Calcul Intégral V

STEP, MINES ParisTech*

26 novembre 2019 (`#87b4ab7`)

Table des matières

*Ce document est un des produits du projet `boisgera/CDIS`, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS).

Objectifs

TODO – Basique

TODO – Standard

TODO – Avancé

TODO – Hors-programme

Dérivées faibles

Nous généralisons dans cette section la notion classique de dérivée de fonction, pour répondre aux besoins de disciplines variées : les probabilités, les équations différentielles (et aux dérivées partielles), le traitement du signal, etc.

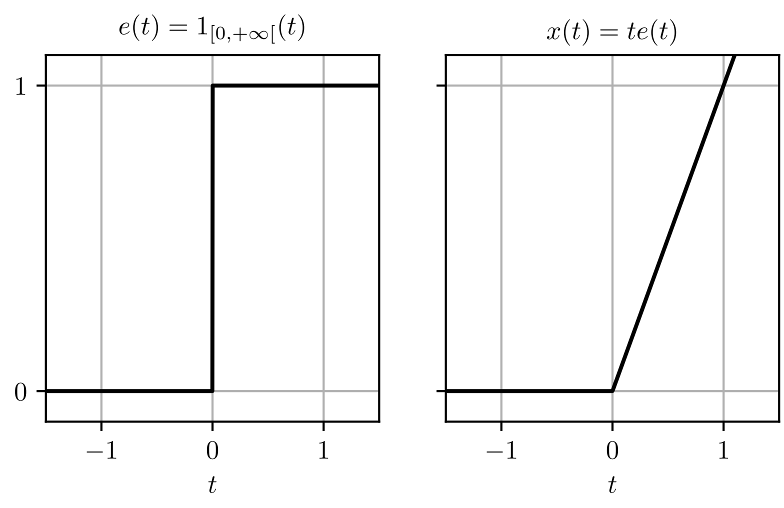
Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas où une fonction ordinaire joue effectivement le rôle de la dérivée mais sans en être une stricto sensu. L'exemple basique serait la "solution" $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, "initialement au repos" ($x(t) = 0$ pour $t \leq 0$) de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = e(t),\ t \in \mathbb{R}$$

où $e(t)$ est l'échelon unitaire, défini par

$$e(t) = 1_{[0,+\infty[} = \left|\begin{array}{ll} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{array}\right.$$

Cette équation peut être considérée par exemple comme un modèle simpliste de l'évolution de la température x en fonction du temps t d'un système thermique que l'on décide de chauffer (avec un flux de chaleur constant) à partir de $t = 0$.



La "solution" physiquement raisonnable $x(t) = te(t)$ n'est toutefois pas dérivable classiquement pour $t = 0$ et il est nécessaire d'invoquer un "principe de continuité" pour "recoller" les deux fragments de solutions de l'équation différentielle pour $t < 0$ et $t > 0$. Nous pourrons bientôt adopter un discours plus clair et à l'issue de cette section, énoncer que la fonction $x : t \mapsto te(t)$ a pour *dérivée faible* la fonction $e : t \mapsto e(t)$ sur tout $\mathbb{R}$. Dans ce cadre, la continuité de x résultera du cadre mathématique adopté plutôt que de devoir être rajoutée comme une hypothèse supplémentaire.

Fonctions localement absolument intégrables

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *localement absolument intégrable* (ou *ordinaire*) si elle est absolument intégrable sur tout intervalle compact $[a, b]$:

$$\int_a^b f(t)\, dt \in \mathbb{R} \;\text{ et }\; \int_a^b |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Dérivée faible

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *dérivable faiblement* s'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement absolument intégrable et une constante $c \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = c + \int_0^x g(t)\, dt.$$

La fonction g est alors appelée *dérivée faible* de f.

Les fonctions faiblement dérivables sont continues.

En particulier, une fonction faiblement dérivable est nécessairement localement absolument intégrable.

Démonstration La continuité des intégrales indéterminées, de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^x h(t)\, dt$$

est prouvée dans le chapitre "Calcul Intégral I" au moyen du lemme de Henstock, sous l'hypothèse que h est intégrable (pour un réel étendu a arbitraire). Or pour tout $r > 0$, la fonction $h = g1_{[-r,r]}$ est intégrable. Comme pour tout $x \in \,]-r, r[$,

$$\int_0^x g(t)\, dt = \int_0^x h(t)\, dt,$$

l'intégrale indéterminée de g, et donc f, est continue en x. Le choix de r étant arbitraire, f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. ■

Dérivée faible et classique

Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est faiblement dérivable, de dérivée faible g, alors elle est dérivable (classiquement) presque partout, et $f' = g$ presque partout. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt.$$

En particulier, la dérivée faible d'une fonction, si elle existe, est unique presque partout.

Démonstration Une conséquence directe du résultat de dérivation des intégrales indéterminée de "Calcul Intégral II". ■

Valeur absolue

La fonction valeur absolue $|\cdot| : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est faiblement dérivable. En effet, elle est dérivable presque partout (sauf en 0), sa dérivée classique valant 1 quand $x > 0$ et -1 quand $x < 0$. Ses seules dérivées faibles potentielles sont dont les fonctions égales presque partout à la fonction signe

$$\mathrm{sgn}(x) := \left| \begin{array}{rl} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ +1 & \text{si } x > 0. \end{array} \right.$$

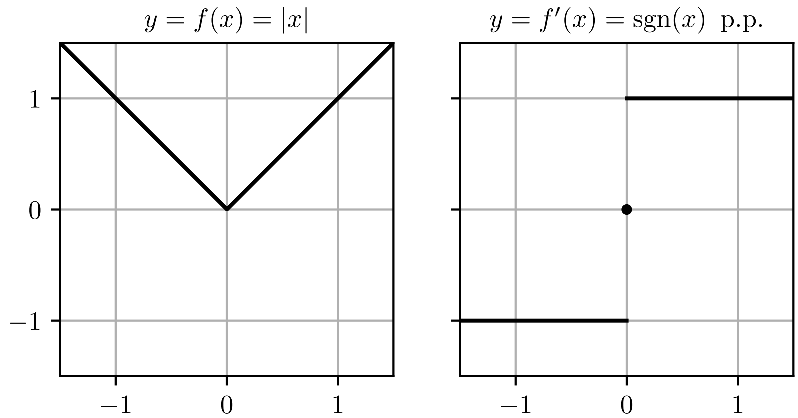
De plus, pour tout $x \geq 0$ on a bien

$$|x| = x = \int_0^x dt = 0 + \int_0^x \mathrm{sgn}(t)\, dt$$

et pour $x < 0$,

$$|x| = -x = \int_0^x -dt = 0 + \int_0^x \mathrm{sgn}(t)\, dt.$$

La fonction $|\cdot|$ est bien faiblement dérivable, de dérivée faible la fonction sgn.



On peut remarquer que la fonction signe n'est pas elle-même faiblement dérivable. Elle est bien dérivable presque partout (sauf en 0) ; sa dérivée est nulle presque partout. Si elle était faiblement dérivable, on aurait donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sgn}(x) = \mathrm{sgn}(0) + \int_0^x 0 \, dt = 0,$$

ce qui n'est pas le cas. Alternativement, on peut aussi remarquer qu'elle n'est pas continue et par conséquent qu'elle ne peut pas être faiblement dérivable.

