Equations Différentielles I

STEP, MINES ParisTech*

8 octobre 2019 (`#4dd2afe`)

Table des matières

*Ce document est un des produits du projet `boisgera/CDIS`, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS).

Notations à définir/uniformiser

— $C^k(I, \mathbb{R})$
— boule ouverte/fermée

— interieur

Un peu d'histoire

Cadre de l'étude

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Equation différentielle de degré p

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, U ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue sur U. Une application $x : I \to \mathbb{R}^n$ continue sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ non réduit [1] à un point, est dite *solution (sur [2] I)* de *l'équation différentielle d'ordre p*

$$x^{(p)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(p-1)})$$

si x est de classe C^p sur I et pour tout $t \in I$,

— $(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(p-1)}(t)) \in U$
— $x^{(p)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(p-1)}(t))$.

On dira que l'équation différentielle est *autonome* si l'application f ne dépend pas de t. Dans ce cas, on pourrait définir U directement comme un ouvert de $(\mathbb{R}^n)^p$ et $f : U \subseteq (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}^n$.

Exemples

quelques systèmes physiques vus en prépa (RLC, masse ressort, hamiltonien)

Réduction à l'ordre 1

Etant donnés $p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^p$ et $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$, définissons l'application $\underline{f} \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ par

$$\underline{f}(t, x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, f(t, x_0, \dots, x_{p-1})) \ .$$

1. Certaines références autorisent les solutions définies sur un intervalle d'intérieur vide, c'est-à-dire réduit à un point, qui sont dîtes “triviales”. Mais cela n'a pas grand intérêt ici et nous supposons donc que les solutions sont définies au moins “pendant un certain temps”.

2. On pourra omettre de préciser l'intervalle I sur lequel x est solution lorsque I est l'ensemble de définition naturel (ou clairement défini) de x. Lorsque celui-ci est ambigue ou bien lorsque l'on veut insister sur l'intervalle de définition, on dira *solution sur I*.

Alors $x \in C^p(I, \mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation différentielle d'ordre p définie par f si et seulement si $(x, \dot{x}, \dots, x^{(p-1)})$ est solution de l'équation différentielle d'ordre 1

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}) \ .$$

Nous déduisons que résoudre une équation différentielle d'ordre p est en fait équivalent à résoudre une équation différentielle d'ordre 1, quitte à considérer comme inconnue la suite des dérivées $(x, \dot{x}, \dots, x^{(p-1)}) \in C^1(I, \mathbb{R}^{\underline{n}})$ avec $\underline{n} = np$, au lieu de $x \in C^p(I, \mathbb{R}^n)$. Dans la suite de ce cours nous nous restreignons donc à $p = 1$.

Problème de Cauchy (*Initial Value Problem*)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in U$ et $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$. Le *problème de Cauchy* fait référence au système

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \ .$$

On dira donc que $x : I \to \mathbb{R}^n$ est solution du problème de Cauchy défini par f et (t_0, x_0) (sur un intervalle I non réduit à un point) si

— $t_0 \in I$ et $x(t_0) = x_0$
— x est solution de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ sur I.

On notera alors $x \in S_f(t_0, x_0)$.

Représentation intégrale des solutions

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $(t_0, x_0) \in U$ tel que $t_0 \in I$, et $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$. Alors, $x \in S_f(t_0, x_0)$ si et seulement si x est solution de l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds \qquad \forall t \in I \ .$$

Démonstration : Supposons $x \in S_f(t_0, x_0)$. Alors $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, and pour tout $t \in I$,

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s) ds = x(t) \ .$$

Réciproquement, si x vérifie l'équation intégrale, $x(t_0) = x_0$, et puisque f est continue sur U, on a $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ et par dérivation, $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in I$. ■

Classe plus générale de solutions

Relaxation de la continuité de f et de la notion de solution de manière à ce que cette intégrale existe + ref à calcul intégral

Etude du problème de Cauchy

Existence de solutions locales

Le théorème suivant assure l'existence locale de solutions au problème de Cauchy sous une simple hypothèse de continuité de f.

Théorème de Peano-Arzelà

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$. Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe $\epsilon > 0$ et $x \in C^1([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ tels que $x \in S_f(t_0, x_0)$.

Démonstration: La démonstration de ce résultat est hors-programme car elle fait appel au théorème d'Ascoli(-Arzelà) qui sera abordé dans les notions avancées de Calcul Différentiel III. Seule la connaissance et compréhension du résultat est exigible. Pour les curieux, preuve en appendice? ■

Solution maximale

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$. On dit que $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ est une solution *maximale* de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x)$$

si pour toute autre solution $y \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ telle que $I \subseteq J$ et $x_{|I} \equiv y_{|I}$, on a nécessairement $I = J$ et $x \equiv y$. En d'autres termes, elle n'est pas *prolongeable*.

Exemple

Considérons le problème de Cauchy

$$\dot{x} = -\sqrt{|x|} \qquad , \qquad (t_0, x_0) = (0, 0)$$

permettant de modéliser l'écoulement d'un fluide dans un réservoir, selon la loi de *Torricelli*. La fonction $f : (t, x) \mapsto -\sqrt{|x|}$ est continue sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc on sait que ce problème de Cauchy admet au moins une solution. En fait, on montrera en exercice qu'il existe une infinité de solutions maximales.

Unicité des solutions

Nous avons vu dans la partie précédente que des solutions locales au problème de Cauchy existent toujours si f est continue mais qu'elles ne sont pas nécessairement uniques. Le théorème suivant montre que l'unicité des solutions est garantie si f est de classe C^1 par rapport à la variable x.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (ou de Picard-Lindelöf)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ telle que sa dérivée partielle $(t, x) \mapsto \partial_x f(t, x)$ existe et est continue sur U (on dira que f est de classe C^1 par rapport à x). Alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe une unique solution maximale $x : I \to \mathbb{R}^n$ dans $S_f(t_0, x_0)$. De plus, l'intervalle I est ouvert et contient un voisinage de t_0.

Démonstration Nous donnons ici le principe de la preuve qu'il est important de comprendre. L'essentiel est en fait de montrer que sous l'hypothèse de régularité de f par rapport à x, il existe une unique solution locale au problème de Cauchy. De là on peut ensuite déduire qu'elle se prolonge en une unique solution maximale. L'ouverture de son intervalle de définition vient du fait qu'elle serait sinon de nouveau prolongeable *au bord* de l'intervalle puisque U est ouvert, ce qui contradirait sa maximalité. La partie cruciale est donc le résultat local suivant qui constitue en fait le théorème initial de Cauchy-Lipschitz (sa généralisation aux solutions globales étant plutôt dûe à Picard et Lindelöf).

Théorème de Cauchy-Lipschitz local Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ de classe C^1 par rapport à x, et $(t_0, x_0) \in U$. Soient $\tau > 0$ et $r > 0$ tels que

$$\mathcal{C} := [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{B}_r(x_0) \subset U \ .$$

Pour tout $\tau_m \in [0, \tau]$ tel que $\tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$, il existe une unique fonction $x \in S_f(t_0, x_0)$ définie sur $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$.

