Calcul Intégral I

Sébastien Boisgérault

Table des matières

TODO

- intégrale d'une fonction nulle presque partout (par étapes: 1 / nb finies de valeurs égale à 1, puis fct de Dirichlet, puis fct égale à un sur un ensemble de mesure nulle, puis cas général, ce type de progression (même si pas exactement celle-là, on a peut-être))
- ...

Somme et Intégrale de Riemann

Intervalle

On appelle *intervalle* tout sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que si x et y appartiennent à I et vérifient $x \leq y$, et si z est un point intermédiaire, tel que $x \leq z \leq y$, alors z appartient à I.

Type d'intervalles

Avec cette définition, les intervalles peuvent être bornés ou non-bornés, ouverts, fermés, ouvert et fermés ou ni l'un ni l'autre. Les intervalles de la forme $]-\infty, \infty[$ (c'est-à-dire $\mathbb{R}$), $]-\infty, b[$, $]a, \infty[$ et $]a, b[$ sont ouverts; Les intervalles de la forme $]-\infty, \infty[$, $]-\infty, b]$, $[a, \infty[$ et $[a, b]$ sont ouverts; les intervalles compacts (à la fois fermés et bornés) sont de la forme $[a, b]$.

Longueur d'un intervalle

La longueur $\ell(I)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est le nombre réel étendu positif défini pour tout intervalle borné I de la forme $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a \leq b$ par

$$\ell(I) = b - a$$

et si I est non-borné par

$$\ell(I) = +\infty.$$

Subdivision pointée

Une *subdivision* de l'intervalle fermé $I = [a, b]$ est une famille finie

$$\{I_i \mid \ 0 \leq i \leq n-1\}$$

constituée d'intervalles fermés de I, *sans chevauchement* – si i et j diffèrent, l'intersection de I_i et I_j contient au plus un point – et *recouvrant* I – l'union de l'ensemble des I_i est égal à I. Une *subdivision pointée* de l'intervalle fermé $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ une famille finie

$$\{(t_i, I_i) \mid \; 0 \leq i \leq n-1\}$$

où les I_i forment une subdivision de I et $t_i \in I_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Somme de Riemman

La somme de Riemann associée à la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et à la subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ est la grandeur

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} f(t)\ell(I)$$

Intégrale de Riemann

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable (au sens de Riemann)* s'il existe un réel A tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ vérifiant pour $(t, J) \in \mathcal{D}$, $\ell(J) < \delta$, on ait $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$. Le réel A quand il existe est unique; il est appelé *intégrale de f sur* $[a, b]$ et noté

$$\int_a^b f(t)\, dt \;\text{ ou }\; \int_{[a,b]} f(t)\, dt$$

Quadrature

Cette définition permet de garantir l'exactitude asymptotique de méthodes de quadrature – c'est-à-dire d'algorithmes de calcul numérique d'intégrales – comme la méthode des rectangles. En effet, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, et $\mathcal{D}_m$ une subdivision pointée de $[a, b]$ de la forme

$$\mathcal{D}_m = \left\{ \left(a + i\frac{b-a}{m}, \left[a + i\frac{b-a}{m}, a + (i+1)\frac{b-a}{m} \right] \right) \;\middle|\; i \in \{0, \ldots, m-1\} \right\},$$

la somme de Riemann associée vérifie

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{D}_m) &= \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + \frac{b-a}{m}\right) \ell\left(\left[a + i\frac{b-a}{m}, a + (i+1)\frac{b-a}{m}\right]\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + \frac{b-a}{m}\right) \frac{b-a}{m} \\ &= \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + \frac{b-a}{m}\right) \end{aligned}$$

De plus, quel que soit $\delta > 0$, pour m suffisamment grand, on a

$$\ell\left(\left[a + i\frac{b-a}{m}, a + (i+1)\frac{b-a}{m}\right]\right) = \frac{b-a}{m} < \delta$$

Par conséquent,

$$\frac{b-a}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + \frac{b-a}{m}\right) \to \int_a^b f(t)\,dt \text{ quand } m \to +\infty.$$

La définition de l'intégrale de Riemann, ne se limite pas à une famille particulière de subdivisions – comme ici à des subdivisions régulières de $[a, b]$ où tous les intervalles sont de même longueur – et n'impose pas une position fixe au point t_i dans l'intervalle J_i – comme ici à gauche de l'intervalle – ce qui garantit une forme de robustesse à la définition de l'intégrale; d'autres méthodes de quadratures pourront être utilisées avec le même résultat asymptotique.

Remarque

L'intégrale de Riemann possède des limitations qui en font un outil mathématique difficile à exploiter. En particulier la classe des fonctions qui peuvent être intégrées est trop petite pour certaines applications car les fonctions considérées ne peuvent être "ni trop grandes", "ni trop irrégulières" pour être intégrables. Les deux théorèmes qui suivent précisent cette situation.

Seules les fonctions bornées sont intégrables

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, alors f est bornée.