Attention !

Une fonction peut également être dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ mais de dérivée non localement absolument intégrable, auquel cas elle n'est pas faiblement dérivable [1]. Ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left| \begin{array}{cl} x^2 \sin 1/x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est dérivable en tout point (et donc continue), mais sa dérivée n'est que conditionnellement intégrable sur $[0, 1]$ par exemple, et donc elle n'est pas localement absolument intégrable (cf. Calcul Intégral II).

Fonctions continûment différentiables par morceaux

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et continûment dérivable par morceaux est faiblement dérivable.

1. C'est la seule obstruction possible : une fonction qui serait dérivable **en tout point de** $\mathbb{R}$ et dont la dérivée classique est localement absolument intégrable est automatiquement faiblement dérivable (Tao 2011, prop. 1.6.41, p. 176).

A noter que l'on peut être continûment différentiable par morceaux mais pas continue ; dans ce cas on ne peut pas être faiblement dérivable. La fonction signe est un bon exemple de fonction continûment dérivable par morceaux mais qui n'est pas continue (et donc pas faiblement dérivable).

Démonstration Notons $f(b^-)$ et $f(a^+)$ les limites à gauche de f en b et à droite de f en a respectivement. Remarquons tout d'abord que si la fonction f est continûment dérivable sur $]a, b[$ et que sa dérivée y est prolongeable par continuité sur $[a, b]$, alors on peut prolonger la restriction de f à $]a, b[$ en une fonction (continûment) dérivable sur $\mathbb{R}$. L'application du théorème fondamental du calcul fournit alors

$$f(b^-) - f(a^+) = \int_a^b f'(x)\, dx.$$

Supposons désormais que $\mathbb{R}$ soit recouvert par des intervalles $[a_k, b_k]$ sans chevauchement, indexés par des entiers relatifs k consécutifs ordonnés de façon croissante et que sur chaque $]a_k, b_k[$ la fonction f soit continûment dérivable, avec une dérivée ayant un prolongement par continuité à $[a_k, b_k]$.

On déduit de l'énoncé précédent que

$$\int_{a_k}^{b_k} f'(x)\, dx = f(b^-) - f(a^+) = f(b) - f(a)$$

et si $a_k < x < b_k$,

$$f(x) - f(a) = f(x) - f(a^+) = \int_a^x f'(t)\, dt$$

et

$$f(x) - f(b) = -(f(b^-) - f(x)) = -\int_x^b f'(t)\, dt = \int_b^x f'(t)\, dt.$$

Si x est réel positif, que $0 \in [a_i, b_i]$ et que $x \in [a_j, b_j]$, on a donc

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= (f(x) - f(a_j)) + (f(b_{j-1}) - f(a_{j-1})) + \cdots + (f(a_i) - f(0)) \\ &= \int_{a_j}^x f'(t)\, dt + \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} f'(t)\, dt + \cdots + \int_0^{a_i} f'(t)\, dt. \end{aligned}$$

et donc

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt.$$

Le cas d'un réel x négatif se traite de façon similaire. ■

Fonction de répartition et densité de probabilité

La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\exp(-t^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$

est une fonction de répartition, associée à la loi normale centrée réduite. Elle est faiblement dérivable ; en effet, son intégrande est localement absolument intégrable (il est positif et intégrable sur $\mathbb{R}$, d'intégrale 1) et l'on a par additivité de l'intégrale pour tout $x \in \mathbb{R}$

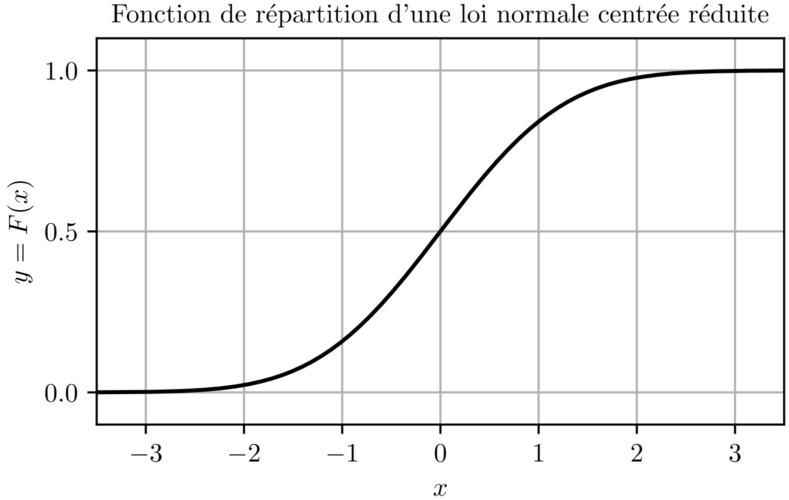
$$F(x) = F(0) + \int_{0}^{x} \frac{\exp(-t^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\, dt.$$

Cett relation montre également que la fonction

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp(-t^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

est une dérivée faible de F.

Fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite



Exercice – Loi de probabilité uniforme Montrer que la fonction de répartition F associée la loi de probabilité uniforme sur $[0, 1]$, définie par

$$F(x) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x. \end{array} \right.$$

est faiblement dérivable et calculer (presque partout) sa dérivée faible.

Plus généralement, on a :

Densité et dérivée faible

Une fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une densité si et seulement si elle est faiblement dérivable. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité associée à F si et seulement si elle est une dérivée faible de F (elle est donc déterminée uniquement presque partout par F).

Démonstration Sachant qu'une densité est localement absolument intégrable (car positive et intégrable), la preuve qu'une fonction de répartition admettant une densité est faiblement dérivable et que les deux fonctions coïncident résulte directement de l'égalité

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt.$$

Réciproquement, si F est une fonction de répartition faiblement dérivable, c'est-à-dire s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement absolument intégrable et une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = c + \int_{0}^{x} f(t)\,dt,$$

alors pour toute paire de réels $a \leq b$, on a

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

La fonction f est donc positive presque partout : en effet la fonction F est dérivable en presque tout point $x \in \mathbb{R}$, de dérivée $f(x)$. Si l'on avait $f(x) < 0$, alors pour $h > 0$ suffisamment petit, on aurait donc

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} < 0,$$

ce qui contredirait le fait que F est croissante. On obtient alors la relation

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

en posant $x = b$ et en passant à la limite $a \to -\infty$ en exploitant le fait que F a pour limite 0 en $-\infty$; le résultat est justifié par le théorème de convergence monotone.

Le passage à la limite $x \to +\infty$ fournit alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1,$$

à nouveau justifié par application du théorème de convergence monotone, en exploitant le fait que F a pour limite 1 en $+\infty$. ■

Il existe une façon alternative pour caractériser les fonctions faiblement dérivables qui repose sur l'usage de fonctions tests. Cette nouvelle approche se prêtera mieux à la généralisation encore plus "aggressive" de la notion de dérivée que nous allons aborder ou les dérivées ne seront plus nécessairement des fonctions, mais des fonctions "généralisées".

Fonctions tests

On note $D^k(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le support

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

est compact et qui sont continues si $k = 0$ ou k fois continûment différentiables quand $k \geq 1$.