Démonstration Tout d'abord, $\mathcal{C}$ étant fermé et borné en dimension finie, $\mathcal{C}$ est compact et par continuité de f, $\max_{\mathcal{C}} \|f\|$ existe bien. Rappelons nous que $E := C^0([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m], \mathbb{R}^n)$ (ref?) est un espace de Banach pour la norme uniforme $\| \cdot \|_\infty$, et définissons

$$F = \{x \in E \ : \ x([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]) \subseteq \overline{B}_r(x_0)\} \ .$$

On peut montrer que[3] F est un sous-ensemble fermé de E. F est donc complet (ref?) (toujours pour la norme uniforme $\| \cdot \|_\infty$). Pour tout $x \in F$, par définition, $(s, x(s)) \in \mathcal{C} \subset U$ pour tout $s \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$; on peut donc définir

3. Pour toute suite (x_n) d'éléments de F convergeant vers x^*, pour tout $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$,

$$|x_n(t) - x^*(t)| \leq |x_n - x^*|_\infty \quad \longrightarrow_{n \to \infty} 0$$

donc la suite $(x_n(t))$ d'éléments du fermé $\overline{B}_{x_0}(r)$ converge dans $\mathbb{R}^n$ vers $x^*(t)$ qui est donc dans $\overline{B}_{x_0}(r)$. Ceci implique $x^* \in F$.

l'opérateur $\Gamma : F \to E$ par

$$\Gamma(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad \forall t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m] \ .$$

Or d'après la représentation intégrale des solutions, on sait qu'une fonction $x \in F$ est solution du problème de Cauchy sur $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ si et seulement si elle vérifie

$$\Gamma(x) = x$$

c'est-à-dire x est un point fixe de Γ. Par ailleurs, on peut prouver [4] que pour tout $x \in S_f(t_0, x_0)$ définie sur $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$, x est dans F: c'est donc un point fixe x^* de Γ sur F. L'idée de la preuve est donc de montrer que Γ (ou une de ses itérées) est contractante pour utiliser le théorème de point fixe sur un espace de Banach et en déduire l'existence et l'unicité de ce point fixe (REF?).

D'abord, pour tout $x \in F$, pour tout $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$,

$$\|\Gamma(x)(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\| ds \right| \leq \tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$$

de sorte que $\Gamma(x) \in F$, i.e. $\Gamma : F \to F$. Ensuite, pour tout $(x_a, x_b) \in F \times F$, pour tout $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$,

$$\|\Gamma(x_a)(t) - \Gamma(x_b)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_a(s)) - f(s, x_b(s))\| ds \right| \ .$$

Soit $k = \max_{\mathcal{C}} \|\partial_x f\|$ (bien défini car $\mathcal{C}$ est compact et $\partial_x f$ est continue par hypothèse). Alors l'application du théorème des accroissement finis (REF) nous donne

$$\|\Gamma(x_a)(t) - \Gamma(x_b)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} k \|x_a(s) - x_b(s)\| ds \right| \leq |t - t_0| k \|x_a - x_b\|_\infty$$

et donc $\|\Gamma(x_a) - \Gamma(x_b)\|_\infty \leq \tau_m k \|x_a - x_b\|_\infty$. A ce stade, sauf si $\tau_m k < 1$, Γ n'est pas contractante. Cependant, on peut montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$,

$$\|\Gamma^p(x_a)(t) - \Gamma^p(x_b)(t)\|_\infty \leq \frac{(|t - t_0| k)^p}{p!} \|x_a - x_b\|_\infty$$

4. Il suffit de montrer que $x([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]) \subseteq \overline{B}_r(x_0)$. Supposons le contraire et sans perdre en généralité supposons que

$$S := \{t \in [t_0, t_0 + \tau_m] \ : \ |x(t) - x_0| > r\} \neq \emptyset \ .$$

Soit $t^* = \inf S$. Nécessairement $t_0 < t^* < t_0 + \tau_m$. Donc par la représentation intégrale,

$$|x(t^*) - x_0| \leq (t^* - t_0) \max_{s \in [t_0, t^*]} f(s, x(s)) < \tau_m \max_{\mathcal{C}} |f| < r \ .$$

Par continuité de x, $|x(t) - x_0| \leq r$ pour un temps après t^*, ce qui contredit sa définition.

en notant $\Gamma^p = \underbrace{\Gamma \circ \Gamma \circ \ldots \circ \Gamma}_{p \text{ fois}}$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|\Gamma^p(x_a) - \Gamma^p(x_b)\|_\infty \leq \frac{(\tau_m k)^p}{p!}\|x_a - x_b\|_\infty$. Il existe donc m tel que Γ^m est contractante. D'après le théorème de point fixe de Banach (REF), Γ admet un unique point fixe x^* dans F. ■

Relâchement à f Lipschitzienne

La première preuve d'existence et unicité locale de solutions sous l'hypothèse que f est de classe C^1 par rapport à x est dûe à Augustin Louis Cauchy (1820) et repose sur l'utilisation du théorème d'accroissements finis [5]. Mais on remarque dans notre preuve qu'il suffirait qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\|f(t,x_a) - f(t,x_b)\| \leq k\|x_a - x_b\| \qquad \forall t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m], \forall (x_a, x_b) \in \overline{B}_r(x_0),$$

c'est-à-dire que la fonction f soit *lipschitzienne* par rapport à x au voisinage de (t_0, x_0). Cette propriété fut introduite par le mathématicien allemand Rudolf Lipschitz quelques années plus tard (1868) pour prouver le même résultat de façon indépendante: d'où le nom de *théorème de Cauchy-Lipschitz*. Notons que cette dernière hypothèse est plus faible que celle de Cauchy car elle impose seulement que $x \mapsto f(t,x)$ soit lipschitzienne au voisinage de (t_0, x_0), au lieu de différentiable. Par exemple, $x \mapsto \|x\|$ est lipschitzienne (mais pas C^1) et $\dot{x} = \|x\|$ admet donc une unique solution maximale quel que soit la condition initiale.

Approximations successives

Mise à part quelques formes particulières de f, il est très rare de savoir résoudre explicitement une équation différentielle. Cependant, la preuve (dans sa forme moderne donnée plus haut) caractérise la solution comme le point fixe de l'opérateur Γ. Or, on sait (REF) que ce point fixe est la limite uniforme de la suite des itérées de Γ. En pratique, on peut donc s'approcher arbitrairement proche de la solution sur l'intervalle $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ (au sens de la norme uniforme), en calculant la suite $x_{p+1} = \Gamma(x_p)$ définie par

$$x_{p+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_p(s))ds,$$

en notant ici de manière abusive x_0 la fonction constante égale à x_0. Cette méthode de recherche de point fixe porte le nom d'*approximations successives* et est introduite pour la première fois par le mathématicien français Emile Picard à la fin du XIXème siècle grâce aux progrès de l'analyse fonctionnelle. C'est finalement le mathématicien finlandais Ernst Lindelöf qui donne à la preuve sa

5. En l'absence d'outils d'analyse fonctionnelle à cette époque, la preuve de Cauchy consistait plutôt à discrétiser en temps l'intégrale de plus en plus finement et montrer la convergence vers une solution.

forme moderne en utilisant en 1894 la théorie des espaces de Banach. Pour les anglophones, ce théorème s'appelle d'ailleurs le *théorème de Picard-Lindelöf.*

Exemples

— Une équation différentielle *linéaire*, c'est-à-dire pour laquelle il existe $a \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ et $b \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telles que

$$f(t,x) = a(t)x + b(t) \ ,$$

admet une unique solution maximale quelque-soit sa condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, car $\partial_x f(t,x) = a(t)$ (en identifiant abusivement ici différentielle et matrice Jacobienne).

