qui est sous la forme souhaitée, à ceci près que les ensembles intervenant ne sont pas nécessairement disjoints. Mais pour toute valeur y dans l'image de f_{k+1}, l'image réciproque de $\{y\}$ par f est nécessairement une union (finie) d'intersections (finies) d'ensembles dans la collection $\{\ldots, A_j, \ldots, E, F\}$ et donc un ensemble mesurable. La fonction f_{k+1} peut donc être mise sous la forme souhaitée.

Réciproquement, considérons désormais une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation des intégrales indéterminées, si l'on définit la fonction $f_k(x)$ comme le taux d'accroissement

$$f_k(x) := \frac{F(x + 2^{-k}) - F(x)}{2^{-k}} \;\text{ où }\; F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)\, dt,$$

alors $f_k(x) \to f(x)$ presque partout quand $k \to +\infty$. Or chaque f_k est continue, donc l'image réciproque de tout ouvert par f_k est un ouvert et donc un ensemble mesurable ; c'est encore le cas des fonctions qui sont égales presque partout aux f_k mais valent 0 aux points ou les f_k ne convergent pas, car elles sont égales presque partout aux fonctions f_k. L'ensemble des fonctions satisfaisant le critère de l'image réciproque étant stable par passage à la limite, une fonction égale à f presque partout satisfait le critère de l'image réciproque ; la fonction intégrable f satisfait donc elle-même le critère de l'image réciproque.

Finalement, une fonction mesurable étant limite simple d'une suite de fonctions intégrables et les fonctions intégrables vérifient le critère de l'image réciproque, par une nouvelle application du résultat de stabilité par passage à la limite, ce critère est également satisfait pour toute fonction mesurable.

Pour établir le résultat dans le cas où $n > 1$, il suffit de montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ satisfait le critère de l'image réciproque si et seulement si toutes ses composantes le satisfont. Pour le sens direct, il suffit de constater que

$$f_k^{-1}(U) = f^{-1}(\mathbb{R} \times \cdots \times U \times \cdots \mathbb{R})$$

et que si U est ouvert, $\mathbb{R} \times \cdots \times U \times \cdots \mathbb{R}$ également. Pour la réciproque, nous exploitons le fait [6] que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ peut être décomposé comme l'union d'une collection dénombrable $\mathcal{P}$ de pavés ouverts de la forme

$$P = \left]a_1, b_1\right[\times \cdots \times \left]a_n, b_n\right[.$$

Il nous suffit alors de noter que pour tout pavé P,

$$f^{-1}(P) = f_1^{-1}(\left]a_1, b_1\right[) \times \cdots \times f_n^{-1}(\left]a_n, b_n\right[)$$

et donc $f^{-1}(P)$ est mesurable. Comme $f^{-1}(U) = \cup_{P \in \mathcal{P}} f^{-1}(P)$ et que $\mathcal{P}$ est dénombrable, l'image réciproque de U par f est bien mesurable. ■

Composition par une fonction continue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. La composée $g \circ f$ de ces deux fonctions est mesurable.

Dans le cas d'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il suffit de supposer que g soit continue par morceaux pour pouvoir conclure (cf. exercice "Composition de fonctions et mesurabilité"). En général, les fonctions g qui assurent que $g \circ f$ soit mesurable pour toutes les fonctions mesurables f sont appelées fonction *boréliennes* ; elles seront étudiées plus en détail par la suite.

Démonstration Si F est un fermé de $\mathbb{R}^m$. Par continuité de g, l'ensemble $g^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et par conséquent, par le critère de mesurabilité par les images réciproques

$$(g \circ f)^{-1}(F) = f^{-1}(g^{-1}(F))$$

6. la démonstration est similaire à la décomposition d'un ouvert de $\mathbb{R}$ en une collection d'intervalle ouvert : pour chaque point x de $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert dont les coordonnées sont rationnelles, on considère le plus grand pavé ouvert P_x qui contienne x ; ces pavés forment une collection dénombrable et leur union est égale à U par construction.

est un ensemble mesurable. Par le même critère, la composée $g \circ f$ est donc mesurable. ■

Les corollaires de ce résultat sont nombreux et immédiats. Citons les deux instances les plus directement utiles.

Mesurabilité du produit

Le produit de deux fonctions scalaires mesurables est mesurable.

Démonstration Par continuité de l'application produit $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ■

Mesurabilité de la valeur absolue

La valeur absolue d'une fonction scalaire mesurable est mesurable.

Démonstration Par continuité de l'application valeur absolue $| \cdot | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.■

Démonstration du critère d'intégrabilité dominée Le sens direct est évident : si la fonction f est intégrable, elle est mesurable et satisfait les inégalités $f \leq f \leq f$.

Nous notons que pour établir la réciproque, il suffit de se limiter au cas où $g = 0$. En effet si le résultat est établi dans ce cas précis, sous les hypothèses plus générales on a $0 \leq f - g \leq h - g$ où $f - g$ est mesurable et $h - g$ est intégrable ; $f - g$ est alors intégrable, et donc f est intégrable.