Dérivation faible et fonctions tests

Une fonction localement absolument intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est faiblement dérivable de dérivée faible la fonction localement absolument intégrable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $\varphi \in D^1(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\, dt.$$

Démonstration Nous admettrons la démonstration dans le cas général et nous limitons à la preuve du cas des fonctions f et g continûment différentiables par morceaux. Dans ce cadre, une fonction est faiblement dérivable si et seulement si elle continue.

Supposons que cela soit le cas pour la fonction f. Alors, si $\varphi \in D^1(\mathbb{R})$, le produit $f\varphi$ est continûment différentiable par morceaux et continu, de dérivée classique presque partout égale à $f'\varphi + f\varphi'$. Les deux termes de cette somme sont intégrables. De plus, pour $r > 0$ assez grand et $|t| \geq r$, on a $\varphi(t) = 0$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\, dt = \int_{-r}^{+r} (f\varphi)'(t)\, dt = [f\varphi]_{-r}^{+r} = 0.$$

Réciproquement, supposons que f et g soient continûment différentiables et vérifient pour toute fonction $\varphi \in D^1(\mathbb{R})$ l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\, dt.$$

Soit $x > 0$. Pour $0 < \varepsilon < x/2$, on définit la fonction $\psi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_\varepsilon(t) = \left| \begin{array}{rl} -6/\varepsilon^3 \times t(t-\varepsilon) & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 6/\varepsilon^3 \times (t-x+\varepsilon)(t-x) & \text{si } x-\varepsilon \leq t \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

puis $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \psi_\varepsilon(s)\, ds.$$

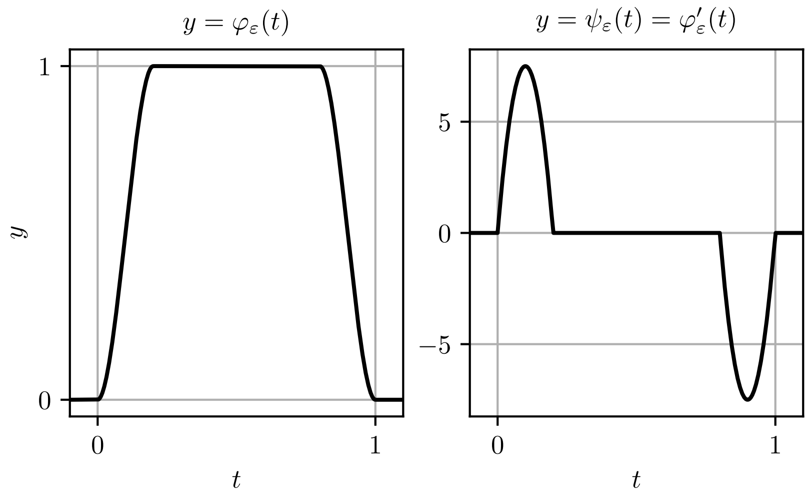


FIGURE 1 – Représentation de φ_ε de sa dérivée quand $x = 1$ et $\varepsilon = 0.2$.

On vérifiera que les fonctions ψ_ε ainsi construites appartiennent bien à $D^1(\mathbb{R})$. Lorsque l'on fait tendre ε vers 0, le théorème de convergence dominée nous fournit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi_\varepsilon(t)\, dt \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) 1_{[0,x]}(t)\, dt = \int_0^x g(t)\, dt.$$

D'autre part, on a

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'_\varepsilon(t)\, dt = \frac{6}{\varepsilon^3}\left[\int_0^\varepsilon f(t)t(t-\varepsilon)\, dt - \int_{x-\varepsilon}^{x} f(t)(t-x+\varepsilon)(t-x)\, dt\right].$$

Le changement de variable $s = t/\varepsilon$ nous fournit

$$\frac{6}{\varepsilon^3}\int_0^\varepsilon f(t)t(t-\varepsilon)\, dt = 6\int_0^1 f(\varepsilon s)s(s-1)\, ds$$

et donc par le théorème de convergence dominée, en faisant tendre ε vers 0,

$$\frac{6}{\varepsilon^3}\int_0^{\varepsilon} f(t)t(t-\varepsilon)\,dt \to f(0^+)\times\left(6\int_0^1 s(s-1)\,ds\right) = -f(0^+).$$

En analysant de façon similaire le second terme, on aboutit à

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_\varepsilon'(t)\,dt \to f(x^-) - f(0^+),$$

et donc

$$f(x^-) = f(0^+) + \int_0^x g(t)\,dt.$$

Le second membre étant continu par rapport à x et f supposée continue par morceaux, elle est en fait continue et $f(x) = f(x^-)$. Le cas $x < 0$ se traite de façon similaire. La fonction f admet donc g comme dérivée faible. ■

Mesures signées et dérivées

Aller plus loin dans la dérivation des fonctions – pouvoir dériver des fonctions discontinues par exemple – suppose d'accepter que des dérivées ne soient pas des fonctions ordinaires, mais des fonctions *généralisées*. Nous montrerons dans cette section comment des opérateurs linéaires agissant sur des fonctions tests peuvent remplir ce rôle et établiront le lien entre ces opérateurs et les mesures signées.

Formes linéaires continues sur $D^0(\mathbb{R})$.

On dira qu'une application linéaire $T : D^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ – c'est-à-dire une *forme linéaire* sur $D^0(\mathbb{R})$ – est *continue* si pour tout intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ il existe une constante K telle que pour toute fonction $\varphi \in D^0(\mathbb{R})$ dont le support soit inclus dans $[a,b]$, on ait

$$|T \cdot \varphi| \leq K \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

Cas des fonctions ordinaires

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement absolument intégrable, l'opérateur

$$T[f] : \phi \in D^0(\mathbb{R}) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t)\,dt$$

est linéaire continu. De plus, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement absolument intégrable, $T[f] = T[g]$ si et seulement si $f = g$ presque partout.

Démonstration La fonction f est localement intégrable donc mesurable et la fonction φ est continue donc mesurable. Le produit $f\varphi$ est donc mesurable. Soit $[a,b]$ un intervalle compact contenant le support de φ et M un majorant de $|\varphi|$ sur ce compact. Alors le produit $|f\varphi|$ est dominé par la fonction $|f|M1_{[a,b]}$ qui est intégrable ; le produit $f\varphi$ est donc absolument intégrable et par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt\right) \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|.$$

L'opérateur $T[f]$ est donc continu. Par ailleurs, la linéarité de $f \mapsto T[f]$ résulte de la linéarité de l'intégrale.