—

Solutions globales

Dans la section précédente, nous avons vu que lorsque f est C^1 par rapport à x, la solution maximale au problème de Cauchy (qui est alors unique) est définie sur un intervalle ouvert. Mais cet intervalle n'est pas nécessairement $\mathbb{R}$ entier même si $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et f est de classe C^∞. On dit dans ce cas que la solution n'est pas *globale.*

Example d'explosion en temps fini

Par exemple, considérons le problème de Cauchy

$$\dot{x} = x^2 \quad , \qquad (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

La fonction $f : (t,x) \mapsto x^2$ est de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2$, donc il existe une unique solution maximale. On peut vérifier par le calcul que celle-ci s'écrit

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \quad , \quad I = \left(-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}\right) \ .$$

Cette solution diverge au temps $t_0 + \frac{1}{x_0}$, on dit qu'elle *explose en temps fini.*

En fait, le théorème suivant montre que pour toute solution maximale, la paire $(t, x(t))$ quitte nécessairement n'importe quel compact de U au bout d'un certain temps. Dans le cas usuel où $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, ceci implique donc que toute solution maximale non globale, i.e. définie sur $\left[0, \overline{t}\right[$ avec $\overline{t} < +\infty$, explose en temps fini, c'est-à-dire

$$\lim_{t \to \overline{t}} \|x(t)\| = +\infty \ ,$$

Dans le cas où U ne serait pas l'espace entier, une solution non globale pourrait aussi tendre en temps fini vers le "bord" de U sans nécessairement diverger.

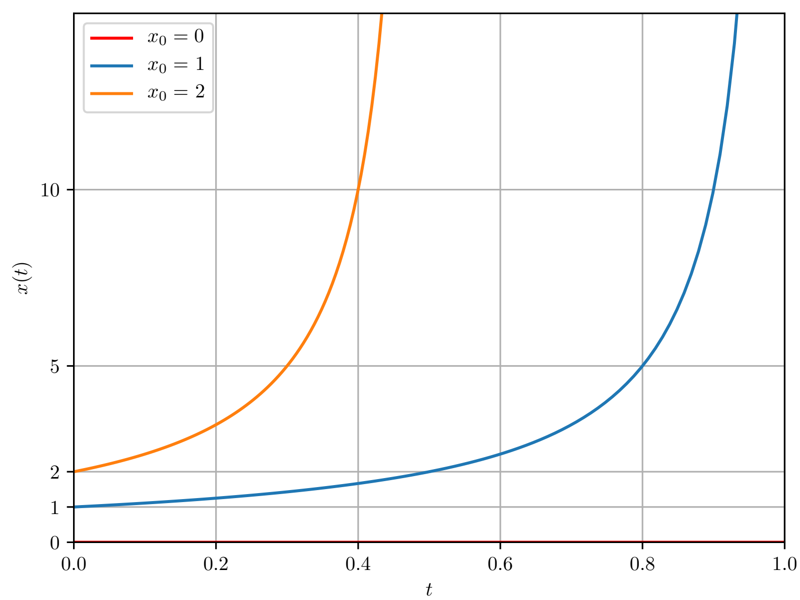

FIGURE 1 – Solutions à $\dot{x} = x^2$ pour $t_0 = 0$ et différentes valeurs de x_0

Théorème des bouts

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ de classe C^1 par rapport à x. Soient $(t_0, x_0) \in U$ et $x : \left]\underline{t}, \bar{t}\right[\to \mathbb{R}^n$ la solution maximale au problème de Cauchy correspondant, avec $\underline{t} \in [-\infty, t_0[$ et $\bar{t} \in]t_0, +\infty]$. Alors pour tout compact $K \subset U$, il existe $t_K^+ \in \left[t_0, \bar{t}\right[$ and $t_K^- \in \left]\underline{t}, t_0\right]$) tels que

$$(t, x(t)) \notin K \qquad \forall t \in \left[t_K^+, \bar{t}\right[\cup \left]\underline{t}, t_K^-\right]$$

Démonstration : Voir en annexe. ■

Critère d'existence globale

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $U = I \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in U$ et $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$. S'il existe $a, b : I \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t) \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n \ ,$$

alors toute[6] solution maximale au problème de Cauchy associé est définie sur I entier. On dit alors que f a une *croissance au plus affine*.

Démonstration : Prouvé dans l'exercice *Autour du Lemme de Grönwall*. ■

Exemples

— Reprenons l'exemple d'une équation différentielle *linéaire*, c'est-à-dire pour laquelle il existe $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ et $b \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ telles que

$$f(t, x) = A(t)x + b(t) \ .$$

D'après le théorème précédent, quelque-soit sa condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, sa solution maximale est définie sur I entier. Dans le cas où A est constant, on en a même une formule explicite (obtenue par la méthode de *variation de la constante*)

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds \ ,$$

où $e^{A(t-s)}$ est l'exponentielle de matrice définie par

$$e^{A(t-s)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p(t-s)^p}{p!} \ .$$

Attention, cette formule ne fonctionne que si A est constant.

6. Si f est de classe C^1 par rapport à x, cette solution est unique. Mais ce théorème est aussi valable pour f seulement continue.

— Un autre cas important d'une croissance au plus affine est lorsque f est globalement bornée en x. Par exemple,

$$f(t,x) = c(t)\arctan(x) \qquad \text{ou} \qquad f(t,x) = \frac{c(t)}{1+x^2}$$

engendrent des problèmes de Cauchy aux solutions uniques et globales.

Régularité et stabilité des solutions

Depuis l'apparition de la mécanique Newtonienne au XVIIème sciècle, l'étude des équations différentielles a toujours été motivée par l'espoir de compréhension et de prédiction du comportement futur ou passé de systèmes physiques. En particulier, une question ayant taraudé et divisé les scientifiques au cours des siècles est celle de la stabilité du système à trois corps (Terre-Lune-Soleil), ou plus généralement du système solaire. Enchanté devant les avancées de la mécanique céleste, Pierre-Simon Laplace écrit en 1814:

> Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.

Cette conviction *déterministe*, c'est-à-dire que les phénomènes physiques passés ou futurs sont entièrement déterminés par leur condition initiale, fut confirmée par le théorème de Cauchy-Lipschitz quelques années plus tard. Ce dernier suggère en effet que l'on peut prévoir l'évolution des systèmes physiques par la seule connaissance de leur condition initiale et de leur modèle physique.

