Calcul Intégral III

today

Table des matières

Intégrales Multiples

TODO

rappel résultats analogues (du chap I et II) au cas réel.

Pavés

On appelle *pavé* tout sous-ensemble I de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n$$

où les I_i sont de intervalles de $\mathbb{R}$.

Remarque

La notion de pavé généralise la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$; le terme intervalle est d'ailleurs parfois utilisé au lieu du terme pavé.

Subdivision pointée

Une *subdivision pointée* du pavé fermé I de $\mathbb{R}^n$ est une famille finie

$$\{(t_i, I_i) \mid \; 0 \leq i \leq k-1\}$$

où les I_i sont des pavés fermés de I sans chevauchement, qui recouvrent I, et tels que $t_i \in I_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Volume d'un pavé

On appelle *volume* du pavé $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ la valeur

$$v(I) = \ell(I_1) \times \cdots \times \ell(I_n) \in [0, +\infty] \,,$$

en adoptant la convention que $0 \times \infty = 0$.

Longeur, aire, volume

Dans $\mathbb{R}$, on pourra continuer à appeler cette grandeur la longueur ; dans $\mathbb{R}^2$ il est approprié de la désigner sous le terme d'aire. Si l'on souhaite distinguer le cas du volume "classique" dans $\mathbb{R}^3$ et les autres dimensions, on pourra utiliser le terme d'*hypervolume* comme terme générique et réserver le terme de volume au cas de $\mathbb{R}^3$.

Somme de Riemman

La somme de Riemann associée à la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un pavé compact de $\mathbb{R}^n$, et à la subdivision pointée $\mathcal{D}$ de I est la grandeur

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} f(t) v(I)$$

Jauge

Une jauge γ sur un pavé I de $\mathbb{R}^n$ est une fonction qui associe à tout $t \in I$ un intervalle ouvert $\gamma(t)$ de $\mathbb{R}^n$ contenant t.

Subdivision pointée subordonnée à une jauge

Une subdivision $\mathcal{D}$ du pavé compact I est *subordonnée à une jauge* γ sur I si pour tout $(t, J) \in \mathcal{D}$, $J \subset \gamma(t)$.

Intégrale dans $\mathbb{R}^n$

Soit I un pavé de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil)* s'il existe un réel A tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge γ de $\mathbb{R}^n$ et un pavé compact K de I tels que pour tout pavé compact P vérifiant $K \subset P \subset I$ et pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de P subordonnée à γ, on ait $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$. Le réel A quand il existe est unique; il est appelé *intégrale de f sur* $\mathbb{R}^n$ et noté

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, dt.$$

Théorème de Fubini

Soit $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors la fonction partielle $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x, y)$ est intégrable pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$ et

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,dx \right] dy$$

Démonstration

Se reporter à Swartz (2001).

■

TODO

Résultat en intervertissant x et y, la réciproque ne marche pas (donc la définition d'intégrale directement dans $\mathbb{R}^n$ est "nécessaire", l'intégrale multiple "ne marche pas".)

Changement de variables

Soient D_1 et D_2 des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $h : D_1 \to D_2$ une fonction continûment différentiable ayant une fonction inverse $h^{-1} : D_2 \to D_1$ également continûment différentiable. Si Dh désigne la matrice de Jacobi associée à la différentielle de h, la fonction $f : D_2 \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable si et seulement si la fonction $(f \circ h)|\det Dh| : D_1 \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable et dans ce cas,

$$\int_{D_2} f(y)\,dy = \int_{D_1} f(h(x))|\det Dh(x)|\,dx.$$

Démonstration

Se reporter à (Swartz 2001, annexe 5).

■

TODO

Mention du fait qu'il est vraiment nécessaire de chercher l'absolue intégrabilité. Retrouver la référence qui cite qu'avec une simple rotation et l'intégrabilité conditionnelle ça ne marche pas. C'est dans le Bullen – Non-Absolute Integrale, mais pas détaillé (Q: le texte utilise une rotation de $\pi/4$ pour le contre-exemple. Avec une rotation de $\pi/2$ ça marcherait ?). Un exemple détaillé est donné dans

"Petit traité d'intégration: Riemann, Lebesgue et Kurzweil-Henstock" (Jean-Yves Briend). L'exemple est compréhensible et intéressant; peut faire l'objet d'un exercice technique semble faisable.

Tracer un parralèle avec les séries, ou il est connu que les séries conditionnellement convergentes ne gardent pas cette propriété par réordonnancement (exemple mono-dim ou bi-dim) ?

