Calcul Intégral V

STEP, MINES ParisTech*

7 octobre 2019 (#24161b4)

Table des matières

*Ce document est un des produits du projet boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS).

Misc.

— fcts définies dans $\mathbb{R}$, au moins dans un premier temps

Dérivées faibles

Motivation: étendre la notion de dérivation pour traiter des uses cases comme les équations différentielles avec second membre discontinu en t, sans “bricolage” (qui serait: résoudre portion par portion et recoller par continuité, si l’on suppose que l’on est C^1 par morceaux). Motivation analogue pour les probas: variable aléatoire à densité uniforme sur $[0, 1]$: p n’est pas (partout) la dérivée de F.

Dans les deux cas néanmoins, on a le même schéma ou la “dérivée” permet d’obtenir la fct originale par intégration. (pour les ODEs, pour travailler sur $\mathbb{R}$, prolonger rhs par 0 pour $t \neq 0$ et $x(t)$ par x_0.)

Idée: dérivation initialement source de définition de l'intégrale (de Newton); l'intégration est une opération inverse, mais sait aussi intégrer des fonctions qui ne sont *pas* des dérivées (exemple). On peut retourner le problème et définir une nouvelle notion, généralisée de dérivée, à partir de l'intégrale.

Dérivée faible

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *faiblement dérivable*, de dérivée (faible) la fonction localement intégrable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'il existe une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = c + \int_0^x g(t)\, dt.$$

TODO – extension "p.p." ?

Aka fct de départ définie pp ? Bof ... Mmm quand même nécessaire pour la suite.

TODO – Terminologie

Opter pour "généralisée" en 1ere instance ? dérivée généralisée, dérivable au sens des distributions (cf. + tard)

TODO – Dérivable faiblement implique dérivable pp

Corollaire: dérivable faiblement implique dérivée classique existe pp et est égale à la dérivée faible

TODO – Exemples

$x \mapsto |x|$?

TODO – Warning

attention: dérivée classique définie pp suffit pas à avoir dérivée faible (ex: fct de Heaviside). Dérivée faible implique dérivée pp, réciproque pas vraie, même si on ajoute continue (idée qui vient naturellement quand on construit un contre-exemple). Exemple avec ensembles de Cantor / devil's staircase.

TODO – Continuité absolue

TODO – Existence de dérivée faible

(équiv abs. cont. si dérivée faible est localement absolument intégrable)

TODO – Rk

On peut ne pas se limiter au dérivée loclt abs cont, mais alors la classe des fcts est AC^* ... Grpmh.

TODO – Dérivation faible et IPP

(équivalence)

Mesures signées

Aka section “dérivée est une mesure”

Note

Sauf erreur, la définition “naturelle” (ressemblant) de mesure à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne garantit pas l'existence d'une décomposition de Hahn et ne permet donc pas de se ramener au cas des mesures positives (cf. Dunford-Schwarz pour la preuve de ce résultat). Cela a donc du sens d'insister sur une définition de mesure signée, prenant comme base une mesure et une fonction de signe. (à plus long-terme, j'aimerais un exemple de mesure à valeurs réelles qui n'admet pas de décompo de Hahn)

TODO – Mesure signée

Une *mesure signée* ν sur la tribu $\mathcal{A}$ de X est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\perp\}$ pour laquelle il existe une mesure positive μ sur $\mathcal{A}$ et une application μ-mesurable $\nu : X \to \{-1, +1\}$ telles que

$$\nu(A) := \sigma\mu(A) := \int_A \sigma(x)\,\mu(dx)$$

si l'application $1_A \times \sigma$ est μ-intégrable et $\nu(A) = \perp$ sinon.

TODO – Mesure positive vers mesure signée

“Conversion” de inf vers $\perp$.

TODO

Comment on a défini μ-intégrable dans le chapitre précédent ? Précisément, est-ce qu'une intégrale avec “une valeur infinie” est intégrable ? Le “problème”, outre l'absence de cohérence par rapport aux chapitres précédents, est qu'on peut alors avoir une fonction intégrable, et la rendre non-intégrable en la multipliant par une fonction de signe mesurable. OK, bon, intégrable veut dire intégrale finie, le cas $+\infty$ sera a décrire comme une extension dans les cas simples (comme fct mesurable positive non intégrable par exemple).