Cependant, à la fin du XIXème siècle, on se rend vite compte que la réalité est en fait toute autre:

— d'une part, la condition initiale et le modèle ne sont jamais parfaitement connus: quelle est alors la qualité de notre prédiction?
— d'autre part, ne pouvant généralement pas calculer explicitement la solution, comment anticiper son comportement sur des temps longs, voire son comportement asymptotique?

Sensibilité aux conditions initiales et erreurs de modèle

La première question fut soulevée par Henri Poincaré à la fin du XIXème siècle alors qu'il s'attelle à la question de la stabilité du système solaire.

Le théorème suivant nous montre que pour un horizon de temps fini donné, on peut obtenir une solution arbitrairement précise si le système est initialisé suffisamment précisément et si les perturbations (ou erreurs de modèle) sont suffisamment faibles. En d'autres termes, la solution est *régulière* par rapport aux perturbations en temps fini. Ceci est crucial en physique puisque l'on ne peut jamais modéliser tous les phénomènes parfaitement.

Régularité en temps fini

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ de classe C^1 par rapport à x, $(t_0, x_0) \in U$, et $x : I \to \mathbb{R}^n$ la solution maximale dans $S_f(t_0, x_0)$. Pour tout $\bar{t}$ tel que $[t_0, \bar{t}] \subset I$, il existe $\delta_m > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que pour $\delta \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\delta| \leq \delta_m$, la solution maximale x_δ dans $S_f(t_0, x_0 + \delta)$ est définie sur $[t_0, \bar{t}]$ et vérifie

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq e^{\lambda(t-t_0)}|\delta| \qquad \forall t \in [t_0, \bar{t}] \ .$$

On dit alors que la solution du problème de Cauchy est continue par rapport à la condition initiale à horizon de temps fini : plus l'erreur de condition initiale δ est petite, plus l'erreur sur la trajectoire à horizon $\bar{t}$ est petite. Attention, l'hypothèse "C^1 par rapport à x" est importante encore ici, comme illustré dans l'exercice *Ecoulement dans un réservoir*.

Démonstration Prouvé dans l'exercice *Autour du Lemme de Grönwall* ■

Exemples

— Si $\lambda < 0$, l'erreur commise sur la condition initiale disparait au cours du temps dans les solutions : on dit qu'elles "oublient" leur condition initiales et que le système est *contractant*.

— On peut aussi déduire de ce résultat la continuité des solutions par rapport à des paramètres p intervenant dans la fonction f. En effet, il suffit de considérer le système étendu

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y, p) \\ \dot{p} &= 0 \end{aligned}$$

pour lequel l'incertitude de paramètre se ramène à une incertitude de condition initiale.

— Considérons un système linéaire à paramètre et/ou condition initiale incertains

$$\dot{x} = (a + \delta_a)x \qquad , \qquad x_0 = c + \delta_c$$

Pour $\delta_a = 0 = \delta_c$, la solution est $x(t) = ce^{at}$, et sinon

$$x_\delta(t) = (c + \delta_c)e^{(a+\delta_a)t} \ .$$

On a donc pour tout t,

$$\|x(t) - x_\delta(t)\| = \|c - (c + \delta_c)e^{\delta_a t}\|e^{at} \leq \left(|\delta_c|e^{\delta_a t} + |1 - e^{\delta_a t}||c|\right) e^{at}$$

et pour tout $\bar{t} > 0$ et $|\delta_a| \leq \frac{1}{\bar{t}}$

$$\sup_{t\in[0,\bar{t}]} \|x(t) - x_\delta(t)\| \leq \left(|\delta_c|e^{\delta_a \bar{t}} + |\delta_a||c|\bar{t}\right) e^{a\bar{t}}$$

qui peut être rendu aussi faible que voulu si δ_a et δ_c sont suffisamment petits. On voit bien ici que cette différence est bornée en temps fini, mais pas forcément aymptotiquement en particulier si $a > 0$.

— L'outil Fibre[7] permet d'observer en dimension 3 cette continuité des solutions par rapport aux conditions initiales : à “Integration Time” fixé, plus on réduit la boîte de condition initiales, plus les solutions restent proches. Par contre, lorsqu'on augmente le “Integration Time” les solutions s'écartent.

Chaos déterministe et horizon de Lyapunov

Même si la continuité des solutions par rapport aux paramètres/conditions initiales donne l'espoir de pouvoir simuler et prédire l'évolution de systèmes physiques, elle est malheureusement parfois insuffisante. Henri Poincaré écrit:

> Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible.

En effet, le précédent théorème nous prouve seulement que des perturbations suffisamment petites donnent des solutions arbitrairement proches en temps fini. Mais, en pratique, il est rarement possible de choisir l'amplitude des perturbations (erreurs de capteurs, erreurs numérique etc.) et il se pourrait que l'ordre de

7. https://portsmouth.github.io/fibre/ + details

grandeur des perturbations produisant des erreurs *acceptables* sur les solutions ne soit pas réalisable. Plus précisément, le théorème suggère qu'à perturbation $|\delta|$ donnée, l'écart entre les solutions pourrait croître exponentiellement vite. C'est le cas bien sûr des systèmes qui divergent exponentiellement (tels que $\dot{x} = x$), mais aussi de certains systèmes à trajectoires bornées, pour lesquels il existe $\bar{t} > 0$ tel que

$$\frac{|x(t) - x_\delta(t)|}{|\delta|} \approx e^{\lambda t} \qquad \forall t \leq \bar{t} \ .$$

Dans ce cas, $\frac{1}{\lambda}$ représente l'ordre de grandeur du temps maximal jusqu'auquel l'erreur sur les solutions reste du même ordre de grandeur que l'erreur initiale: on parle d'*horizon de Lyapunov*. Toute prédiction au delà de cet horizon est illusoire et le système est alors dit *chaotique*.

Il est important d'insister sur le caractère *déterministe* de ce chaos : chaque cause entraîne un effet bien déterminé mais deux causes très proches peuvent avoir des effets très différents. + anecdote poincaré ????

Exemples

— En 1963, Edward Lorenz met en évidence pour la première fois le comportement possiblement chaotique de la météorologie à travers un modèle simplifié à trois dimensions de convection donné par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho\, x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

où σ, ρ et β sont des paramètres strictement positifs. Pour $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ et $\rho = 28$, ce système présente un attracteur en forme de papillon, où les trajectoires sautent de manière *chaotique* d'une aile à l'autre.

— En 1989, l'astrologue français Jacques Laskar met en évidence numériquement le caractère chaotique des orbites des planètes de notre système solaire, en particulier celle de Mercure, dont les variations d'excentricité pourraient entraîner des collisions ou éjections de planètes dans certains scénarios long-termes. Ces travaux sont confirmés en 1992 par les travaux de Gerald Jay Sussman et Jack Wisdom, qui démontrent que le système solaire est chaotique avec un horizon de Lyapunov de l'ordre de 4 million d'années.