Pour montrer la réciproque dans ce cas, nous approchons la fonction mesurable f par la suite de fonctions étagées f_k définie par le procédé de la démonstration du critère de l'image réciproque. La fonction f apparaît comme une limite simple des fonctions f_k, qui sont intégrables et encadrées par les fonctions intégrables 0 et h. Par le théorème de convergence dominée, f est intégrable. ■

Fonctions absolument intégrables

Un grand nombre de résultats d'intégration – dont le critère d'intégrabilité dominée – sont plus faciles à exploiter quand les fonctions que l'on considère sont intégrables ainsi que leur valeur absolue.

Fonction absolument/conditionnellement intégrable

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *absolument intégrable* si f et $|f|$ sont intégrables. Si f est intégrable mais pas $|f|$, elle est *conditionnellement intégrable.*

Une intégrale (l'intégrale de Newton, Riemann, Henstock-Kurzweil, etc.) est dite *conditionnelle* si elle admet des fonctions conditionnellement intégrables ; dans le cas contraire – si le fait que f soit intégrable implique que $|f|$ le soit également, elle est dite *absolue.*

Produit de fonctions absolument intégrable et bornée

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction absolument intégrable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et bornée, alors le produit fg est (absolument) intégrable.

Preuve Par hypothèse f est intégrable donc mesurable ; g étant mesurable, le produit fg est mesurable. Par ailleurs, si $|g| \leq M$, on a

$$-M|f| \leq fg \leq M|f|$$

et comme les fonctions $-M|f|$ comme $M|f|$ sont intégrables, par le critère d'intégrabilité dominée, fg est intégrable. La valeur absolue $|fg|$ de fg est mesurable et vérifie également $-M|f| \leq fg \leq M|f|$, elle est donc également intégrable par le même critère. ■

Fonctions absolument intégrables

L'ensemble des fonctions absolument intégrables est un espace vectoriel.

Démonstration Si f et g sont absolument intégrables et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est mesurable et λf comme $|\lambda f|$ sont encadrées par les fonctions intégrables $-|\lambda||f|$ et $|\lambda||f|$; f est donc absolument intégrable par le critère d'intégrabilité dominée. La somme $f + g$ est également mesurable et $f + g$ comme $|f + g|$ sont encadrées par $-|f| - |g|$ et $|f| + |g|$ qui sont intégrables ; la somme est donc intégrable par le même critère. ■

Inégalité triangulaire

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable, alors

$$\left| \int f(t)\, dt \right| \leq \int |f(t)|\, dt.$$

Démonstration Les fonctions f et $|f|$ étant intégrables, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge commune γ sur $\mathbb{R}$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ qui soit subordonnée à γ, on ait

$$\left|S(f, \mathcal{D}) - \int f(t)\, dt\right| \leq \varepsilon/2 \ \text{ et } \ \left|S(|f|, \mathcal{D}) - \int |f(t)|\, dt\right| \leq \varepsilon/2.$$

Par l'inégalité triangulaire appliquée à la somme finie $S(f, \mathcal{D})$, on obtient donc

$$\left|\int f(t)\, dt\right| \leq |S(f, \mathcal{D})| + \varepsilon/2 \leq S(|f|, \mathcal{D}) + \varepsilon/2 \leq \int |f(t)|\, dt + \varepsilon,$$

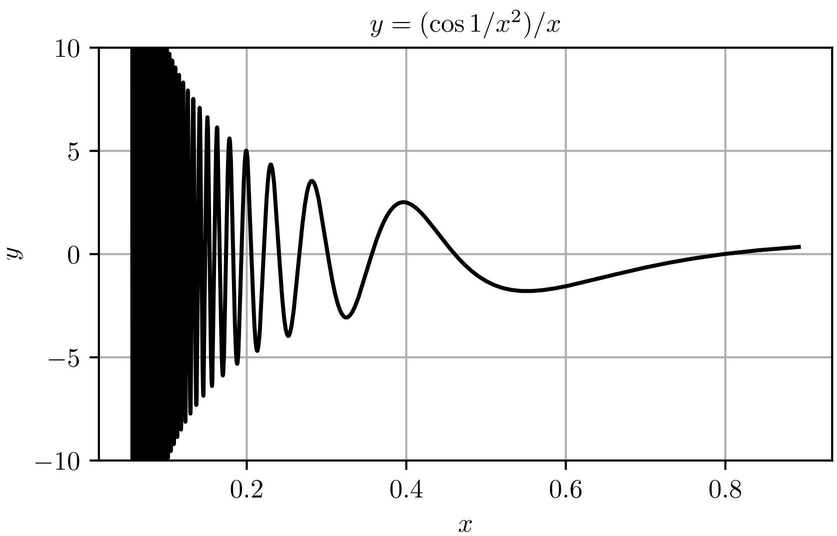
et en passant à la limite sur ε, l'inégalité cherchée. ■

Une fonction conditionnellement intégrable

La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2} \ \text{ si } \ x > 0 \ \text{ et } \ f(0) = 0$$

est conditionnellement intégrable.



