Calcul Intégral I

STEP, MINES ParisTech*

25 septembre 2019 (`#78eca1a`)

Table des matières

Somme et Intégrale de Riemann

Intervalle

On appelle *intervalle* d'un ensemble ordonné E tout sous-ensemble I de E tel que si x et y appartiennent à I et vérifient $x \leq y$ et si z est un point intermédiaire (tel que $x \leq z \leq y$), alors z appartient également à I.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ peuvent être bornés ou non-bornés, ouverts, fermés, ouverts et fermés ou ni l'un ni l'autre. Les intervalles de la forme $]-\infty, +\infty[$ (c'est-à-dire $\mathbb{R}$), $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$ et $]a, b[$ – où a et b désignent des nombres réels – sont ouverts. Les intervalles de la forme $]-\infty, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$ et $[a, b]$ sont fermés. Les intervalles compacts (à la fois fermés et bornés) sont de la forme $[a, b]$.

Longueur d'un intervalle

La *longueur* $\ell(I)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est le nombre réel étendu positif (appartenant à $[0, +\infty]$) défini pour tout intervalle borné I de la forme $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a \leq b$ par

$$\ell(I) = b - a$$

et si I est non-borné par

$$\ell(I) = +\infty.$$

Subdivision pointée

Une *subdivision* de l'intervalle fermé $[a, b]$ est une collection finie

$$\{I_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$$

constituée d'intervalles fermés inclus dans I, *sans chevauchement* – si i et j diffèrent, l'intersection de I_i et I_j contient au plus un point – et *recouvrant* I – l'union de tous les intervalles I_i est égale à I. Une *subdivision pointée* $\mathcal{D}$ de l'intervalle fermé $I = [a, b]$ est une collection finie

$$\mathcal{D} = \{(t_i, I_i) \mid 0 \leq i \leq n-1\}$$

où les I_i forment une subdivision de I et $t_i \in I_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Somme de Riemman

La somme de Riemann associée à la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et à la subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ est la grandeur

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} f(t)\ell(I).$$

Intégrale de Riemann

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable au sens de Riemann* s'il existe un réel A tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ vérifiant pour $(t, J) \in \mathcal{D}$, $\ell(J) < \delta$, on ait $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$. Le réel A quand il existe est unique; il est appelé *intégrale de f sur $[a, b]$* et noté

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ ou } \int_{[a,b]} f(t)\, dt$$

Quadrature

Cette définition permet de garantir l'exactitude asymptotique de méthodes de quadrature – c'est-à-dire d'algorithmes de calcul numérique d'intégrales – comme la méthode des rectangles. En effet, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, et $\mathcal{D}_m$ une subdivision pointée de $[a, b]$ de la forme

$$\mathcal{D}_m = \left\{ \left(a + i\frac{b-a}{m}, \left[a + i\frac{b-a}{m}, a + (i+1)\frac{b-a}{m} \right] \right) \;\middle|\; i \in \{0, \dots, m-1\} \right\},$$

la somme de Riemann associée vérifie

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{D}_m) &= \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + i\frac{b-a}{m} \right) \ell\left(\left[a + i\frac{b-a}{m}, a + (i+1)\frac{b-a}{m} \right] \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + i\frac{b-a}{m} \right) \frac{b-a}{m} \\ &= \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + i\frac{b-a}{m} \right) \end{aligned}$$

De plus, quel que soit $\delta > 0$, pour m suffisamment grand, on a

$$\ell\left(\left[a + i\frac{b-a}{m}, a + (i+1)\frac{b-a}{m} \right] \right) = \frac{b-a}{m} < \delta$$

Par conséquent,

$$\frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + i\frac{b-a}{m} \right) \to \int_a^b f(t)\, dt \text{ quand } m \to +\infty.$$

La définition de l'intégrale de Riemann, ne se limite pas à une famille particulière de subdivisions – comme ici à des subdivisions régulières de $[a, b]$ où tous les intervalles sont de même longueur – et n'impose pas une position fixe au point t_i dans l'intervalle J_i – comme ici à gauche de l'intervalle – ce qui garantit une forme de robustesse à la définition de l'intégrale; d'autres méthodes de quadratures pourront être utilisées avec le même résultat asymptotique.

L'intégrale de Riemann possède des limitations qui en font un outil mathématique difficile à exploiter. En particulier la classe des fonctions qui peuvent être intégrées est trop restrictive pour certaines applications car les fonctions "trop grandes" ou "trop irrégulières" ne peuvent être intégrables. Les deux théorèmes qui suivent précisent cette situation.

Seules les fonctions bornées sont intégrables

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, alors f est bornée.

Démonstration Soit $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ vérifiant $\ell(J) < \delta$ pour tout $(t, J) \in \mathcal{D}$, on ait

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq 1.$$

Soit $\mathcal{D} = \{(t_i, [a_i, b_i])\}_{i=0}^{m-1}$ une telle subdivision; il est toujours possible de supposer en outre que $\mathcal{D}$ ne contient aucun intervalle de longueur nulle (enlever de tels intervalles à $\mathcal{D}$ génère une nouvelle subdivision dont la somme de Riemann est identique).

Soit $J_i = [a_i, b_i]$ un intervalle de $\mathcal{D}$; si l'on définit $\mathcal{D}'$ à partir de $\mathcal{D}$ en remplaçant t_i par un t de J_i quelconque, on obtient

$$\begin{aligned} |f(t)\ell(J_i) - f(t_i)\ell(J_i)| &= |S(f, \mathcal{D}') - S(f, \mathcal{D})| \\ &\leq \left|S(f, \mathcal{D}') - \int_a^b f(t)\, dt\right| + \left|S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt\right| \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$|f(t)| \leq |f(t_i)| + \frac{2}{\ell(J_i)}.$$

Les intervalles J_i recouvrant $[a, b]$, on a pour tout $t \in [a, b]$

$$|f(t)| \leq \max_i \left\{ |f(t_i)| + \frac{2}{\ell(J_i)} \;\middle|\; i \in \{0, \dots, m-1\} \right\};$$

la fonction f est donc bornée. ■

Ensemble négligeable

Un ensemble A de $\mathbb{R}$ est *négligeable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de A par une famille dénombrable d'intervalles I_i de $\mathbb{R}$ tels que

$$\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Nous voyons que le procédé qui définit la notion d'ensemble négligeable consiste à surestimer la taille de l'ensemble en lui substituant une collection d'intervalles dont l'union est au moins aussi grande, puis à surestimer la longueur de l'ensemble résultant en calculant la somme des longueurs des intervalles, sans tenir compte des éventuels chevauchements. Si à l'issue de cette double surestimation la longueur évaluée est encore aussi petite que l'on veut, on peut légitimement considérer que l'ensemble de départ est de longueur nulle [1] et que c'est donc ce que signifie “négligeable”. Nous verrons ultérieurement que cette intuition sera vérifiée.

Presque partout

Une propriété dépendant d'un réel x est vraie *presque partout* si l'ensemble des points x où elle est fausse est un ensemble négligeable.

1. plus exactement de mesure *extérieure* (de longueur) nulle.

Les ensembles dénombrables sont négligeables

Par exemple, les ensembles finis sont négligeables, $\mathbb{Q}$ est négligeable, etc. En effet, si $A = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, la collection d'intervalle ouverts

$$\left\{ \left] x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} \right[\;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$$

recouvre A et par ailleurs

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \ell \left(\left] x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} \right[\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon.$$

Critère de Lebesgue pour l'intégrabilité au sens de Riemann

La fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si f est bornée et continue presque partout.

En particulier, si f est continue par morceaux, elle est intégrable au sens de Riemann.