— Plus généralement, les systèmes chaotiques apparaissent dans des domaines très diverts allant de l'économie à l'électricité parfois lors d'une excitation sinusoïdale à certaines fréquences: pendule forcé, oscillateur de Van der Pol, etc. REFFF

Propriétés asymptotiques

Dans la section précédente nous avons répondu à la première question qui était la sensibilité des solutions aux erreurs de condition initiale et de modèle. Mais cette étude était en temps fini et nous nous intéressons maintenant à la seconde question qui est le comportement asymptotique des solutions. Nous voulons des critères sur la fonction f qui nous permettent de prédire ce comportement: est-ce que les solutions divergent ? est-ce qu'elles tendent vers un point en particulier ? vers un cycle limite ?

Dans la suite, pour simplifier, nous étudions les équations différentielles dites *autonomes*, c'est-à-dire dont la fonction f est indépendente du temps. On se donne donc une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et on prend par défaut $t_0 = 0$.

Point d'équilibre

On appelle *point d'équilibre* un point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(a) = 0 \ .$$

En d'autres termes, la fonction constante $x \equiv a$ est alors solution.

Exemple d'un pendule amorti

L'évolution d'un pendule amorti de longueur ℓ dans le champ de l'apesanteur peut être décrit par une dynamique du type

$$\ddot{\theta} = -\frac{\rho}{m}\dot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin\theta$$

avec $\rho > 0$ un coefficient de frottement. En prenant $x = (\theta, \dot{\theta})$, on obtient le système

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -\frac{\rho}{m}x_2 - \frac{g}{\ell}\sin x_1 \end{array}$$

Ce système a pour points d'équilibre $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, qui correspondent soit à la position *basse* du pendule $\theta = 0$ ou la position *haute* $\theta = \pi$, toutes deux à vitesse nulle $\dot{\theta} = 0$. Si le pendule est initialisé exactement à sa position haute ou basse à vitesse nulle alors il y reste indéfiniment.

Stabilité, stabilité asymptotique

Un point d'équilibre a est dit:

— *stable* si *les solutions restent arbitrairement proche de a quand elles sont initialisées suffisamment proche de a*, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x_0 vérifiant $|x_0 - a| \leq \eta$, toute solution maximale $x \in S_f(x_0)$ est définie sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et vérifie

$$|x(t) - a| \leq \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ .$$

— *instable* s'il n'est pas stable.

— *localement attractif* si *toutes les solutions initialisées suffisamment proche de a convergent vers a*, c'est-à-dire s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x_0 vérifiant $|x_0 - a| \leq \eta$, toute solution maximale $x \in S_f(x_0)$ est définie sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et vérifie

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = a \ .$$

— *globalement attractif* si *toutes les solutions convergent vers a.*

— *localement (resp. globalement) asymptotiquement stable* s'il est à la fois stable et localement (resp. globalement) attractif.

Exemples

— Lorsqu'un pendule est initialisé arbitrairement proche de sa position haute ou dans sa position haute mais à vitesse aritrairement faible, il se met à osciller en passant par sa position basse: l'équilibre haut est donc instable, puisqu'on ne peut pas garder les trajectoires dans son voisinage. Par contre, lorsqu'il est initialisé proche de sa position basse, il oscille de façon amortie en tendant vers l'équilibre bas, qui est donc asymptotiquement stable.

— Si l'on avait pris un pendule non amorti, c'est-à-dire avec $\rho = 0$, on aurait des oscillations indéfiniment à énergie constante: la position basse serait alors toujours stable mais plus attractive, et donc plus asymptotiquement stable.

— Il existe des systèmes pour lesquels un équilibre est attractif sans être stable. C'est le cas lorsque les trajectoires initialisées *de plus en plus proche* de l'équilibre doivent d'abord s'éloigner *de plus en plus* avant de converger. Voir le système de Vinograd poour les curieux. REF ???

Cas d'un système linéaire

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable pour le système

$$\dot{x} = Ax$$

si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes à partie réelle strictement négative.

Démonstration La notion d'*asymptotiquement stable* contient deux propriétés : la stabilité et l'attractivité. On montrera en exercice que pour un système linéaire, la stabilité asymptotique est équivalente à l'attractivité, c'est-à-dire que la stabilité vient gratuitement avec l'attractivité. C'est une propriété propre aux systèmes linéaires. Il suffit donc de trouver un critère caractérisant l'attractivité de 0. On a vu que les solutions s'écrivent

$$x(t) = e^{At} x_0 \ .$$

Si A était diagonale (réelle), on aurait $x_i(t) = e^{\lambda_i t} x_{0,i}$, où λ_i sont les valeurs propres et l'on voit bien que la convergence des solutions vers 0 est équivalente à avoir $\lambda_i < 0$. Maintenant, si A est diagonalisable, i.e., il existe $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale, on a $P^{-1}x(t)P = e^{P^{-1}APt}P^{-1}x_0P$, et reproduisant le même argument, $P^{-1}xP$ (et donc x) converge vers 0 si et seulement si les entrées diagonales de $P^{-1}AP$, qui sont les valeurs propres de A, sont à partie réelle strictement négative. Ceci dit, toute matrice A n'est pas diagonalisable. Par contre, il existe toujours $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible telle que

$$P^{-1}AP = D + N$$

où D est diagonale contenant les valeurs propres de A, N est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$, et D et N commutent. C'est la forme dite *de Jordan*. Il s'ensuit que

$$e^{Jt} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}N^i t^i$$

converge vers zero si et seulement si, encore, les valeurs propres de A sont à partie réelle négative. ■

Attention ce critère n'est valable que pour A constant. Le fait que $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ ait des valeurs propres à partie réelle strictement négative pour tout t n'implique pas que le système

$$\dot{x} = A(t)x$$

soit asymptotiquement stable, où même stable. Par exemple, la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + 1.5\cos^2 t & 1 - 1.5\sin t\cos t \\ -1 - 1.5\sin t\cos t & -1 + \sin^2 t \end{pmatrix}$$

a des valeurs propres constantes égales à $-0.25 \pm 0.25\sqrt{7}$. Pourtant, $\dot{x} = A(t)x$ admet des solutions non bornées for $x(0)$ aribitrairement proche de 0.

Lien entre stabilité et stabilité du linéarisant tangent

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Un point d'équilibre a est localement asymptotiquement stable si et seulement si $J_f(a)$ a ses valeurs propres à partie réelle strictement négative.

Par ailleurs, si $J_f(a)$ a une valeur propre à partie réelle strictement positive, a est instable.

Démonstration: Voir l'annexe *Stabilité locale et linéarisé tangent*. ■

Notons cependant que rien ne peut être conclu quant à la stabilité de a si $J_f(a)$ a des valeurs propres imaginaires pures.