Pour montrer qu'elle est intégrable, nous exploitons le théorème fondamental du calcul, appliqué à la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} \sin \frac{1}{x^2} \ \text{ si } \ x > 0 \ \text{ et } \ g(0) = 0.$$

Cette fonction est dérivable en tout point de $[0,1]$; en 0, sa dérivée est nulle [7] et quand $x > 0$,

$$\left[-\frac{x^2}{2}\sin\frac{1}{x^2}\right]' + x\sin\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

Par le critère d'intégrabilité dominée, la fonction $h(x)$ égale à $x\sin(1/x^2)$ si $x > 0$ et nulle en zéro est absolument intégrable car continue sur $[0,1]$. La fonction g' étant également intégrable, $f = g' + h$ est intégrable comme somme de deux fonctions intégrables.

La fonction f n'est pourtant pas absolument intégrable, car h est absolument intégrable mais pas g'. En effet, si c'était le cas, toute fonction absolument intégrable dont la valeur absolue est majorée par $|g'|$ aurait par l'inégalité triangulaire son intégrale majorée par celle de $|g'|$. Or nous allons exhiber une suite de telles fonctions dont l'intégrale tend vers $+\infty$, ce qui établira la contradiction.

Soit $k \geq 1$ un entier ; on définit la function $\phi_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\phi_k(x) = \left|\begin{array}{rl} g'(x) & \text{si } \alpha_j \leq x \leq \beta_j,\ 1 \leq j \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

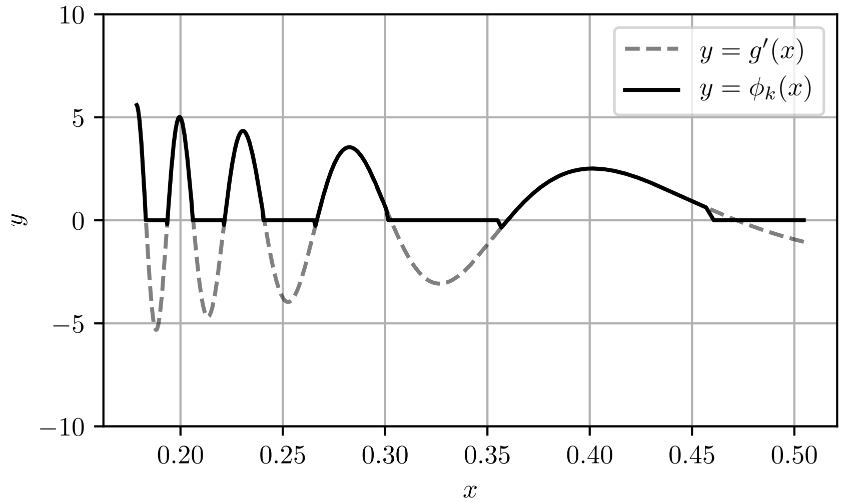
où

$$\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi(j+1/4)}} \ \text{ et } \ \beta_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi(j-1/4)}},$$

L'idée sous-jacente est la suivante : les fonctions ϕ_k sont faites pour coïncider avec g' dans les plages de valeurs où $\cos 1/x^2$ est positif ; comme $g'(x) = -x\sin 1/x^2 + (1/x)\cos 1/x^2$, et que pour x petit, $1/x$ est grand devant x, cela correspond approximativement aux plages où $g'(x)$ est positif.

7. En effet,

$$\left|\frac{g(h)-g(0)}{h}\right| \leq \frac{|h|}{2} \to 0 \ \text{quand}\ h \to 0.$$



Par construction, ϕ_k est continue par morceaux et donc absolument intégrable, et bien telle que $|\phi_k| \leq |g'|$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi_k(t)\,dt &= \sum_{j=0}^{k} \int_{\alpha_j}^{\beta_k} \phi_k(t)\,dt \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left[-\frac{x^2}{2} \sin \frac{1}{x^2} \right]_{\alpha_j}^{\beta_j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left[-\frac{1}{4\pi(j-1/4)} \sin(2\pi(j-1/4)) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{4\pi(j+1/4)} \sin(2\pi(j+1/4)) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{j-1/4} + \frac{1}{j+1/4} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{k} \frac{j}{j^2+1/16}.
\end{aligned}$$

Comme la série associée à cette équation est divergente, on peut rendre l'intégrale arbitrairement grande en choisissant un k suffisamment grand, ce qui permet de conclure.

Intégrabilité sur un sous-ensemble

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable (resp. absolument intégrable) sur un sous-ensemble* E *de* $\mathbb{R}$ si la fonction $f1_E$ est intégrable (resp. absolument intégrable). On note alors

$$\int_E f(x)\,dx = \int 1_E(x) f(x)\,dx.$$

Cette définition est cohérente avec la définition existant déjà dans le cas où E est un intervalle de $\mathbb{R}$ (cf. "Extension à la droite réelle achevée" dans Calcul Intégral I).

Restriction à des ensembles mesurables

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable si et seulement si f est (absolument) intégrable sur E pour tout ensemble mesurable E.