Théorème de Stokes

TODO

Définition par une équation implicite (équivalent). Que doit-on adopter comme définition ? Et quoi comme propriété ? La définition par l'épigraphe est sans doute plus intuitive, mais sa formalisation plus lourde … Je serais tenté dans le cours oral de partir de la définition par l'épigraphe, informellement, pour l'intuition (et de toute façon on a besoin de cette construction pour la suite) puis d'énoncer rigoureusement la version implicite, équivalente.

TODO

Remplacer épigraphe par hypographe ? Ca me semble graphiquement plus intuitif et ça colle sans doute mieux avec les exemples usuels (fonction distance orientée, conventions KKT, etc.), mais bien sûr pas toujours (ex: carac convexité). OK, oui

TODO

Minimiser le cadre "reprère orthonormé direct", par simplement "changement de repère"; cela simplifie l'enoncé, la preuve, etc. et la contrainte "orthonormé direct" peut venir plus tard, en exercice? Pas évident, rédiger la preuve associé au passage de l'hypographe à l'inégalité implicite et voir ce qui vient. OK, ça devrait passer.

Compact à bord régulier

Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est *un compact à bord* C^1 s'il est compact et peut être caractérisé au voisinage de tout point de sa frontière ∂K, et après un éventuel changement de repère, comme l'*hypographe* – l'ensemble des points en-dessous du graphe – d'une fonction de classe C^1. Autrement dit, pour tout point $x_0 \in \partial K$, il existe un ouvert non vide $V \subset \mathbb{R}^n$ de la forme $V = U \times I$ où $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et I

est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, une application affine inversible T telle que $T(x_0) \in V$ et une fonction $f : U \to I$ continûment différentiable tels que

$$T(K) \cap V = \{(y_1, \dots, y_n) \in V \mid y_n \leq f(y_1, \dots, y_{n-1})\}$$

TODO

Faire passer l'idée d'un ensemble borné délimité par une surface $n-1$-dimensionelle (une “hypersurface”), “suffisamment régulière” et qu'il n'y a plus qu'à trouver une façon de mesurer cette régularité.

TODO

Vérifier qu'il n'est pas nécessaire (?) de spécifier indépendamment intérieur et frontière comme dans (Delfour and Zolésio 2011, 87).

Lister qq conséquences du fait d'être compact à bord (tq: adhérence de l'intérieur est l'ensemble, etc.), etc. Notation Ω, Γ, etc. Caractériser la frontière de K comme étant localement les points tels que $y_n = f(y_1, \dots, y_{n-1})$.

Evoquer “localement d'un seul coté” de la frontière ?

Définir normale (extérieure). Carac intrinsèque ?

TODO

Considérer remplacement de T par T^{-1} dans cet enoncé, si cela simplifie les choses dans la suite (j'ai l'impression, techniquement et sur la compréhension). Et s'arranger pour avoir dans le théorème qqchose de la forme $K \cap V = \dots$ c'est plus simple à comprendre sans doute.

Caractérisation implicite des compacts à bord régulier

Un sous-ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$ est un compact à bord C^1 si pour tout point x_0 de sa frontière ∂K il existe un voisinage ouvert V de x_0 et une fonction continûment différentiable $g : V \to \mathbb{R}$ dont la différentielle est non-nulle en x_0, telle que pour tout point x de V, x appartient à K si et seulement si $g(x) \leq 0$.

Démonstration

Si K est un compact à bord C^1, il existe un ouvert non vide $V \subset \mathbb{R}^n$ de la forme $V = U \times I$ où $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, une application affine inversible T telle que $T(x_0) \in V$ et une fonction $f : U \to I$ continûment différentiable tels que

$$T(K) \cap V = \{(y_1, \dots, y_n) \in V \mid y_n \leq f(y_1, \dots, y_{n-1})\}.$$

Par conséquent, si l'on définit la fonction $g : V \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = y_n - f(y_1, \dots, y_{n-1}) \text{ où } (y_1, \dots, y_n) = T^{-1}(x),$$

on obtient la caractérisation implicite souhaitée. La seule vérification qui n'est pas évidente par construction est le caractère non-nul de la différentielle dg. Si $T(x) = A \cdot x + b$ où A est une application linéaire (nécessairement inversible) et $b \in \mathbb{R}^n$, en posant $\phi(y) = y_n - f(y_1, \dots, y_{n-1})$, on obtient

$$dg(x) = d\phi(T(x)) \cdot dT^{-1}(x) = d\phi(T(x)) \cdot A^{-1}.$$

Or, $\partial_n \phi(y) = 1$ en tout point y de V. L'application A^{-1} étant inversible, il existe un vecteur h de $\mathbb{R}^n$ tel que $A^{-1} \cdot h = (0, \dots, 0, 1)$; pour un tel vecteur on a donc

$$dg(x) \cdot h = d\phi(T(x)) \cdot A^{-1} \cdot h = \sum_i \partial_i \phi(T(x))(A^{-1} \cdot h)_i = 1.$$

La différentielle de g est donc bien non nulle.

