

# Calcul Intégral IV

STEP, MINES ParisTech\*

12 septembre 2019 (#0c19069)

## Table des matières


<b>TODO – Mesures</b>	<b>1</b>
<b>Mesure et intégrale</b>	<b>1</b>
Tribu . . . . .	2
Tribu engendrée par une collection . . . . .	2
Tribu de Lebesgue . . . . .	2
TODO – Référence . . . . .	2
Tribu de Borel . . . . .	2
Mesure . . . . .	3
TODO – Pb . . . . .	3
Fonction mesurable . . . . .	3
Conventions . . . . .	3
Mesurable ou mesurable ? . . . . .	3
TODO: composition de fcts mesurables . . . . .	3
Fonction étagée . . . . .	4
Intégrale d’une fonction étagée . . . . .	4
Intégrale d’une fonction positive . . . . .	4
Intégrale d’une fonction à valeurs réelles . . . . .	4
TODO . . . . .	4
TODO . . . . .	4
TODO . . . . .	5
TODO . . . . .	5

## TODO – Mesures

## Mesure et intégrale

On rappelle:

---

\*Ce document est un des produits du projet  **boisgera/CDIS**, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d’utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

## Tribu

Une *tribu* ou  $\sigma$ -*algèbre*  $\mathcal{A}$  sur un ensemble  $X$  est une collection d'ensembles de  $X$  contenant l'ensemble vide et stable par passage au complémentaire et à l'union dénombrable. Un ensemble de  $\mathcal{A}$  est dit *mesurable* ; l'ensemble  $X$  muni de  $\mathcal{A}$  est un *espace mesurable*.

## Tribu engendrée par une collection

Dans un ensemble  $X$ , on appelle *tribu engendrée* par une collection  $\mathcal{C}$  d'ensembles de  $X$  la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$  de  $X$  contenant  $\mathcal{C}$ .

**Démonstration de l'existence de la tribu engendrée** Désignons par  $\mathfrak{S}$  la (meta-)collection des tribus de  $X$  incluant  $\mathcal{C}$  (contenant  $\mathcal{C}$  comme sous-ensemble). Elle n'est pas vide : elle contient la collection  $\mathcal{P}(X)$  des ensembles de  $X$  (qui de toute évidence est un sur-ensemble de  $\mathcal{C}$  et une tribu de  $X$ ). Montrons que la plus petite tribu  $\sigma(\mathcal{C})$  de  $X$  contenant  $\mathcal{C}$  est l'intersection de  $\mathfrak{S}$ :

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{S}} \mathcal{A},$$

ou encore  $\sigma(\mathcal{C}) = \{A \subset X \mid A \in \mathcal{A} \text{ pour tout } \mathcal{A} \in \mathfrak{S}\}$ . Il est clair que si  $\mathcal{A}$  est une tribu de  $X$  contenant  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{A}$ , car alors  $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}$ . Il nous suffit donc de montrer que  $\bigcap \mathfrak{S}$  est une tribu de  $X$  pour conclure ; on vérifiera aisément que comme chaque élément de  $\mathfrak{S}$  est une tribu, cette intersection en est également une. ■

## Tribu de Lebesgue

On appelle *tribu de Lebesgue* sur  $\mathbb{R}^n$  la tribu composée des ensembles  $E$  tels que pour tout pavé  $P$  de  $\mathbb{R}^n$ , la fonction caractéristique de  $E \cap P$  soit intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil).

La tribu de Lebesgue est donc composée des ensembles mesurables au sens du chapitre “Calcul Intégral III”.

## TODO – Référence

Lier au chapitre “Calcul Intégral III” en détail.

## Tribu de Borel

On appelle *tribu de Borel* d'un espace topologique  $X$  la plus petite tribu contenant tous les fermés (ou tous les ouverts) de  $X$ .

## Mesure

Une *mesure (positive)*  $\mu$  sur un espace probabilisable  $(X, \mathcal{A})$  est une fonction de  $\mathcal{A}$  dans  $[0, +\infty]$  telle que  $\mu(\emptyset) = 0$  et pour toute collection dénombrable  $\{A_1, \dots, A_k, \dots\}$  d'ensembles de  $\mathcal{A}$  disjoints deux à deux, on ait

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k);$$

on dit que  $\mu$  est  $\sigma$ -additive. L'ensemble  $X$  muni de  $\mathcal{A}$  et  $\mu$  est un *espace mesuré*.