La fonction

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

est dérivable presque partout, de dérivée $f(x)$. En tout point x de ce type on a donc

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt.$$

Or, on peut construire une famille de fonction $\varphi_{h,\varepsilon} \in D^1(\mathbb{R})$, de support inclus dans $[x, x+h]$, vérifiant pour tout $t \in [x, x+h]$, $0 \leq \varphi_{h,\varepsilon}(t) \leq 1$ et telle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_{h,\varepsilon} = 1_{]x,x+h[}.$$

(on pourra s'inspirer des fonctions tests utilisées dans la démonstration de "Dérivation faible et fonctions tests"). Par le théorème de convergence dominée, on a donc pour presque tout x

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \\ &= \lim_{h\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_{h,\varepsilon}(t)\,dt \\ &= \lim_{h\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{h} T[f] \cdot \varphi_{h,\varepsilon}. \end{aligned}$$

La fonction f est donc déterminée uniquement presque partout par la donnée de $T[f]$. ■

Mesure signée

Soit $(X, \mathcal{A})$ un ensemble mesurable. Une *mesure signée* ν sur $(X, \mathcal{A})$ est une application

$$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\perp\}$$

pour laquelle il existe une mesure $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ et une application μ-mesurable $\sigma : X \to \{-1, +1\}$ telles que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) := \sigma\mu(A) := \left| \begin{array}{rl} \displaystyle\int_A \sigma(x)\,\mu(dx) = \int 1_A \sigma\,\mu & \text{si } 1_A\sigma \text{ est } \mu\text{-intégrable,} \\ \perp & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

A propos du symbole $\perp$

Le symbole $\perp$ peut être interprété comme "valeur réelle indéfinie" ou plus simplement "indéfini" [2]. Dans les calculs, on conviendra que toute opération impliquant $\perp$ a pour résultat $\perp$; par exemple $\perp$ est absorbant pour l'addition, c'est-à-dire que pour tout x réel ou indéfini,

$$x + \perp = \perp + x = \perp.$$

Dans ce contexte, on considérera également que les séries sans limites dans $\mathbb{R}$ ont pour limite $\perp$. Le symbole $\perp$ joue un rôle très similaire à $+\infty$ dans le cas des calculs impliquant des nombres positifs.

Les mesure (positives) sont des mesures signées

Toute mesure classique (dans le contexte des mesures signées, en cas d'ambiguité, on parlera de mesure *positive* pour les désigner) $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ peut être "convertie" en mesure signée ν : il suffit de lui associer la mesure μ et la fonction de signe σ constante égale à $+1$. On a alors

$$\nu(A) = \left| \begin{array}{rl} \mu(A) & \text{si } \mu(A) < +\infty, \\ \perp & \text{si } \mu(A) = +\infty. \end{array} \right.$$

L'identification inverse est possible si ν ne prend que des valeurs positives ou indéfinies, en convertissant les valeurs indéfinies en $+\infty$.

Exercice – Une mesure signée Soit ℓ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction qui a un ensemble A de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ associe

$$\mu(A) = \ell|_{\mathbb{R}_+}(A) - \ell|_{\mathbb{R}_-}(A) = \ell([0, +\infty[\cap A) - \ell(]-\infty, 0] \cap A)$$

est une mesure signée.

Exercice – Propriétés des mesures signées Les mesure signées sont-elles comme les mesures positives nulles en 0 (telles que $\mu(\varnothing) = 0$) ? Croissantes (telles que $\mu(A) \leq \mu(B)$ quand $A \subset B$) ?

2. concept assez similaire au "non-nombre" `nan` (*not-a-number*) des numériciens, que l'on obtient par exemple avec NumPy en calculant `inf - inf`.

Contrairement aux mesures positives, les combinaisons linéaires à coefficients réels (et pas seulement positifs) de mesures signées sont des mesures signées. On peut ainsi par exemple combiner des mesures de Dirac positives δ_x et par exemple construire la mesure $\mu = \delta_0 - 1/2 \times \delta_1$, qui associe à l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ la quantité

$$\mu(A) = (\delta_0 - 1/2 \times \delta_1)(A) = 1_A(0) - 1/2 \times 1_A(1).$$

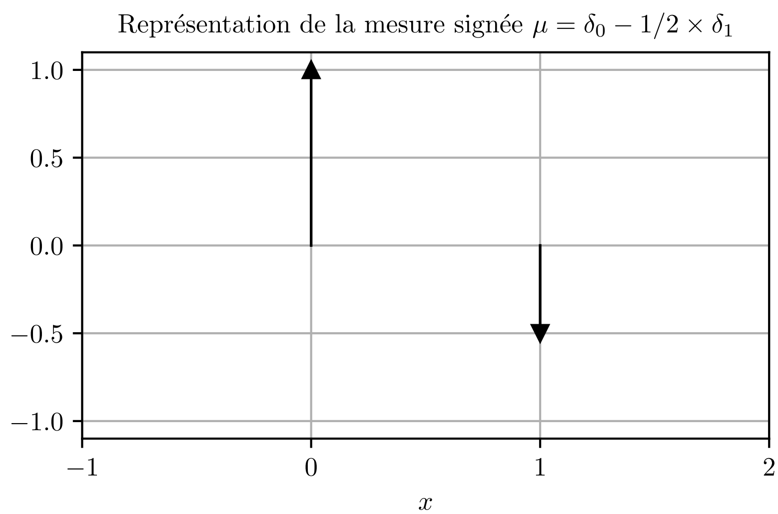


FIGURE 2 – Les combinaisons linéaires de Dirac sont souvent représentées comme des "pics" surmontés d'un triangle ou d'un rond. La mesure de Dirac $\alpha\delta_x$ est représentée par un pic à l'abscisse x et de hauteur α (positive ou negative).

Intégrale associée à une mesure signée

Soit $\nu = \sigma\mu$ une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$. La fonction $\mathcal{A}$-mesurable $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ est dite *ν-intégrable* si la fonction f (ou $f\sigma$) est μ-intégrable. L'intégrale de f par rapport à ν est alors définie comme

$$\int f\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\nu(dt) := \int f\sigma\,\mu \in \mathbb{R}.$$

Mesures de Radon

Une mesure signée μ est une *mesure de Radon* si pour tout fonction $\varphi \in D^0(\mathbb{R})$, l'intégrale

$$T[\mu] \cdot \varphi := \int \varphi\,\mu$$

est bien définie et que l'opérateur $T[\mu] : D^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire continu.

La mesure de Lebesgue est de Radon

Démonstration Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour tout $\varphi \in D^0(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[a, b]$, φ est mesurable et bornée par la fonction $(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|)1_{[a,b]}$, donc ℓ-intégrable.

$$|T \cdot \varphi| = \left| \int_a^b \varphi\, \ell \right| \leq \int_a^b |\varphi| \ell \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \int_a^b \ell = (b-a) \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|.$$

■

Les mesures de Dirac sont de Radon

La mesure (positive) δ_x de Dirac en $x \in \mathbb{R}$ est une mesure de Radon. En effet, toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure de Dirac, d'intégrale

$$\int f\, \delta_x = f(x).$$

En particulier, si $\varphi \in D^1(\mathbb{R})$, φ est δ_x-intégrable et de plus

$$|T[\delta_x] \cdot \varphi| = |\varphi(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|.$$

L'opérateur $T[\delta_x]$ est donc continu.

Exercice – Peigne de Dirac Soit c_k, une famille de réels indexés par $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que la mesure signée $\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \delta_k$ est de Radon.

Exercice – Mesure de comptage La mesure de comptage c est-elle une mesure de Radon ?

Les fonctions ordinaires sont (identifiables à) des mesures de Radon

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement absolument intégrable. Alors si ℓ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, la mesure signée $f\ell$, telle que pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$,

$$f\ell(A) := \left| \begin{array}{rl} \displaystyle\int 1_A f\, \ell = \int 1_A(x) f(x)\, dx & \text{si } 1_A f \text{ est } \ell\text{-intégrable,} \\ \perp & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est une mesure de Radon.