Démonstration Si f est absolument intégrable, elle est mesurable ; si l'ensemble E est mesurable, sa fonction caractéristique 1_E est également mesurable. Par conséquent, le produit $f1_E$ est mesurable, comme sa valeur absolue $|f1_E|$. Par ailleurs, comme $|1_E| \leq 1$, on a $-|f| \leq f1_E \leq |f|$ et donc $-|f| \leq |f1_E| \leq |f|$. Par le critère d'intégrabilité dominée, $f1_E$ est (absolument) intégrable.

Réciproquement, supposons $f1_E$ intégrable pour tout ensemble mesurable E. En prenant $E = \mathbb{R}$, on constate que f est intégrable, et donc mesurable. Notons $E_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \geq 0\}$ et $E_- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \leq 0\}$; ces deux ensembles sont mesurables comme images réciproques de fermés par une fonction mesurable. La fonction $|f|$ satisfaisant

$$|f| = 1_{E_+} f - 1_{E_-} f,$$

elle est intégrable comme somme de fonctions intégrables. La fonction f est donc absolument intégrable. ■

Annexes

Maximum de fonctions intégrables

Maximum de fonctions intégrables et positives

Si les fonctions $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ et $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ sont intégrables, la fonction $\max(f, g)$ est également intégrable.

Démonstration Pour simplifier le problème, on remarque tout d'abord que

$$\max(f, g) = f + \max(g - f, 0) = f + (g - f)_+$$

où $x_+ = \max(x, 0)$ désigne la partie positive de x. Par linéarité, la fonction $g - f$ est intégrable et $(g - f)_+ \leq g + f$; la fonction $g + f$ est également intégrable. Pour démontrer le lemme, il nous suffit donc de prouver que toute fonction intégrable dont la partie positive est dominée par une fonction intégrable est de partie positive intégrable.

Soit f une telle fonction et g une fonction intégrable telle que $f_+ \leq g$. Nous allons montrer que

$$\int f_+(t)\, dt = S := \sup_{\mathcal{D}} \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} \left(\int_I f(t)\, dt\right)_+$$

où le supremum est calculé sur toutes les subdivisions pointées de $\mathbb{R}$. Tout d'abord, ce supremum est fini ; en effet pour toute subdivision $\mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} \left(\int_I f(t)\, dt\right)_+ &\leq \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} \left(\int_I g(t)\, dt\right)_+ \\
&= \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} \int_I g(t)\, dt \\
&= \int g(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{D}_0$ une subdivision pointée de $\mathbb{R}$ telle que

$$S - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}_0} \left(\int_I f(t)\, dt\right)_+ \leq S.$$

Soit λ une jauge sur $\mathbb{R}$ assurant une précision $\varepsilon/2$ dans l'estimation de l'intégrale de f par les sommes de Riemann. Soit ν une jauge sur $\mathbb{R}$ telle que si $(t, [a, b]) \in \mathcal{D}_0$ et $t \in \left]a, b\right[$ alors $\nu(t) \subset \left]a, b\right[$; on note γ la jauge définie par $\gamma(t) = \lambda(t) \cap \nu(t)$. Si $\mathcal{D}$ est subordonnée à γ, quitte à découper des intervalles en deux si $(t, I) \subset \mathcal{D}$ et t appartient à la frontière d'un intervalle composant $\mathcal{D}_0$ – ce qui ne change pas la somme de Riemann associée – les éléments $(t, J) \in \mathcal{D}$ tels que $J \subset I$, où $(x, I) \subset \mathcal{D}_0$ forment une subdivision pointée de I. Par conséquent, comme

$$\left(\int_I f(t)\, dt\right)_+ = \left(\sum_{(t,J)\in\mathcal{D}, J\subset I} \int_J f(t)\, dt\right)_+ \leq \sum_{(t,J)\in\mathcal{D}, J\subset I} \left(\int_J f(t)\, dt\right)_+$$

et donc

$$S - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}_0} \left(\int_I f(t)\, dt\right)_+ \leq \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} \left(\int_I f(t)\, dt\right)_+ \leq S,$$

on obtient

$$\left| \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} \left(\int_I f(t)\,dt \right)_+ - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, si l'on considère la subdivision (partielle) pointée $\mathcal{D}_+$ extraite de $\mathcal{D}$ composée des paires $(t, I) \in \mathcal{D}$ et telles que

$$f(t)\ell(I) \geq \int_I f(x)\,dx,$$

alors le lemme de Henstock fournit

$$\sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} \left(f(t)\ell(I) - \int_I f(x)\,dx \right)_+ \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $(x+y)_+ \leq x_+ + y_+$, on en déduit

$$\sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} f_+(t)\ell(I) - \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} \left(\int_I f(x)\,dx \right)_+ \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De façon similaire, en raisonnant sur la subdivision partielle complémentaire à $\mathcal{D}_+$ dans $\mathcal{D}$, on peut montrer que

$$\sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} \left(\int_I f(x)\,dx \right)_+ - \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} f_+(t)\ell(I) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient donc au final

$$\left| \sum_{(t,I)\in\mathcal{D}} f_+(t)\ell(I) - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

la fonction f_+ est donc intégrable, d'intégrale égale à S. ■

Dérivabilité des intégrales indéterminées

Une intégrale indéterminée est dérivable presque partout

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et un point a de I. La dérivée de la fonction

$$F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

existe et est égale à f presque partout.

