Calcul Intégral II

Sébastien Boisgérault

Table des matières

Perspective

Scope: (ensembles mesurables,) fonctions mesurables, absolue intégrabilité.

La perspective est commune dans une large mesure: avec les outils dont on dispose à ce moment, il est souvent difficile de savoir dans un calcul, une expression composée si une fonction va être intégrable.

Exemples (à améliorer, distiller):

- produit de deux fonction intégrales n'est pas intégrable (ex: $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $[0, 1]$), ok, car le produit est "trop grand", moralement l'intégrale est $+\infty$. Mais s'il n'était pas "trop grand", est-ce que ça marcherait ?
- Si f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, elle est aussi intégrable sur toute union finie E d'intervalles de $\mathbb{R}$, ce que l'on peut définir comme l'intégrabilité de $f\chi_E$. Et si E est plus général ? On "voit bien" qu'il est nécessaire de requérir que χ_E soit intégrable (sinon ça ne marche pas avec $f = 1$), ce que l'on appelle "ensemble intégrable", mais est-ce que ça suffit ? La réponse est non …
  (c'est un cas particulier du précédent, le faire avant). Pb résolu si la fct est abs int (c'est même un critère ici !).
- Mais plus surprenant peut-être: le produit de deux fonction intégrables avec l'une des deux fonctions bornées n'est pas nécessairement intégrable. (cf (Swartz 2001, 43, ex. 14) avec $\cos 1/t$ et $t^{-3/2} \cos 1/t$). Pb résolu si les fcts sont abs int.
- Si f est intégrable et g est "sympa" (Lipschitz), est-ce que $g \circ f$ est intégrable ? Non … cf (Hu and Lakshmikantham 1989, 525, ex. 4.2) Pb résolu si les fcts sont abs int.

On a deux outils qui se combinent pour analyser et résoudre ces pbs:

- La notion de fonction mesurable et le critère d'intégrabilité dominée (Ponce and Schaftingen 2017),
- La notion de fonction absolument mesurable.

(nota: autres avantages fcts abs int: chgt de variable robuste et complétude L^1.)

Sinon

- le théorème de convergence dominé est requis techniquement dans certaines preuves et également pour donner une perspective sur la démarche. Mais sa preuve, ses conséquences, variantes, etc. non, ce qui peut suggérer une "preview" de ce résultat et un développement plus complet ultérieurement. On a "besoin" du DCT et de son corollaire qu'une fct est intégrable ssi elle est bornée par des fcts intégrables et mesurable.
- UPDATE: ensemble mesurable objet "secondaire", défini comme limite simple de fonction caractéristique ?
  Justifier l'introduction des ensembles mesurables … par la recherche d'une notion de "volume" (longueur/aire/…) suffisamment générale ? Oui, en généralisant ce qui se passe pour les intervalles. Et les ensembles mesurables sont ceux dont la mesure ne pose pas de pb à part qu'ils sont "trop grands". Introduire mesure de Lebesgue à ce stade, est possible, σ-algèbres, etc. Nécessaire dans la manip des fcts mesurables.
  Cross-justifier la notion de fonction absolument mesurable (concept "stable" par multiplication par la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable.)
  Probablement inclure plus généralement la pbmatique des fcts absoluments continues ici. Deux axes: intégrer sur des sous-ensembles "plus généraux" et de façon général, meilleur comportement par rapport aux opération usuelles: le produit borné abs int et abs int est abs int; ça n'est pas le cas pour les fcts simplement intégrables, ce qui est compliqué! Le pb du "multiplier" de fcts intégrable (égal pp à une fct de variation bornée), c'est too much …
- JTODO: parallèle séries AC ou C pour fct AI (et exemple restriction est parlant, très proche, faire le parallèle ?)
- Mener toute la présentation dans $\mathbb{R}$.

Théorèmes de Convergence

Théorème de convergence monotone

Si une suite de fonctions intégrables $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et majorée en tout point, c'est-à-dire si pour tout x de $\mathbb{R}$

$$\text{pour tout } \ k \in \mathbb{N}, \, f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \ \text{ et } \ \sup_k f_k(x) < +\infty,$$

alors la limite simple f des f_k est intégrable si et seulement si

$$\sup_k \int_k f(t)\, dt < +\infty.$$

et dans ce cas,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \to +\infty} f_k(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt.$$

Démonstration

Se reporter à Demailly (2011).

■

Théorème de convergence dominée

Si une suite de fonctions intégrables $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge simplement vers la fonction f, c'est-à-dire si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

et qu'il existe deux fonctions intégrables g et h encadrant la suite f_n, c'est-à-dire telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$$

alors la fonction f est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\, dt.$$

Démonstration

Se reporter à Demailly (2011).

■

TODO:

dérivation sous le signe somme (exercice ?)

Ensembles mesurables

Il existe un lien étroit entre la notions de longueur d'un ensemble de réels et le calcul intégral. Nous savons par exemple que pour tout intervalle compact $E = [a, b]$, la longueur $b - a$ de l'intervalle peut être calculée par l'intégrale de la fonction caractéristique de E:

$$\ell(E) = \ell([a, b]) := b - a = \int_a^b dt = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(t)\, dt.$$

Si E est une collection finie d'intervalles disjoints $[a_i, b_i]$, l'intégrale de χ_E vaut cette fois-ci $\sum_i b_i - a_i$, ce qui correspond toujours à la valeur "intuitive" de la longueur de l'ensemble.

Il apparait donc légitime pour définir la longueur d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ aussi général que possible [1] de $\mathbb{R}$ de prendre cette égalité comme une définition, ce qui suppose toutefois que la fonction caractéristique soit intégrable; on parle alors d'ensemble intégrable. Cette définition laisse toutefois de coté les ensembles "trop grands" pour être intégrables, mais par ailleurs parfaitement anodins, comme par exemple $\mathbb{R}$ tout entier ou l'ensemble des réels positifs. Nous préférons donc mettre l'accent sur la notion d'ensemble mesurable:

Ensemble mesurable

Un ensemble E de $\mathbb{R}$ est *de longueur finie* si sa fonction caractéristique χ_E est intégrable sur $\mathbb{R}$; il est *mesurable* si sa fonction caractéristique est intégable sur tout intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. La (mesure de) *longueur* d'un ensemble E mesurable est définie par

$$\ell(E) := \int_{\mathbb{R}} \chi_E(t)\, dt$$

si E est de longueur finie et

$$\ell(E) := +\infty$$

dans le cas contraire (si E mesurable mais pas de longueur finie).