Exemple

Reprenons l'exemple du pendule amorti. On a

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{\rho}{m} \end{pmatrix} \qquad , \qquad J_f(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{\rho}{m} \end{pmatrix}$$

Dans le premier cas, $\mathrm{tr}(J_f(0,0)) < 0$ et $\det(J_f(0,0)) > 0$. Comme prouvé en exercice, ceci implique que $J_f(0,0)$ a ses valeurs propres à partie réelle strictement négative. Donc la position basse $(0,0)$ est bien un équilibre asymptotiquement stable. Dans le deuxième cas par contre, le produit des valeurs propres $\lambda_1\lambda_2 = \det(J_f(0,0)) < 0$. Elles ne peuvent donc pas être complexes conjuguées et sont nécessairement réelles de signes opposés. Il s'ensuit que l'une est strictement positive et la position haute $(\pi,0)$ est donc bien instable.

Notons que si $\rho = 0$, c'est-à-dire que le pendule n'est pas amorti, les valeurs propres $J_f(0,0)$ sont imaginaires pures, et l'on ne peut donc rien conclure quant à la stabilité des points d'équilibre. Une étude plus approfondie est nécessaire.

Caractérisation par Lyapunov

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, a un point d'équilibre de f, et W un voisinage de a. Soit $V \in C^1(W, \mathbb{R}_{\geq 0})$ telle que

$$V(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a\ .$$

— Si

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0 \qquad \forall x \in W$$

alors a est stable.

— Si

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0 \qquad \forall x \in W \setminus \{a\}$$

alors a est localement asymptotiquement stable.

— Si V est propre [8], $W = \mathbb{R}^n$, et

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0 \qquad \forall x \neq a$$

alors a est globalement asymptotiquement stable.

8. V est dite propre si pour tout compact K, $V^{-1}(K)$ est compact. Ou de manière équivalente, $\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$.

V est alors appelée *fonction de Lyapunov*. En fait,

$$\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle = \frac{d}{dt} V(x(t))$$

le long d'une trajectoire $t \mapsto x(t)$ de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$. V représente donc une grandeur positive qui décroît ou est conservée le long des trajectoires. Pour des systèmes physiques, elle est donc souvent reliée à l'énergie.

Démonstration: Supposons d'abord que $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ pour tout $x \in W$. On a donc pour toute solution $t \mapsto x(t)$ initialisée dans W, $V(x(t)) \leq V(x(0))$ tant que $x(t) \in W$. Prenons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\overline{B}_{2\varepsilon}(a) \subset W$. On veut montrer qu'il existe η tel que toute trajectoire initialisée dans $B_\eta(a)$ reste dans $B_\varepsilon(a) \subset W$. Tout d'abord, il existe $\varepsilon_V > 0$ tel que

$$\forall x \in \overline{B}_{2\varepsilon}(a) \ : \ V(x) \leq \varepsilon_V \implies x \in B_\varepsilon(a) \ .$$

En effet, sinon, il existerait une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{B}_{2\varepsilon}(a)$ telle que pour tout $k > 0$, $V(x_k) \leq \frac{1}{k}$ et $\|x_k - a\| \geq \varepsilon$. L'ensemble $\overline{B}_{2\varepsilon}(a)$ étant compact, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers $x^\star$ qui vérifie nécessairement $V(x^\star) = 0$ par continuité de V et $\|x^\star - a\| \geq \varepsilon$, i.e. $x^\star \neq a$. Ceci est impossible par hypothèse. On a donc l'existence de ε_V. Maintenant, par continuité de V en a et puisque $V(a) = 0$, il existe aussi $\eta > 0$ tel que

$$x \in B_\eta(a) \implies V(x) \leq \varepsilon_V \ .$$

Alors si $x(0) \in B_\eta(a)$, $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \varepsilon_V$ donc $x(t) \in B_\varepsilon(a) \subset W$ pour tout t tant qu'elle est définie. Par le théorème des bouts, x est définie sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Ceci prouve la stabilité de a.

Supposons maintenant $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ pour tout $x \in W$. Alors par le point précédent a est stable. Il suffit de montrer l'attractivité locale. Par stabilité, si $x(0) \in B_\eta(a)$, $x(t) \in B_\varepsilon(a) \subset W$ pour tout t et $t \to V(x(t))$ est donc strictement décroissante. Comme elle est aussi bornée inférieurement par 0, elle converge vers $\ell \geq 0$. Supposons $\ell > 0$. Alors, par continuité de V, il existe $0 < \nu < \varepsilon$ et $\bar{t} > 0$ tel que pour tout $t \geq \bar{t}$, $\|x(t) - a\| \geq \nu$. Soit

$$\gamma = \max_{\nu \max \|x(t) - a\| \leq \varepsilon} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$$

qui existe par continuité de V sur un compact. Puisque $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ sur W, $\gamma < 0$. Alors, pour tout $t \geq \bar{t}$,

$$V(x(t)) = V(x(\bar{t})) + \int_0^t \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq V(x(\bar{t})) + \gamma(t - \bar{t}) \ .$$

Mais comme $\gamma < 0$ cette quantité devient strictement négative au bout d'un certain temps, ce qui est impossible. Donc $\lim_{t \to +\infty} V(x(t)) = 0$. Finalement, reproduisant le même raisonnement que pour l'existence de ε_V, on peut garantir que $\|x - a\|$ est arbitrairement petit en prenant $V(x)$ suffisamment petit. Donc on en déduit que $\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - a\| = 0$.

■

Exemple

Reprenons le pendule mais cette fois-ci, non amorti, c'est-à-dire avec $\rho = 0$. Nous n'avons pas pu prouver la stabilité du point d'équilibre $(0, 0)$ par l'étude de la matrice Jacobienne car ses valeurs propres sont imaginaires pures. Essayons par analyse de Lyapunov. Inspirés par la physique, considérons $V :]-\pi, \pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m\ell^2 x_2^2 + mg\ell(1 - \cos(x_1)) \ .$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique du pendule, et le deuxième son énergie potentielle/ V est C^1, à valeurs positives et telle que

$$V(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \ .$$

De plus,

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = m\ell^2 x_2 \left(-\frac{g}{\ell} \sin x_1 \right) + mg\ell \sin x_1 x_2 = 0$$

ce qui traduit la conservation de l'énergie en l'absence de frottement. On en déduit donc la stabilité du point d'équilibre $(0, 0)$.

Références

Exercices

Ecoulement dans un réservoir

Considérons un réservoir cylindrique de section S qui se vide par une ouverture de section s située à sa base. On note x la hauteur de liquide dans le réservoir. D'après la *loi de Torricelli*[9], l'équation d'évolution de x est donnée par

$$\dot{x} = -k\sqrt{|x|} \qquad k = \frac{s}{S}\sqrt{2g}$$

où g est la pesanteur.

9. Sous l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, la loi de Bernoulli dit que

$$p_s + \rho g h_s + \rho \frac{v_s^2}{2} = p_o + \rho g h_o + \rho \frac{v_o^2}{2}$$

où s fait référence aux quantités à la surface et o à l'ouverture. On a $p_s = p_o$ égales à la pression atmosphérique, $h_s - h_o = x$, $v_s = \frac{s}{S} v_o$ par conservation du débit, et $\dot{x} = -v_s$. On obtient donc

$$\dot{x} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}} \sqrt{2gx} \approx -\frac{s}{S}\sqrt{2gx}$$

en supposant que $s \ll S$.