Démonstration Le lemme ci-dessus montre que le caractère borné est nécessaire pour l'intégrabilité au sens de Riemann. Pour le reste de la preuve, se reporter à (Burk 2007, 58). ■

Intégrale de Riemann généralisée

Jauge

Une *jauge* γ sur un intervalle $[a, b]$ est une fonction qui associe à tout $t \in [a, b]$ un intervalle ouvert $\gamma(t)$ contenant t.

Subdivision pointée subordonnée à une jauge

Une subdivision pointée $\mathcal{D}$ de l'intervalle $[a, b]$ est *subordonnée à une jauge* γ sur $[a, b]$ si pour tout $(t, J) \in \mathcal{D}$, $J \subset \gamma(t)$.

Représentation graphique

On peut associer à une jauge γ sur $[a, b]$ l'ensemble du plan

$$\{(x, y) \mid y \in [a, b],\ x \in \gamma(y)\}.$$

Par construction, cet ensemble contient la diagonale $D = \{(x, x) \mid x \in [a, b]\}$. La représentation graphique de cet ensemble permet de visualiser si une subdivision pointée est ou non subordonnée à la jauge considérée.

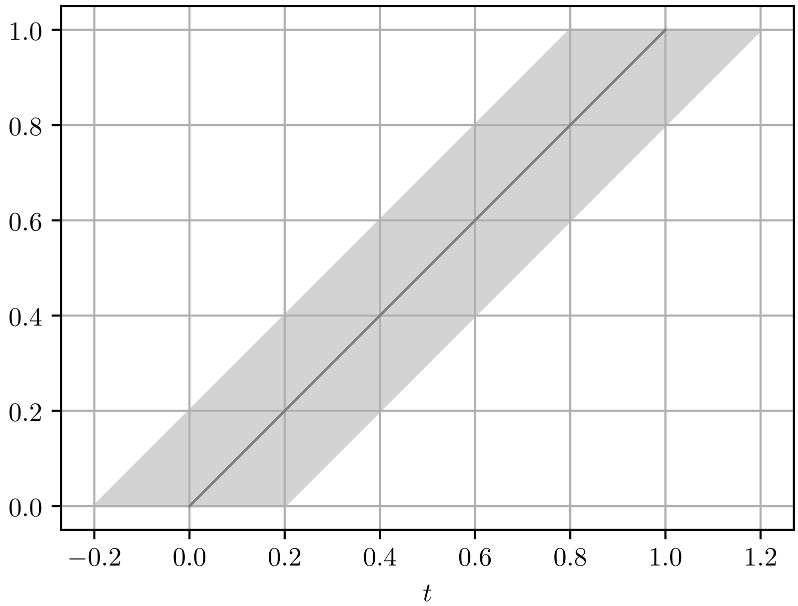

FIGURE 1 – Graphe de la jauge $\gamma(t) =]t - 0.2, t + 0.2[\,,\ t \in [0, 1]$.

Lemme de Cousin

Pour toute jauge γ sur l'intervalle $[a, b]$, il existe une subdivision pointée $\mathcal{D}$ qui soit subordonnée à γ.

Démonstration S'il existe un $t \in I^0 = I = [a, b]$ tel que $I \subset \gamma(t)$, la subdivision pointée $\mathcal{D} = \{(t, I)\}$ convient. Sinon, on peut considérer les intervalles $I_0^1 = [a, (a+b)/2]$ et $I_1^1 = [(a+b)/2, b]$ et examiner pour chacun de ces intervalles s'il existe un $t_i \in I_i^1$ tel que $I_i^1 \subset \gamma(t_i)$, dans ce cas ajouter la paire (t_i, I_i^1) à la famille $\mathcal{D}$ et dans le cas contraire décomposer à nouveau l'intervalle posant problème. Il s'avère que ce procédé converge en un nombre fini d'étapes ; il génère donc une subdivision pointée $\mathcal{D}$ de I.

En effet, dans le cas contraire il existerait une infinité d'intervalles fermés J_i emboités ($J_{i+1} \subset J_i$) tels que $J_0 = I$, $\ell(J_{i+1}) = \ell(J_i)/2$ et pour tout $t \in J_i$, $J_i \not\subset \gamma(t)$. Soit t_i un point de J_i ; la suite des ces points appartient à J_0 qui est compact et admet donc une suite extraite qui converge. Comme la suite des t_k appartient à J_i pour tout $k \geq i$, cette limite t adhère à tous les J_i, et donc appartient à tous les J_i puisqu'ils sont fermés. La longueur de J_i étant divisée par deux à chaque incrément de i, $\ell(J_i) = \ell(J_0)/2^i$; comme $t \in J_i$, $J_i \subset [t - \ell(J_0)/2^i, t + \ell(J_0)/2^i]$. Par conséquent, il existe un rang i à partir duquel $J_i \subset \gamma(t)$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ∎

La définition de l'intégrale de Henstock-Kurzweil est similaire à l'intégrale de Riemann classique. Comme cette dernière, elle exploite des sommes de Riemann pour fournir une estimation de l'intégrale et contrôle la finesse des subdvisions employées pour améliorer la précision de cette estimation ; mais contrairement à cette dernière, elle permet de contrôler différemment cette finesse en fonction de la zone de l'intervalle d'intégration considérée.

Intégrale de Henstock-Kurzweil

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable au sens de Henstock-Kurzweil*[2] s'il existe un réel A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge γ sur $[a, b]$ telle que, pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ subordonnée à γ, on ait $|S(f, \mathcal{D}) - A| \le \varepsilon$. Le réel A quand il existe est unique; il est appelé *intégrale de f sur* $[a, b]$ et noté

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ ou } \int_{[a,b]} f(t)\,dt$$

Ordre des bornes de l'intégrale

Comme dans le cas de l'intégrale de Riemann, la première notation peut être étendue sans difficulté au cas où $b < a$; on définit alors l'intégrale de a à b en se ramenant au cas précédent, par

$$\int_a^b f(t)\,dt := -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Intégrale de Riemann et de Henstock-Kurzweil

Toute fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et les deux intégrales coïncident.

Démonstration Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann, d'intégrale A ; soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que si la subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ est telle que pour $(t, I) \in \mathcal{D}$, $\ell(J) < \delta$ alors $|S(f, \mathcal{D}) - A| \le \varepsilon$.

Considérons la jauge γ sur $[a, b]$ définie par $\gamma(t) =]t - \delta/2, t + \delta/2[$. Si la subdivision pointée $\mathcal{D}$ est subordonnée à γ, alors pour tout $(t, J) \in \mathcal{D}$, on a $J \subset]t - \delta/2, t + \delta/2[$; par conséquent, $\ell(J) < \delta$ et donc $|S(f, \mathcal{D}) - A| \le \varepsilon$. La fonction f est donc intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et l'intégrale associée est égale à son intégrale de Riemann. ■

Le résultat équivalent vaut pour l'intégrale de Newton :

2. On trouvera également dans la littérature cette intégrale désignée par le terme d'*intégrale de Riemann généralisée* ou d'*intégrale de jauge* (mais ces termes sont génériques ; en particulier il existe d'autres intégrales dont la définition repose sur des sommes de Riemann et des jauges, comme l'intégrale de McShane), *intégrale de Kurzweil-Henstock* (techniquement Jaroslav Kurzweil a inventé cette construction avant Ralph Henstock dans les années 1950, mais dans un but bien précis – l'étude des équations différentielles généralisées – probablement sans réaliser totalement la portée de sa définition) ou *intégrale de Denjoy-Perron-Kurzweil-Henstock* (Arnaud Denjoy et Oskar Perron ont introduit dès les années 1910 des intégrales équivalentes, mais dont la définition est beaucoup plus complexe et en apparence très différentes ; en particulier, les sommes de Riemann n'interviennent pas dans ces définitions).