Démonstration

Soit $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ vérifiant $\ell(J) < \delta$ pour tout$(t, J) \in \mathcal{D}$, on ait $|S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt| \leq 1$. Soit $\mathcal{D} = \{(t_i, [a_i, b_i])\}_{i=0}^{m-1}$ une telle subdivision; on supposera de plus que $\ell(J_i) > 0$ pour tout i, ce qu'il est toujours possible de garantir. Pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$, si l'on définit $\mathcal{D}'$ à partir de $\mathcal{D}$ en remplaçant t_i par un t de J_i quelconque, on obtient

$$\begin{aligned}
|f(t)\ell(J_i) - f(t_i)\ell(J_i)| &= |S(f, \mathcal{D}') - S(f, \mathcal{D})| \\
&\leq \left|S(f, \mathcal{D}') - \int_a^b f(t)\,dt\right| + \left|S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \\
&\leq 2
\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$|f(t)| \leq |f(t_i)| + \frac{2}{\ell(J_i)}.$$

Les intervalles J_i recouvrant $[a,b]$, on a pour tout $t \in [a,b]$

$$|f(t)| \leq \max_i \left\{ |f(t_i)| + \frac{2}{\ell(J_i)} \;\middle|\; i \in \{0, \ldots, m-1\} \right\}.$$

■

Ensemble négligeable

Un ensemble A de $\mathbb{R}$ est *négligeable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de A par une famille dénombrable d'intervalles I_i de $\mathbb{R}$ tels que

$$\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Remarque

Nous voyons que le procédé qui définit la notion d'ensemble négligeable consiste à surestimer la taille de l'ensemble en lui substituant une collection d'intervalles dont l'union est au moins aussi grande, puis à surestimer la longueur de l'ensemble résultant en calculant la somme des longueurs des intervalles, sans tenir compte des éventuels recouvrements. Si à l'issue de cette double surestimation la longueur évaluée est encore aussi petite que l'on veut, on peut légitimement considérer que l'ensemble de départ est de longueur nulle [1] et que c'est donc ce que signifie “négligeable”. Nous verrons ultérieurement que cette intuition sera vérifiée.

Presque partout

Une propriété dépendant d'un réel x est vraie *presque partout* si l'ensemble des points x où elle est fausse est un ensemble négligeable.

Les ensembles dénombrables sont négligeables

Par exemple, les ensembles finis sont négligeables, $\mathbb{Q}$ est négligeable, etc. En effet, si $A = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, la collection d'intervalle ouverts

$$\left\{ \left] x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} \right[\;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$$

recouvre A et par ailleurs

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \ell \left(\left] x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} \right[\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon.$$

1. plus exactement de mesure *extérieure* de longueur nulle.

Critère de Lebesgue pour l'intégrabilité au sens de Riemann

La fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si f est bornée et continue presque partout.

Démonstration

Le lemme ci-dessus montre que le caractère borné est nécessaire pour l'intégrabilité au sens de Riemann. Pour le reste de la preuve, se reporter à (Burk 2007, 58).

■

Intégrale de Riemann Généralisée

Jauge

Une jauge γ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction qui associe à tout $t \in I$ un intervalle ouvert $\gamma(t)$ de $\mathbb{R}$ contenant t.

Subdivision pointée subordonnée à une jauge

Une subdivision $\mathcal{D}$ de l'intervalle compact I est *subordonnée à une jauge* γ sur I si pour tout $(t, J) \in \mathcal{D}$, $J \subset \gamma(t)$.

Représentation graphique

On peut associer à une jauge γ sur $[a, b]$ l'ensemble du plan

$$\{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in \gamma(x)\}.$$

Par construction, cet ensemble contient la diagonale

$$D = \{(x, x) \mid x \in [a, b]\}.$$

TODO: example, et expliquer pourquoi cette représentation est pratique pour visualiser si une subdivision pointée est subordonnée à une jauge.

Par exemple, la jauge γ définie sur $[0, 1]$ par $\gamma(t) =]t - 0.25, t + 0.25[$ est représentée comme suit:

Graphe de la jauge $\gamma(t) =]t - 0.2, t + 0.2[\ ,\ t \in [0, 1]$.

TODO: graphique d'une subdivision pointée, avec séparateurs en barres verticales et t_i en croix.

Lemme de Cousin

Pour toute fonction de jauge γ sur l'intervalle fermé I, il existe une subdivision $\mathcal{D}$ qui soit subordonnée à γ.

Preuve

S'il existe un $t \in I^0 = I = [a, b]$ tel que $I \subset \gamma(t)$, la subdivision $\mathcal{D} = \{(t, I)\}$ convient. Sinon, on peut considérer les intervalles $I_0^1 = [a, (a+b)/2]$ et $I_1^1 = [(a+b)/2, b]$ et examiner pour chacun de ces intervalles s'il existe un $t_i \in I_i^1$ tel que $I_i^1 \subset \gamma(t_i)$, dans ce cas ajouter la paire (t_i, I_i^1) à la famille $\mathcal{D}$ et dans le cas contraire décomposer à nouveau l'intervalle posant problème. Soit ce procédé converge en un nombre fini d'étapes et forme une subdivision pointée $\mathcal{D}$ de I, soit nous avons construit une infinité d'intervalles fermés J_i emboités ($J_{i+1} \subset J_i$) de I tels que pour tout $t \in J_i$, $J_i \not\subset \gamma(t)$.

Montrons que ce second scénario est impossible. Comme les J_i sont emboités, la collection $\{J_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ possède la propriété de l'intersection finie. L'intervalle I étant compact, cela implique qu'il existe un $t \in I$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, t soit adhérent à J_i. Les J_i étant fermés, t appartient à chaque J_i. La longueur de J_i étant divisée par deux à chaque incrément de i, $\ell(J_i) = \ell(J_0)/2^i$ et comme $t_i \in J_i$, $J_i \subset [t_i - \ell(J_0)/2^i, t_i + \ell(J_0)/2^i]$. Par conséquent, il existe un rang i à partir duquel $J_i \subset \gamma(t)$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Note

Si l'argument topologique peut être survolé, la procédure de dichotomie est intéressante et peut être utilisé sur des exemples concrets, ça vaudrait le coup de la faire "pour de vrai".