Démonstration Voir (Swartz 2001, 135–36). ■

Exercices

Théorème de convergence dominée

Montrer que la conclusion du théorème de convergence dominée est toujours valide si les fonctions f_k ne satisfont les hypothèses de convergence et d'encadrement que presque partout. **(?)**

Ensembles de longueur finie

Soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ pour lequel il existe une constante L (finie) telle que pour tout intervalle compact $[a, b]$, on ait

$$\int_a^b 1_A(t)\, dt \leq L.$$

Montrer que A est de longueur finie et que $\ell(A) \leq L$. **(?)**

Intégrabilité locale

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *localement intégrable* si tout point x de $\mathbb{R}$, il existe un $\varepsilon > 0$ et un intervalle $[x + \varepsilon, x + \varepsilon]$ où la fonction f soit intégrable.

Question 0 Montrer que f est localement intégrable si et seulement si pour tout intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, f est intégrable sur $[a, b]$. **(?)**

Question 1 Montrer que toute fonction localement intégrable est mesurable. **(?)**

Question 2 La réciproque est-elle vraie ? **(?)**

Fonctions mesurables

Question 1 Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si pour tout nombre réel a, l'ensemble

$$f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}$$

est mesurable. **(?)**

Question 2 En déduire qu'une fonction croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable sur tout intervalle compact. **(?)**

Composition de fonctions et mesurabilité

Montrer que si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable et que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors la fonction composée $g \circ f$ est mesurable. **(?)**

Composition par une fonction lipschitzienne

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que g est nulle en 0 et lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe un $K \geq 0$ tel que pour toute paire de réels x et y on ait $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$.

Question 1 Si f est mesurable est-ce que $g \circ f$ est mesurable ? **(?)**

Question 2 Si f est intégrable, est-ce que $g \circ f$ est intégrable ? **(?)**

Question 3 Si f est absolument intégrable, est-ce que $g \circ f$ est absolument intégrable ? **(?)**

Caractérisation des ensembles mesurables

Montrer qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si sa fonction caractéristique 1_E est mesurable. **(?)**

Formule de la moyenne

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie sur un ensemble U ouvert et supposée continûment différentiable. On considère $c \in U$ et $R > 0$ tel que le disque fermé centré en c et de rayon R soit inclus dans U; on définit alors la grandeur $I(r)$ pour tout $r \in [0, R] \to \mathbb{R}^2$ comme la valeur moyenne du vecteur f sur le cercle de rayon c et de rayon r:

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_{\alpha,r}) \, d\alpha \;\text{ où }\; z_{\alpha,r} = c + r(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Question 1 Que vaut $I(0)$? **(?)**

Question 2 Montrer que l'application $r \in [0, R] \mapsto I(r)$ est dérivable et calculer $I'(r)$ pour tout $r \in [0, R]$. **(?)**

Question 3 On suppose désormais que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en tout point (x, y) de U, c'est-à-dire que

$$\partial_y f(x, y) = R(\pi/2) \cdot \partial_x f(x, y)$$

où $R(\alpha)$ désigne la rotation d'angle α centrée sur l'origine. Simplifier l'expression de $I'(r)$ et conclure. Indication: on pourra évaluer $\partial_\alpha(f(z_{\alpha,r}))$. **(?)**

Intégrabilité du produit

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables dont les carrés sont intégrables. Montrer que le produit fg est (absolument) intégrable. **(?)**

Intégrabilité du maximum

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument intégrables. Montrer que la fonction $\max(f, g)$ est (absolument) intégrable. **(?)**

Solutions

Théorème de convergence dominée

Imaginons que les fonctions mesurables f_k convergent vers la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus A$ où A est négligeable, et satisfont $g \leq f_k \leq h$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus B_k$ où B_k est négligeable.

Alors l'ensemble $C := A \cup (\cup_{k=1}^{+\infty} B_k)$ est négligeable. En effet, A et chaque B_k est négligeable donc mesurable et de longueur nulle ; la suite des $C_j := A \cup (\cup_{k=1}^{j} B_k)$ est composée d'ensemble mesurables, croissante et comme

$$1_{C_j} = 1_{A \cup (\cup_{k=1}^{j} B_k)} \leq 1_A + \sum_{k=1}^{j} 1_{B_k},$$

on a

$$\int 1_{C_j}(x)\, dx \leq \int 1_A(x)\, dx + \sum_{k=1}^{j} \int 1_{B_k}(x)\, dx = \ell(A) + \sum_{k=1}^{j} \ell(B_k) = 0.$$

Par le théorème de convergence monotone,

$$\ell(C) = \int 1_C(x)\, dx = \lim_{j \to +\infty} \int 1_{C_j}(x)\, dx = 0.$$

Alternativement, il suffit de recouvrir A puis chaque B_k par des intervalles sont la somme de longueurs soit inférieure à $\varepsilon/2$, puis $\varepsilon/2^{k+2}$. La collection de l'intégralité de ces intervalle est dénombrable, recouvre l'ensemble C, et la somme des longueurs des intervalles est inférieure à

$$\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

L'ensemble C est donc négligeable.