Remarque

Il faut comprendre le terme "mesurable" littéralement, signifiant "dont on peut définir la longueur" (un nombre fini ou infini). Cette interprétation est cohérente, puisque tous les ensembles E de longueur finie sont bien mesurables; en effet

1. Oui il existe des ensembles dont on ne pas pas définir raisonnablement la longueur, sauf à accepter un concept de longueur aux propriétés très étranges. Non, cette situation ne résulte pas de la méthode de définition de la longueur par l'intégrale; c'est au contraire une limitation intrinsèque de la théorie de la mesure que nous étudierons plus en détail par la suite. Et non, il n'existe aucun construction "facile" (constructive, explicite) d'ensemble qui ne soit pas mesurable (et c'est une chose que l'on peut prouver).

si la fonction caractéristique χ_E est intégrable, sa restriction à tout intervalle compact $[a, b]$ également.

TODO:

intégrale de fct carac sur $[a, b]$ dominé par une borne finie commune, conclure que l'ensemble est de longueur finie?

TODO en exercice

Structure de δ-ring pour les ensembles intégrables ?

Propriétés élementaires des ensembles mesurables

1. L'ensemble vide est mesurable.
2. Le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable.
3. L'union d'une collection dénombrable [2] d'ensembles mesurables est mesurable.

Démonstration

1. La fonction caractéristique $\chi_\varnothing$ est identiquement nulle; l'ensemble vide $\varnothing$ est donc intégrable et par conséquent mesurable.
2. Si l'ensemble E est mesurable et $F = \mathbb{R} \setminus E$, pour tout $[a, b]$, l'ensemble $E \cap [a, b]$ est intégrable. Par ailleurs, l'ensemble $[a, b]$ est intégrable. Donc, comme
$$\chi_{F \cap [a,b]} = \chi_{[a,b]} - \chi_{E \cap [a,b]},$$
l'ensemble $F \cap [a, b]$ est intégrable; l'ensemble F est donc mesurable.
3. Si les E_n forment une famille dénombrable d'ensemble mesurables, pour tout intervalle compact $[a, b]$, $E_n \cap [a, b]$ est intégrable, c'est-à-dire que $\chi_{E_n \cap [a,b]}$ est intégrable. Comme $E \cap [a, b] = \cup_n E_n \cap [a, b]$, la suite des fonctions caractéristiques $\chi_{E_n \cap [a,b]}$ converge simplement vers $\chi_{E \cap [a,b]}$. Par ailleurs, pour tout n, on a $0 \leq \chi_{E_n \cap [a,b]} \leq \chi_{[a,b]}$, donc par le théorème de convergence dominée, la fonction $\chi_{E \cap [a,b]}$ est intégrable. Par conséquent, l'ensemble $\cup_n E_n$ est mesurable.

■

2. fini ou bien strictement dénombrable, c'est-à-dire en bijection avec $\mathbb{N}$.

TODO

terminologie σ-algèbre (ou tribu)

Topologie et ensembles mesurables

Tout ensemble ouvert est mesurable.

Démonstration

Tout intervalle ouvert I est mesurable. En effet, son intersection avec un intervalle compact $[a, b]$ est un intervalle inclus dans $[a, b]$. La fonction caractéristique associée est de la forme $\chi_{[c,d]}$, ou en diffère au plus en deux points; dans tous les cas, elle est intégrable.

Si maintenant U est un ensemble ouvert ouvert, pour chaque point x de U on peut construire le plus grand intervalle ouvert I_x contenant x et inclus dans U (c'est l'union de tous les intervalles ouvert vérifiant ces deux propriétés). Pour un couple x et y dans U, soit $I_x = I_y$, soit I_x et I_y sont disjoints et l'union de tous les intervalles I_x est égale à U. Comme dans chaque I_x on peut choisir un nombre rationnel y tel que $I_x = I_y$, cette union est dénombrable. L'ouvert U est donc une union dénombrable d'intervalles ouverts, qui sont tous mesurables, il est donc mesurable.

■

TODO

En amont (chap. I), énoncer que égale pp à intégrable est intégrale (et intégrale de même valeur). Grpmh ça n'est pas ce que l'on utilise excatement; la démo montre que ça marche si deux fonctions sont égales à l'exception d'un ensemble "négligeable", au sens de "de mesure extérieure de longueur nulle". L'exercice pertinent ici constiste donc à montrer qu'un ensemble est négligeable ssi il est de longueur nulle. Un sens est évident (négligeable $\to$ de longueur nulle) avec les résultats du chap précédent (à énoncer: comparaison intégrale de deux fcts ident sauf sur un ensemble négligeable)

NOTA: shunter cette section "complétude" en première approche ? Je dois revoir la terminologie du chap précédent, l'usage du terme "négligeable" n'est pas safe (veut dire autre chose). Ici tout ça est identique, mais pas en général . . .

NOTA: on a quand même assez pour prouver que la mesure est complète ? Nope, pas encore. Ca plaide pout shunter . . .

Réfléchir quand même aux 3 notions: de mesure extérieure nulle, de mesure nulle et négligeable (dans un ens de mesure nulle).

Ensembles négligeables

Un ensemble est de longueur nulle si et seulement s'il est négligeable.

Preuve

Si l'ensemble A est négligeable, sa fonction caractéristique est égale presque partout à la fonction identiquement nulle, qui est intégrable et d'intégrale nulle. Par conséquent (**TODO: insérer ce résultat dans chapitre 1**), χ_A est intégrable et d'intégrale nulle, donc l'ensemble A est intégrable et de longueur nulle.