Au passage, il faut s'arranger pour "lemmatiser" le résultats "… et le processus termine en un nombre fini d'étapes" plus clairement.

■

Intégrale de Henstock-Kurzweil sur un intervalle compact

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil)* s'il existe un réel A tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge γ sur $[a, b]$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ subordonnée à γ, on ait $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$. Le réel A quand il existe est unique; il est appelé *intégrale de f sur* $[a, b]$ et noté

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ ou } \int_{[a,b]} f(t)\, dt$$

Notation

La première notation peut être étendue au cas où $b < a$; on définit alors l'intégrale de a à b en se ramenant au cas précédent, par

$$\int_a^b f(t)\,dt := -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Lorsqu'on sera en présence de plusieurs intégrales (Newton, Riemann, etc.), on pourra préfixer l'intégrale par les lettres "HK" (pour Henstock-Kurzweil) pour lever toute ambiguité:

$$\text{HK-}\int_{[a,b]} f(t)\,dt.$$

Intégrale de Riemann

Toute fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et les deux intégrales coïncident.

Def Riemann + Preuve

TODO. Passer par l'intermédiaires des jauges numériques ? Bof. Directement avec de $\delta > 0$ uniforme à l'intervalle ouvert.

Théorème fondamental du calcul

Si la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a, b]$, la dérivée function dérivée f' est intégrable sur $[a, b]$ et

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Théorème fondamental du calcul (alternatif) (Corollaire ?)

Toute fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ intégrable au sens de Newton est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et les deux intégrales coïncident.

QUESTION exfiltrer le "Straddle Lemma"? Ca sera probablement plus clair. L'autre option est de splitter un cran plus avant la somme qui majore l'erreur entre somme de Riemann et intégral ... à voir. Arf, ça ne marche pas, tss tss...

Preuve

Nous souhaitons établir que $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, d'intégrale égale à $f(b) - f(a)$. Pour cela, nous devons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction de jauge γ sur $[a,b]$ telle que, si une subdivision pointée

$$\mathcal{D} = \{(t_0, [x_0, x_1], \dots, (t_{m-1}, [x_{m-1}, x_m]))\}$$

vérifie pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$, $[x_i, x_{i+1}] \subset \gamma(t_i)$, alors

$$|S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| \leq \epsilon.$$

Notons que si $\mathcal{D} = \{(t_0, [x_0, x_1], \dots, (t_{m-1}, [x_{m-1}, x_m]))\}$, le membre de gauche de cette inégalité vérifie

$$\begin{aligned}
|S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(b) - f(a)) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{m-1} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{m-1} (f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{m-1} |f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))|
\end{aligned}$$

Fixons donc un $\varepsilon' > 0$ arbitraire. Comme pour tout $t \in [a,b]$,

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + o(h),$$

il existe un $\delta(t) > 0$ tel que si $|h| < \delta(t)$,

$$|f'(t)h - (f(t+h) - f(t))| \leq \varepsilon' |h|$$

Par conséquent, si le sous-intervalle fermé $[c,d]$ de $[a,b]$ est tel que

$$t \in [c,d] \subset \,]t - \delta(t), t + \delta(t)[\,,$$

nous avons

$$|f'(t)(d-t) - (f(d) - f(t))| \leq \varepsilon' |d - t| = \varepsilon'(d-t)$$

ainsi que

$$|f'(t)(c-t) - (f(c) - f(t))| \leq \varepsilon' |c - t| = \varepsilon'(t-c).$$

L'inégalité triangulaire fournit alors

$$|f'(t)(d-c) - (f(d) - f(c))| \leq \varepsilon'(d-c)$$

Posons $\gamma(t) = \left]t - \delta(t), t + \delta(t)\right[$; nous avons ainsi bien défini une fonction de jauge. Si $\mathcal{D}$ est subordonnée à γ, pour tout $i \in \{0, \ldots, m-1\}$,

$$t_i \in [x_i, x_{i+1}] \subset \left]t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)\right[,$$

par conséquent

$$|f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))| \leq \varepsilon'(x_{i+1} - x_i).$$

Exploitons cette inégalité pour majorer l'erreur entre la somme de Riemann et l'intégrale de f'; nous avons

$$\begin{aligned}
|S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))| \\
&\leq \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon'(x_{i+1} - x_i) \\
&= \varepsilon' \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \\
&= \varepsilon'(x_m - x_0) \\
&= \varepsilon'(b - a)
\end{aligned} \quad .$$

Il suffit de choisir un nombre réel positif ε' tel que $\varepsilon'(b-a) \leq \varepsilon$ pour obtenir l'inégalité recherchée.

■

Exemple: $x \mapsto e^x$**.**

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est intégrable au sens de Newton sur tout intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ puisqu'elle admet $x \mapsto e^x$ comme primitive. On a ainsi

$$\int_a^b e^x \, dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a.$$

Par le théorème fondamental du calcul, f est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et l'intégrale associée coïncide avec l'intégrale de Newton. Pour toute intervalle $[a, b]$ et toute précision $\varepsilon > 0$, il existe donc une jauge γ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ subordonnée à γ, l'écart entre $S(f, \mathcal{D})$ et la valeur de l'intégrale soit au plus $\varepsilon(b - a)$.