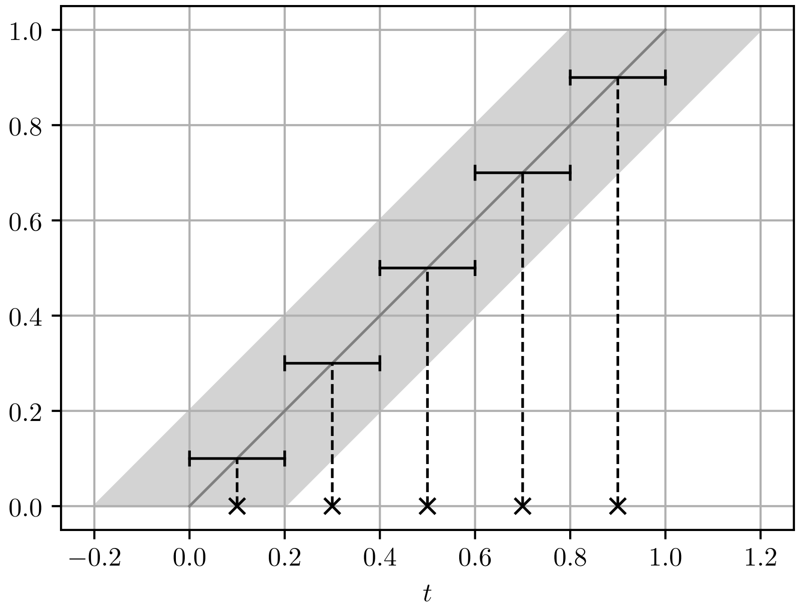

FIGURE 2 – Graphe de la jauge $\gamma(t) =]t - 0.2, t + 0.2[\,,\ t \in [0, 1]$ et de la subdivision pointée $\{(0.1, [0, 0.2]), \ldots, (0.9, [0.8, 1])\}$; les intervalles de la subdivision sont délimités par des barres verticales et les points associés représentés par des croix. La comparaison avec le graphe de la jauge γ montre que cette subdivision pointée lui est subordonnée.

Intégrale de Newton et de Henstock-Kurzweil

Toute fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ intégrable au sens de Newton est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et les deux intégrales coïncident.

L'énoncé précédent peut être reformulé de la façon suivante : l'intégrale de Henstock-Kurzweil satisfait le théorème fondamental du calcul en toute généralité.

Théorème fondamental du calcul

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$; si la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, sa dérivée f' est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur $[a, b]$ et

$$[f]_a^b := f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

Démonstration du théorème fondamental du calcul Nous souhaitons établir que $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, d'intégrale égale à $f(b) - f(a)$. Pour cela, nous devons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction de jauge γ sur $[a, b]$ telle que, si une subdivision pointée

$$\mathcal{D} = \{(t_0, [x_0, x_1], \dots, (t_{m-1}, [x_{m-1}, x_m]))\}$$

vérifie pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$, $[x_i, x_{i+1}] \subset \gamma(t_i)$, alors

$$|S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| \leq \varepsilon.$$

Notons que si $\mathcal{D} = \{(t_0, [x_0, x_1], \dots, (t_{m-1}, [x_{m-1}, x_m]))\}$, le membre de gauche de cette inégalité vérifie

$$\begin{aligned}
|S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(b) - f(a)) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{m-1} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{m-1} (f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{m-1} |f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))|
\end{aligned}$$

Si l'on parvient à garantir que pour chacun des termes de cette somme,

$$|f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i),$$

ce qui revient à assigner à chaque terme une erreur maximale proportionnelle à la longueur de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, alors

$$\begin{aligned}|S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i), \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Fixons donc un $\varepsilon > 0$ arbitraire; comme pour tout $t \in [a, b]$,

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + o(|h|),$$

il existe un $\delta(t) > 0$ tel que si $|h| < \delta(t)$,

$$|f'(t)h - (f(t+h) - f(t))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|h|$$

Par conséquent, pour tout sous-intervalle fermé $[c, d]$ de $[a, b]$ tel que $t \in [c, d]$ et $[c, d] \subset \left]t - \delta(t), t + \delta(t)\right[$, nous avons

$$|f'(t)(d-t) - (f(d) - f(t))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|d-t| = \frac{\varepsilon}{b-a}(d-t)$$

ainsi que

$$|f'(t)(c-t) - (f(c) - f(t))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|c-t| = \frac{\varepsilon}{b-a}(t-c).$$

L'inégalité triangulaire fournit alors

$$|f'(t)(d-c) - (f(d) - f(c))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(d-c).$$

Posons $\gamma(t) = \left]t - \delta(t), t + \delta(t)\right[$; nous avons ainsi bien défini une fonction de jauge sur $[a, b]$. Si $\mathcal{D}$ est subordonnée à γ, pour tout $i \in \{0, \ldots, m-1\}$,

$$t_i \in [x_i, x_{i+1}] \subset \left]t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)\right[,$$

par conséquent

$$|f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i).$$

et donc $|S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| \leq \varepsilon$, ce qui prouve le résultat recherché. ■

Intégration de $x \mapsto e^x$

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est intégrable au sens de Newton sur tout intervalle $[a, b]$ puisqu'elle admet $F : x \mapsto e^x$ comme primitive. Par le théorème fondamental du calcul, f est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et l'intégrale associée coïncide avec l'intégrale de Newton. On a donc

$$\int_a^b e^x\,dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a.$$

L'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil signifie que pour toute précision $\varepsilon > 0$, il existe une jauge γ sur $[a,b]$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ subordonnée à γ, l'écart entre $S(f,\mathcal{D})$ et la valeur de l'intégrale soit au plus ε.

Construisons une telle jauge en nous inspirant de la preuve du théorème fondamental du calcul. Dans cette preuve, nous avons montré que si $\varepsilon > 0$, et nous pouvions trouver une jauge γ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ subordonnée à γ et tout $(t,[x,y]) \in \mathcal{D}$ nous avions

$$|f(t)(y-x) - (F(y) - F(x))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(y-x),$$

alors nous avions $|S(f,\mathcal{D}) - (F(b) - F(a))| \leq \varepsilon$. Nous avons également montré comment sélectionner une jauge γ pour satisfaire cette inégalité en utilisant le fait que $F' = f$. Nous allons reprendre cette approche ici, mais quantitativement, et en exploitant la propriété que la fonction f est continûment dérivable (et non plus simplement dérivable) et que donc sa dérivée est bornée sur tout compact. Comme

$$f(t)(y-x) = \int_x^y f(t)\,ds \;\text{ et }\; F(y) - F(x) = \int_x^y f(s)\,ds,$$

le membre de gauche de l'inégalité vérifie

$$|f(t)(y-x) - (F(y) - F(x))| = \left|\int_x^y (f(t) - f(s))\,ds\right| \leq \int_x^y |f(t) - f(s)|\,ds$$

et par conséquent, comme par le théorème des accroissements finis

$$|f(t) - f(s)| \leq \max_{z\in[x,y]} |f'(z)| \times |t-s| \leq \max_{z\in[x,y]} |f'(z)| \times |t-x|,$$

on obtient

$$\int_x^y |f(t) - f(s)|\,ds \leq \max_{z\in[x,y]} |f'(z)| \times \frac{(y-x)^2}{2}.$$

Il suffit donc de garantir

$$\max_{z\in[x,y]} |f'(z)| \times \frac{y-x}{2} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

pour obtenir l'inégalité recherchée.