Réciproquement, supposons l'ensemble A mesurable; nous cherchons à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable d'intervalles I_i de $\mathbb{R}$ qui recouvre A et telle que

$$\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Supposons temporairement que A soit inclus dans un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. La fonction caractéristique χ_A de A est intégrable, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge γ sur $[a, b]$ telle que, si la subdivision pointée (totale ou partielle[3]) $\mathcal{D} = \{(t_i, I_i)\}_i$ est subordonnée à γ, on a

$$S(\chi_A, \mathcal{D}) = \left| S(\chi_A, \mathcal{D}) - \sum_i \int_{I_i} \chi_A(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Pour pouvoir conclure, nous allons construire une famille dénombrable $\{(t_i, I_i)\}_i$ où les I_i sont des intervalles compacts de $[a, b]$ sans chevauchement, tels que pour tout t_i, $I_i \subset \gamma(t_i)$ et tels que la famille des I_i recouvre A. Si cette construction est acquise et que $\mathcal{D}_k$ désigne la collection des $\{(t_i, I_i)\}$ pour $1 \leq i \leq m$, alors c'est une subdivision pointée partielle de $[a, b]$ subordonné à γ et donc

$$S(\chi_A, \mathcal{D}_k) = \sum_{i=1}^{k} \chi_A(t_i)\ell(I_i) = \sum_{i=1}^{k} \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

3. cette formulation est intéressante. C'est un peu moins fort que le lemme de Henstock stricto sensu, mais ça peut peut-être suffire à tous nos besoins: le lemme de Henstock permet de revisiter la définition d'intégrabilité (de façon équivalente) en rajoutant à la définition le qualificatif "(totale ou partielle)" à la subdivision (modulo aussi un mini-patch dans la formule inégalité ou l'on n'intègre plus nécessairement sur tout $[a, b]$, mais on somme sur les confettis ... Mmmm; on aurait peut-être intérêt à écrire ça comme

$$\int_{\cup_i I_i} f(t)\, dt := \sum_i \int_{I_i} f(t)\, dt$$

en définissant l'intégrale sur une union (finie) d'intervalles qui sont sans chevauchement). Et c'est un raccourci très intéressant pour la présentation orale. Il faudrait voir si ce "corollaire" du lemme de Henstock couvre l'ensemble des usage que l'on a en aval ...

En passant à la limite sur k, cette inégalité fournit comme souhaité

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Procédons finalement à la construction de la collection de (t_i, I_i), par dichotomie. S'il existe un $t \in [a, b]$ tel que $t \in A$ et $[a, b] \subset \gamma(t)$, alors on prend pour collection le singleton $\{(t, [a, b])\}$. Dans le cas contraire, on considère la décomposition de $[a, b]$ en $[a, (a + b)/2]$ et $[(a + b)/2, b]$. On examine chacun de ces intervalles J et s'il existe un $t \in A \cap J$ tel que $J \subset \gamma(t)$, on inclut la paire (t, J) dans la collection; dans le cas contraire, on poursuit la dichotomie. Cette procédure définit par construction une famille dénombrable $\{(t_i, I_i)\}_i$ où les I_i sont des intervalles compacts de $[a, b]$ sans chevauchement et tels que pour tout t_i, $I_i \subset \gamma(t_i)$. De plus, les I_i recouvrent A: en effet si on considère $t \in A$, il existe nécessairement un entier k tel que tout intervalle compact I de longueur inférieure ou égale à $(b - a)/2^k$ vérifie $I \subset \gamma(t)$. Par conséquent, t appartiend à l'un des intervalles inclus par le procédé au plus tard à l'étape k de la dichotomie.

■

TODO:

Montrer que couvrir un ensemble de longueur nulle par une collection finie (et non dénombrable) d'intervalles de somme des longueurs arbitrairement petite n'est pas tjs possible (travailler sur $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ par exemple, invoquer la densité des rationnels, etc.), mais constuire une telle collection dénombrable si.

Complétude de la longueur

Un sous-ensemble d'un ensemble de longueur nulle est de longueur nulle.

TODO: corollaires immédiats: difference mesurable, ensemble fermés mesurables, etc. Largement en exercice …

Fonctions mesurables

Meta

Dans la présentation, commencer par le théorème d'intégrabilité dominée, son contraste avec le cas Riemann classique, sans utiliser le mot de mesurabilité, puis en "extraire" la notion de mesurabilité.

Ante

Nous allons nous doter dans ce chapitre d'outils permettant de caractériser plus facilement l'intégrabilité des fonctions. Au coeur de l'approche, la notion de fonction mesurable:

Fonction mesurable

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *mesurable* si elle est la limite simple d'une suite de fonctions intégrables, c'est-à-dire s'il existe une suite de fonctions intégrables $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) \to f(x)$ quand $k \to +\infty$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est mesurable si chacune de ses composantes est mesurable.

Mesurabilité sur un intervalle

Nous nous limitons dans ce chapitre à l'étude des fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}$. La notion peut être très facilement étendue à une fonction f définie sur un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ de la façon suivante: on dira que f est mesurable si son prolongement par 0 à l'extérieur de I est mesurable. Nous laissons le soin au lecteur de généraliser en conséquence les énoncés qui vont suivre.

Ante

Le résultat qui met la notion de fonction mesurable au coeur de l'approche est le critère d'intégrabilité dominée:

Critère d'intégrabilité dominée

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si f est mesurable et il existe deux fonctions intégrables $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g \leq f \leq h$.

Interprétation

Souvenons-nous qu'une fonction définie sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est encadrée par deux fonctions intégrables au sens de Riemann et continue presque partout.

Dans le cas de l'intégrale de Riemann comme de Henstock-Kurzweil, l'intégrabilité est donc caractérisée par une structure analogue qui repose sur deux propriétés distinctes: être encadrée par deux fonctions intégrables et être "suffisamment régulière". La différence est que dans le cas de l'intégrale de Riemann l'exigence de régularité est forte – être continue presque partout – alors que dans le cas de l'intégrale de Henstock-Kurzweil, la régularité demandée – la mesurabilité – s'avère être une condition très peu contraignante [4].