Construisons une telle jauge en nous inspirant de la preuve du théorème fondamental du calcul. Dans cette preuve, nous avons montré que la précision $\varepsilon(b-a)$ était atteinte si nous choisissions $\gamma(t) = \left]t - \delta(t), t + \delta(t)\right[$ où $\delta(t) > 0$ est tel que si $|h| \leq \delta(t)$, alors

$$|f(t + h) - f(t) - f'(t)h| \leq \varepsilon|h|.$$

Explicitons cette contrainte dans le cas de la fonction $x \in\mapsto e^x$. Cette fonction étant deux fois différentiable sur $[0,1]$, la formule de Taylor avec reste intégral nous fournit

$$|f(t+h)-f(t)-f'(t)h| = \left|\int_t^{t+h} f''(x)(t+h-x)\,dx\right|.$$

Dans ce cas précis, puisque $f''(x)=e^x$, lorsque $h \geq 0$ nous avons

$$\left|\int_t^{t+h} f''(x)(t+h-x)\,dx\right| \leq e^{x+h}\int_t^{t+h}(t+h-x)\,dx = e^{x+h}h^2/2$$

Lorsque $h<0$, on peut montrer que

$$\left|\int_t^{t+h} f''(x)(t+h-x)\,dx\right| \leq e^x h^2/2.$$

Dans tous les cas,pour garantir que $|f(t+h)-f(t)-f'(t)h| \leq \varepsilon|h|$, sous l'hypothèse que $|h| \leq \delta(t)$, il est donc suffisant de nous assurer que $e^{x+\delta(t)}\delta(t)/2 \leq \varepsilon$, soit $\delta(t)e^{\delta(t)} \leq 2e^{-x}\varepsilon$. La fonction $y \in \mathbb{R} \to ye^y \in \left]0,+\infty\right[$ est croissante et bijective; son inverse est par définition la fonction W de Lambert. Le plus grand $\delta(t)$ satisfaisant l'inégalité précédente est donc donné par

$$\delta(t) = W\left(2e^{-x}\varepsilon\right)$$

En conclusion: pour tout $[a,b]$ et tout $\varepsilon>0$, la jauge γ sur $[a,b]$ définie par

$$\gamma(t) = \left]t - W\left(2e^{-x}\varepsilon\right), t + W\left(2e^{-x}\varepsilon\right)\right[$$

est telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a,b]$ subordonnée à γ

$$\left|S(x\mapsto e^x,\mathcal{D}) - \int_a^b e^x\,dx\right| \leq \varepsilon(b-a).$$

TODO: représentation graphique de la jauge pour un (des ?) ε bien choisis.

Exemple: $1/\sqrt{x}$**.**

Considérons la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left|\begin{array}{rl} 1/\sqrt{x} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{array}\right.$$

Options: "manuellement" avec 3 hunches à avoir ("gérer" le cas $x = 0$ à part et "forcer" la subdivision à prendre la valeur 0; découpage de la valeur finale "pressentie" en bouts et recherche d'une somme télescopique). Ou, essayer d'exploiter la preuve du FTC, qui nécessite d'être détaillée, pour "exhiber" une jauge qui marche (note: au passage, en supposant f deux fois diff on peut en construire une explicitement, c'est un exercice intéressant en soi). Tout est bon ici !

Variante/extension: autre valeur que 0 en 0, montrer que cela n'a aucun impact.

Une stratégie intéressant consisterait à expliciter/construire une jauge "qui fasse le job" pour $1/\sqrt{x}$ en évitant l'origine en s'inspirant de la preuve du FTC (qui "lisse" l'erreur uniformément), PUIS à bootstraper ça pour la singularité. C'est sans doute une bonne idée, il y a beaucoup de techniques concentrées sur un seul exercice sinon. Et le coup de la méthode de sélection du pas associée au FTC montre une stratégie qui constraste avec celle de Riemann classique, c'est intéressant à contraster.

Préambule

La difficulté de cet exemple est liée à la "singularité" de f en $x = 0$, où la fonction est à la fois discontinue et localement non-bornée. Si au lieu de l'intervalle $[0, 1]$, on considére l'intervalle $[a, b]$ où $0 < a \leq b \leq 1$, comme la fonction f restreinte à $[a, b]$ est continue, elle y admet une primitive, par exemple la fonction $x \in [a, b] \mapsto 2\sqrt{x}$. Elle y est intégrable au sens de Newton – et donc au sens de Henstock-Kurzweil – et

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (2\sqrt{x})'\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

Si f est bien HK-intégrable sur $[0, 1]$, ce que nous allons nous efforcer de démontrer, l'expression ci-dessus suggère que son intégrale pourrait être

$$\int_0^1 f(x)\, dx \stackrel{?}{=} 2(\sqrt{1} - \sqrt{0}) = 2.$$

On va confirmer cette intuition dans la suite.