Sachant que C est négligeable, c'est-à-dire mesurable et de longueur nulle, il suffit alors de rédéfinir chaque fonction f_k, f, g et h pour leur assigner la valeur 0 en tout $x \in C$; cette opération ne change pas leur caractère mesurable ou intégrable, ni la valeur des intégrales associées. Et les nouvelles fonctions satisfont partout les hypothèses de convergence et d'encadrement du théorème de convergence dominée. On peut donc conclure sous les hypothèse plus faibles considérées dans cet exercice.

Ensembles de longueur finie

La suite des fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_k(t) = \left| \begin{array}{rl} 1_A(t) & \text{si } \ t \in [-k, k], \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est croissante, de limite simple 1_A. A tout rang k, on a

$$\int f_k(t)\, dt = \int_{-k}^{k} 1_A(t)\, dt \leq L,$$

donc

$$\sup_k \int f_k(t)\, dt \leq L < +\infty.$$

Le théorème de convergence monotone nous garantit l'intégrabilité de 1_A – c'est-à-dire le fait que A est de longueur finie – et fournit

$$\ell(A) = \int 1_A(t)\, dt = \lim_{k \to +\infty} \int f_k(t)\, dt \leq L.$$

Intégrabilité locale

Question 0 De toute évidence, si f est intégrable sur tout intervalle compact, elle est intégrable sur tous les intervalles de la forme $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

Réciproquement, supposons que pour tout x il existe un $\varepsilon > 0$ tel que f soit intégrable sur $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Si la fonction f n'est pas intégrable sur $[a,b]$, par additivité c'est qu'elle n'est pas intégrable sur $[a,(a+b)/2]$ ou sur $[(a+b)/2, b]$ (voire sur les deux sous-ensembles). En procédant par récurrence, on construit ainsi une suite d'intervalles fermés emboités $[a_k, b_k]$, indexés par l'entier k, avec $[a_0, b_0] = [a, b]$, de longueur $(b-a)/2^k$ où la fonction f n'est pas intégrable. Par compacité de $[a,b]$, il existe un (unique) point x appartenant à tous ces intervalles fermés ; pour k assez grand, on a $I_k \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Par restriction, f devrait donc être intégrable sur I_k, d'où une contradiction ; f est donc intégrable sur $[a,b]$.

Question 1 Une fonction f localement intégrable est intégrable sur tout intervalle de la forme $[-k,k]$ où $k \in \mathbb{N}$ par le résultat de la question 0. La fonction f étant la limite simple des fonctions $f_k = 1_{[-k,k]}f$, elle est mesurable.

Question 2 La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction f définie par

$$f(x) = \left| \begin{array}{cl} 1/x^2 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

est mesurable ; c'est par exemple la limite des fonctions intégrables

$$f_k(x) = \left| \begin{array}{cl} 1/x^2 & \text{si } |x| \geq 2^{-k}, \\ 0 & \text{si } |x| < 2^{-k}, \end{array} \right.$$

Mais elle n'est intégrable sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ pour aucun $\varepsilon > 0$. En effet, si elle l'était, on pourrait appliquer le théorème de convergence dominée aux fonctions $0 \leq f_k 1_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \leq f 1_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ et conclure que

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_k(x)\, dx$$

Or, quand $2^{-k} \leq \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_k(x)\, dx &= \int_{-\varepsilon}^{-2^{-k}} \frac{dx}{x^2} + \int_{2^{-k}}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^2} \\
&= \left[-\frac{1}{x}\right]_{-\varepsilon}^{-2^{-k}} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{2^{-k}}^{\varepsilon} \\
&= (2^k - 1/\varepsilon) + (2^k - 1/\varepsilon) = 2^{k+1} - 2/\varepsilon.
\end{aligned}$$

Cette grandeur tendant vers $+\infty$ quand $k \to +\infty$, on aurait une contradiction. La fonction f n'est donc pas intégrable.

Fonction mesurables

Question 1 Compte tenu du critère de l'image réciproque, comme tous les ensembles $]-\infty, a]$ sont fermés, le critère de l'énoncé est bien vérifié pour toute fonction mesurable.

Montrons désormais la réciproque. Supposons le critère de l'énoncé vérifié et soit U un ouvert de $\mathbb{R}$; l'ensemble U peut être décomposé comme union d'un nombre dénombrables d'intervalles ouverts bornés I_k de $\mathbb{R}$. Par conséquent, comme

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\cup_k I_k) = \bigcup_k f^{-1}(I_k),$$

il nous suffit de montrer que l'image réciproque de tout intervalle ouvert borné $]a, b[$ par f est mesurable, pour conclure que $f^{-1}(U)$ est mesurable, comme union dénombrable d'ensembles mesurables.