Ante

Plusieurs propriétés des fonctions mesurables se déduisent directement de leur définition:

Les fonctions intégrables sont mesurables

Démonstration

Si f est une fonction mesurable, elle est la limite simple de la suite constante égale à f.

$\blacksquare$

Les fonctions mesurables forment un espace vectoriel

Démonstration

Si f, g sont mesurables et λ est un nombre réel, il existe des suites f_k et g_k de fonctions intégrables convergeant simplement vers f et g respectivement. Les fonctions $f_k + g_k$ et λf_k sont intégrables et convergent alors simplement vers $f + g$ et λf respectivement.

$\blacksquare$

TODO ?

Evoquer fct localement intégrable ? Quand on regarde la preuve ci-dessous, on n'utilise pas autre chose ...

Les fonctions continues (presque partout) sont mesurables

Démonstration

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue presque partout. Pour tout entier k, la fonction f_k égale à f sur l'intervalle $[-k, k]$ est intégrable (car Riemann-

4. A tel point que s'il l'on peut prouver l'existence d'une fonction non-mesurable, sa "construction explicite" est impossible. Les fonctions non-mesurables font partie des objets "intangibles" (cf. Schechter (1996)) dont l'existence est prédite par la théorie mais que l'on ne rencontre jamais par hasard ...

intégrable) et la suite des f_k converge simplement vers f, qui est donc mesurable.

■

Images réciproques des fonctions mesurables

Une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ est mesurable si et seulement pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, l'image réciproque de U par f

$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in U\}$$

est mesurable.

NOTA: l'énonce ici est donné dans le cas des fonctions scalaires, mais on a rapidement besoin du cadre vectoriel (pour composer avec des opérateurs binaires), ce qui renforce encore l'attrait de la formulation "abstraite" (qui "tient" dans le cas vectoriel, mais pas les autres). donc **TODO:** nettoyer, ne garder que le cas 3., et rajouter le bout de démo qui finit la preuve dans le cas vectoriel (dans les deux sens).

TODO: update: énoncé patché, adapter la preuve en fonction.

TODO: remarque très rapidement sur la forme abstraite et lien avec la continuité.

Ante

En se basant exclusivement sur ce critère de mesurabilité par les images réciproques (donc en comprenant temporairement "mesurable" comme "satisfaisant le critère de l'image réciproque" en attendant la preuve de l'équivalence des deux propriétés), on peut montrer les résultats suivants:

Stabilité par passage à la limite

Les limites simples de fonction mesurables sont mesurables.

Démonstration

Soit $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions vérifiant le critère de l'image réciproque, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) \to f(x)$ quand $k \to +\infty$. Montrons que f vérifie également ce critère. Il suffit pour cela de remarquer que comme U est ouvert et que $f_k(x) \to f(x)$, $f(x) \in U$ si et seulement si $f_k(x) \in U$ pour k assez grand. Cette déclaration se traduit par la formule

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcap_{k=j}^{+\infty} f_k^{-1}(U)$$

qui établit que $f^{-1}(U)$ est un ensemble mesurable, comme union (dénombrable) d'intersections (dénombrable) d'ensembles mesurables.

■

Fonctions presque partout égales

Toute fonction égale presque partout à une fonction mesurable est mesurable.

Démonstration

Toute fonction f égale presque partout à une fonction g qui vérifie le critère de l'image réciproque vérifie également le critère de l'image réciproque. En effet, si pour tout ouvert U l'ensemble $g^{-1}(U)$ est mesurable, alors

$$f^{-1}(U) = (g^{-1}(U) \setminus E) \cup F$$

où E et F sont de mesure nulle (et donc mesurables puisque la mesure de Lebesgue est complète); par conséquent, $f^{-1}(U)$ est mesurable.

TODO: des pptés des ensembles mesurables sont utilisés dans la preuve ci-dessous, repenser l'ordre ? J'aimerais pourtant retard l'apparition des ensembles mesurables, ne pas focaliser trop tôt. Sinon, réécrire la preuve dans le langage des fonctions ? Urk, pas de choix parfait ici ... Vérifier au passage que je n'utilise pas à travers les ensembles mesurables de pptés que je n'ai pas encore démontré qui nécessité le critère par les images réciproques. Même chose au-dessus .... jeez. Arf, le nouvel ordre pose pb; j'ai de toute évidence bien besoin des ensembles mesurables pour L'ENONCE du critère de l'image réciproque, dont j'ai bien besoin au moins d'UN BOUT des ensembles mesurables ... Décider de l'approche donc pour ces ensembles (fonction carac localement intégrable ou mesurable ?)

■

Démonstration

Sens direct

Supposons le critère des images réciproques satisfait. La démonstration repose sur la construction explicite d'une suite $f_k(x)$ de fonctions intégrables qui soient étagées, c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs possibles.

Définissons $f_0(x) = 0$ et $f_k(x)$ par la relation de récurrence

$$f_{k+1}(x) = f_k(x) + \left| \begin{array}{rl} -1/k & \text{si } f(x) < f_k(x) - 1/k \text{ et } |x| \leq k, \\ +1/k & \text{si } f_k(x) + 1/k < f(x) \text{ et } |x| \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Par construction, si $f(x) = 0$, $f_k(x) = 0$. Si $f(x) > 0$, les $f_k(x)$ forment une suite croissante convergeant vers $f(x)$, car la suite des $1/k$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, mais leur somme est divergente. La situation est similaire si $f(x) < 0$, mais avec une suite $f_k(x)$ décroissante.