Si l'on décide de rechercher une jauge γ garantissant cette inégalité sous la forme $\gamma(t) =]t - \delta(t), t + \delta(t)[$, comme $t \in [x,y] \subset \gamma(t)$, nous somme assurés que l'inégalité est vraie quand

$$\max\{|f'(z)|,\, z \in [t-\delta(t), t+\delta(t)]\} \times \delta(t) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ici, comme $f'(z) = e^z$, l'inégalité à satisfaire prend simplement la forme

$$e^{t+\delta(t)} \times \delta(t) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{soit} \quad \delta(t) e^{\delta(t)} \leq e^{-t} \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Or la fonction $\delta \in \left]0, +\infty\right[\to \delta e^{\delta} \in \left]0, +\infty\right[$ est croissante et bijective; notons W son inverse[3]. Le plus grand $\delta(t)$ satisfaisant l'inégalité précédente est donc donné par

$$\delta(t) = W\left(e^{-t} \frac{\varepsilon}{b-a}\right).$$

En conclusion: pour tout $[0,1]$ et tout $\varepsilon > 0$, la jauge γ définie sur $[a,b]$ par

$$\gamma(t) = \left] t - W\left(e^{-t} \frac{\varepsilon}{b-a}\right), t + W\left(e^{-t} \frac{\varepsilon}{b-a}\right) \right[$$

est telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a,b]$ subordonnée à γ

$$\left| S(x \in [a,b] \mapsto e^x, \mathcal{D}) - \int_a^b e^x \, dx \right| \leq \varepsilon.$$

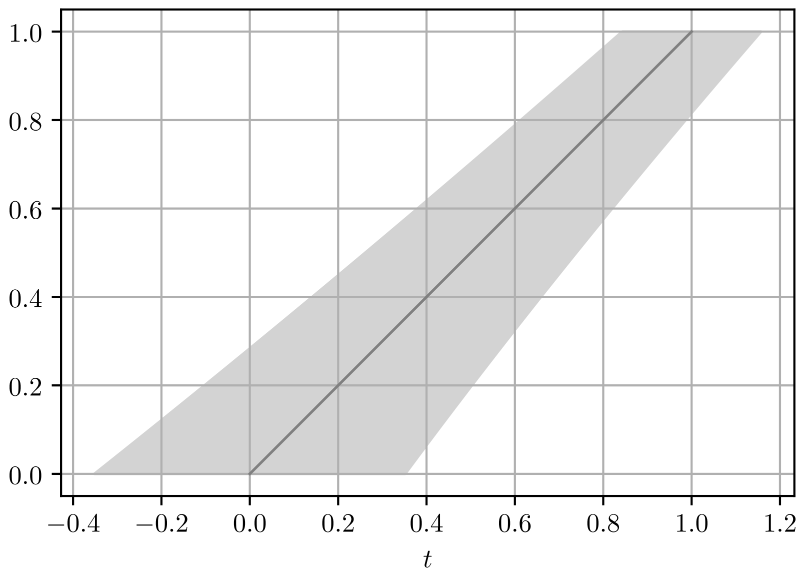

FIGURE 3 – Graphe de la jauge γ garantissant une précision $\varepsilon = 1/2$ à la somme de Riemann pour évaluer l'intégrale de la fonction $x \in [0,1] \mapsto e^x$.

Intégration de $x \mapsto 1/\sqrt{x}$

Considérons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left| \begin{array}{rl} 1/\sqrt{x} & \text{si } x > 0, \\ ? & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$$

3. La notation W est classique pour désigner la fonction de Lambert.

On ne précise pas pour le moment la valeur de f en 0: elle est supposée arbitraire (mais finie). On verra que l'intégrale de f sur $[0,1]$ existe dans tous les cas et ne dépend pas de la valeur de f en 0 (même si la sélection d'une jauge assurant une précision ε en dépend).

Préambule La difficulté de cet exemple est liée à la "singularité" de f en $x=0$, où la fonction est à la fois discontinue et localement non-bornée. Si au lieu de l'intervalle $[0,1]$, on considére l'intervalle $[a,1]$ où $0<a\leq 1$, comme la fonction f restreinte à $[a,1]$ est continue, elle y admet une primitive, par exemple la fonction $F: x\in[a,1]\mapsto 2\sqrt{x}$. Elle y est intégrable au sens de Newton – et donc au sens de Henstock-Kurzweil – et

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \int_a^1 (2\sqrt{x})'\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2\sqrt{1}-2\sqrt{a}.$$

Si f est bien HK-intégrable sur $[0,1]$, ce que nous allons nous efforcer de démontrer, l'expression ci-dessus suggère que son intégrale pourrait être

$$\int_0^1 f(x)\,dx \stackrel{?}{=} 2\sqrt{1}-2\sqrt{0} = 2.$$

On va confirmer cette intuition dans la suite.

Intégrale sur $[a,1]$, $a>0$ Une primitive de F de f sur $[a,1]$ est $x\mapsto 2\sqrt{x}$. Nous allons rechercher une jauge γ sur $[a,1]$ telle que

$$|f(t)(y-x)-(F(y)-F(x))| = \left|\frac{y-x}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{y}+2\sqrt{x}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(y-x).$$

quand $t\in[x,y]\subset\gamma(t)$, ce qui garantira que

$$|S(f_{|[a,1]},\mathcal{D}_a)-(F(1)-F(a))| \leq \frac{\varepsilon}{2}(1-a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout subdivision pointée $\mathcal{D}_a$ de $[a,1]$ subordonnée à γ.

On remarque qu'il suffit de prouver d'une part que

$$\left|\frac{y-t}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{y}+2\sqrt{t}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(y-t)$$

et d'autre part que

$$\left|\frac{t-x}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{t}+2\sqrt{x}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(t-x)$$

pour obtenir l'inégalité voulue. Intéressons-nous au membre de gauche de la première de ces inégalités ; on a

$$\begin{aligned}\frac{y-t}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{y}+2\sqrt{t} &= \frac{y-t-2\sqrt{t}\sqrt{y}+2t}{\sqrt{t}}\\ &= \frac{\sqrt{y}^2+\sqrt{t}^2-2\sqrt{t}\sqrt{y}}{\sqrt{t}}\\ &= \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{t})^2}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

Pour garantir que ce terme soit plus petit que

$$\frac{\varepsilon}{2}(y-t) = \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{y}-\sqrt{t})(\sqrt{y}+\sqrt{t}),$$

il suffit donc de s'assurer que

$$\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \leq \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{y}+\sqrt{t}),$$

soit

$$\sqrt{y} \leq \sqrt{t} + \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{ty}+t).$$

C'est le cas si

$$\sqrt{y} \leq \sqrt{t} + \frac{\varepsilon}{2}t \text{ soit } y \leq \left(\sqrt{t}+\frac{\varepsilon}{2}t\right)^2.$$

Par une méthode similaire, on pourra montrer que la seconde inégalité cherchée est satisfaite si

$$x \geq \left(\sqrt{t}-\frac{\varepsilon}{2}t\right)^2.$$

La gauge γ définie par

$$\gamma(t) = \left]\left(\sqrt{t}-\frac{\varepsilon}{2}t\right)^2, \left(\sqrt{t}+\frac{\varepsilon}{2}t\right)^2\right[$$

satisfait donc nos critères.

On remarquera que cette jauge γ que nous avons construit – et qui est en fait définie sur $]0,1]$ – ne dépend pas de la valeur de a dans $]0,1]$. De plus, quand ε est suffisamment petit – par exemple $\varepsilon \leq 1$ – on constate que pour tout $t \in]0,1]$, $0 \notin \gamma(t)$.