Or, un point x vérifie $a < f(x) < b$ si et seulement il ne vérifie pas $f(x) \leq a$ et vérifie $f(x) \leq b - 2^{-k}$ pour au moins un entier k, ce qui se traduit par la relation ensembliste

$$f^{-1}(]a, b[) = \left(\mathbb{R} \setminus f^{-1}(]-\infty, a])\right) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} f^{-1}(]-\infty, b - 2^{-k}])\right).$$

Les images réciproques au second membre sont mesurables par hypothèse, et sont combinées par complément, union dénombrable et intersection, par conséquent $f^{-1}(]a, b[)$ est également mesurable. Le critère de l'image réciproque pour la mesurabilité de f est donc bien vérifié.

Question 2 Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, les images réciproques des ensembles de la forme $]-\infty, a]$ sont des intervalles. En effet, si $f(x) \leq a$ et $f(y) \leq a$, pour tout point intermédiaire $x \leq z \leq y$, $f(z) \leq a$. Par conséquent, f est mesurable.

De plus, f étant croissante, pour tout intervalle compact $[a, b]$ et tout $x \in [a, b]$, on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Par le critère d'intégrabilité dominée, f est intégrable sur $[a, b]$.

Composition de fonctions et mesurabilité

Soient $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k$ des nombres réels tels que la fonction g soit continue sur chaque intervalle ouvert $]a_j, a_{j+1}[$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$; alors pour tout $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ si g_j désigné la restriction de g à $]a_j, a_{j+1}[$, par continuité de g_j, l'image réciproque $V_j = g_j^{-1}(U)$ est ouverte dans $]a_j, a_{j+1}[$ et donc dans $\mathbb{R}$. L'image réciproque de U par g est donc la réunion V de ces ouverts, c'est-à-dire un ouvert, et éventuellement d'un sous-ensemble F (nécessairement fini, donc fermé) de $\{a_0, \dots, a_k\}$.

L'image réciproque de U par $g \circ f$ est donc l'image réciproque de $V \cap F$ par f. La fonction f étant mesurables, $f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(F)$ sont mesurables, ainsi que $f^{-1}(V \cap F) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(F)$. La fonction composée $g \circ f$ est donc mesurable.

Composition par une fonction lipschitzienne

Question 1 Oui, car toute fonction lipschitzienne est continue ; $g \circ f$ est donc mesurable comme composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue.

Question 2 Pas nécessairement; si f est une fonction conditionnellement intégrable sur $[0, 1]$, la fonction $|f|$ n'est pas intégrable ; or, l'application $t \mapsto |t|$ est lipschitzienne (avec $K = 1$).

Question 3 Oui. D'une part, f étant absolument intégrable, elle est mesurable et donc par la question 1., la composée $g \circ f$ est mesurable. D'autre part, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|g \circ f(x) - g \circ f(0)| \leq K|f(x) - f(0)|$$

et donc

$$|g \circ f(x)| \leq K|f(x)| + (K|f(0)| + |g \circ f(0)|)$$

Le membre de droite de cette inégalité est une fonction (absolument) intégrable sur $[0, 1]$, donc par le critère d'intégrabilité dominée, la fonction $g \circ f$ est (absolument) intégrable.

Caractérisation des ensembles mesurables

Si l'ensemble E est mesurable, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $E_k := E \cap [-k, k]$ est intégrable, c'est-à-dire que la fonction 1_{E_k} est intégrable. La fonction 1_E est donc mesurable car limite simple de fonctions intégrables.

Réciproquement, si une fonction caratéristique 1_E est mesurable, par le critère de l'image réciproque, comme $E = 1_E^{-1}(\{1\})$ et que le singleton $\{1\}$ est fermé, E est mesurable.

Alternativement, si 1_E est une limite simple de fonctions intégrables f_k et $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$\sigma(x) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leq 1/2, \\ 1 & \text{si } x > 1/2, \end{array} \right.$$

alors les fonctions $g_k = \sigma \circ f_k$ sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, convergent simplement vers 1_E et de plus sont mesurables: en effet si F est un fermé de $\mathbb{R}$, $\sigma^{-1}(F)$ est un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}$ (4 possibilités uniquement, que l'on peut énumérer, selon que F contienne ou non 0 et 1), et donc $g_k^{-1}(F) = f_k^{-1}(\sigma^{-1}(F))$ est un ensemble mesurable.
Par conséquent, pour tout intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $1_{E\cap[a,b]}$ est la limite simple des fonctions mesurables $g_k 1_{[a,b]}$, qui sont dominées par $1_{[a,b]}$ et donc intégrable. L'ensemble E est donc mesurable.