Ce résultat nous permet d'identifier implicitement une fonction ordinaire f à la mesure de Radon $f\ell$, notamment quand des calculs impliquant fonctions et mesures rendront cette démarche nécessaire.

Exercice – Somme de fonction et de mesure Comment interpréter $\mu = 1_{[0,1]} - \delta_1$ comme une mesure de Radon ? Calculer $\mu([0,1/2])$, $\mu([1/2,1])$ et $\mu([1,3/2])$.

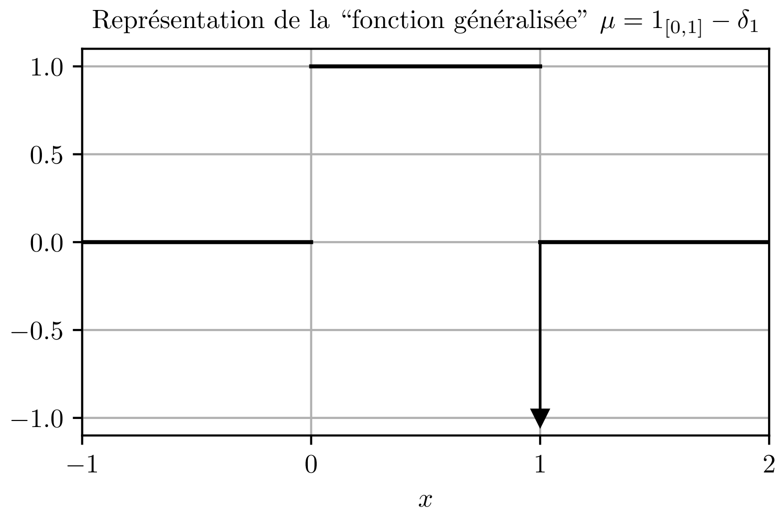


Figure 3 – Une représentation d'une mesure signée combinant fonction ordinaire f (identifiée à la mesure $f\ell$ ou ℓ est la mesure de Lebesgue) et mesure de Dirac. La partie fonction est représentée par le graphique habituel et la partie Dirac par les pics déjà décrits.

Dérivée mesure

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement absolument intégrable admet comme dérivée la mesure de Radon μ si pour toute fonction test $\varphi \in D^1(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \mu(dt).$$

Exercice – Dérivée de l'échelon unitaire Montrer que l'échelon unitaire $e = 1_{[0,+\infty[}$ admet pour dérivée la mesure de Dirac δ_0.

On remarque que si f admet g comme dérivée faible alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)\,dt \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)\,\ell(dt) \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,g\ell(dt).\end{aligned}$$

donc f admet $g\ell$ comme dérivée mesure : la convention que nous avons choisie pour identifier fonctions ordinaires et mesures de Radon est telle que la notion de dérivée mesure étende celle de dérivée faible.

Formule des sauts

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable par morceaux discontinue aux points x_k. Soit $\sigma_k = f(x_k^+) - f(x_k^-)$ le *saut de f en x_k*. Si l'on désigne par f'_{pp} la fonction ordinaire égale à la dérivée classique de f presque partout, alors f admet comme dérivée mesure la somme

$$f'_{\mathrm{pp}} + \sum_k \sigma_k \delta_{x_k}.$$

Démonstration

Soit $\varphi \in D^1(\mathbb{R})$ et $[a, b]$ un intervalle compact contenant le support de φ. Soient $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n}$ ceux des x_k qui appartiennent à $[a, b]$ (ils sont nécessairement en nombre fini). Alors on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = \int_a^{x_j} f(t)\varphi'(t)\,dt + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{j+i}}^{x_{j+i+1}} f(t)\varphi'(t)\,dt + \int_{x_{j+n}}^{b} f(t)\varphi'(t)\,dt$$

et donc par intégration par parties, en utilisant sur chaque segment le prolongement continument différentiable de f :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = &-\int_a^{x_j} f'(t)\varphi(t)\,dt + [f\varphi]_a^{x_j^-} \\ &-\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{j+i}}^{x_{j+i+1}} f'(t)\varphi(t)\,dt + [f\varphi]_{x_{j+i}^+}^{x_{i+j+1}^-} \\ &-\int_{x_j}^{b} f'(t)\varphi(t)\,dt + [f\varphi]_{x_j^+}^{b}\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b f'(t)\varphi(t)\,dt \\ + f(x_j^-)\varphi(x_j) - f(x_j^+)\varphi(x_j) + \cdots \\ + f(x_{j+n}^-)\varphi(x_{j+n}) - f(x_{j+n}^+)\varphi(x_{j+n}).\end{aligned}$$

Il suffit alors de constater que

$$(f(x_{j+i}^-) - f(x_{j+i}^+))\varphi(x_{j+i}) = -\sigma_{x_{j+i}}\varphi(x_{j+i}) = -\sigma_{x_{j+i}} \int \varphi\,\delta_{x_{j+i}}$$

pour conclure.

Exercice – Fonction signe Déterminer la dérivée mesure de la fonction signe.

Exercice – Escalier Déterminer la dérivée mesure de la fonction partie entière.

Exercice – "Primitive" Trouver une fonction continument dérivable par morceaux f dont la dérivée mesure soit $\mu = 1_{[0,1]} - \delta_1$.

Fonction de variation bornée

Une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de *variation bornée* s'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $n+1$-uplet $a \leq x_0 \leq \cdots \leq x_n \leq b$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq M.$$

Le plus petit M qui convienne est la *variation de f sur* $[a, b]$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *localement de variation bornée* si sa restriction à tout intervalle compact $[a, b]$ de variation bornée.

Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème de représentation de Riesz

Une fonction ordinaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a une dérivée mesure si et seulement elle est égale presque partout à une fonction localement à variation bornée.

Fonction de répartition

Une fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a une dérivée mesure $\mathbb{P}$ qui vérifie

$$\forall a \leq b \in \mathbb{R},\ F(b) - F(a) = \mathbb{P}(]a, b]).$$

Démonstration La fonction de répartition F est croissante ; par conséquent, si $a \leq x_0 \leq \cdots \leq x_n \leq b$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = F(b) - F(a).$$

La fonction F est donc localement de variation bornée ; elle a donc une dérivée mesure μ, qui satisfait pour tout $\varphi \in D^1(\mathbb{R})$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\varphi'(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \mu(dt).$$

De façon similaire à la démonstration de “Dérivation faible et fonctions tests” introduisons pour tout intervalle compact $[a, b]$ et pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit les fonctions $\psi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\psi_\varepsilon(t) = \left| \begin{array}{rl} -6/\varepsilon^3 \times (t-a)(t-a-\varepsilon) & \text{si } a \leq t \leq a+\varepsilon, \\ 6/\varepsilon^3 \times (t-b+\varepsilon)(t-b) & \text{si } b-\varepsilon \leq t \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

puis $\varphi_\varepsilon \in D^1(\mathbb{R})$ par

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \psi_\varepsilon(s)\, ds.$$

Comme dans la démonstration de “Dérivation faible et fonctions tests”, en utilisant un changement de variable et le théorème de convergence dominée, on établit que quand $\varepsilon \to 0$,

