

# Calcul Intégral V

STEP, MINES ParisTech\*

17 octobre 2019 (#73e2084)

## Table des matières

<b>Misc.</b>	<b>2</b>
<b>Dérivées faibles</b>	<b>2</b>
Dérivée faible . . . . .	3
TODO – extension “p.p.” ? . . . . .	3
TODO – Terminologie . . . . .	3
TODO – Dérivable faiblement implique dérivable pp . . . . .	3
TODO – Exemples . . . . .	3
Dérivabilité classique et faible . . . . .	3
TODO . . . . .	4
TODO – Warning, pas de réciproque . . . . .	4
Absolue continuité . . . . .	4
TODO . . . . .	4
Existence de dérivée faible . . . . .	4
TODO – Démonstration . . . . .	4
TODO – Rk . . . . .	4
TODO – Dérivation faible et IPP . . . . .	5
<b>Mesures signées</b>	<b>5</b>
Note . . . . .	5
TODO – Mesure signée . . . . .	5
TODO – Mesure positive vers mesure signée . . . . .	5
TODO . . . . .	5
TODO – Convention $\perp$ , absorption inf ou non ? . . . . .	6
TODO – Décomposition de Hahn . . . . .	6
TODO – Variation d’une mesure . . . . .	6
TODO – rk . . . . .	6
TODO – $\sigma$ -additivité . . . . .	6
TODO . . . . .	6
TODO – Mesure de Radon (ref. Arverson) . . . . .	6

---

\*Ce document est un des produits du projet  boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d’utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

TODO . . . . .	6
TODO . . . . .	7
TODO – mesure de Radon (signée) . . . . .	7
TODO – fct localement intégrable . . . . .	7
TODO . . . . .	7
Dérivée généralisée comme mesure . . . . .	7
TODO – extension “p.p.” ? . . . . .	7
TODO – Fonction de variation localement bornée . . . . .	7
TODO – Existence d’une dérivée comme mesure . . . . .	7
TODO – Notation Stieltjes . . . . .	7
TODO – Explication notation, lien Kurzweil-Stieltjes . . . . .	8
TODO – Rk Stieltjes . . . . .	8
TODO – Exemples . . . . .	8
TODO – Carac mesures par les fcts test (Riesz) . . . . .	8
TODO – Formule des sauts . . . . .	8
<b>Distributions</b> . . . . .	<b>8</b>
TODO – Distribution . . . . .	8
TODO – Mesure signée est une distribution . . . . .	8
TODO – Dérivée d’une distribution . . . . .	8
<b>Proba / Fct répartition</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>Probab <math>\Omega \neq \mathbb{R}^n</math></b> . . . . .	<b>9</b>
<b>Exercices</b> . . . . .	<b>9</b>
Fonctions lipschitzienne . . . . .	9
Fonctions convexes . . . . .	9
Fonction distance . . . . .	9
<b>Références</b> . . . . .	<b>9</b>

## Misc.

— fcts définies dans  $\mathbb{R}$ , au moins dans un premier temps

## Dérivées faibles

**Motivation:** étendre la notion de dérivation pour traiter des uses cases comme les équations différentielles avec second membre discontinu en  $t$ , sans “bricolage” (qui serait: résoudre portion par portion et recoller par continuité, si l’on suppose que l’on est  $C^1$  par morceaux). Motivation analogue pour les probas: variable aléatoire à densité uniforme sur  $[0, 1]$ :  $p$  n’est pas (partout) la dérivée de  $F$ .

Dans les deux cas néanmoins, on a le même schéma ou la “dérivée” permet d’obtenir la fct originale par intégration. (pour les ODEs, pour travailler sur  $\mathbb{R}$ , prolonger rhs par 0 pour  $t \neq 0$  et  $x(t)$  par  $x_0$ .)

Idée: dérivation initialement source de définition de l'intégrale (de Newton); l'intégration est une opération inverse, mais sait aussi intégrer des fonctions qui ne sont *pas* des dérivées (exemple). On peut retourner le problème et définir une nouvelle notion, généralisée de dérivée, à partir de l'intégrale.

### Dérivée faible

La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est *faiblement dérivable*, s'il existe une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localement absolument intégrable c'est-à-dire mesurable et telle que  $|g|$  soit intégrable sur tout intervalle compact  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^b |g(x)| dx < +\infty,$$

et une constante  $c \in \mathbb{R}$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = c + \int_0^x g(t) dt.$$

La fonction  $g$  est alors définie uniquement presque partout ; elle est appelée *dérivée faible* de  $f$  et pourra être notée  $f'$ .

### TODO – Démonstration ■

### TODO – extension “p.p.” ?

Aka fct de départ définie pp ? Bof ... Mmm quand même nécessaire pour la suite. (euh, mais où ça ?)