Formule de la moyenne

Question 1 On a

$$I(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c_1, c_2)\, d\alpha = f(c_1, c_2) = f(c).$$

Question 2 Formons le taux d'accroissement de I en r, pour une variation de l'argument h telle que $r + h \in [0, R]$. On a

$$\begin{aligned}\frac{I(r+h) - I(r)}{h} &= \frac{1}{2\pi h} \left(\int_0^{2\pi} f(c_1 + (r+h)\cos\alpha, c_2 + (r+h)\sin\alpha)\, d\alpha \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^{2\pi} f(c_1 + r\cos\alpha, c_2 + r\sin\alpha)\, d\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_{r+h,\alpha}) - f(z_{\alpha,r})}{h}\, d\alpha.\end{aligned}$$

La fonction $g_\alpha : r \mapsto f(z_{\alpha,r})$ étant différentiable pour tout α, on a

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(z_{r+h,\alpha}) - f(z_{\alpha,r})}{h} &= \frac{d}{dr} f(z_{\alpha,r}) \\ &= df(z_{r,\alpha}) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha) \\ &= \partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin\alpha.\end{aligned}$$

De plus, par le théorème des accroissements finis,

$$\left\| \frac{g_\alpha(r+h) - g_\alpha(r)}{h} \right\| \leq \sup_{r\in[0,R]} \left\| \frac{d}{dr} g_\alpha(r) \right\|$$

où le sup du membre de droite est bien fini puisque $dg_\alpha(r)/dr$ est une fonction continue du couple (α, r) qui appartient à l'ensemble compact $[0, 2\pi] \times [0, R]$. Par conséquent, pour toute suite h_k tendant vers 0 et telle que $r + h_k \in [0, R]$, la suite des

$$\frac{g_\alpha(r + h_k) - g_\alpha(r)}{h_k}$$

associée converge simplement vers

$$\partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin\alpha$$

et chacune des composantes de ce vecteur de $\mathbb{R}^2$ est bornée par la fonction absolument intégrable (constante)

$$\alpha \in [0, 2\pi] \mapsto \sup_{r\in[0,R]} \left\| \frac{d}{dr} g_\alpha(r) \right\|.$$

Par conséquent, par le théorème de convergence dominée, la dérivée de I est définie en tout point r et est donnée par

$$I'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin\alpha\right) \, d\alpha.$$

Question 3 Evaluons la dérivée par rapport à α de $f(z_{\alpha,r})$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) &= \partial_\alpha(f(c_1 + r\cos\alpha, c_2 + r\sin\alpha)) \\
&= \partial_x f(z_{\alpha,r})(-r\sin\alpha) + \partial_y f(z_{\alpha,r})(r\cos\alpha).
\end{aligned}$$

Comme $\partial_y f(z_{\alpha,r}) = R(\pi/2)\partial_x f(z_{\alpha,r})$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) &= r(-\sin\alpha \times I + \cos\alpha \times R(\pi/2)) \cdot \partial_x f(z_{\alpha,r}) \\
&= rR(\pi/2 + \alpha) \cdot \partial_x f(z_{\alpha,r}) \\
&= rR(\pi/2)R(\alpha) \cdot \partial_x f(z_{\alpha,r})
\end{aligned}$$

D'un autre coté, l'intégrande dans l'expression de $I'(r)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin\alpha &= (\cos\alpha \times I + \sin\alpha \times R(\pi/2)) \cdot \partial_x f(z_{r,\alpha}) \\
&= R(\alpha) \cdot \partial_x f(z_{r,\alpha}).
\end{aligned}$$

Par conséquent lorsque r est non nul

$$\partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin\alpha = \frac{1}{r} R(-\pi/2) \cdot \partial_\alpha(f(z_{\alpha,r}))$$

et donc

$$\begin{aligned}
I'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin\alpha\right) \, d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi r} \left(\int_0^{2\pi} R(-\pi/2) \cdot \partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) \, d\alpha \right) \\
&= \frac{1}{2\pi r} R(-\pi/2) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) \, d\alpha \right) \\
&= \frac{1}{2\pi r} R(-\pi/2) \cdot [f(z_{\alpha,r})]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

.

Par ailleurs, un calcul direct montre que $I'(0) = 0$. La dérivée de I est donc identiquement nulle ; on en conclut que pour tout r,

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_{\alpha,r})\, d\alpha = I(0) = f(c).$$

Intégrabilité du produit

Les produits fg est mesurable comme produit de fonctions mesurables ; la fonction $|fg|$ est donc également mesurable. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $(|f(x)| + |g(x)|)^2 \geq 0$,

$$0 \leq |fg|(x) \leq \frac{1}{2} f(x)^2 + \frac{1}{2} g(x)^2.$$

et donc

$$-\frac{1}{2} f(x)^2 - \frac{1}{2} g(x)^2 \leq fg(x) \leq \frac{1}{2} f(x)^2 + \frac{1}{2} g(x)^2.$$

Par le critère d'intégrabilité dominée, fg et $|fg|$ sont donc intégrables.

Intégrabilité du maximum

Les fonctions f et g étant absolument intégrables, elles sont mesurables. Par composition avec une fonctions continue, $\max(f, g)$ est également mesurable.

De plus, on a $-|f| - |g| \leq |\max(f, g)| \leq |f| + |g|$. Les fonctions $\max(f, g)$ et sa valeur absolue sont donc encadrées par deux fonctions intégrables ; $\max(f, g)$ est donc absolument intégrable.

Références

Demailly, Jean-Pierre. 2011. *Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Kurzweil-Henstock*. Université Joseph Fourier Grenoble I. `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html`.

Schechter, E. 1996. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. Elsevier Science. `https://books.google.fr/books?id=eqUv3Bcd56EC`.

Swartz, Charles. 2001. *Introduction to Gauge Integrals*. Singapore: World Scientific.