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\varphi_\varepsilon'(t)\, dt \to F(b^-) - F(a^+).$$

Par ailleurs, quand $\varepsilon \to 0$, les fonctions φ_ε convergent simplement vers $1_{]a,b[}$. Notons $\mu = \sigma\nu$ ou ν est positive et σ est la fonction de signe associée. Comme les fonctions φ_ε peuvent être encadrées par une fonction ν-intégrable – toute fonction positive de $D^1(\mathbb{R})$ valant plus que 1 sur $[a, b]$ – par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(t)\, \mu(dt) \to \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{]a,b[}(t)\, \mu(dt) = \mu(]a, b[).$$

En considérant des intervalles de la forme $]a, b] \subset]a, c[$ et en faisant tendre c vers b^+, on a d'une part

$$F(c^-) - F(a^+) \to F(b^+) - F(a^+)$$

et d'autre part

$$\mu(]a, c[) = \int 1_{]a,c[}\mu \to \int 1_{]a,b]}\mu = \mu(]a, b])$$

par le théorème de convergence dominée. On en déduit, comme F est continue à droite, que $F(b) - F(a) = \mu(]a, b])$ comme désiré. ■

Tribus engendrées & co

Tribu engendrée par une collection

Dans un ensemble X, on appelle *tribu engendrée* par une collection $\mathcal{B}$ d'ensembles de X la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$ de X contenant $\mathcal{C}$. Autrement dit :

- — $\sigma(\mathcal{B})$ est une tribu.
- — si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est une tribu de X, alors $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{C}$.

Quand il y a une ambiguité sur l'ensemble X hébergeant la collection $\mathcal{B}$, on pourra noter la tribu engendrée $\sigma_X(\mathcal{B})$.

Démonstration (existence de la tribu engendrée) Désignons par $\mathfrak{S}$ la collection des tribus de contenant $\mathcal{B}$ comme sous-ensemble.

$$\mathfrak{S} = \{\mathcal{C} \text{ tribu de } X \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{C}\}$$

Elle n'est pas vide : elle contient la collection $\mathcal{P}(X)$ des ensembles de X (qui de toute évidence est un sur-ensemble de $\mathcal{B}$ et une tribu de X). Montrons que la plus petite tribu $\sigma(\mathcal{B})$ de X contenant $\mathcal{B}$ est l'intersection de toutes les tribus de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire que

$$\sigma(\mathcal{B}) = \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C} = \{A \subset X \mid A \in \mathcal{C} \text{ pour tout } \mathcal{C} \in \mathfrak{S}\}.$$

Il est clair que si $\mathcal{A}$ est une tribu de X contenant $\mathcal{B}$, alors $\cap_{\mathcal{C} \in \mathfrak{S}} \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, car $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}$. Il nous suffit donc de montrer que $\cap \mathfrak{S}$ est une tribu de X pour pouvoir conclure ; on vérifiera aisément que comme chaque élément de $\mathfrak{S}$ est une tribu, cette intersection en est également une. ■

Tribu de Borel

On appelle *tribu de Borel* d'un espace topologique X la plus petite tribu contenant tous les fermés (ou tous les ouverts) de X.

Mesure

Une *mesure (positive)* μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une fonction de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$ telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et pour toute collection dénombrable d'ensembles A_k de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, on ait

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k);$$

on dit que μ est *σ-additive*. L'ensemble X muni de $\mathcal{A}$ et μ est un *espace mesuré*.

Fonction mesurable

Une fonction $f : X \to Y$ associée aux espaces mesurables $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ est *mesurable* (ou *$\mathcal{A}/\mathcal{B}$-mesurable*) si l'image réciproque $A = f^{-1}(B)$ de tout ensemble B de $\mathcal{B}$ par f appartient à $\mathcal{A}$.

L'infini

Dans le cadre abstrait de l'intégration selon Lebesgue, on pourra si nécessaire considérer des fonctions prenant (éventuellement) des valeurs infinies, c'est-à-dire travailler avec des fonctions à valeurs dans $Y = [-\infty, +\infty]$ plutôt que dans $Y = \mathbb{R}$([3]). Cette extension simplifiera notamment l'énoncé du théorème de Fubini.

3. dans le cadre de l'intégration de Henstock-Kurzweil, c'est pour l'ensemble de départ que nous avions l'habitude de prendre $[-\infty, +\infty]$; il s'agissait d'une "astuce" technique qui permettait d'intégrer des fonctions définies au départ sur $\mathbb{R}$ avec des techniques déjà développées pour les intervalles compacts $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Avec l'intégrale de Lebesgue il n'est plus nécessaire d'étendre $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ.
La théorie de Henstock-Kurzweil accepte donc volontiers les fonctions dont les **arguments** sont infinis – $f(+\infty) = 0$ par exemple a du sens – mais est "allergique" aux fonctions à **valeurs** infinies. Par exemple, si l'on essayait de calculer l'intégrale de Henstock-Kurzweil de la fonction

$$f(x) = \left| \begin{array}{cl} +\infty & \text{si } x = 0, \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } x \in \left]0, 1\right] \end{array} \right.$$

on obtiendrait $+\infty$, alors même que l'intégrale vaut 2 pour toute valeur finie de $f(0)$. L'intégrale de Lebesgue n'a pas cette difficulté, et produira la valeur 2 dans tous les cas.

Conventions

Lorsque l'ensemble d'arrivée Y de f a une structure topologique, par exemple $Y = [-\infty, +\infty]$ ou $Y = [-\infty, +\infty]^m$, on supposera par défaut que la tribu associée est la tribu de Borel. Lorsque l'ensemble de départ de f est $X = \mathbb{R}^n$ on supposera par défaut que la tribu associée est la tribu de Lebesgue. Lorsque l'on souhaitera plutôt munir X et Y de la tribu de Borel, on parlera de fonction *borélienne* (tribu de Borel au départ et à l'arrivée). Il existe une bonne raison pour adopter par défaut la convention hybride (avec des tribus d'un type différent au départ et à l'arrivée) pour la définition de "mesurable" :

Lebesgue/Borel-mesurable équivaut à H.-K.-mesurable

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est limite simple de fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil – c'est-à-dire "mesurable" au sens de "Calcul Intégral III" – si et seulement si elle est $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-mesurable.

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant :

Image réciproque et tribus engendrées

Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{B}$ une collection d'ensembles de Y. Alors

$$\mathcal{F} := \sigma_X(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \sigma_Y(\mathcal{B})\}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} & \arrow[l, "f^{-1}"'] \\ \arrow[u, "\sigma_X"] & \mathcal{B} \arrow[l, "f^{-1}"] \arrow[u, "\sigma_Y"'] \end{tikzcd}$$

FIGURE 4 – Ce diagramme est *commutatif.*

Démonstration Notons $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$. Comme $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, on a

$$\{f^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{B}\} \subset \{f^{-1}(A) \,|\, A \in \mathcal{A}\}.$$

Si nous montrons que $\mathcal{C} := \{f^{-1}(A) \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu nous pouvons en déduire que

$$\sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}) \subset \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

L'ensemble vide appartient à $\mathcal{C}$ car $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$. Si $A \in \mathcal{A}$, $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ et $Y \setminus A \in \mathcal{A}$, donc $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{C}$. Finalement, si $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}$, $\cup_k f^{-1}(A_k) = f^{-1}(\cup_k A_k) \in \mathcal{C}$. La collection $\mathcal{C}$ est donc une tribu.