### TODO – Terminologie

Opter pour “généralisée” en 1ere instance ? dérivée généralisée, dérivable au sens des distributions (cf. + tard)

### TODO – Dérivable faiblement implique dérivable pp

Corollaire: dérivable faiblement implique dérivée classique existe pp et est égale à la dérivée faible

### TODO – Exemples

$x \mapsto |x|$  ?

### Dérivabilité classique et faible

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admet une dérivée faible  $g$ , alors  $f$  est dérivable presque partout et  $f' = g$  presque partout.

## TODO

Lien du truc dessus avec unicité pp de  $g$  évoquée plus haut.

## TODO – Warning, pas de réciproque

attention: dérivée classique définie pp suffit pas à avoir dérivée faible (ex: fct de Heaviside). Dérivée faible implique dérivée pp, réciproque pas vraie, même si on ajoute continue (idée qui vient naturellement quand on construit un contre-exemple). Exemple avec ensembles de Cantor / devil's staircase. Même dérivable partout ne suffit pas ...

## Absolute continuité

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est *absolument continue* si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que pour toute collection finie d'intervalles compacts  $([a_k, b_k])_{k=0}^{n-1}$  de  $\mathbb{R}$  ne se chevauchant pas, on ait

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b_k - a_k) \leq \delta \Rightarrow \sum_{k=0}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

## TODO

ne se chevauchant pas est nécessaire (note Bartle : c'est crucial) ? Pas suffisant de se limiter aux subdivisions complètes ?

## Existence de dérivée faible

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admet une dérivée faible si et seulement si elle est absolument continue.

## TODO – Démonstration

## TODO – Rk

Il serait possible d'élargir la notion de fonction faiblement dérivable en exigeant uniquement que  $g$  soit localement intégrable au sens de Henstock-Kurzweil, et non localement absolument intégrable. Comme toute dérivée est localement intégrable au sens de Henstock-Kurzweil, cette extension aurait le mérite de proposer une notion de dérivée faible qui soit une *vraie* extension de la notion de dérivée classique (en l'état, il est possible qu'une fonction ait une dérivée en tout point mais pas de dérivée faible ...).

Néanmoins, aussi séduisante soit-elle, nous ne considérerons pas cette extension, car la classe des fonctions faiblement dérivables serait alors sensiblement plus

complexe à caractériser que dans le cadre absolument continu que nous avons choisi<sup>1</sup>.

## TODO – Dérivation faible et IPP

(équivalence)

## Mesures signées

Aka section “dérivée est une mesure”

### Note

Sauf erreur, la définition “naturelle” (ressemblant) de mesure à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ne garantit pas l’existence d’une décomposition de Hahn et ne permet donc pas de se ramener au cas des mesures positives (cf. Dunford-Schwarz pour la preuve de ce résultat). Cela a donc du sens d’insister sur une définition de mesure signée, prenant comme base une mesure et une fonction de signe. (à plus long-terme, j’aimerais un exemple de mesure à valeurs réelles qui n’admet pas de décompo de Hahn)

## TODO – Mesure signée

Une *mesure signée*  $\nu$  sur la tribu  $\mathcal{A}$  de  $X$  est une application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{R} \cup \{\perp\}$  pour laquelle il existe une mesure positive  $\mu$  sur  $\mathcal{A}$  et une application  $\mu$ -mesurable  $\nu : X \rightarrow \{-1, +1\}$  telles que

$$\nu(A) := \sigma\mu(A) := \int_A \sigma(x) \mu(dx)$$

si l’application  $1_A \times \sigma$  est  $\mu$ -intégrable et  $\nu(A) = \perp$  sinon.

## TODO – Mesure positive vers mesure signée

“Conversion” de inf vers  $\perp$ .

## TODO

Comment on a défini  $\mu$ -intégrable dans le chapitre précédent ? Précisément, est-ce qu’une intégrale avec “une valeur infinie” est intégrable ? Le “problème”, outre l’absence de cohérence par rapport aux chapitres précédents, est qu’on peut alors avoir une fonction intégrable, et la rendre non-intégrable en la multipliant par une fonction de signe mesurable. OK, bon, intégrable veut dire intégrale

---

1. Il s’agit d’une classe de fonctions absolument continues mais **généralisées**, notée  $ACG_*$ , cf. (Bartle 2001, 32:242–43).

finie, le cas  $+\infty$  sera à décrire comme une extension dans les cas simples (comme fct mesurable positive non intégrable par exemple).

**TODO – Convention  $\perp$ , absorption inf ou non ?**

Disons pas d'absorption par défaut ? À voir, y réfléchir. Avec absorption c'est plus simple quand même ...

**TODO – Décomposition de Hahn**

(trivial, mais bon)

**TODO – Variation d'une mesure**

**TODO – rk**

Souligner parallèle avec valeur absolue, considérer le cas particulier à densité.

