Calcul Intégral V

STEP, MINES ParisTech*

22 octobre 2019 (#2f387a0)

Table des matières

*Ce document est un des produits du projet boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS).

Misc.

— fcts définies dans $\mathbb{R}$, au moins dans un premier temps

Dérivées faibles

Motivation: étendre la notion de dérivation pour traiter des uses cases comme les équations différentielles avec second membre discontinu en t, sans "bricolage" (qui serait: résoudre portion par portion et recoller par continuité, si l'on suppose que l'on est C^1 par morceaux). Motivation analogue pour les probas: variable aléatoire à densité uniforme sur $[0, 1]$: p n'est pas (partout) la dérivée de F.

Dans les deux cas néanmoins, on a le même schéma ou la "dérivée" permet d'obtenir la fct originale par intégration. (pour les ODEs, pour travailler sur $\mathbb{R}$, prolonger rhs par 0 pour $t \neq 0$ et $x(t)$ par x_0.)

Idée: dérivation initialement source de définition de l'intégrale (de Newton); l'intégration est une opération inverse, mais sait aussi intégrer des fonctions qui ne sont *pas* des dérivées (exemple). On peut retourner le problème et définir une nouvelle notion, généralisée de dérivée, à partir de l'intégrale.

Dérivée faible

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *faiblement dérivable*, s'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement absolument [1] intégrable c'est-à-dire mesurable et telle que $|g|$ soit intégrable sur tout intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$\int_a^b |g(x)|\, dx < +\infty,$$

et une constante $c \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = c + \int_0^x g(t)\, dt.$$

La fonction g est alors définie uniquement presque partout ; elle est appelée *dérivée faible* de f et pourra être notée f'.

TODO – Démonstration ■

TODO – extension "p.p." ?

Aka fct de départ définie pp ? Bof ... Mmm quand même nécessaire pour la suite. (euh, mais où ça ?)

1. si f est conditionnellement intégrable, l'application

$$\phi \in D^0(\mathbb{R}) \mapsto \int f\phi$$

n'est pas (nécessairement ?) bornée, f ne peut donc pas être représentée comme une mesure, contrairement aux fonctions absolument continue. C'est trop tôt à ce stade pour parler de ça, mais la motivation est importante pour se limiter aux fonction absolument continues ...

TODO – Terminologie

Opter pour "généralisée" en 1ere instance ? dérivée généralisée, dérivable au sens des distributions (cf. + tard)

TODO – Dérivable faiblement implique dérivable pp

Corollaire: dérivable faiblement implique dérivée classique existe pp et est égale à la dérivée faible

TODO – Exemples

$x \mapsto |x|$?

Dérivabilité classique et faible

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une dérivée faible g, alors f est dérivable presque partout et $f' = g$ presque partout.

TODO

Lien du truc dessus avec unicité pp de g évoquée plus haut.

TODO – Warning, pas de réciproque

attention: dérivée classique définie pp suffit pas à avoir dérivée faible (ex: fct de Heaviside). Dérivée faible implique dérivée pp, réciproque pas vraie, même si on ajoute continue (idée qui vient naturellement quand on construit un contre-exemple). Exemple avec ensembles de Cantor / devil's staircase. Même dérivable partout ne suffit pas ...

Absolue continuité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *absolument continue* si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute collection finie d'intervalles compacts $([a_k, b_k])_{k=0}^{n-1}$ de $\mathbb{R}$ ne se chevauchant pas, on ait

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b_k - a_k) \leq \delta \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{n} |f(b_n) - f(a_n)| \leq \varepsilon.$$

TODO

ne se chevauchant pas est nécessaire (note Bartle : c'est crucial) ? Pas suffisant de se limiter aux subdivisions complètes ?

Existence de dérivée faible

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une dérivée faible si et seulement si elle est absolument continue.

TODO – Démonstration

TODO – Rk

Il serait possible d'élargir la notion de fonction faiblement dérivable en exigeant uniquement que g soit localement intégrable au sens de Henstock-Kurzweil, et non localement absolument intégrable. Comme toute dérivée est localement intégrable au sens de Henstock-Kurzweil, cette extension aurait le mérite de proposer une notion de dérivée faible qui soit une *vraie* extension de la notion de dérivée classique (en l'état, il est possible qu'une fonction ait une dérivée en tout point mais pas de dérivée faible . . .).
Néanmoins, aussi séduisante soit-elle, nous ne considérerons pas cette extension, car la classe des fonctions faiblement dérivables serait alors sensiblement plus complexe à caractériser que dans le cadre absolument continu que nous avons choisi [2].

TODO – Dérivation faible et IPP

(équivalence)

Mesures signées

TODO

Perspective fonction sans dérivée faible fonction (ex: fct avec saut), mais qui peut être dérivée comme une mesure. Perspective de patch : analyse de l'IPP pour les dérivées faibles et comment le rhs est une forme linéaire sur C_c.