1. Etant donné un temps initial t_0 et une hauteur initiale x_0, résoudre le problème de Cauchy associé.
2. Les solutions sont-elles continues par rapport aux conditions initiales au sens du théorème de régularité des solutions donné plus haut ? Pourquoi ?

-> *Correction*

Autour du Lemme de Grönwall

1. (Lemme de Grönwall) Soient $t^-, t^+ \in \mathbb{R}$, $u, \alpha, \beta \in C^0([t^-, t^+], \mathbb{R}_{\geq 0})$, tels que
$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds \qquad \forall t \in [t^-, t^+] \ .$$
Montrer qu'alors
$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \beta(r)dr\right) ds \qquad \forall t \in [t^-, t^+] \ .$$
En déduire que si α est constant,
$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(r)dr\right) \qquad \forall t \in [t^-, t^+] \ .$$
Indice : poser $v(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds$ *et étudier la dérivée de* $v(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \beta(r)dr\right)$.
2. Utiliser le Lemme de Grönwall pour montrer le théorème d'existence globale de solutions. *Indice : utiliser la représentation intégrale des solutions.*
3. Utiliser le Lemme de Grönwall pour montrer le théorème de continuité par rapport aux conditions initiales. *Indice : utiliser la représentation intégrale des solutions.*

-> *Correction*

Critère de stabilité d'un système plan

Montrer que le système linéaire $\dot{x} = Ax$ avec $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est asymptotiquement stable si et seulement si
$$\mathrm{tr}A < 0 \qquad \text{et} \qquad \det A > 0 \ .$$

-> *Correction*

Oscillateur

Considérons une masse m évoluant sur un support horizontal et accrochée à un ressort de raideur k, lui-même fixé à un mur.

1. Montrer que l'évolution de la position de la masse peut être décrite par

$$m\ddot{x} = -\lambda \dot{x} - kx \ ,$$

   où λ est un coefficient de frottement. Que représente x ?
2. Réduire l'équation différentielle à l'ordre 1.
3. Déterminer les points d'équilibre.
4. Etudier leur stabilité et le comportement des solutions pour $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$. Les dessiner sur un portrait de phase.

-> *Correction*

Cycle limite

Considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

1. Montrer que ce système admet un seul point d'équilibre. Etudier sa stabilité.
2. Posons $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. Etudier le signe de $\frac{d}{dt}V(x(t))$ le long des trajectoires du système.
3. En déduire le comportement des solutions en fonction de la condition initiale.

-> *Correction*

Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que si 0 est localement attractif pour

$$\dot{x} = Ax$$

alors il l'est globalement et 0 est stable.

-> *Correction*

Contrôle d'un système linéaire

Soit le système décrit par
$$\dot{x} = x + u(t)$$
où $t \mapsto u(t)$ est une entrée à choisir.

1. Comment se comporte le système si $u \equiv 0$?
2. Si on mesure $t \mapsto x(t)$, comment choisir u pour le rendre asymptotiquement stable ?

Plus généralement, considérons un système du type
$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ & \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n \\ \dot{x}_n & = & \phi(x) + u(t) \end{array}$$
avec $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à choisir.

3. Si on mesure $t \mapsto x(t)$, montrer que l'on peut toujours choisir $t \mapsto u(t)$ pour rendre 0 asymptotiquement stable.

-> *Correction*

Correction des exercices

Ecoulement dans un réservoir

Autour du Lemme de Grönwall

1. Soit v l'application définie par $v(t) = \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds$ sur $[t^-, t^+]$. Elle vérifie
$$\dot{v}(t) = \beta(t)u(t) \quad , \quad u(t) \leq \alpha(t) + v(t) \ ,$$
et donc puisque β est à valeurs positives,
$$\dot{v}(t) \leq \alpha(t)\beta(t) + \beta(t)v(t) \ .$$
Soit maintenant w l'application définie par $w(t) = v(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right)$. w est dérivable sur $[t^-, t^+]$ et
$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= (\dot{v}(t) - \beta(t)v(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \\ &\leq \alpha(t)\beta(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \end{aligned}$$

En intégrant des deux côté entre t_0 et t, on obtient

$$w(t) - w(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s) \exp\left(-\int_{t_0}^{s} \beta(r)dr\right) ds$$

et en remplaçant w par son expression,

$$v(t) \leq \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(r)dr\right) ds \ ,$$

ce qui donne le résultat. Finalement, si α est constant alors

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \alpha + \alpha \left[-\exp\left(\int_{s}^{t} \beta(r)dr\right)\right]_{t_0}^{t} \\ &\leq \alpha - \alpha + \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(r)dr\right) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

2. Soit $x :]\underline{t}, \overline{t}[\subseteq I \to \mathbb{R}^n$ une solution au problème de Cauchy. Par le théorème de représentation intégrale des solutions,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \ ,$$

et donc, utilisant l'hypothèse de borne au plus affine de f,

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} |b(s)| + |a(s)| \|x(s)\| ds \ .$$

Sur tout segment $[t^-, t^+] \subset]\underline{t}, \overline{t}[$, on peut donc appliquer le Lemme de Grönwall, ce qui donne

$$\|x(t)\| \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \beta(r)dr\right)$$

avec $\alpha(t) = \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} |b(s)|$ et $\beta(t) = |a(t)|$ qui sont continues sur I. D'après le théoreme des bouts, nécessairement $]\underline{t}, \overline{t}[= I$.

3. Soient $x : I \to \mathbb{R}^n$ et $x_\delta : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ les solutions maximales associées à (t_0, x_0) et $(t_0, x_0 + \delta)$ respectivement, et $\overline{t}$ tel que $[t_0, \overline{t}] \subset I$. On sait que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds & \forall t \in I \\ x_\delta(t) &= x_0 + \delta + \int_{t_0}^{t} f(s, x_\delta(s))ds & \forall t \in I_\delta \end{aligned}$$

ce qui donne

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq |\delta| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, x_\delta(s))| ds \qquad \forall t \in I \cap I_\delta$$

Si $[t_0, \overline{t}] \subset I \cap I_\delta$, définissont le compact $\mathcal{C} := x([t_0, \overline{t}]) \cup x_\delta([t_0, \overline{t}])$. Puisque $\partial_x f$ est continue sur U par hypothèse, $M = \max_{[t_0,\overline{t}]\times\mathcal{C}} \partial_x f$ est bien défini. On a donc par le théorème des accroissements finis

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq |\delta| + \int_{t_0}^{t} M|x(s) - x_\delta(s)|ds \qquad \forall t \in [t_0, \overline{t}] \ .$$

Donc par le Lemme de Grönwall,

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq |\delta| e^{M(t-t_0)} \qquad \forall t \in [t_0, \overline{t}] \ .$$

Il suffit donc de montrer que $[t_0, \overline{t}] \subset I \cap I_\delta$. A FINIR !!!