Réciproquement, posons $\mathcal{E} = \sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\})$ et considérons

$$\mathcal{D} = \{A \in Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}.$$

La collection $\mathcal{D}$ est également une tribu. En effet, $f^{-1}(\varnothing) \in \mathcal{E}$, si $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ alors $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ et si $f^{-1}(A_0), f^{-1}(A_1), \dots \in \mathcal{E}$, alors $f^{-1}(\cup_k A_k) = \cup_k f^{-1}(A_k) \in \mathcal{E}$. Par conséquent, comme $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Donc pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$, soit

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{E} = \sigma(\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}).$$

$\blacksquare$

Démonstration "L./B.-mesurable $\Leftrightarrow$ H.-K.-mesurable" La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est limite simple de fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil si et seulement si elle vérifie le critère de l'image réciproque des sections II et III, c'est-à-dire si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est un ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$-mesurable.

De toute évidence, si f est Lebesgue/Borel-mesurable, ce critère est satisfait. Réciproquement, si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est Lebesgue-mesurable, alors la tribu engendrée par les images réciproques des ouverts de $\mathbb{R}^m$ est incluse dans la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Comme cette tribu est d'après le lemme précédent l'ensemble des images réciproques de la tribu engendrée par les ouverts dans $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire la tribu de Borel dans $\mathbb{R}^m$, l'image réciproque de tout borélien est un ensemble de la tribu de Lebesgue : la fonction f est Lebesgue/Borel-mesurable. $\blacksquare$

Composition de fonctions mesurables

Soient $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ et $(Z, \mathcal{C})$ des espaces mesurables. Soit $f : X \to Y$ une fonction $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-mesurable et $g : Y \to X$ une fonction $\mathcal{B}/\mathcal{C}$-mesurable. Alors la composition $g \circ f$ de f et g est $\mathcal{A}/\mathcal{C}$-mesurable.

Démonstration Pour tout ensemble $C \in \mathcal{C}$, on a $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ et donc $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. $\blacksquare$

Les fonctions continues sont boréliennes

Soient X et Y deux espaces topologiques. Toute fonction continue $f : X \to Y$ est borélienne.

Démonstration Notons $\mathcal{F}_X$ et $\mathcal{F}_Y$ les collections de tous les ensembles fermés de X et Y respectivement. Comme les boréliens de Y sont engendrés par les fermés de $\mathcal{F}_Y$, on a

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(Y)\} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \sigma_Y(\mathcal{F}_Y)\}$$

et par conséquent, par commutativité,

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(Y)\} = \sigma_X(\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_Y\}).$$

Or la fonction f étant continue, $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_Y\} \subset \mathcal{F}_X$ et par conséquent

$$\sigma_X(\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_Y\}) \subset \sigma_X(\mathcal{F}_X) = \mathcal{B}(X).$$

Au final, $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(Y)\} \subset \mathcal{B}(X)$ et la fonction f est bien $\mathcal{B}(X)/\mathcal{B}(Y)$-mesurable, c'est-à-dire borélienne. ■

Limite simple de fonctions mesurables

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $Y = [-\infty, +\infty]$, muni de la tribu de Borel. Si les fonctions $f_k : X \to Y$, $k \in \mathbb{N}$, sont mesurables et convergent simplement vers f, alors f est mesurable.

Démonstration Par le lemme liant image réciproque et tribus engendrées, il suffit de prouver que l'image réciproque par f de tout ouvert U de Y appartient à $\mathcal{A}$. Or $f(x) \in U$ si et seulement si $f_k(x) \in U$ pour k assez grand, ce qui se traduit par la formule

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcap_{k=j}^{+\infty} f_k^{-1}(U)$$

qui établit que $f^{-1}(U)$ est un ensemble mesurable, comme union (dénombrable) d'intersections (dénombrable) d'ensembles mesurables. ■

Fonction mesurable

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur l'ensemble X. Une fonction $f : X \to [-\infty, +\infty]$ est $\mathcal{A}$/Borel-mesurable si et seulement si f est la limite simple de fonctions étagées $X \to \mathbb{R}$ qui soient $\mathcal{A}$/Borel-mesurables.

TODO – Démonstration ■

Produit de mesures

Tribu produit

Soit $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle *tribu produit* de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et l'on note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la tribu sur le produit cartésien $X \times Y$ engendrée par les ensembles de la forme $A \times B$ où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma_{X \times Y}\left(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}\right).$$

Produit des boréliens

On peut montrer que pour tout couple d'entiers m et n, la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^{m+n}$ est le produit des tribus des boréliens sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Le résultat analogue n'est pas vrai pour la mesure de Lebesgue : il est nécessaire de compléter la tribu produit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{m+n}$ pour obtenir $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n})$ (cf. exercice "Complétion d'une mesure").

Mesure produit

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés. On appelle *mesure produit* de μ et ν et l'on note $\mu \otimes \nu$ la fonction définie sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ par

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)\nu(B_k) \;\middle|\; A_k \in \mathcal{A},\ B_k \in \mathcal{B},\, C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \times B_k \right\}.$$

Démonstration Cf. Hunter (2011). ■

Intégrale dans un espace produit

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espace mesurés. Pour toute fonction $\mu \otimes \nu$-mesurable $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ ou toute fonction $\mu \otimes \nu$-intégrable $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, on notera

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\mu(dx)\nu(dy) := \int f(\mu \otimes \nu).$$

Mesure σ-finie

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que la mesure μ est σ-finie s'il existe une suite d'ensembles mesurables $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, telle que

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = X \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \mu(A_k) < +\infty.$$

Théorème de Fubini

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espace mesurés, tels que les mesures μ et ν soient σ-finies. Une fonction mesurable $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement l'intégrale itérée

$$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)| \mu(dx) \right) \nu(dy)$$

est finie. Dans ce cas,

$$\int f\,(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Démonstration cf Hunter (2011). ∎

Symétrie

Le rôle joué par X et Y étant symétrique dans l'énoncé du théorème de Fubini,on peut également dire qu'une fonction mesurable $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement l'intégrale itérée

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \nu(dy) \right) \mu(dx)$$

est finie et que dans ce cas,

$$\int f\,(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \nu(dy) \right) \mu(dx).$$

Exercices corrigés

Dérivée faible

Est-ce que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \sqrt{|x|} \ \text{ si } x \neq 0$$

est faiblement dérivable ? Quelle est dans ce cas sa dérivée ? **(?)**

Mesure signée et σ-additivité

Les mesures signées sont-elles comme les mesures positives σ-additives, c'est-à-dire telles que

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)$$

quand les A_k sont disjoints ? Indication : on pourra étudier $\mu = \ell|_{\mathbb{R}_+} - \ell_{\mathbb{R}_-}$, définie pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \ell([0, +\infty[\cap A) - \ell(]-\infty, 0] \cap A)$$