TODO – Convention $\perp$, absorption inf **ou non ?**

Disons pas d'absorption par défaut ? A voir, y réfléchir. Avec absorption c'est plus simple quand même ...

TODO – Décomposition de Hahn

(trivial, mais bon)

TODO – Variation totale

TODO – σ-additivité

TODO

f $\mu-$intégrable à valeurs réelles fois μ défini une mesure signée

TODO – mesure de Radon (signée)

- lien avec

TODO – fct localement intégrable

... définie (“est”) une mesure de Radon. Et la mesure détermine

Dérivée généralisée comme mesure

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet comme *dérivée généralisée* la mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}$ s'il existe une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = c + \int_0^x d\mu(t).$$

$$

TODO – extension "p.p." ?

Aka fct de départ définie pp ? Là peut-être plus légitime que pour les fcts, sinon quand il y a un saut, la fct de départ est tjs continue à gauche ? Grpmh la déf est peut-être pas terrible. On ferait mieux d'intégrer sur $[0, x[$ (ne serait-ce que pour avoir la "bonne" constante en 0, et l'additivité) ; nécessaire alors de définir ça comme ça dans la section sur la théorie de la mesure. Nota: pas évident, les probabilités avec la convention de la fonction de répartition suggère plutôt d'interpréter $\int_a^b$ comme l'intégrale sur $]a, b]$ (si l'on veut garder l'additivité).

TODO – Fonction de variation localement bornée

TODO – Existence d'une dérivée comme mesure

Fct de variation localement bornée iff dérivée est une mesure de Radon

TODO – Notation Stieltjes

(explication en définissant explicitement la mesure associée à la fct de variation bornées)

TODO – Explication notation, lien Kurzweil-Stieltjes

(en gros: bien que la valeur des intégrales soit différentes – et l'explication n'est pas si dure, L-S ignore les valeurs de la fct à la discontinuité, pas K-S – intégrable au sens de L-S implique intégrabilité au sens de K-S, cf. Milan, Antunes, and Antonin (2018))

TODO – Rk Stieltjes

Si on intègre des fcts continues, la notation prend du sens.

TODO – Exemples

- Equa diff encore, mais en prologeant $x(t)$ par 0 pour $t \neq 0$
- Proba et fct de répartition arbitraire.

TODO – Carac mesures par les fcts test (Riesz)

Aka mesure de Radon défini des opérateurs continus de $C_0^0([a, b])$ dans $\mathbb{R}$ et l'inverse aussi (si prolongements compatibles).

TODO – Formule des sauts

Distributions

TODO – Distribution

distribution d'ordre k uniquement. Fonctionnelle définie sur les fcts C^k telle que si $C_0^k([a, b])$ désigne les fcts nulles que leurs dérivée au bord, alors (restriction de T) linéaire bornée de $C_0^k([a, b])$ dans $\mathbb{R}$.

TODO – Mesure signée est une distribution

TODO – Dérivée d'une distribution

Proba / Fct répartition

Généralisation cas discret et à densité; dans les deux cas, fcts croissante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle en $-\infty$, de variation 1, etc.

Montrer comment définir une mesure (extérieure) associée, notation $\mu(= df)$ (Lebesgue-Stieltjes) ?

Lien notation avec somme de Riemman-Stieltjes pour l'intégration de fcts continues ?

Probab $\Omega \neq \mathbb{R}^n$

Exercices

Fonctions lipschitzienne

(d'une variable). Montrer qu'elles ont une dérivée faible (et donc pp), en utilisante leur caractère absolument continu (cf. Evans-Gariepy dans le cas multivariable) et que la dérivée (faible) est de norme plus petite que la constante de Lipschitz.

Fonctions convexes

Equivalent dérivée seconde est une mesure positive ?

Fonction distance

Dérivées seconde fonction distance, squelette, courbure, etc ?

Références

Milan, T., M.G. Antunes, and S. Antonin. 2018. *Kurzweil-Stieltjes Integral: Theory and Applications*. Series in Real Analysis. World Scientific Publishing Company.