2. Il s'agit d'une classe de fonctions absolument continues mais **généralisées**, notée ACG_*, cf. (Bartle 2001, 32:242–43).

Note

Sauf erreur, la définition "naturelle" (ressemblant) de mesure à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne garantit pas l'existence d'une décomposition de Hahn et ne permet donc pas de se ramener au cas des mesures positives (cf. Dunford-Schwarz pour la preuve de ce résultat). Cela a donc du sens d'insister sur une définition de mesure signée, prenant comme base une mesure et une fonction de signe. (à plus long-terme, j'aimerais un exemple de mesure à valeurs réelles qui n'admet pas de décompo de Hahn)

TODO – Mesure signée

Soit $(X, \mathcal{A})$ un ensemble mesurable. Une *mesure signée* ν sur $(X, \mathcal{A})$ est une application

$$\nu : \mathcal{A} \to \left]-\infty, +\infty\right[\cup \{\perp\}$$

pour laquelle il existe une mesure positive μ sur $\mathcal{A}$ et une application μ-mesurable $\sigma : X \to \{-1, +1\}$ telles que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) := \sigma\mu(A) := \int_A \sigma(x)\,\mu(dx)$$

si l'application $1_A\sigma$ est μ-intégrable et $\nu(A) = \perp$ sinon.

TODO – Mesure positive vers mesure signée

Expliquer "conversion" de inf vers $\perp$, règles de calcul avec $\perp$.

TODO – Variation d'une mesure signée.

Soit ν une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$. Il existe une mesure positive μ sur $(X, \mathcal{A})$ et une unique application une application μ-mesurable $\sigma : X \to \{-1, +1\}$ telle que $\nu = \sigma\mu$. On appelle μ la *variation de* ν et on la note $|\nu|$.

TODO – Check pptés usuelles mesure (σ-add, etc.)

Warning : plus de monotonie !

TODO

Comment on a défini μ-intégrable dans le chapitre précédent ? Précisément, est-ce qu'une intégrale avec "une valeur infinie" est intégrable ? Le "problème", outre l'absence de cohérence par rapport aux chapitres précédents, est qu'on peut alors avoir une fonction intégrable, et la rendre non-intégrable en la multipliant par une fonction de signe mesurable. OK, bon, intégrable veut dire intégrale finie, le cas $+\infty$ sera a décrire comme une extension dans les cas simples (comme fct mesurable positive non intégrable par exemple).

TODO – Convention $\perp$, absorption inf ou non ?

Disons pas d'absorption par défaut ? A voir, y réfléchir. Avec absorption c'est plus simple quand même ...

TODO – Décomposition de Hahn

(trivial, mais bon)

TODO – Variation d'une mesure

TODO – rk

Souligner parallèle avec valeur absolue, considérer le cas particulier à densité.

TODO – σ-additivité

TODO

f $\mu-$intégrable à valeurs réelles fois μ défini une mesure signée

TODO – Intégrale par rapport à une mesure signée

TODO – Mesure de Radon

On appelle *mesure de Radon* (signée) sur $\mathbb{R}$ toute mesure signée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $|\mu|(K) < +\infty$, c'est-à-dire $\mu(K) \neq \perp$.

Fonctions tests continues

On note $D^0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le support

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

est compact.

Formes linéaires continues sur $D^0(\mathbb{R})$.

Une application linéaire $T : D^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ – c'est-à-dire une *forme linéaire* sur $D^0(\mathbb{R})$ – est dite *continue* si pour tout intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et toute fonction $\varphi \in D^0(\mathbb{R})$ dont le support soit inclus dans $[a, b]$, il existe une constante K telle que

$$|T \cdot \phi| \leq K \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| = K \|\varphi|_{[a,b]}\|_\infty$$

Théorème de Riesz-Markov-Kakutani

Il existe une bijection entre l'ensemble des applications linéaire continues $T : D^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et l'ensemble des mesures de Radon μ sur $\mathbb{R}$, déterminée par la relation

$$\forall\, \varphi \in D^0(\mathbb{R}),\ T \cdot \varphi = \int \varphi \mu.$$

TODO – Démonstration Si μ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, de la forme $\mu = \sigma|\mu|$ où σ ess une fonction borélienne à valeurs dans $\{-1, 1\}$, alors la fonction

$$T : \varphi \in D^0(\mathbb{R}) \mapsto \int \varphi\mu = \int \varphi\sigma|\mu| \in \mathbb{R}$$

est bien définie : φ est continue donc $|\mu|$-mesurable ainsi que le produit $\varphi\sigma$ et si le support de φ est inclus dans le compact $[a, b]$, alors

$$|\varphi(y)\sigma(y)| \leq 1_{[a,b]}(y) \times \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)|.$$

Comme la mesure μ est de Radon, $|\mu|([a, b]) < +\infty$, donc la fonction $\varphi\sigma$ est dominée par une fonction $|\mu|$-intégrable. Elle est donc $|\mu|$-intégrable.