La singularité

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à construire une jauge γ sur $[0, 1]$ telle que toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ subordonnée à γ, vérifie

$$|S(f, \mathcal{D}) - 2| \leq \varepsilon.$$

On cherche dans un premier temps à expliciter la contribution du voisinage de l'origine à la somme de Riemann. Si $\mathcal{D}$ est composée des paires $([x_i, x_{i+1}], t_i)$ où

$0 \leq x_0 \leq \cdots \leq x_m \leq 1$, et que x_p est le premier des x_i qui diffère de 0, on a

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{D}) &= f(t_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(t_{p-1})(x_p - x_{p-1}) + \sum_{i=p}^{m} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= f(t_{p-1})x_p + \sum_{i=p}^{m} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

soit $S(f, \mathcal{D}) = f(t_{p-1})x_p + S(f, \mathcal{D}')$ où $\mathcal{D}' = \{(J, t) \in \mathcal{D} \mid J \subset [x_p, 1]\}$.

$$|S(f, \mathcal{D}) - 2| = \left| f(t_{p-1})x - p - 2(\sqrt{x_p} - \sqrt{0}) - (S(f, \mathcal{D}') - 2(\sqrt{1} - \sqrt{x_p})) \right|$$

Propriétés Elementaires de l'Intégrale

TODO

Linéarité

TODO

IPP

TODO

Changement de variables

TODO

Ajouter distinctions notations

$$\int_{[a,b]}, \int_a^b$$

Additivité

Si la fonction f est définie et intégrable sur les intervalles compacts $[a, b]$ et $[b, c]$, alors elle est intégrable sur l'intervalle $[a, c]$ et

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt + \int_{[b,c]} f(t)\, dt = \int_{[a,c]} f(t)\, dt.$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Si la fonction f est intégrable sur $[a,b]$ et $[b,c]$, alors il existe deux jauges $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}$ telles que pour toutes les subdivisions pointées $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement subordonnées à γ_1 et γ_2,

$$\left| S(f,\mathcal{D}_1) - \int_{[a,b]} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon/2 \;\text{ et }\; \left| S(f,\mathcal{D}_2) - \int_{[b,c]} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon/2.$$

Définissons la fonction $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ par:

$$\gamma(x) = \left| \begin{array}{cl} \gamma_1(x) \cap \left]-\infty, c\right[& \text{si } a < x < b, \\ \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) & \text{si } x = b, \\ \gamma_2(x) \cap \left]c, +\infty\right[& \text{si } b < x < c. \end{array} \right.$$

Par construction, cette fonction est une jauge sur $[a,c]$ (pour tout $x \in [a,c]$, $\gamma(x)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contenant x). Supposons que $\mathcal{D} = \{(t_i, I_i)\}_i$ soit une subdivision pointée de $[a,c]$ subordonnée à γ. Admettons temporairement que chaque intervalle I_i appartienne à $[a,b]$ ou bien dans le cas contraire à $[b,c]$. Les deux subdivisions pointées $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont telles que

$$S(f,\mathcal{D}) = S(f,\mathcal{D}_1) + S(f,\mathcal{D}_2).$$

Elles sont également subordonnées à γ_1 et γ_2 respectivement; par conséquent

$$\left| S(f,\mathcal{D}) - \int_{[a,b]} f(t)\,dt + \int_{[b,c]} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon.$$

Si notre hypothèse temporaire n'est pas vérifié, c'est qu'il existe un (unique) intervalle I_i à cheval sur $[a,b]$ et $[b,c]$, c'est-à-dire d'intersection non vide avec $[a,b[$ et avec $]b,c]$. La jauge γ a été choisie de telle sorte que si $x \neq b$, alors $x \notin \gamma(x)$; par conséquent, si cet intervalle $I_i = [d_i, e_i]$ existe, alors $t_i = b$ et on peut remplacer le terme (t_i, I_i) dans la subdivision pointée $\mathcal{D}$ par $(b, [d_i, b])$ et $(b, [b, e_i])$ sans que la somme de Riemann associée change (le terme $f(b)\ell([d_i, e_i])$ étant à $f(b)\ell([d_i,b]) + f(b)\ell([b,e_i])$). La nouvelle subdivision $\mathcal{D}'$ ainsi construite vérifie quant à elle l'hypothèse de non-chevauchement précédente. Par conséquent l'inégalité ci-dessus est satisfaite dans le cas général, ce qui conclut la preuve de ce théorème.

■

TODO

Présenter ce qui vient comme une réciproque de l'additivité. Contextualiser critère de Cauchy (valeur de l'intégrale inconnue)

Critère d'intégrabilité de Cauchy

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. La function f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge γ sur I telle que pour tout couple de subdvisions pointées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ subordonnées à γ, on ait

$$|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}')| \leq \varepsilon.$$

Démonstration

TODO

■

TODO:

fusionner "Restriction" avec additivité.

Restriction

Si f est intégrable sur l'intervalle compact $[a, b]$, elle est intégrable sur tout intervalle compact $[c, d]$ inclus dans $[a, b]$.

Démonstration

Nous démontrons en détail le cas où $c = a$; le cas où $d = b$ se prouve de façon similaire et le cas général se déduit facilement de ces deux cas particuliers.

Soit $\varepsilon > 0$. Par le critère d'intégrabilité de Cauchy, il existe une jauge γ sur $[a, b]$ telle que pour tout couple de subdvisions pointées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ subordonnées à γ, on ait

$$|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}')| \leq \varepsilon.$$

Considérons les restrictions γ_1 et γ_2 de γ à $[a, d]$ et $[d, b]$ respectivement. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1'$ sont deux subdivisions pointées de $[a, d]$ subordonnées à γ_1. Si $\mathcal{D}_2$ est une subdivision de $[d, b]$ subordonnée à γ_2, alors $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2'$ sont des subdvisions pointées de $[a, b]$ subordonnées à γ. Par conséquent,

$$|S(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) - S(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2')| \leq \varepsilon.$$

Or $S(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = S(f, \mathcal{D}_1) + S(f, \mathcal{D}_2)$ et $S(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2') = S(f, \mathcal{D}_1) + S(f, \mathcal{D}_2')$, donc

$$|S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}_1)| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de f sur $[a, d]$ par le critère d'intégrabilité de Cauchy.