**TODO –  $\sigma$ -additivité**

**TODO**

$f$   $\mu$ -intégrable à valeurs réelles fois  $\mu$  défini une mesure signée

**TODO – Mesure de Radon (ref. Arverson)**

Une mesure de Borel positive  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$  est *de Radon* si :

1. Pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}$ ,  $\mu(K) < +\infty$  (*localement finie*).
2. Pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ compact de } \mathbb{R}, K \subset A\}.$$

(régularité intérieure).

3. Pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) \mid V \text{ ouvert de } \mathbb{R}, A \subset V\}.$$

(régularité extérieure).

**TODO**

(dans le cas réel, 2. et 3. sont gratuits ? Chercher. Je crois oui, cf <https://www.lpsm.paris/cours/processus-html/node6.html> par exemple). Supprimer de la def donc ... (éventuellement, faire une rq sur la régularité).

## TODO

Représentation “concrète” des mesures de Radon dans  $\mathbb{R}$  (via les fcts de variation localement bornée)

## TODO – mesure de Radon (signée)

— lien avec

## TODO – fct localement intégrable

... définie (“est”) une mesure de Radon. Et la mesure détermine

## TODO

def intégrale fonction des bornes “dans le mauvais sens” ...

## Dérivée généralisée comme mesure

La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admet comme *dérivée généralisée* la mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  s’il existe une constante  $c$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = c + \int_0^x \mu(dt).$$

## TODO – extension “p.p.” ?

Aka fct de départ définie pp ? Là peut-être plus légitime que pour les fcts, sinon quand il y a un saut, la fct de départ est tjs continue à gauche ? Grpmh la déf est peut-être pas terrible. On ferait mieux d’intégrer sur  $[0, x[$  (ne serait-ce que pour avoir la “bonne” constante en 0, et l’additivité) ; nécessaire alors de définir ça comme ça dans la section sur la théorie de la mesure. Nota: pas évident, les probabilités avec la convention de la fonction de répartition suggère plutôt d’interpréter  $\int_a^b$  comme l’intégrale sur  $]a, b]$  (si l’on veut garder l’additivité).

## TODO – Fonction de variation localement bornée

## TODO – Existence d’une dérivée comme mesure

Fct de variation localement bornée iff dérivée est une mesure de Radon

## TODO – Notation Stieltjes

(explication en définissant explicitement la mesure associée à la fct de variation bornées)

### **TODO – Explication notation, lien Kurzweil-Stieltjes**

(en gros: bien que la valeur des intégrales soit différentes – et l’explication n’est pas si dure, L-S ignore les valeurs de la fct à la discontinuité, pas K-S – intégrable au sens de L-S implique intégrabilité au sens de K-S, cf. Milan, Antunes, and Antonin (2018))

### **TODO – Rk Stieltjes**

Si on intègre des fcts continues, la notation prend du sens.

### **TODO – Exemples**

- Equa diff encore, mais en prologeant  $x(t)$  par 0 pour  $t \neq 0$
- Proba et fct de répartition arbitraire.

### **TODO – Carac mesures par les fcts test (Riesz)**

Aka mesure de Radon défini des opérateurs continus de  $C_0^0([a, b])$  dans  $\mathbb{R}$  et l’inverse aussi (si prolongements compatibles).

### **TODO – Formule des sauts**

## **Distributions**

### **TODO – Distribution**

distribution d’ordre  $k$  uniquement. Fonctionnelle définie sur les fcts  $C^k$  telle que si  $C_0^k([a, b])$  désigne les fcts nulles que leurs dérivée au bord, alors (restriction de  $T$ ) linéaire bornée de  $C_0^k([a, b])$  dans  $\mathbb{R}$ .

### **TODO – Mesure signée est une distribution**

### **TODO – Dérivée d’une distribution**

## **Proba / Fct répartition**

Généralisation cas discret et à densité; dans les deux cas, fcts croissante  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , nulle en  $-\infty$ , de variation 1, etc.

Montrer comment définir une mesure (extérieure) associée, notation  $\mu(= df)$  (Lebesgue-Stieltjes) ?

Lien notation avec somme de Riemman-Stieltjes pour l’intégration de fcts continues ?



**Probab**  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$

## **Exercices**

### **Fonctions lipschitzienne**

(d'une variable). Montrer qu'elles ont une dérivée faible (et donc pp), en utilisant leur caractère absolument continu (cf. Evans-Gariepy dans le cas multivariable) et que la dérivée (faible) est de norme plus petite que la constante de Lipschitz.

### **Fonctions convexes**

Equivalent dérivée seconde est une mesure positive ?

### **Fonction distance**

Dérivées seconde fonction distance, squelette, courbure, etc ?

## **Références**

Bartle, Robert G. 2001. *A Modern Theory of Integration*. Vol. 32. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS).

Milan, T., M.G. Antunes, and S. Antonin. 2018. *Kurzweil-Stieltjes Integral: Theory and Applications*. Series in Real Analysis. World Scientific Publishing Company.