Montrons que la suite des f_k est intégrable, ce qui concluera cette section de la preuve. L'ensemble des valeurs $\{\alpha_j\}$ que prend chaque f_k est bien fini; il comprend la valeurs $\alpha_0 = 0$ et la fonction peut s'écrire sous la forme

$$f_k = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}$$

où les $A_j = f_k^{-1}(\alpha_j)$ sont en nombre fini et disjoints. A part A_0, les A_j sont également bornés, car f_k est nulle en dehors de $[-k, k]$. Montrons qu'à tout rang k, les ensembles A_j sont mesurables, ce qui prouvera que chaque f_k est intégrable par le critère d'intégrabilité dominé. C'est évident au rang 0 où $\{\alpha_j\} = \{0\}$, et la collection des A_j se réduit à $\{A_0\} = \{\mathbb{R}\}$; supposons cette propriété valable au rang k. L'ensemble E des réels x tels que $f_k(x) + 1/k < f(x)$ et $|x| \leq k$ peut être écrit comme

$$E = \left(\bigcup_j \{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha_j + 1/k < f(x)\} \cap A_j \right) \cap [-k, k],$$

qui est mesurable. De même, on peut montrer que l'ensemble F des réels x tels que $f(x) < f_k(x) - 1/k < f(x)$ et $|x| \leq k$ est mesurable. On a alors par construction:

$$f_{k+1} = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j} + \frac{1}{k}\chi_E - \frac{1}{k}\chi_F$$

qui est sous la forme souhaitée, à ceci près que les ensembles intervenant ne sont pas nécessairement disjoints. Mais pour toute valeur y dans l'image de f_{k+1}, l'image réciproque de $\{y\}$ par f est nécessairement une union (finie) d'intersections (finies) d'ensembles dans la collection $\{\dots, A_j, \dots, E, F\}$ et donc un ensemble mesurable. La fonction f_{k+1} peut donc être mise sous la forme souhaitée.

Réciproque

Considérons désormais une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation de l'annexe, si l'on définit la fonction $f_k(x)$ comme le taux d'accroissement

$$f_k(x) := \frac{F(x + 2^{-k}) - F(x)}{2^{-k}} \quad \text{où} \quad F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)\, dt,$$

alors $f_k(x) \to f(x)$ presque partout quand $k \to +\infty$. Or chaque f_k est continue, donc l'image réciproque de tout ouvert par f_k est un ensemble mesurable. Par les deux résultats établis dans cette section, f vérifie également ce critère.

Par définition, une fonction mesurable est limite simple d'une suite de fonctions intégrables, et les fonctions intégrables vérifient le critère de l'image réciproque. Cette classe de fonctions étant stable par passage à la limite, ce critère est également satisfait pour toute fonction mesurable.

■

Composition par une fonction continue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. La composée $g \circ f$ de ces deux fonctions est mesurable.

Démonstration

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Par continuité de g, l'ensemble $g^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et par conséquent, par le critère de mesurabilité par les images réciproques,

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

est un ensemble mesurable. Par le même critère, la composée $g \circ f$ est donc mesurable.

■

Remarque

Les corollaires de ce résultat sont nombreux et immédiat. Citons les deux instances les plus directement utiles.

Mesurabilité du produit

Le produit de deux fonctions scalaires mesurables est mesurable.

Démonstration

Par continuité de l'application produit $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

■

Mesurabilité de la valeur absolue

La valeur absolue d'une fonction scalaire mesurable est mesurable.

Démonstration

Par continuité de l'application valeur absolue $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

TODO: adapter preuve ci-dessous, la preuve amont a été refaite, le "patch" pour borner n'est plus nécessaire.

■

Démonstration du critère d'intégrabilité dominée

Si la fonction f est intégrable, elle est mesurable et satisfait les inégalités $f \leq f \leq f$. Le sens direct est donc démontré.

Pour établir la réciproque, nous allons exploiter le théorème de convergence dominée du chapitre suivant. Nous allons appliquer le procédé d'approximation par une suite de fonctions étagées déjà utilisé dans la preuve de la caractérisation des fonctions mesurables par leurs images réciproques. Nous appliquons cette construction à la fonction $f-g$ qui est mesurable comme différence de fonctions mesurables. Comme $f-g$ vérifie $0 \leq f-g \leq h-g$, la suite δ_k – qui converge simplement vers $f-g$ – vérifie $0 \leq \delta_k \leq h-g$. En raison de cette inégalité, et comme $h-g$ est (absolument) intégrable, $\chi_{[-k,k]}\delta_k$ est une somme finie de la forme $\sum_j \alpha_j \chi_{A_j}$ où les A_j sont mesurables et bornés (dans $[-k,k]$), A_j est intégrable.

La fonction $f-g$ apparaît donc comme une limite simple des fonction $\chi_{[-k,k]}\delta_k$, qui sont intégrables et encadrées par les fonctions intégrables 0 et $h-g$. Par le théorème de convergence dominée, $f-g$ est intégrable, et par conséquent $f=(f-g)+g$ l'est également.

■

Produit de fonctions intégrable et bornée

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction absolument intégrable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable et bornée, alors le produit fg est (absolument) intégrable.

Preuve

Par hypothèse f est intégrable donc mesurable; g étant mesurable, le produit fg est mesurable. Par ailleurs, si $|g| \leq M$, on a

$$-M|f| \leq fg \leq M|f|$$

et comme les fonctions $-M|f|$ comme $M|f|$ sont intégrables, par le critère d'intégrabilité dominée, fg est intégrable. La valeur absolue $|fg|$ de fg est mesurable et vérifie également $-M|f| \leq fg \leq M|f|$, elle est donc également intégrable par le même critère.

■

Fonctions Absolument Intégrables

TODO

remarque nécessaire ou exemples montrant que le critère d'intégrabilité dominée est en fait pratique quand on manipule des fonction absolument intégrables et que les calculs manipulant des fonctions uniquement conditionnellement intégrables sont "fragiles".

Remarque

Nous verrons également dans la suite que ce résultat est généralement plus facile à exploiter quand on peut faire l'hypothèse que les fonctions que l'on manipule sont non seulement intégrables, mais également absolument intégrables.

TODO: fcts abs int introduites SI TOT ??? Cela retarde assez notablement les résultats élémentaires sur les fonctions mesurables, bof donc … Faire une autre section ?

Fonction absolument/conditionnellement intégrable

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *absolument intégrable* si f et $|f|$ sont intégrables. Si f est intégrable mais pas $|f|$, elle est *conditionnellement intégrable*.