Intégrale sur $[0,1]$

Considérons désormais une jauge sur $[0,1]$ qui étende la jauge définie sur $]0,1]$ à la section précédente.

Comme $\gamma(t) \subset]0,+\infty[$ si $t>0$, si $\mathcal{D} = \{(t_i,[x_i,x_{i+1}]), i \in \{0,\ldots,m-1\}\}$ est une subdivision pointée de $[0,1]$ subordonnée à γ, si $t_i>0$, $0 \notin [x_i,x_{i+1}]$. Comme les ensembles $[x_i,x_{i+1}]$ doivent recouvrir $[0,1]$, il est nécessaire que le point t_0 associé à l'intervalle $[x_0,x_1]$ soit 0. Le reste de la subdivision est alors subordonnée à γ sur $[x_1,1]$ avec $x_1>0$

$$S(f,\mathcal{D}) = f(0)(x_1-x_0) + \sum_{i=1}^{m-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i)$$

et d'après la section précédente,

$$\left|\sum_{i=1}^{m-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i) - (2\sqrt{1}-2\sqrt{x_1})\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si l'on choisit $\gamma(0) =]-\delta,\delta[$ tel que si $[x_0,x_1] \subset \gamma(0)$,

$$|f(0)(x_1-0) - (2\sqrt{x_1}-2\sqrt{x_0})| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui est le cas si $|f(0)x_1|+2\sqrt{x_1} \leq \varepsilon/2$, alors on a garanti que $|S(f,\mathcal{D})-2| \leq \varepsilon$, ce qui est le résultat cherché. Comme sur $[0,1]$, $x_1 \leq \sqrt{x_1}$, il suffit de s'assurer que $|f(0)|x_1 + 2x_1 \leq \varepsilon/2$, ce qui est le cas si

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(|f(0)|+2)}.$$

Au final, la jauge γ sur $[0,1]$ définie par

$$\gamma(t) = \left| \begin{array}{ll} \left]-\frac{\varepsilon}{2(|f(0)|+2)}, \frac{\varepsilon}{2(|f(0)|+2)}\right[& \text{si } t = 0 \\ \left]\left(\sqrt{t} - \frac{\varepsilon}{2}t\right)^2, \left(\sqrt{t} + \frac{\varepsilon}{2}t\right)^2\right[& \text{si } t \in \,]0,1] \end{array} \right.$$

garantit un écart $|S(f,\mathcal{D})-2|$ inférieur à ε pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[0,1]$ subordonnée à γ.

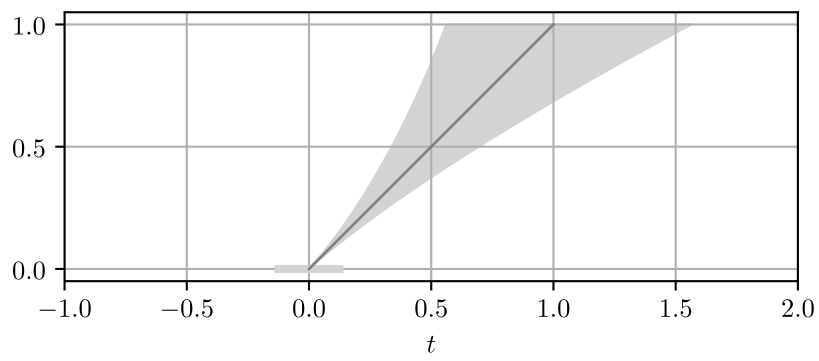

FIGURE 4 – Graphe de la jauge γ pour $f(0) = 0$ et $\varepsilon = 0.5$

Propriétés élementaires de l'intégrale

Linéarité

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont intégrables et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et λf sont intégrables. De plus,

$$\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$$

Démonstration La linéarité de l'intégrale résulte de la linéarité (additivité et homogénéité) de la somme de Riemann $S(f,\mathcal{D})$ par rapport à f.

En effet, si $\varepsilon > 0$, on peut trouver des jauges γ_f et γ_g sur $[a,b]$ telles que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ subordonnée à γ_f et γ_g, on ait

$$\left|S(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left|S(g,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $S(f+g,\mathcal{D}) = S(f,\mathcal{D})+S(g,\mathcal{D})$, toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ subordonnée à la jauge γ définie par $\gamma(t) = \gamma_f(t) \cap \gamma_g(t)$ vérifie

$$\left| S(f+g,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t) + g(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

La fonction $f+g$ est donc intégrable, et son intégrale sur $[a,b]$ est la somme des intégrales de f et de g sur $[a,b]$.

De façon similaire, $S(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda S(f,\mathcal{D})$. Dans le cas où $\lambda = 0$, il est clair que λf est intégrable, d'intégrale nulle; dans le cas contraire, on peut trouver une jauge γ sur $[a,b]$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ subordonnée à γ, on ait:

$$\left| S(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

On a alors

$$\left| S(\lambda f,\mathcal{D}) - \lambda \int_a^b f(t)\, dt \right| = |\lambda| \left| S(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

La fonction λf est donc intégrable sur $[a,b]$ et son intégrale est le produit de λ et de l'intégrale de f sur $[a,b]$. ■

Positivité

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et positive alors

$$\int_a^b f(t)\, dt \geq 0.$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ et γ une jauge telle que toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a,b]$ subordonnée à γ vérifie

$$\left| S(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Quelle que soit la subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a,b]$, la somme de Riemann associeé

$$S(f,\mathcal{D}) = \sum_{\{(t,J)\in\mathcal{D}\}} f(t)\ell(J)$$

est positive, ce qui entraîne par l'inégalité triangulaire

$$\int_a^b f(t)\, dt \geq S(f,\mathcal{D}) - \varepsilon \geq -\varepsilon.$$

Le nombre strictement positif ε pouvant être choisi arbitrairement petit, on en déduit que l'intégrale est positive. ■

Intégration par parties

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$; si les fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont dérivables, la fonction $f'g$ est intégrable si et seulement si la fonction fg' est intégrable. Si c'est le cas, on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)\, dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\, dt.$$

Démonstration La fonction $f'g + fg'$ est la dérivée du produit fg, elle est donc intégrable. Par conséquent, si l'une des fonctions $f'g$ ou fg' est intégrable, l'autre est la différence de deux fonctions intégrables et elle est donc intégrable. Dans ce cas, le théorème fondamental du calcul appliqué à $(fg)'$ fournit

$$\int_a^b (fg)'(t)\, dt = \int_a^b f'(t)g(t)\, dt + \int_a^b f(t)g'(t)\, dt = [fg]_a^b,$$

ce qui est le résultat recherché. ■

Changement de variables

Soit $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$; si la fonction $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ admet une primitive et que la fonction $g : [a, b] \to [c, d]$ est dérivable, alors la fonction $(f \circ g)g'$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx.$$

Démonstration Soit h une primitive de f. La fonction $t \in [a, b] \mapsto h(g(t))$ a pour dérivée $h'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Par le théorème fondamental du calcul on a donc d'une part

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = [t \mapsto h(g(t))]_a^b = h(g(b)) - h(g(a))$$

et d'autre part

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = [h]_{g(a)}^{g(b)} = h(g(b)) - h(g(a));$$

les deux intégrales sont donc égales. ■

Additivité

Si la fonction f est définie et intégrable sur les intervalles $[a, b]$ et $[b, c]$, alors elle est intégrable sur l'intervalle $[a, c]$ et

$$\int_a^b f(t)\, dt + \int_b^c f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt.$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Si la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ et $[b, c]$, alors il existe deux jauges $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ telles que pour toutes les subdivisions pointées $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $[a, b]$ et $[b, c]$ respectivement subordonnées à γ_1 et γ_2,

$$\left| S(f, \mathcal{D}_1) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon/2 \text{ et } \left| S(f, \mathcal{D}_2) - \int_b^c f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon/2.$$