■

Fonctions égales presque partout

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ égale presque partout à une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable est elle-même intégrable et

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_{[a,b]} g(t)\,dt.$$

Démonstration

Par linéarité de l'intégrale, il suffit d'établir que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est nulle presque partout (c'est-à-dire égale presque partout à la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ identiquement nulle), alors elle est intégrable d'intégrale nulle.

Supposons dans un premier temps que f soit bornée. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de

$$A = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \neq 0\}$$

par une collection dénombrable d'intervalles I_i telle que $\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon$. Il est de plus possible de supposer les I_i ouverts [2]. Définissons la jauge γ sur $[a,b]$ par

$$\gamma(t) = I_i \;\text{ si }\; t \in I_i \text{ (et }\; t \notin I_j \text{ quand }\; j \leq i).$$

et par exemple $\gamma(t) = \left]-\infty, \infty\right[$ si $t \notin \cup_i I_i$. Pour toute subdivision pointée $\mathcal{D} = \{(t_j, J_j)\}_j$ de $[a,b]$ subordonnée à γ,

$$|S(f,\mathcal{D})| = \left|\sum_j f(t_j)\ell(J_j)\right| = \left|\sum_{t_j \in A} f(t_j)\ell(J_j)\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \times \sum_j \ell(J_j).$$

Mais par construction les J_j ne se chevauchent pas et sont tous inclus dans un des intervalles I_i. On a donc

$$\sum_j \ell(J_j) \leq \sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Il suffit par conséquent de choisir un ε suffisamment petit initialement pour rendre la somme de Riemann associée arbitrairement petite; f est donc intégrable d'intégrale nulle.

Si f est non-bornée, on peut faire un démonstration similaire en considérant les ensembles

$$A_k = \{x \in [a,b] \,|\, k < |f(x)| \leq k+1\},$$

2. On peut trouver un recouvrement de A par des intervalles J_i non nécessairement ouverts, tels que $\sum_i \ell(J_i) \leq \varepsilon/2$, puis remplacer chaque J_i par un intervalle I_i ouvert de longueur double contenant J_i.

puis en associant à chaque A_k un recouvrement par une collection dénombrable d'intervalles ouverts I_i^k tels que

$$\sum_i \ell(I_i^k) \leq \frac{\varepsilon}{(k+1)2^{k+1}}$$

ce qui est possible puisque tous les A_k sont négligeables. On définit alors la jauge γ sur $[a,b]$ par $\gamma(t) = I_i^k$ si t appartient à un I_i^k (et on choisit alors le plus petit k, puis le plus petit i telle que cette propriété soit vérifiée) et par exemple $\gamma(t) =]-\infty, \infty[$ si $t \notin \cup_k \cup_i I_i^k$. L'évaluation d'une somme de Riemann pour une subdivision pointée subordonnée à cette jauge fournit

$$|S(f,\mathcal{D})| = \left|\sum_j f(t_j)\ell(J_j)\right| = \left|\sum_k \sum_{t_j \in A_k} f(t_j)\ell(J_j)\right| \leq \sum_k \sum_{t_j \in A_k} (k+1)\ell(J_j)$$

et comme

$$\sum_{t_j \in A_k} \ell(J_j) \leq \sum_i \ell(I_i^k) \leq \frac{\varepsilon}{(k+1)2^{k+1}},$$

on obtient

$$|S(f,\mathcal{D})| \leq \sum_k (k+1) \sum_i \ell(I_i^k) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

La fonction f est donc bien intégrable et d'intégrale nulle.

■

Intégration sur des intervalle non-bornés

TODO

Motiver la définition de l'intégrale sur un intervalle non borné, disons $[0,+\infty[$ par l'étude de l'intégrale sur $[a,b]$ et "sautant" le dernier terme de la somme de Riemann ? En exercice ? Bof.

TODO

Voir ce qu'il est possible de dire au passage sur l'absence d'intégrale impropre (théorème de Hake).

Remarque

La difficulté d'intégrer une fonction sur un intervalle non borné tel que $\mathbb{R}$ n'est pas lié au concept de subdivision pointée, qui peut être généralisé pour comporter des intervalles non bornés, mais au calcul de la somme de Riemann associée. En effet, toute subdivision pointée d'un intervalle non-borné comporte nécessairement un ou deux éléments de la forme (t, I) où I est non-borné; la longueur $\ell(I)$ associée est alors infinie et la somme de Riemann correspondante comporte alors un ou deux termes de la forme $f(t) \times \infty$; elle donc potentiellement infinie, ou même indéfinie ...

Pour éviter cette difficulté technique, nous allons définir l'intégrale sur $\mathbb{R}$ à partir de subdivisions d'intervalles compacts, en exigeant que celles-ci, en plus d'être suffisamment fines comme dans le cas des intervalles bornés, soient basées sur un intervalle suffisamment grand.