La fonction T ainsi définie est également linéaire par linéarité de l'intégrale. De plus, si le support de φ est inclus dans $[a, b]$, alors

$$|T \cdot \varphi| \leq \int |\varphi||\mu| \leq \int \left(\sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| \right) |\mu| = |\mu|(A) \left(\sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| \right).$$

Elle est donc continue sur $D^0(\mathbb{R})$.

TODO – Renvoyer à un ref (Arverson ?) pour le reste. ■

TODO

Représentation "concrête" des mesures de Radon dans $\mathbb{R}$ (via les fcts de variation localement bornée) ??? Ou pas ?

TODO – mesure de Radon (signée)

— lien avec

TODO – fct localement intégrable

… définie (“est”) une mesure de Radon. Et la mesure détermine

TODO

def intégrale fonction des bornes “dans le mauvais sens” …

Dérivée généralisée comme mesure

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet comme *dérivée généralisée* la mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}$ s'il existe une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = c + \int_0^x \mu(dt).$$

TODO – extension “p.p.” ?

Aka fct de départ définie pp ? Là peut-être plus légitime que pour les fcts, sinon quand il y a un saut, la fct de départ est tjs continue à gauche ? Grpmh la déf est peut-être pas terrible. On ferait mieux d'intégrer sur $[0, x[$ (ne serait-ce que pour avoir la “bonne” constante en 0, et l'additivité) ; nécessaire alors de définir ça comme ça dans la section sur la théorie de la mesure. Nota: pas évident, les probabilités avec la convention de la fonction de répartition suggère plutôt d'interpréter $\int_a^b$ comme l'intégrale sur $]a, b]$ (si l'on veut garder l'additivité).

TODO – Fonction de variation localement bornée

TODO – Existence d'une dérivée comme mesure

Fct de variation localement bornée iff dérivée est une mesure de Radon

TODO – Notation Stieltjes

(explication en définissant explicitement la mesure associée à la fct de variation bornées)

TODO – Explication notation, lien Kurzweil-Stieltjes

(en gros: bien que la valeur des intégrales soit différentes – et l'explication n'est pas si dure, L-S ignore les valeurs de la fct à la discontinuité, pas K-S – intégrable au sens de L-S implique intégrabilité au sens de K-S, cf. Milan, Antunes, and Antonin (2018))

TODO – Rk Stieltjes

Si on intègre des fcts continues, la notation prend du sens.

TODO – Exemples

— Equa diff encore, mais en prologeant $x(t)$ par 0 pour $t \neq 0$
— Proba et fct de répartition arbitraire.

TODO – Carac mesures par les fcts test (Riesz)

Aka mesure de Radon défini des opérateurs continus de $C_0^0([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ et l'inverse aussi (si prolongements compatibles).

TODO – Formule des sauts

Distributions

TODO – Distribution

distribution d'ordre k uniquement. Fonctionnelle définie sur les fcts C^k telle que si $C_0^k([a,b])$ désigne les fcts nulles que leurs dérivée au bord, alors (restriction de T) linéaire bornée de $C_0^k([a,b])$ dans $\mathbb{R}$.

TODO – Mesure signée est une distribution

TODO – Dérivée d'une distribution

Proba / Fct répartition

Généralisation cas discret et à densité; dans les deux cas, fcts croissante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle en $-\infty$, de variation 1, etc.

Montrer comment définir une mesure (extérieure) associée, notation $\mu(= df)$ (Lebesgue-Stieltjes) ?

Lien notation avec somme de Riemman-Stieltjes pour l'intégration de fcts continues ?

Probab $\Omega \neq \mathbb{R}^n$

Exercices

Fonctions lipschitzienne

(d'une variable). Montrer qu'elles ont une dérivée faible (et donc pp), en utilisante leur caractère absolument continu (cf. Evans-Gariepy dans le cas multivariable) et que la dérivée (faible) est de norme plus petite que la constante de Lipschitz.

Fonctions convexes

Equivalent dérivée seconde est une mesure positive ?

Fonction distance

Dérivées seconde fonction distance, squelette, courbure, etc ?

Références

Bartle, Robert G. 2001. *A Modern Theory of Integration.* Vol. 32. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS).

Milan, T., M.G. Antunes, and S. Antonin. 2018. *Kurzweil-Stieltjes Integral: Theory and Applications.* Series in Real Analysis. World Scientific Publishing Company.