Définissons la fonction $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ par:

$$\gamma(x) = \left| \begin{array}{cl} \gamma_1(x) \cap \,]-\infty, b[& \text{si } a < x < b, \\ \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) & \text{si } x = b, \\ \gamma_2(x) \cap \,]b, +\infty[& \text{si } b < x < c. \end{array} \right.$$

Par construction, cette fonction est une jauge sur $[a, c]$ (pour tout $x \in [a, c]$, $\gamma(x)$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contenant x). Supposons que $\mathcal{D} = \{(t_i, I_i)\}_i$ soit une subdivision pointée de $[a, c]$ subordonnée à γ. Admettons temporairement que chaque intervalle I_i appartienne à $[a, b]$ ou bien dans le cas contraire à $[b, c]$. Les deux subdivisions pointées $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont telles que

$$S(f, \mathcal{D}) = S(f, \mathcal{D}_1) + S(f, \mathcal{D}_2).$$

Elles sont également subordonnées à γ_1 et γ_2 respectivement; par conséquent

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt + \int_b^c f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Si notre hypothèse temporaire n'est pas vérifié, c'est qu'il existe un (unique) intervalle I_i à cheval sur $[a, b]$ et $[b, c]$, c'est-à-dire d'intersection non vide avec $[a, b[$ et avec $]b, c]$. La jauge γ a été choisie de telle sorte que si $x \neq b$, alors $b \notin \gamma(x)$; par conséquent, si cet intervalle $I_i = [d_i, e_i]$ existe, alors $t_i = b$ et on peut remplacer le terme (t_i, I_i) dans la subdivision pointée $\mathcal{D}$ par $(b, [d_i, b])$ et $(b, [b, e_i])$ sans que la somme de Riemann associée change (le terme $f(b)\ell([d_i, e_i])$ étant égal à $f(b)\ell([d_i, b]) + f(b)\ell([b, e_i])$). La nouvelle subdivision $\mathcal{D}'$ ainsi construite vérifie quant à elle l'hypothèse de non-chevauchement. Par conséquent l'inégalité ci-dessus est satisfaite dans le cas général. ■

Dans le cas où l'on souhaite établir l'intégrabilité sans savoir quelle est la valeur de l'intégrale, le test suivant d'intégrabilité est utile:

Critère d'intégrabilité de Cauchy

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge γ sur $[a, b]$ telle que pour tout couple de subdvisions pointées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ subordonnées à γ, on ait

$$|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}')| \leq \varepsilon.$$

Démonstration Si la fonction f est intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge γ sur $[a, b]$ telle que pour tout couple de subdvisions pointées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

subordonnées à γ, on ait

$$|S(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt| \leq \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ et }\; |S(f,\mathcal{D}') - \int_a^b f(t)\,dt| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a alors $|S(f,\mathcal{D}) - S(f,\mathcal{D}')| \leq \varepsilon$.

Réciproquement, si la fonction f vérifie le critère du théorème, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe une jauge γ_k sur $[a,b]$ telle que pour tout couple de subdvisions pointées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ subordonnées à γ_k, on ait

$$|S(f,\mathcal{D}) - S(f,\mathcal{D}')| \leq 2^{-k}.$$

Il est de plus possible de choisir les jauges γ_k telles qu'à tout ordre k et pour tout $t \in [a,b]$, on ait $\gamma_{k+1}(t) \subset \gamma_k(t)$ (si γ_{k+1} ne satisfait pas ce critère, il suffit de lui substituer la jauge définie par en t par $\gamma_{k+1}(t) \cap \gamma_k(t)$). Soit $\mathcal{D}_k$ une suite de subdivisions pointées sur $[a,b]$ subordonnées à γ_k. Si $m \geq k$ et $n \geq k$, $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}_n$ sont subordonnées à γ_k, donc

$$|S(f,\mathcal{D}_m) - S(f,\mathcal{D}_n)| \leq 2^{-k}.$$

La suite des $S(f,\mathcal{D}_k)$ est donc de Cauchy; la droite des réels étant complète, cette suite à une limite A. En passant à la limite sur n dans l'inégalité $|S(f,\mathcal{D}) - S(f,\mathcal{D}_n)| \leq 2^{-k}$, valable quand $\mathcal{D}$ est subordonnée à γ_k, on obtient

$$|S(f,\mathcal{D}) - A| \leq 2^{-k}.$$

La fonction f est donc intégrable et d'intégrale A. ■

La propriété d'additivité de l'intégrale – qui permet de prouver l'intégrabilité de l'intégrale sur un intervalle à partir de sont intégrabilité sur des intervalles qui la compose – admet une réciproque:

Restriction

Si f est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$, elle est intégrable sur tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$.

Démonstration Nous démontrons en détail le cas où $c = a$; le cas où $d = b$ se prouve de façon similaire et le cas général se déduit facilement de la combinaison de ces deux cas particuliers.

Soit $\varepsilon > 0$. Par le critère d'intégrabilité de Cauchy, il existe une jauge γ sur $[a,b]$ telle que pour tout couple de subdvisions pointées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ subordonnées à γ, on ait $|S(f,\mathcal{D}) - S(f,\mathcal{D}')| \leq \varepsilon$.

Considérons les restrictions γ_1 et γ_2 de γ à $[a,d]$ et $[d,b]$ respectivement. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1'$ deux subdivisions pointées de $[a,d]$ subordonnées à γ_1; si $\mathcal{D}_2$ est une subdivision de $[d,b]$ subordonnée à γ_2, alors $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1' \cup \mathcal{D}_2$ sont des subdvisions pointées de $[a,b]$ subordonnées à γ. Par conséquent,

$$|S(f,\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) - S(f,\mathcal{D}_1' \cup \mathcal{D}_2)| \leq \varepsilon.$$

Or $S(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = S(f, \mathcal{D}_1) + S(f, \mathcal{D}_2)$ et $S(f, \mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}_2) = S(f, \mathcal{D}'_1) + S(f, \mathcal{D}_2)$, par conséquent

$$|S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}'_1)| \leq \varepsilon.$$

Par le critère d'intégrabilité de Cauchy, la fonction f est donc intégrable sur l'intervalle $[a, d]$. ■

Fonctions égales presque partout

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ égale presque partout à une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable est elle-même intégrable et

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt.$$

Démonstration Par linéarité de l'intégrale, il suffit d'établir que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est nulle presque partout (c'est-à-dire égale presque partout à la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ identiquement nulle), alors elle est intégrable et d'intégrale nulle.

Supposons dans un premier temps que f soit bornée. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de

$$A = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a, b] \,|\, f(x) \neq 0\}$$

par une collection dénombrable d'intervalles I_i telle que $\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon$. Il est de plus possible de supposer les I_i ouverts [4]. Définissons la jauge γ sur $[a, b]$ par

$$\gamma(t) = I_i \;\text{ si }\; t \in I_i \text{ et } \; t \notin I_j \;\text{ quand }\; j \leq i$$

et par exemple $\gamma(t) = \left]-\infty, \infty\right[$ si $t \notin \cup_i I_i$. Pour toute subdivision pointée $\mathcal{D} = \{(t_j, J_j)\}_j$ de $[a, b]$ subordonnée à γ,

$$|S(f, \mathcal{D})| = \left|\sum_j f(t_j)\ell(J_j)\right| = \left|\sum_{t_j \in A} f(t_j)\ell(J_j)\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \times \sum_j \ell(J_j).$$

Par construction les J_j ne se chevauchent pas et sont tous inclus dans un des intervalles I_i. On a donc

$$\sum_j \ell(J_j) \leq \sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Il suffit par conséquent de choisir un ε suffisamment petit initialement pour rendre la somme de Riemann associée arbitrairement petite; f est donc intégrable d'intégrale nulle.