Intégrale sur un intervalle non borné

Soit I un intervalle fermé non borné de $\mathbb{R}$ de bornes a et b[3]. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil)* s'il existe un réel A tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge γ de $\mathbb{R}$ et un intervalle compact K de I tels que pour tout intervalle compact $[a, b]$ tel que $K \subset [a, b]$ et pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ subordonnée à γ, on ait $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$. Le réel A quand il existe est unique; il est appelé *intégrale de f sur* $\mathbb{R}$ et noté

$$\int_a^b f(t)\, dt \;\text{ ou }\; \int_I f(t)\, dt.$$

TODO:

simplifier ce qui suit, inutilement compliqué.

TODO:

j'ai changé la définition ci-dessus, adapter la suite.

TODO

Remarquer/Prouver que la définition ci-dessus "marche aussi" pour un intervalle borné.

Intégrale sur un intervalle fermé

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle fermé quelconque I (borné ou non borné) est *intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil)* si son prolongement g

3. 3 cas peuvent se présenter: $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, $I =]-\infty, b]$ ou $I = [a, +\infty[$ où $a, b \in \mathbb{R}$

par zero en dehors de l'intervalle I

$$g(x) = \left| \begin{array}{rl} f(x) & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit alors

$$\int_I f(t)\, dt := \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt.$$

Démonstration (cohérence des définitions)

Il convient de vérifier que la définition d'intégrale sur un intervalle fermé I est cohérente avec [la définition d'intégrale sur $\mathbb{R}$][Intégrale sur $\mathbb{R}$] (ce qui est direct) et aussi avec [la définition d'intégrale sur un intervalle compact][Intégrale sur un intervalle compact] que nous avons utilisé jusqu'à présent.

Dans ce second cas, si la fonction $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ est [intégrable au sens de la définition originelle][Intégrale sur un intervalle compact], et si l'on prend $r > 0$ tel que $-r \leq c$ et $d \leq r$ et que l'on considère un intervalle compact $[a, b]$ vérifiant $a \leq -r$ et $r \leq b$, on a $[c, d] \subset [a, b]$. Par additivité de l'intégrale,

$$\int_a^b g(t)\, dt = \int_a^c g(t)\, dt + \int_c^d g(t)\, dt + \int_d^b g(t)\, dt.$$

Or sur $[a, c]$ et $[d, b]$, la fonction g est nulle sauf peut-être en c et b ; sur $[c, d]$, elle est égale à f. Par conséquent g est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b g(t)\, dt = \int_c^d f(t)\, dt.$$

On peut donc bien trouver une jauge γ sur $[a, b]$ telle que toute subdivision $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ subordonnée à γ vérifie

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_c^d f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon$$

Réciproquement, si la fonction $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de la définition générale, pour tout $r > 0$ et $[a, b]$ tel que $a \leq -r$ et $r \leq b$, le prolongement de f par zéro est intégrable sur $[a, b]$. Il suffit de prendre r tel que $-r \leq c$ et $d \leq r$ et d'utiliser à nouveau (la réciproque de) l'additivité de l'intégrale pour conclure que f est intégrable sur $[c, d]$ et que son intégrale est l'intégrale de g.

■

TODO

Existence et valeur de:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$$

TODO

Rappel / généralisation des pptés enoncées pour les intervalles compacts.

Subdivisions Partielles

Subdivision pointée partielle

Une *subdivision pointée partielle* de l'intervalle fermé $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ est une famille finie

$$\{(t_i, I_i) \mid \ 0 \leq i \leq n-1\}$$

où les I_i sont des intervalles fermé de $[a, b]$ sans chevauchement et $t_i \in I_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. La somme de Riemann associée à la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et à la subdivision pointée partielle $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ est la grandeur

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} f(t)\ell(I)$$

Une subdivision pointée partielle $\mathcal{D}$ de l'intervalle fermé $[a, b]$ est *subordonnée à une jauge* γ de $[a, b]$ si

$$(t, J) \in \mathcal{D} \ \Rightarrow \ J \subset \gamma(t).$$

TODO - remarque

(autrement dit, c'est comme une subdivision pointée, sauf que l'on n'exige pas que les I_i recouvrent $[a, b]$. Mettre en ante ?)

Lemme de Henstock

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et γ une jauge sur $[a, b]$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$, on ait

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_{[a,b]} f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Alors pour tout subdivision pointée partielle $\mathcal{D} = \{(t_k, I_k)\}_k$ de $[a, b]$ subordonnée à γ, on a également

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_k \int_{I_k} f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Preuve du lemme de Henstock

Il existe une famille finie d'intervalles fermés $\{J_j\}$, $j = 1, \ldots, m$ telle que l'union des familles $\{I_k\}$ et $\{J_j\}$ forment une subdivision (complète) de $[a, b]$. Pour tout $\eta > 0$, sur chaque intervalle J_j, il existe une jauge γ_j telle que si $\mathcal{D}_j$ est une subdivision pointée de J_j subordonnée à γ_j, alors

$$\left| S(f, \mathcal{D}_j) - \int_{J_j} f(t)\, dt \right| \leq \eta.$$

Si de plus on choisit $\mathcal{D}_j$ subordonnée à la restriction de γ à J_j, alors $\mathcal{D} \cup \cup_j \mathcal{D}_j$ est une subdivision pointée (totale) de $[a, b]$ subordonnée à γ. On déduit de l'hypothèse centrale du lemme que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) + \sum_j S(f, \mathcal{D}_j) - \sum_k \int_{I_k} f(t)\, dt + \sum_j \int_{J_j} f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon$$

et donc par l'inégalité triangulaire que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_k \int_{I_k} f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon + m\eta.$$

Le choix de $\eta > 0$ étant arbitraire, l'inégalité cherchée est établie.