Critère de stabilité en dimension 2

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres d'une matrice A de dimension 2. Son polynôme caractéristique est donné par

$$s^2 - \mathrm{tr}As + \det A = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 \ .$$

Donc $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det A = \lambda_1\lambda_2$. Il y a deux cas: soit les valeurs propres sont complexes conjuguées, soit elles sont réelles.

Si $\lambda_i = \lambda_0 \pm j\omega$, alors $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0^2 + \omega^2$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0$. Donc $\lambda_0 < 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}A < 0$ (et on a alors toujours $\det A > 0$).

Si les valeurs propres sont réelles, les avoir toutes deux strictement négatives implique que $\lambda_1\lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Réciproquement, si $\lambda_1\lambda_2 > 0$, elles sont non nulles et du même signe, et si de plus $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, ce signe est nécessairement négatif.

Donc dans tous les cas, λ_i à parties réelles strictement négatives équivaut à $\mathrm{tr}A < 0$ et $\det A > 0$.

Oscillateur

Cycle limite

On étudie le comportement des solutions de $\dot{x} = f(x)$ pour

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -2x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

1. Chercher les points d'équilibre du système revient à résoudre

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ 0 &= -2x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Multiplier la première ligne par x_2, la deuxième par x_1 et soustraire, donne $x_1 x_2 = 0$, et dont soit $x_1 = 0$ soit $x_2 = 0$. Si $x_1 = 0$, on tire de la première ligne $x_2 = 0$. Si $x_2 = 0$, on tire de la deuxième que $x_1 = 0$. Donc nécessairement, $x_1 = x_2 = 0$. Il n'y a donc qu'un point d'équilibre $(0, 0)$. La jacobienne de la dynamique est donnée par

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2 & 1 - 2x_1 x_2 \\ -1 - 2x_1 x_2 & 1 - (x_1^2 + x_2^2) - 2x_2^2 \end{pmatrix}$$

soit

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a pour valeurs propres $1 \pm i$. Le point d'équilibre est donc instable.

2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &= \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \\ &= x_1^2 + x_1 x_2 - x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 + x_2^2 - x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\ &- (x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Donc $\frac{d}{dt} V(x)$ est négatif à l'extérieur du disque de centre 0 et de rayon 1, zero sur la frontière, et positif à l'intérieur si $x \neq 0$ et zero sinon.

3. Les trajectoires initialisées sur le cercle y restent, suivant la dynamique d'un oscillateur

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

Celles initialisées à l'extérieur du cercle convergent vers le cercle mais sans jamais l'atteindre car cela contradirait l'unicité des solutions en un point du cercle (f est C^1 donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique); celles initialisées à l'intérieur (sauf en zero) de même. Enfin, la trajectoire initialisée à zéro reste à zéro. PORTRAIT DE PHASE

Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire

Tout d'abord, montrons que l'attractivité locale de 0 implique l'attractivité globale. Ceci est dû à la propriété d'*homogénéité* des systèmes linéaires: si x une solution initialisée à $x_0 \in \mathbb{R}$, alors λx est solution initialisée à λx_0 puisque

$$\lambda x(t) = \lambda e^{At} x_0 = e^{At}(\lambda x_0) \ .$$

Donc soit $\eta > 0$ tel que toute solution initialisée dans $B_\eta(0)$ converge vers 0. Soit x une solution initialisée à $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors λx avec $\lambda < \eta/|x_0|$ est solution initialisée dans $B_\eta(0)$ et converge vers 0. Donc x converge vers 0.

Maintenant, montrons la stabilité. Soit $\varepsilon > 0$. Notons $(x_i)_{i=1...n}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Soit alors $M > 0$ tel que

$$|e^{At}x_i| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

qui existe bien puisque toutes les solutions convergent vers 0 et n est fini. Soit maintenant $\eta > 0$. Pour tout $x_0 \in B_\eta(0)$ dont la décomposition dans la base s'écrit

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

on a $|\alpha_i| \leq \eta$ et donc pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\left|e^{At}x_0\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} e^{At}\alpha_i x_i\right| \leq n\eta M$$

On conclut que pour des conditions initiales suffisamment petites ($\eta < \frac{\varepsilon}{nM}$), les solutions restent inférieures à ε en norme. Donc le système est stable.

Contrôle d'un système linéaire

1. Si $u \equiv 0$, les solutions sont $x(t) = e^t x_0$ donc le point d'équilibre 0 est instable et les solutions divergent.
2. Si l'on mesure $x(t)$, on peut prendre $u(t) = -kx(t)$, ce qui donne

   $$\dot{x} = -(k-1)x$$

   pour lequel 0 est asymptotiquement stable si $k > 1$.
3. Prenons $u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) - \ldots - k_nx_n(t)$. Alors le système devient

   $$\dot{x} = Ax$$

   avec A de la forme

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \ldots & \ldots & -k_n \end{pmatrix}$$

   qui admet pour polynôme caractéristique

   $$s^n + k_1 s^{n-1} + \ldots + k_2 s + k_1 \ .$$

   Il suffit donc de choisir les coefficients k_i tels que ce polynôme ait ses racines à partie réelle strictement négative. Ces dernières peuvent d'ailleurs être choisies à souhait.

Annexes

Preuve du théorème des bouts

Prouvons l'existence de t_K^+ (l'existence de t_K^- se prouvant de la même façon). Pour cela, supposons le contraire c'est-à-dire qu'il existe un compact $K \subset U$ tel que

$$\forall t_K \in \left[t_0, \bar{t}\right[\ , \exists t \in \left[t_K, \bar{t}\right[\ :\ x(t) \in K$$

En d'autres termes, on suppose que la solution revient de manière persistente dans K. Alors il existe une suite $(t_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\bar{t} - \frac{1}{p} \leq t_p < \bar{t} \quad \text{et} \quad (t_p, x(t_p)) \in K \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

On a donc $\lim_{p\to+\infty} t_p = \bar{t}$, et par compacité de K, on peut extraire de $(t_p, (x(t_p))_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers $(\bar{t}, \overline{x}) \in K$. Pour simplifier les notations, on suppose donc directement $\lim_{p\to+\infty} x(t_p) = \overline{x}$.

Soient $\tau > 0$, $r > 0$ et $\tau_m \in (0, \tau]$ tels que

$$\mathcal{C} := \left[\bar{t} - 2\tau, \bar{t} + 2\tau\right] \times \overline{B}_{2r}(\overline{x}) \subset U \quad , \quad \tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r\ .$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $|t_p - \bar{t}| < \tau_m$ et $\|x(t_p) - \bar{t}\| < r$. Alors $[t_p - \tau, t_p + \tau] \times \overline{B}_r(x(t_p)) \subset U$ et le théorème de Cauchy Lipschitz nous dit qu'il existe une solution $y : [t_p - \tau_m, t_p + \tau_m] \to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_n) = x(t_n)$. On a alors $t_p + \tau_m > \bar{t}$, et par unicité, $x \equiv y$ sur $[t_p, \bar{t})$. Donc x peut être prolongée, ce qui contredit sa maximalité.

Stabilité locale et linéarisé tangent