Si f est non-bornée, on peut faire une démonstration similaire en considérant les ensembles

$$A_k = \{x \in [a, b] \,|\, k < |f(x)| \leq k + 1\},$$

4. On peut trouver un recouvrement de A par des intervalles J_i non nécessairement ouverts, tels que $\sum_i \ell(J_i) \leq \varepsilon/2$, puis remplacer chaque J_i par un intervalle I_i ouvert de longueur double contenant J_i.

puis en associant à chaque A_k un recouvrement par une collection dénombrable d'intervalles ouverts I_i^k tels que

$$\sum_i \ell(I_i^k) \leq \frac{\varepsilon}{(k+1)2^{k+1}}$$

ce qui est possible puisque tous les A_k sont négligeables. On définit alors la jauge γ sur $[a, b]$ par $\gamma(t) = I_i^k$ si t appartient à un I_i^k (et on choisit alors le plus petit k, puis le plus petit i telle que cette propriété soit vérifiée) et par exemple $\gamma(t) = \left]-\infty, \infty\right[$ si $t \notin \cup_k \cup_i I_i^k$. L'évaluation d'une somme de Riemann pour une subdivision pointée subordonnée à cette jauge fournit

$$|S(f, \mathcal{D})| = \left|\sum_j f(t_j)\ell(J_j)\right| = \left|\sum_k \sum_{t_j \in A_k} f(t_j)\ell(J_j)\right| \leq \sum_k \sum_{t_j \in A_k} (k+1)\ell(J_j)$$

et comme

$$\sum_{t_j \in A_k} \ell(J_j) \leq \sum_i \ell(I_i^k) \leq \frac{\varepsilon}{(k+1)2^{k+1}},$$

on obtient

$$|S(f, \mathcal{D})| \leq \sum_k (k+1) \sum_i \ell(I_i^k) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

La fonction f est donc bien intégrable et d'intégrale nulle. ■

Intégration sur des intervalle non-bornés

La théorie de l'intégration de Henstock-Kurzweil présentée dans les sections précédentes peut être modifiée de façon assez mineure pour permettre l'intégration de fonctions sur des intervalles non-bornés. Le travail central consiste à redéfinir la somme de Riemann; en effet, comme toute subdivision pointée d'un intervalle non-borné comporte nécessairement un ou deux éléments de la forme (t, I) où I est un intervalle non-borné de $\mathbb{R}$, la longueur $\ell(I)$ associée est alors infinie. La somme de Riemann définie jusqu'à présent comporte alors un ou deux termes de la forme $f(t) \times \infty$; elle donc potentiellement infinie, ou même indéfinie si les termes $-\infty$ et $+\infty$ apparaissent.

Pour pallier à ce problème, nous adoptons la stratégie suivante:

1. **Intervalles.** Nous considérons désormais l'intégration de fonctions sur des intervalles de la forme $[a, b]$ où $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, autrement dit les intervalles fermés (ou ce qui revient au même, compacts) de la droite réelle achevée $[-\infty, +\infty]$. Nous définissons la longueur d'un intervalle de $[-\infty, +\infty]$ comme la longueur de sa restriction $\mathbb{R}$ [5]
2. **Fonctions.** Si les fonctions que nous souhaitons intégrer sont définies sur des intervalles fermés mais non bornés dans $\mathbb{R}$, nous leur assignons une valeur arbitraire en $-\infty$ et/ou en $+\infty$, par exemple la valeur 0, pour les étendre à un intervalle qui soit fermé dans $[-\infty, +\infty]$.

5. En particulier avec cette convention, $\ell([-\infty, -\infty]) = \ell([+\infty, +\infty]) = \ell(\varnothing) = 0$.

3. **Somme de Riemann.** Si $\mathcal{D}$ est une subdivision pointée de $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, la somme de Riemann associée est définie comme

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum f(t)\ell(I) \text{ où } (t, I) \in \mathcal{D} \text{ et } I \subset \left]-\infty, +\infty\right[.$$

Autrement dit, nous remplaçons les intervalles fermés $\mathbb{R} = \left]-\infty, +\infty\right[$ par ceux de $[-\infty, +\infty]$ et nous excluons de la somme de Riemann les contributions des intervalles contenant $-\infty$ ou $+\infty$ (ce qui explique pourquoi les valeurs $f(\pm\infty)$ n'ont pas d'importance).

Dans ce nouveau contexte, les définitions de jauge, de subdivision pointée, d'intégrabilité et d'intégrale sur un intervalle fermés restent formellement inchangées [6]. Les résultats relatifs à la linéarité de l'intégrale, son additivité, sa restriction, l'égalité des intégrales de fonctions égales presque partout sont toujours vrais; des preuves formellement identiques sont valables.

Intégration de $x \mapsto 1/x^2$

Considérons la fonction $f : [1, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On étend immédiatement cette fonction sur $[0, +\infty]$ en posant $f(+\infty) = 0$ (on note toujours f la fonction qui en résulte).

La fonction f admettant comme primitive $x \mapsto -1/x$ sur chaque intervalle borné $[a, b]$ de $[1, +\infty[$, par le théorème fondamental du calcul,

$$\int_a^b f(t)\, dt = \left[x \mapsto -\frac{1}{x}\right]_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

"Passer à la limite" informellement (sans justification) dans cette expression peut nous laisser penser que f est intégrable sur $[1, +\infty]$ et vérifie

$$\int_1^{+\infty} f(t)\, dt \stackrel{?}{=} 1.$$

La suite confirmera cette intuition.

Nous souhaitons trouver pour tout $\varepsilon > 0$, une jauge γ sur $[1, +\infty]$ tels que pour toute subdvision pointée $\mathcal{D}$ de $[1, +\infty]$ subordonnée à γ on ait $|S(f, \mathcal{D}) - 1| \leq \varepsilon$. Supposons que $\mathcal{D} = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]),\ i \in \{0, \ldots, m\}\}$ et que les x_i sont agencés de façon (strictement) croissante ; on a en particulier $x_{m+1} = +\infty$ et $x_k < +\infty$

6. c'est l'effet "Shyamalan" ou "6ème sens": il faut relire le document, qui prend un nouveau sens compte tenu de ce que l'on sait désormais.

quand $k \leq m$. Notons $\mathcal{D}_f = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]),\ i \in \{0, \ldots, m-1\}\}$; on a alors

$$\begin{aligned}
|S(f,\mathcal{D}) - 1| &\leq \left| S(f,\mathcal{D}) - \left(1 - \frac{1}{x_m}\right)\right| + \frac{1}{x_m} \\
&\leq \left| \sum_{(t,[x,y])\in\mathcal{D}_f} f(t)(y-x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right| + \frac{1}{x_m} \\
&\leq \sum_{(t,[x,y])\in\mathcal{D}_f} \left| f(t)(y-x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right| + \frac{1}{x_m}
\end{aligned}$$