Exercices

TODO

Regarder exercices dans le Bartle ("A Modern Theory of Integration")

Intervalle

Montrer qu'un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si il *est connexe par arcs*, c'est-à-dire si et seulement si pour tout couple de points x et y de I on peut trouver un chemin de I joignant x à y, c'est-à-dire une fonction continue $\phi : [0, 1] \to I$, telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$.

Réponse

Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons que x et y appartiennent à I et que x soit inférieur ou égal à y. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\phi(t) = (1 - t)x + ty$ est un point intermédiaire entre x et y, et par conséquent, appartient à I. La fonction ϕ ainsi définie est clairement continue et vérifie $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$; c'est donc un chemin de I qui joint x à y. Par conséquent, I est connexe par arcs.

Réciproquement, si I est connexe par arcs et contient les points x et y, tout chemin de I qui joint x et y, continu et à valeurs réelles, vérifie le théorème des valeurs intermédiaires: pour toute valeur intermédiaire z entre x et y, il existe donc un $t \in [0, 1]$ tel que $\phi(t) = z$. Comme ϕ est à valeurs dans I, $z \in I$; l'ensemble I est donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

Construction de Jauges

TODO: faire construire "à la main" une jauge par dichotomie (exemple avec jauge s'affinant pour "forcer" un tag et/ou variante avec jauge "faciles", telles qu'on puisse trouver une jauge uniforme qui soit plus fine ? Et csq, à savoir capacité à trouver une subdivision uniforme associée)

Subdivision pointées

Demander de construire à partir d'une subdivision une autre subdivision "aussi fine", de même somme de Riemann, mais avec les points tjs à gauche ou à droite de l'intervalle.

L'Intégrale de Riemann est absolue

Montrer que l'intégrale de Riemman est absolue: si une fonction f est intégrable au sens de Riemann, sa valeur absolue $|f|$ l'est également.

Réponse

Nous exploitons le critère de Lebesgue pour l'intégrabilité au sens de Riemann: si f est intégrable au sens de Riemann, elle est bornée – et donc f également – et continue presque partout – et donc $|f|$ également ($|f|$ est continue en tout point où f est continue comme composée de fonctions continues en un point). Par conséquent, $|f|$ est intégrable au sens de Riemann.

Un ensemble de Cantor

Chaque nombre réel x de $[0,1[$ peut être représenté de façon par un développement décimal de la forme noté noté $x = 0.a_1a_2a_3\dots$ où $a_i \in \{0,1,\dots,9\}$, une notation qui signifie que

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i 10^{-i}.$$

Ce développement est unique si on lui impose d'être propre, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de séquences infinie de nombres 9 consécutifs [4].

On définit l'ensemble A comme le sous-ensemble de $[0,1[$ dont le développement décimal ne comporte que des nombres pairs. Par exemple, $x = 2/3 = 0.666\dots$ appartient à A, mais $x = \sqrt{2}/2 = 0.707\dots$ non.

TODO: faire qqchose du style "Si vous deviez"tirer un nombre au hasard dans $[0,1[$", quelle serait les chances de tomber sur un nombre de A ?". Qui suppose de modéliser la séquence des a_n, supposé équiprobables, indépendants, etc.? OK, why not mais est-on en état de relier ça à la question 1. à ce stade ? Mmmmmmm ....

1. Montrer que l'ensemble A est négligeable.
2. Montrer néanmoins que A n'est pas dénombrable, mais a la "puissance du continu" (qu'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{R}$ ou avec un intervalle de longueur non vide de $\mathbb{R}$, ce qui revient au même).

Réponses

1. L'ensemble A peut être recouvert par la collection ne contenant que l'intervalle $\mathcal{A}_0 = [0,1[$, ou par la collection d'intervalles

$$\mathcal{A}_1 = \{[0,1/10[\,,[2/10,3/10[\,,\dots,[8/10,9/10[\}$$

qui contient exactement les nombres x de $[0,1[$ dont le premier chiffre du développement décimal propre est pair. On a clairement

$$\sum_{I\in\mathcal{A}_1} \ell(I) = \ell([0,1[) = 1 \;\text{ et }\; \sum_{I\in\mathcal{A}_1} \ell(I) = 5 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{2}.$$

On peut poursuivre le procédé en considérant la collection $\mathcal{A}_n$ des 5^n intervalles dont l'union forme l'ensemble des nombres x dont les n premiers chiffres du développement décimal propre sont pairs, ensemble qui inclus A. On peut de plus se convaincre par récurrence que

$$\sum_{I\in\mathcal{A}_n} \ell(I) = 5^n \times \frac{1}{10^n} = \frac{1}{2^n}.$$

4. Dans le cas contraire, on pourrait par exemple représenter $x = 1/2$ comme $0.5000\dots$ ou comme $0.4999\dots$.

Comme $1/2^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, nous avons établi que A est négligeable.

2. L'opération qui à $x = 0.a_1a_2\cdots \in A$ associe $y = 0.b_1b_2\dots$ où $b_i = a_i/2$ est une bijection de A sur $[0, 0.444\dots[\, = [0, 4/9[$, ce qui montre que A à la puissance du continu (et donc n'est pas dénombrable).

Caractérisation des dérivées

Identifier par les jauges si une fonction est une dérivée (cf papier).

Références

Burk, Frank E. 2007. *A Garden of Integrals.* Washington, DC: Mathematical Association of America (MAA).