## TODO – Pb

Gérer “pb” des fonctions à valeurs étendues ? Non, il n’y en a pas ...

## Fonction mesurable

Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  associée aux espaces mesurables  $(X, \mathcal{A})$  et  $(Y, \mathcal{B})$  est *mesurable* si l'image réciproque  $A = f^{-1}(B)$  de tout ensemble  $B$  de  $\mathcal{B}$  par  $f$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

## Conventions

Lorsque  $Y$  a une structure topologique, on supposera par défaut que la tribu associée est la tribu de Borel, et lorsque  $X = \mathbb{R}^n$  que la tribu associée est la tribu de Lebesgue. Lorsque l'on souhaitera munir également  $X$  de la tribu de Borel, on parlera de fonctions *borélienne* (tribu de Borel au départ et à l'arrivée). Il existe une bonne raison pour adopter cette convention:

## Mesurable ou mesurable ?

Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est mesurable au sens du chapitre III, c'est-à-dire limite simple de fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil, si et seulement si elle est mesurable au sens de ce chapitre quand l'espace de départ  $\mathbb{R}^n$  est muni de la tribu de Lebesgue et l'espace d'arrivée  $\mathbb{R}^m$  de la tribu de Borel.

## TODO – Démonstration ■

## TODO: composition de fcts mesurables

Intérêt de fcts boréliennes dans ce schéma, lien avec Calcul Intégral III (généralisation résultats composition)

### Fonction étagée

On appelle *fonction étagée* toute fonction  $f : X \rightarrow Y$  telle que l'image réciproque de  $Y$  par  $f$  soit finie (telle que  $f$  ne prenne qu'un nombre fini de valeurs).

### Intégrale d'une fonction étagée

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \mapsto [0, +\infty[$  une fonction étagée positive et mesurable. Soit  $Y = f(X)$  l'ensemble des valeurs prises par  $f$ . On appelle *intégrale de Lebesgue de  $f$  relativement à la mesure  $\mu$*  la grandeur positive finie

$$\int_X f \mu := \int_X f(x) \mu(dx) := \sum_{y \in Y} y \times \mu(f^{-1}(\{y\})).$$

### Intégrale d'une fonction positive

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \mapsto [0, +\infty]$  une fonction mesurable. Soit  $\mathcal{F}$  la collection des fonctions étagées positives et mesurables inférieures à  $f$ . On appelle *intégrale de Lebesgue de  $f$  relativement à la mesure  $\mu$*  la grandeur positive (finie ou infinie)

$$\int_X f \mu := \int_X f(x) \mu(dx) := \sup_{g \in \mathcal{F}} \int_X g \mu.$$

### Intégrale d'une fonction à valeurs réelles

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \mapsto [-\infty, +\infty]$  une fonction mesurable. On dit que la fonction  $f$  est *intégrable au sens de Lebesgue relativement à la mesure  $\mu$*  si elle est mesurable et que les intégrales des fonctions positives  $f_+ = \max(f, 0)$  et  $f_- = -\min(f, 0)$  sont finies. L'*intégrale de Lebesgue de  $f$  relativement à la mesure  $\mu$*  est alors la grandeur réelle (finie)

$$\int_X f \mu := \int_X f(x) \mu(dx) := \int_X f_+ \mu - \int_X f_- \mu.$$

### TODO

Noter intégrale de fcts positives “plus souple” et fct pas considérée intégrable (même si on peut donner une valeur à son intégrale !) si l'intégrale est infinie; mais on est obligé d'être plus restrictif pour les fonctions signées, en raison du risque de  $+\infty - \infty$ . Evoquer certains auteurs qui tolèrent l'une ou l'autre des valeurs

### TODO

Noter intégrale de Lebesgue absolue par construction.

### **TODO**

aller vers la mesure de longueur. Par les mesures extérieures ? Yes. Mmmm, oui, mais-pas-que. On a déjà  $\ell$  et les ensembles mesurables associés via la théorie HK (ou  $v$  dans  $\mathbb{R}^n$ ), on ne vas pas la jeter si ? Non !

### **TODO**

“Equivalence” intégrabilité Lebesgue et HK absolue (modulo gestion des valeurs infinies.)