Fonctions absolument intégrables

L'ensemble des fonctions absolument intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Démonstration

Si f et g sont absolument intégrables et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est mesurable et λf comme $|\lambda f|$ sont encadrées par les fonctions intégrables $-|\lambda||f|$ et $|\lambda||f|$; elle est donc absolument intégrable par le critère d'intégrabilité dominée. La somme $f+g$ est également mesurable et $f+g$ comme $|f+g|$ sont encadrées par $-|f|-|g|$ et $|f|+|g|$ qui sont intégrables; la somme est donc intégrable par le même critère.

■

Inégalité triangulaire

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable, alors

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt.$$

Démonstration

Les fonctions f et $|f|$ étant intégrables, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge commune γ sur $\mathbb{R}$ et un $r > 0$ commun, tels que pour tout couple (a, b) tel que $a \leq -r$ et $r \leq b$ et toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ qui soit subordonnée à γ, on ait

$$\left|S(f, \mathcal{D}) - \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt\right| \leq \varepsilon/2 \;\text{ et }\; \left|S(|f|, \mathcal{D}) - \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt\right| \leq \varepsilon/2.$$

Par l'inégalité triangulaire appliquée à la somme finie $S(f, \mathcal{D})$, on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt \leq S(f, \mathcal{D}) + \varepsilon/2 \leq S(|f|, \mathcal{D}) + \varepsilon/2 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt + \varepsilon,$$

et donc en passant à la limite sur ε,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt.$$

L'inégalité similaire

$$-\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt.$$

est obtenue en remplaçant f par $-f$.

■

TODO

Plus pertinent/simple de construire un exemple basé sur une série de valeurs qui converge conditionnellement ?

TODO

Simplifier l'exemple ci-dessous en ne travaillant que sur la dérivée; repousser l'étude de la fonction ci-dessous en exercice.

TODO

(en exercice ?) Exemple de Bartle basé sur une série conditionnellement convergente (dans “A modern theory of integration”. Mieux que cet exemple ici ?)

Une fonction conditionnellement intégrable

La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

est conditionnellement intégrable. Pour montrer qu'elle est intégrable, nous exploitons le théorème fondamental du calcul, appliqué à la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

Cette fonction est dérivable en tout point de $[0,1]$; en 0, sa dérivée est nulle [5] et quand $x > 0$,

$$\left[-\frac{x^2}{2} \sin \frac{1}{x^2}\right]' + x \sin \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

Par le théorème d'intégrabilité dominée, la fonction h égale à $x \sin(1/x^2)$ si $x > 0$ et nulle en zéro est absolument intégrable [6]. La fonction g' étant également intégrable, $f = g' + h$ est intégrable comme somme de deux fonctions intégrables.

La fonction f n'est pourtant pas absolument intégrable, car h est absolument intégrable mais pas g'. En effet, si c'était le cas, toute fonction absolument intégrable dont la valeur absolue est majorée par $|g'|$ aurait par l'inégalité triangulaire son intégrale majorée par celle de $|g'|$. Or nous allons exhiber une suite de telles fonctions dont l'intégrale tend vers $+\infty$, ce qui établira la contradiction.

Soit $k \geq 1$ un entier; on définit la function $\phi_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\phi_k(x) = \left| \begin{array}{rl} g'(x) & \text{si } \alpha_j \leq x \leq \beta_j,\ 0 \leq j \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

où

$$\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \text{ et } \beta_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi(j+3/4)}},$$

5. En effet,

$$\left|\frac{g(h) - g(0)}{h}\right| \leq \frac{|h|}{2} \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

6. La fonction h est mesurable comme limite des suite des fonctions continues h_k – et donc intégrables – définies par $h_k(x) = 0$ si $x \in [0, 1/\sqrt{2k\pi}]$ et $h_k(x) = h(x)$ sinon. De la même façon, $|h|$ est limite des fonctions intégrables $|h_k|$. Par ailleurs, h comme $|h|$ sont encadrées par les deux fonctions intégrables $x \in [0,1] \mapsto -x$ et $x \in [0,1] \mapsto x$.

Par construction, ϕ_k est continue par morceaux et donc absolument intégrable, et bien telle que $|\phi_k| \leq |g'|$. Par ailleurs,

$$\int_0^1 \phi_k(t)\,dt = \sum_{j=0}^{k} \int_{\alpha_j}^{\beta_k} \phi_k(t)\,dt = \sum_{j=0}^{k} \left[-\frac{x^2}{2}\sin\frac{1}{x^2}\right]_{\alpha_j}^{\beta_j} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2\pi j + 3\pi/4}.$$

Comme la série de cette équation est divergente, on peut rendre l'intégrale arbitrairement grande en choisissant un k suffisamment grand, ce qui permet de conclure.

Restriction à des ensembles mesurables

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable si et seulement si $f\chi_E$ est (absolument) intégrable pour tout ensemble mesurable E.

Preuve

Si f est absolument intégrable, elle est mesurable; si l'ensemble E est mesurable, sa fonction caractéristique χ_E est également mesurable. Par conséquent, le produit $f\chi_E$ est mesurable, comme sa valeur absolue $|f\chi_E|$. Par ailleurs, comme $|\chi_E| \leq 1$, on a $-|f| \leq f\chi_E \leq |f|$ et donc $-|f| \leq |f\chi_E| \leq |f|$. Par le critère d'intégrabilité dominée, $f\chi_E$ est (absolument) intégrable.

Réciproquement, supposons $f\chi_E$ intégrable pour tout ensemble mesurable E. En prenant $E = \mathbb{R}$, on constate que f est intégrable, et donc mesurable. Notons $E_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) > 0\}$ et $E_- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) < 0\}$; ces deux ensembles sont mesurables comme images réciproques d'ouverts par une fonction mesurable. La fonction $|f|$ satisfaisant

$$|f| = \chi_{E_+} f - \chi_{E_-} f,$$

elle est intégrable comme somme de fonctions intégrables. La fonction f est donc absolument intégrable.