Réciproquement, considérons un $x_0 \in \partial K$ et supposons qu'il existe une fonction $g : V \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés de l'énoncé. La différentielle de g étant non nulle en x_0, il exists un vecteur de u de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$dg(x) \cdot u > 0$$

dans un voisinage V' de x_0 contenu dans V. Soit T une application affine inversible de la forme $T(x) = A \cdot x + b$ telle que $A \cdot u = e_n$. La fonction $g \circ T^{-1}$ définie sur un voisinage ouvert de $T(x_0)$ satisfait alors

$$\begin{aligned}
\partial_n(g \circ T^{-1})(y) &= dg(T^{-1}(y)) \cdot dT^{-1}(y) \cdot e_n \\
&= dg(T^{-1}(y)) \cdot A^{-1} \cdot e_n \\
&= dg(T^{-1}(y)) \cdot u > 0
\end{aligned}$$

L'application du théorème des fonctions implicite fournit un ouvert non vide $V \subset \mathbb{R}^n$ de la forme $V = U \times I$ où $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : U \to I$ continûment différentiable telle que

$$g \circ T^{-1}(y_1, \dots, y_n) = 0 \Leftrightarrow y_n = f(y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Par le théorème fondamental du calcul,

$$\begin{aligned}
g \circ T^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= g \circ T^{-1}(y_1, \dots, f(y_1, \dots, y_{n-1})) \\
&\quad + \int_{f(y_1, \dots, y_{n-1})}^{y_n} \partial_n(g \circ T^{-1})(y_1, \dots, y_{n-1}, t)\, dt \\
&= \int_{f(y_1, \dots, y_{n-1})}^{y_n} \partial_n(g \circ T^{-1})(y_1, \dots, y_{n-1}, t)\, dt,
\end{aligned}$$

ce qui garantit que dans V, $(g \circ T^{-1})(y) \leq 0$ – c'est-à-dire $x = T^{-1}(y) \in K$ – si et seulement si $f(y_1, \dots, y_{n-1}) \leq y_n$.

■

Normale extérieure

Si K est un compact à bord C^1 caractérisé au voisinage de $x_0 \in \partial K$ par l'inégalité $g(x) \leq 0$, où V est un voisinage ouvert de x et $g : V \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable de différentielle non nulle, alors la *normale extérieure* de K en $x \in \partial K \cap V$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$n(x) = \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|}.$$

Terminologie

La normale est dite *extérieure* car si l'on part de $x \in \partial K$ et que l'on considère un déplacement suffisamment petit dans la direction de la normale, on se retrouve à l'extérieur de K. En effet, par la définition du gradient,

$$g(x+h) = g(x) + \langle \nabla g(x), h \rangle + o(h) = \langle \nabla g(x), h \rangle + o(h)$$

et par conséquent, si $h = \varepsilon n(x)$ avec $\varepsilon > 0$,

$$g(x+h) = \left\langle \nabla g(x), \varepsilon \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|} \right\rangle + o(\varepsilon) = \varepsilon \|\nabla g(x)\| + o(\varepsilon)$$

et le second membre de cette équation est positif si ε est suffisamment petit.

TODO

Evoquer indépendance du choix dans la définition

TODO

Rendre explicite la normale extérieure dans ce cas et un peu plus explicitement (sur un exemple ?) comment trouver un axe (orthonormé ?) qui permet de se ramener au cadre de l'épigraphe. Sur $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ par exemple.

TODO – Partition de l'unité

TODO Définition, énoncé existence

Intégrale de surface

Soit $\phi : \partial K \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Quand K est caractérisée au voisinage de $x_0 \in \partial K$ comme l'épigraphe de la fonction $f : V \to I$ après transformation T, la contribution de $W = T^{-1}(V \times I)$ à l'intégrale de surface de ϕ est définie par la relation

$$\int_{\partial K \cap W} \phi(x) S(dx) := \int_U \phi(z, f(z)) \sqrt{1 + \|\nabla f(z)\|^2} \, dz.$$

Si les $\{W_i\}_i$ consituent un recouvrement fini de ∂K par de tels ouverts et les $\{\rho_i\}_i$ une partition de l'unité associée, alors l'intégrale de surface de ϕ sur ∂K est définie par

$$\int_{\partial K} \phi(x) S(dx) := \sum_i \int_{\partial K \cap W_i} \rho_i(x) \phi(x) S(dx)$$