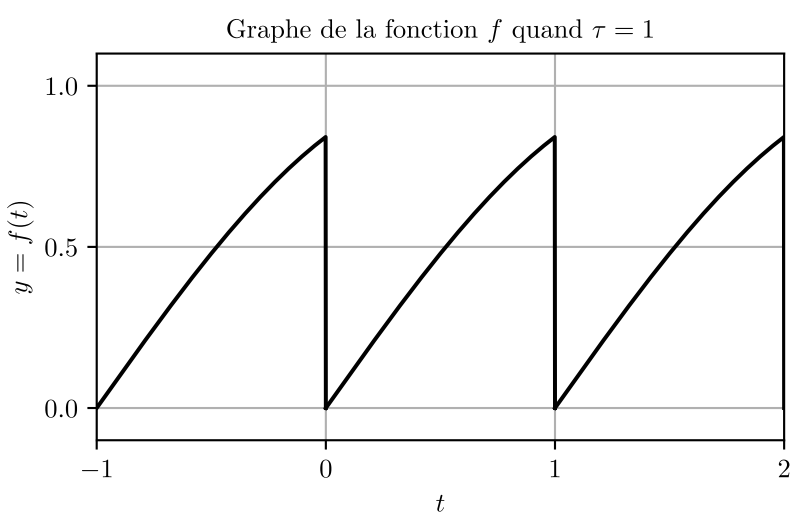
et rechercher une partition dénombrable de $\mathbb{R}$ par des A_k tels que $\mu(A_k) = 0$.

Etudier à nouveau le problème sous l'hypothèse supplémentaire que $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$ est réel. **(?)**

Dérivée mesure

Soit $\tau > 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est τ-périodique et telle que

$$\forall t \in [0, \tau[\,,\ f(t) = \sin t.$$



Montrer que f admet une dérivée mesure que l'on déterminera. A quelle condition sur τ cette mesure est-elle une fonction ordinaire (et f est-elle dérivable faiblement) ? La fonction f est-elle pour autant dérivable classiquement en tout point t de $\mathbb{R}$? **(?)**

Tribu engendrée

Une collection $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de X est une *algèbre (d'ensembles)* si elle contient $\varnothing$ et est stable par complémentation et par union finie.

De manière similaire au cas des tribus, pour toute collection d'ensembles de X il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) algèbre qui la contient : c'est *l'algèbre engendrée* par cette collection.

Question 1 Déterminer l'algèbre engendrée sur $\mathbb{R}$ par la collection

$$\{[a, b[\ | \ -\infty < a \leq b \leq +\infty\}$$

(?)

Question 2 Déterminer la tribu engendrée (ou σ-algèbre) sur $\mathbb{R}$ par la même collection. **(?)**

Solutions

Dérivée faible

Si f admet une dérivée faible, elle est nécessairement égale presque partout à la dérivée classique de f, qui vaut

$$g(x) := f'(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x)}{2\sqrt{x}}.$$

On peut compléter la dérivée faible potentielle g en posant $g(0) = 0$. Il faut ensuite vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a bien

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\, dt.$$

Pour $x > 0$ par exemple, on peut déduire de

$$\int_\varepsilon^x g(t)\, dt = \int_\varepsilon^x \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} - \sqrt{\varepsilon}$$

et du théorème de convergence monotone la relation souhaitée. La situation est similaire pour $x < 0$. La fonction f initiale est donc bien faiblement dérivable.

Mesure signée et σ-additivité

La réponse est non, les mesures signées ne sont pas nécessairement σ-additives. Considérons en effet $\mu = \ell|_{\mathbb{R}_+} - \ell|_{\mathbb{R}_-}$ et les ensembles mesurables

$$A_0 = \{0\} \ \text{ puis } \ A_k = [-k-1, -k[\cup]k, k+1] \ \text{ pour } k \geq 1.$$

Tous ces ensembles sont de mesure μ nulle et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) = 0.$$

Pourtant ils forment une partition dénombrable de $\mathbb{R}$ et comme la fonction sgn n'est pas ℓ-intégrable sur $\mathbb{R}$, on a

$$\mu\left(\cup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \mu(\mathbb{R}) = \perp.$$

Par contre, si l'on sait que $A := \cup_{k=0}^{+\infty} A_k$ est de mesure $\mu = \sigma\nu$ réelle, cela signifie que la fonction caractéristique 1_A est ν-intégrable. Les fonctions f_j définies par

$$f_j \sigma = 1_{\cup_{k=0}^{j} A_k} \sigma = \sum_{k=0}^{j} 1_{A_k} \sigma$$

sont ν-mesurables, dominées en valeur absolue par 1_A et $f_j\sigma$ converge simplement vers $1_A \sigma$. On a donc par le théorème de convergence dominée

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) = \lim_{j \to +\infty} \int f_j \sigma \, \nu = \int 1_A \sigma \, \nu = \mu(A).$$

Dérivée mesure

La fonction f est continûment dérivable par morceaux donc elle admet une dérivée mesure donnée par la formule des sauts, en l'occurence si l'on nomme $g la fonction τ-périodique telle que

$$\forall t \in [0, \tau[\,, \ g(t) = \cos t.$$

alors comme les seuls sauts possibles de f sont en $k\tau$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et valent

$$\sigma_{k\tau} = \sin 0 - \sin \tau = \sin \tau$$

cette dérivée mesure est

$$g + \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\sin \tau) \delta_{k\tau}.$$

C'est une fonction ordinaire si et seulement si $\sin \tau$ est nul, c'est-à-dire si $\tau \in \pi\mathbb{Z}$. Mais la fonction f n'est dérivable en tout point que si $\tau \in 2\pi\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire si $f = \sin$).

Tribu engendrée

Question 1 Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de X contenant tous les intervalles $[a, b[$ quand $-\infty < a \leq b \leq +\infty$, alors par complémentation de $[a, +\infty[$, elle contient nécessairement les ensembles de la forme $]-\infty, a[$ et donc par union finie tous les ensembles de la forme

$$]-\infty, a_0[\cup \cdots \cup [a_k, b_k[\cup \cdots \cup [a_m, +\infty[$$

où les a_k et les b_k sont finis et le premier et dernier terme de cette union peuvent être omis. On vérifiera alors que cet ensemble est stable par union finie et par complémentation : c'est une algèbre de $\mathbb{R}$. Par conséquent, c'est la plus petite algèbre de $\mathbb{R}$ qui contienne la collection initiale ; c'est donc l'algèbre engendrée recherchée.

Question 2 Si $\mathcal{A}$ est une tribu de X contenant tous les intervalles $[a, b[$ quand $-\infty < a \leq b \leq +\infty$, alors elle contient aussi

$$]a, b[= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left[a + \frac{b-a}{2^k}, b \right[$$

et donc tout ouvert de $\mathbb{R}$ puisqu'un tel ensemble est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Par conséquent, elle contient tous les Boréliens. Comme l'ensemble des Boréliens est une tribu de $\mathbb{R}$, c'est donc la tribu engendrée par la collection initiale.

Références

Hunter, John K. 2011. *Measure Theory.* Department of Mathematics, University of California at Davis. `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_theory.html`.

Tao, T. 2011. *An Introduction to Measure Theory.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. `https://terrytao.files.wordpress.com/2011/01/measure-book1.pdf`.