■

Exercices

Ensembles de longueur finie

Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ pour lequel il existe une constante $L \geq 0$ (finie) telle que pour tout intervalle compact $[a, b]$, on ait

$$\int_{[a,b]} \chi_E(t)\,dt \leq L.$$

Montrer que E est de longueur finie et que $\ell(E) \leq L$.

Réponse

La suite des fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_k(t) = \left| \begin{array}{rl} \chi_E(t) & \text{si } t \in [-k, k], \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est croissante, de limite simple χ_E. A tout rang k, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(t)\, dt = \int_{[-k,k]} \chi_E(t)\, dt \leq L,$$

donc

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}} f_k(t)\, dt \leq L < +\infty.$$

Le théorème de convergence monotone nous garantit l'intégrabilité de χ_E – c'est-à-dire le fait que E est de longueur finie – et fournit

$$\ell(E) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(t)\, dt = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(t)\, dt \leq L.$$

Intégrabilité locale

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement intégrable si pour tout point $x \in \mathbb{R}$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f soit intégrable sur $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.

0. Montrer que f est localement intégrable si et seulement si elle est intégrable sur tout intervalle fermé et borné.
1. Montrer que toute fonction localement intégrable est mesurable.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Réponses

0. **TODO**
1. **TODO**
2. **TODO**

Fonctions Mesurables

Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si pour tout nombre réel a, l'ensemble

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < f(x)\}$$

est mesurable.

Réponse

Compte tenu du critère de l'image réciproque, comme tous les ensembles $]a, +\infty[$ sont ouverts, le critère ci-dessus est bien vérifié pour toute fonction mesurable.

Montrons désormais la réciproque: supposons le critère ci-dessus vérifié et montrons que le critère de l'image réciproque l'est également.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$; l'ensemble U peut être décomposé comme union d'un nombre dénombrables d'intervalles ouverts bornés I_k de $\mathbb{R}$. Par conséquent, comme

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\cup_k I_k\right) = \bigcup_k f^{-1}(I_k),$$

il nous suffit de montrer que l'image réciproque de tout intervalle ouvert borné $]a, b[$ par f est mesurable, pour conclure que $f^{-1}(U)$ est mesurable, comme union dénombrable d'ensembles mesurables.

Or, un point x vérifie $a < f(x) < b$ si et seulement il vérifie $a < f(x)$ et ne vérifie $b - 2^{-k} < f(x)$ pour aucun entier k, ce qui se traduit par la relation ensembliste

$$f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]a, +\infty[) \cap \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^{+\infty} f^{-1}(]b - 2^{-k}, +\infty[)\right).$$

Les images réciproques au second membre sont mesurables par hypothèse, et sont combinées par union dénombrable, complément relatif et union finie par conséquent $f^{-1}(]a, b[)$ est également mesurable.

Fonctions Boréliennes

MMmm splitter, cas fct numériques et variantes "plus faibles" d'un coté et fct Boréliennes et mesurabilité de l'autre (avec appli qui revisite au passage la composition, en affaiblissant l'hypothèse de continuité). Au passage, "jouer" avec les fcts Boréliennes ? Mq elles sont aussi mesurables ? Question: peut-être exhiber un exemple simple de compo de fct Lebesgue mesurables qui ne soit pas mesurable?

Composition par une fonction lipschitzienne

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que g est nulle en 0 et lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe un $K \geq 0$ tel que pour toute paire de réels x et y on ait $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$.

1. Si f est mesurable est-ce que $g \circ f$ est mesurable ?
2. Si f est intégrable, est-ce que $g \circ f$ est intégrable ?
3. Si f est absolument intégrable, est-ce que $g \circ f$ est absolument intégrable ?

Réponses

1. Oui, car toute fonction lipschitzienne est continue; $g \circ f$ est donc mesurable comme composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue.
2. Pas nécessairement; si f est une fonction conditionnellement intégrable sur $[0,1]$, la fonction $|f|$ n'est pas intégrable; Or, l'application $t \mapsto |t|$ est lipschitzienne (avec $K = 1$).
3. Oui. D'une part, f étant absolument intégrable, elle est mesurable et donc par la question 1., la composée $g \circ f$ est mesurable. D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|g \circ f(x) - g \circ f(0)| \leq K|f(x) - f(0)|$$

et donc

$$|g \circ f(x)| \leq K|f(x)| + (K|f(0)| + |g \circ f(0)|)$$

Le membre de droite de cette inégalité est une fonction (absolument) intégrable sur $[0,1]$, donc par le critère d'intégrabilité dominée, la fonction $g \circ f$ est (absolument) intégrable.

Théorème Intégral de Cauchy

(en fait version "light", centrée, version "formule de la moyenne". Considérer le cas général ? Ou se contenter de celui-ci ?)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie sur un ensemble U ouvert et supposée continûment différentiable. On considère $c \in U$ et $R > 0$ tel que le disque fermé centré en c et de rayon R soit inclus dans U; on définit alors la grandeur $I(r)$ pour tout $r \in [0, R] \to \mathbb{R}^2$ comme la valeur moyenne du vecteur f sur le cercle de rayon c et de rayon r:

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_{\alpha,r})\, d\alpha \;\text{ où }\; z_{\alpha,r} = c + r(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

1. Que vaut $I(0)$?
2. Montrer que l'application $r \in [0, R] \mapsto I(r)$ est dérivable et calculer $I'(r)$ pour tout $r \in [0, R]$.
3. On suppose désormais que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en tout point (x, y) de U, c'est-à-dire que

$$\partial_y f(x, y) = R(\pi/2) \cdot \partial_x f(x, y)$$

où $R(\alpha)$ désigne la rotation d'angle α centrée sur l'origine. Simplifier l'expression de $I'(r)$ et conclure. Indication: on pourra évaluer $\partial_\alpha(f(z_{\alpha,r}))$.