TODO

Evoquer indépendance du choix dans la définition

Définition

On appelle *divergence* d'une fonction différentiable

$$v : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; v = (v_1, \dots, v_n)$$

où V est un ouvert la fonction $\operatorname{div} f : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i(x)$$

Lemme de Stokes

Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit $v : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 de support compact [1]. L'ensemble Ω désignant l'hypographe strict de f – soit $\Omega = \{(y, z) \,|\, y \in \mathbb{R}^{n-1}, \; z < f(y)\}$ – et Γ le graphe de f – soit $\Gamma = \{(y, f(y)) \,|\, y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ – et n la normale extérieure associée, on a la relation

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x) \, dx = \int_\Gamma \langle v(x), n(x) \rangle \; S(dx)$$

1. le support d'une fonction v est l'adhérence de l'ensemble des points où elle est non nulle:

$$\operatorname{supp}(v) = \overline{\{x \in \operatorname{dom}(v) \,|\, f(x) \neq 0\}}.$$

Ici, f étant définie dans un ouvert ($\operatorname{dom}(f) = V \times \mathbb{R}$), son support est compact si et seulement si l'ensemble $\{x \,|\, f(x) \neq 0\}$ est borné et sa distance au complémentaire de $V \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ est positive.

Démonstration

On remarque que si $v = we_i$ où $w : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $i \in \{1, \dots, n\}$, comme $\operatorname{div} v = \partial_i w$ et $\langle v(x), n(x) \rangle = w(x) n_i(x)$, le résultat du lemme devient

$$\int_\Omega \partial_i w(x)\, dx = \int_\Gamma w(x) n_i(x)\, S(dx).$$

Réciproquement, que si cette relation est valable pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la conclusion du lemme de Stokes s'en déduit facilement. Démontrer cette relation suffit donc à prouver le lemme.

La transformation $h : V \times \left]-\infty, 0\right[\to \mathbb{R}^n$ définie par

$$h(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

est une application de classe C^1. Par construction,

$$h(V \times \left]-\infty, 0\right[) = \Omega$$

et admet une inverse, donnée par

$$h^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

qui est également de classe C^1. La matrice jacobienne associée à h vaut

$$Dh(x) = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \nabla f(x)^t & 1 \end{array}\right]$$

et par conséquent son déterminant jacobien satisfait

$$\det Dh(x) = 1.$$

Par conséquent, le changement de variable associé à h fournit

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_i w(x)\, dx &= \int_{h(V \times]-\infty, 0[)} \partial_i w(x)\, dx \\ &= \int_{V \times]-\infty, 0[} \partial_i w(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \dots, x_{n-1}))\, dx \end{aligned}$$

et donc par le théorème de Fubini

$$\int_\Omega \partial_i w(x)\, dx = \int_V \left[\int_{-\infty}^0 \partial_i w(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \dots, x_{n-1})) dx_n \right] d(x_1, \dots, x_{n-1})$$

Si $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} &\partial_i \left(w(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \dots, x_{n-1})) \right) = \\ &\qquad \partial_i w(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \dots, x_{n-1})) \\ &\qquad + \partial_n w(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \dots, x_{n-1})) \times \partial_i f(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

et dans le cas contraire,

$$\partial_n \left(w(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \ldots, x_{n-1}))\right) = \\ \partial_n w(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + f(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

■

TODO

Preuve de Stokes (dans un patch, puis en général) Enoncer version différentielle partielle de Stokes (directement analogie à l'IPP en dimension 1, permet de se limiter à l'intégration de fcts scalaires en 1ere approche et pas de perte de généralité; permet ensuite d'étudier les "applications" (théorème de la divergence, etc.))

$$\int_\Omega \partial_i f(x) \, dx = \int_\Gamma f(x) n_i(x) \, S(dx)$$

TODO

Perspective sur les versions plus "relaxées" du théorème de Stokes, qu'il s'agisse du bord Lipschitz ou des travaux (Mawhin, Pfeffer, etc.) pour demander moins que C^1 sur l'intégrande ?

Exercices

Déformations

Ω dans U paramétrisé par une déformation $T = I + u$ avec u petit et une base Ω_0 qui est un compact à bords C^1. Montrer que si la base est un compact à bord C^1, les déformés aussi.

Exemples de compacts à bord (déterminés implicitement)

... par la fonction distance orientée par exemple ?

Calcul

Un calcul réalisable par Fubini et/ou Stokes ? Dans le disque unité ? Avec un champ de vecteurs

Réferences

Delfour, M. C., and J.-P. Zolésio. 2011. *Shapes and Geometries. Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization. 2nd Ed.* 2nd ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

Swartz, Charles. 2001. *Introduction to Gauge Integrals.* Singapore: World Scientific.