Réponses

1. On a
$$I(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c_1, c_2)\, d\alpha = f(c_1, c_2) = f(c).$$

2. Formons le taux d'accroissement de I en r, pour une variation de l'argument h telle que $r + h \in [0, R]$. On a
$$\begin{aligned}\frac{I(r+h) - I(r)}{h} &= \frac{1}{2\pi h}\left(\int_0^{2\pi} f(c_1 + (r+h)\cos\alpha, c_2 + (r+h)\sin\alpha)\, d\alpha \right.\\ &\qquad \left. - \int_0^{2\pi} f(c_1 + r\cos\alpha, c_2 + r\sin\alpha)\, d\alpha\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_{r+h,\alpha}) - f(z_{\alpha,r})}{h}\, d\alpha.\end{aligned}$$
La fonction $r \mapsto f(z_{\alpha,r})$ étant différentiable pour tout α, on a
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(z_{r+h,\alpha}) - f(z_{\alpha,r})}{h} &= \frac{d}{dr} f(z_{\alpha,r})\\ &= df(z_{r,\alpha}) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha)\\ &= \partial_x f(z_{r,\alpha})\cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha})\sin\alpha.\end{aligned}.$$
De plus, par le théorème des accroissements finis,
$$\left\|\frac{g_\alpha(r+h) - g_\alpha(r)}{h}\right\| \leq \sup_{r\in[0,R]} \left\|\frac{d}{dr} g_\alpha(r)\right\|$$
où le sup du membre de droite est bien fini puisque $dg_\alpha(r)/dr$ est une fonction continue du couple (α, r) qui appartient à l'ensemble $[0, 2\pi] \times [0, R]$. Par conséquent, pour toute suite h_n tendant vers 0 et telle que $r + h_n \in [0, R]$, la suite des
$$\frac{g_\alpha(r+h_n) - g_\alpha(r)}{h_n}$$
associée converge simplement vers
$$\partial_x f(z_{r,\alpha})\cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha})\sin\alpha$$
et est dominée en norme par la fonction absolument intégrable (constante)
$$\alpha \in [0, 2\pi] \mapsto \sup_{r\in[0,R]} \left\|\frac{d}{dr} g_\alpha(r)\right\|.$$
Par conséquent, par le théorème de convergence dominée, la dérivée de I est définie en tout point r et est donnée par
$$I'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\partial_x f(z_{r,\alpha})\cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha})\sin\alpha\right)\, d\alpha.$$

3. Evaluons la dérivée par rapport à α de $f(z_{\alpha,r})$. On a

$$\begin{aligned}\partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) &= \partial_\alpha(f(c_1 + r\cos\alpha, c_2 + r\sin\alpha)) \\ &= \partial_x f(z_{\alpha,r})(-r\sin\alpha) + \partial_y f(z_{\alpha,r})(r\cos\alpha).\end{aligned}$$

Comme $\partial_y f(z_{\alpha,r}) = R(\pi/2)\partial_x f(z_{\alpha,r})$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) &= r(-\sin\alpha \times I + \cos\alpha \times R(\pi/2))\partial_x f(z_{\alpha,r}) \\ &= rR(\pi/2+\alpha)\partial_x f(z_{\alpha,r}) \\ &= rR(\pi/2)R(\alpha)\partial_x f(z_{\alpha,r})\end{aligned}$$

D'un autre coté, l'intégrande dans l'expression de $I'(r)$ s'écrit

$$\begin{aligned}\partial_x f(z_{r,\alpha})\cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha})\sin\alpha &= (\cos\alpha \times I + \sin\alpha \times R(\pi/2))\partial_x f(z_{r,\alpha}) \\ &= R(\alpha)\partial_x f(z_{r,\alpha}).\end{aligned}$$

Par conséquent lorsque r est non nul

$$\partial_x f(z_{r,\alpha})\cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha})\sin\alpha = \frac{1}{r}R(-\pi/2)\partial_\alpha(f(z_{\alpha,r}))$$

et donc

$$\begin{aligned}I'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\partial_x f(z_{r,\alpha})\cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha})\sin\alpha\right)\, d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi r}\left(\int_0^{2\pi} R(-\pi/2)\partial_\alpha(f(z_{\alpha,r}))\, d\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2\pi r}R(-\pi/2)\left(\int_0^{2\pi} \partial_\alpha(f(z_{\alpha,r}))\, d\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2\pi r}R(-\pi/2)\left[f(z_{\alpha,r})\right]_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}.$$

Par ailleurs, un calcul direct montre que $I'(0) = 0$. La dérivée de I est identiquement nulle. On en conclut que pour tout r,

$$I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_{\alpha,r})\, d\alpha = I(0) = f(c).$$

Mesurabilité de $\|f\|$

TODO

Intégrabilité

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables dont les carrés sont intégrables. Montrer que le produit fg est (absolument) intégrable.

Réponse

Les produits fg et $|fg|$ sont mesurables comme produit de fonctions mesurables. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $(|f(x)| + |g(x)|)^2 \geq 0$, on a

$$0 \leq |fg|(x) \leq \frac{1}{2}f(x)^2 + \frac{1}{2}g(x)^2.$$

et donc

$$-\frac{1}{2}f(x)^2 - \frac{1}{2}g(x)^2 \leq fg(x) \leq \frac{1}{2}f(x)^2 + \frac{1}{2}g(x)^2.$$

Par le critère d'intégrabilité dominée, fg et $|fg|$ sont donc intégrables.

Annexe

Une intégrale indéterminée est dérivable presque partout

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et un point a de I. La dérivée de la fonction

$$F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

existe et est égale à f presque partout.

Démonstration

Voir (Swartz 2001, 135–36).

■

Références

Demailly, Jean-Pierre. 2011. *Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Kurzweil-Henstock*. Université Joseph Fourier Grenoble I. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html.

Hu, Shouchuan, and V. Lakshmikantham. 1989. "Some Remarks on Generalized Riemann Integral." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 137 (2): 515–27.

Ponce, Augusto C., and Jean Van Schaftingen. 2017. "Gauge-Measurable Functions." https://doi.org/10.13137/2464-8728/16208.

Schechter, E. 1996. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. Elsevier Science. https://books.google.fr/books?id=eqUv3Bcd56EC.

Swartz, Charles. 2001. *Introduction to Gauge Integrals.* Singapore: World Scientific.