Si l'on sélectionne une jauge telle γ telle que pour tout $t \in [1, +\infty[$ on ait $\gamma(t) \subset \mathbb{R}$ (et donc $+\infty \notin \gamma(t)$), et si la subdvision pointée $\mathcal{D}$ est subordonnée à γ, la valeur t_m associée à $(t_m, [x_m, +\infty]) \in \mathcal{D}$ vérifie nécessairement $t_m = +\infty$, et donc $[x_m, +\infty] \subset \gamma(+\infty)$. Il suffit donc d'imposer par exemple $\gamma(+\infty) =]2/\varepsilon, +\infty]$ pour garantir que $1/x_m \leq \varepsilon/2$. Si nous disposons ensuite d'un majorant pour chaque terme

$$\left| f(t)(y-x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right|,$$

choisi de telle sorte que leur somme soit également inférieure à $\varepsilon/2$, nous pourrons alors conclure. Toutefois la stratégie consistant à recherche un majorant proportionnel à la longueur de l'intervalle $[x, y]$ n'est plus applicable car l'intervalle $[0, x_m]$ peut être arbitrairement long. Au lieu de cela, nous allons tâcher de trouver une jauge γ telle que

$$\left| f(t)(y-x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2xy}(y-x) = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

Les termes de droite de cette inégalité forment alors une série télescopique dont la somme vérifie

$$\sum_{(t,[x,y])\in\mathcal{D}_f} \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{x_m}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note qu'il suffit d'établir d'une part que

$$\left| f(t)(y-t) - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{y}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{y}\right)$$

et d'autre part que

$$\left| f(t)(t-x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)$$

pour obtenir l'inégalité cherchée. Or,

$$\begin{aligned}
f(t)(y-t) - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{y}\right) &= \frac{y-t}{t^2} - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{y}\right) \\
&= \frac{y}{t}\frac{y-t}{ty} - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{y}\right) \\
&= \frac{y}{t}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{y}\right) - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{y}\right) \\
&= \left(\frac{y-t}{t}\right)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{y}\right).
\end{aligned}$$

On obtient donc la première inégalité souhaitée si

$$\frac{y-t}{t} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ soit } y \leq t + \frac{\varepsilon}{2} t.$$

De manière similaire, on montre que la seconde inégalité est satisfaite si

$$\frac{t-x}{t} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ soit } x \geq t - \frac{\varepsilon}{2} t.$$

Au final, nous avons établi que si $\mathcal{D}$ est subordonnée à la jauge γ définie par

$$\gamma(t) = \left| \begin{array}{rl}]t-\varepsilon/2, t+\varepsilon/2[& \text{si } t \in [1, +\infty[\,, \\ ]2/\varepsilon, +\infty] & \text{si } t = +\infty, \end{array} \right.$$

alors $|S(\mathcal{D}, f) - 1| \leq \varepsilon$; la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est donc intégrable sur $[1, +\infty]$, d'intégrale égale à 1.

La construction de l'intégrale dans cette section est applicable indifféremment dans le cas des intervalles bornés ou non de la droite réelle. Contrairement à l'intégrale de Riemann, il n'est pas nécessaire pour donner un sens à l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle non-borné de calculer tout d'abord son intégrale sur un intervalle borné puis d'essayer de passer à la limite [7]. Toutefois, si on souhaite se livrer cette démarche avec l'intégrale de Henstock-Kurzweil, le résultat serait identique à la démarche directe que nous avons adoptée ; avec l'intégrale de Henstock-Kurzweil, le théorème de Hake montre qu'il n'existe pas d'intégrale *impropre*, qui ne serait pas définissable directement mais uniquement par un passage à la limite.

Théorème de Hake

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $[-\infty, +\infty]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La fonction f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est intégrable sur tout intervalle $[c, d]$ tel que $a < c$ et $d < b$ et que l'intégrale

$$\int_c^d f(t)\, dt$$

a une limite quand c tend vers a et d tend vers b. On a alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{(c,d) \to (a,b)} \int_c^d f(t)\, dt.$$

Démonstration Se reporter à (Swartz 2001). ■

Le théorème de Hake permet d'étendre facilement certains résultats valables sur des segments de la droite réelle. A titre d'exemple:

7. sans garantie que ce nouvel objet – l'intégrale de Cauchy-Riemann – partage les propriétés utiles de l'intégrale de Riemann sur les segments de $\mathbb{R}$.

Théorème fondamental du calcul (extension)

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $[-\infty, +\infty]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$. La fonction f' (définie partout sauf en a et b) est intégrable sur $[a, b]$ et

$$[f]_a^b := f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

Par continuité, le membre de gauche de cette équation à une limite quand c tend vers a et d vers b, qui est $f(b) - f(a)$. Le théorème de Hake permet alors de conclure.

Démonstration Le théorème fondamental du calcul dans le cadre borné nous fournit pour tout c et d tels que $a < c \leq d < b$ l'intégrabilité de f' sur $[c, d]$ et la relation

$$f(d) - f(c) = \int_c^d f'(t)\, dt.$$

■

Un facteur vient simplifier l'étude de l'intégration sur des intervalles (a priori) non bornés : il n'est pas nécessaire de considérer l'intégration dans tous les types d'intervalles possibles car on peut toujours se ramener au cas où l'on cherche à intégrer une fonction sur la droite réelle (achevée) toute entière:

Extension à la droite réelle achevée

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si son prolongement g par zéro dans $[-\infty, +\infty]$, c'est-à-dire la fonction $g : [-\infty, +\infty] \to \mathbb{R}$ telle que

$$g(x) = \left| \begin{array}{rl} f(x) & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right.$$

est intégrable. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt.$$

Démonstration Supposons que a soit fini et que $b = +\infty$. Si g est intégrable sur $[-\infty, +\infty]$, par restriction, f est intégrable sur $[a, +\infty]$. Réciproquement, si f est intégrable sur $[a, +\infty]$, la fonction g étant nulle sur $[-\infty, a]$ à l'exception d'un point, elle y est intégrable ; étant égale à f sur $[a, +\infty]$ elle y est également intégrable. Par additivité, g est donc intégrable sur $[-\infty, +\infty]$. L'additivité fournit également

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{a} g(t)\, dt + \int_a^{+\infty} g(t)\, dt.$$

Comme g est nulle sur $[-\infty, a]$ à l'exception d'un point, son intégrale sur $[-\infty, a]$ est nulle et comme $g = f$ sur $[a, +\infty]$,

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \int_a^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Le résultat dans les autres cas ($a = -\infty$ et b fini, a et b finis) se démontrent de manière analogue. ■

Subdivisions Partielles

Subdivision pointée partielle

Une *subdivision pointée partielle* $\mathcal{D}$ de l'intervalle fermé $I = [a, b]$ (de $\mathbb{R}$ étendu par $\pm\infty$), est une famille finie

$$\mathcal{D} = \{(t_i, I_i) \mid \; 0 \leq i \leq n-1\}$$

où les I_i sont des intervalles fermés de $[a, b]$ sans chevauchement et $t_i \in I_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. La somme de Riemann associée à la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et à la subdivision pointée partielle $\mathcal{D}$ de $[a, b]$ est la grandeur

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum f(t)\ell(I), \quad \text{où } (t, I) \in \mathcal{D},\ \ell(I) < +\infty.$$

Une subdivision pointée partielle $\mathcal{D}$ de l'intervalle fermé $[a, b]$ est *subordonnée à une jauge* γ de $[a, b]$ si pour tout $(t, J) \in \mathcal{D}$, $J \subset \gamma(t)$.

Lemme de Henstock

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé, f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et γ une jauge sur $[a, b]$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[a, b]$, on ait

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Alors pour toute subdivision pointée partielle $\mathcal{D} = \{(t_k, I_k)\}_k$ de $[a, b]$ subordonnée à γ, on a également

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_k \int_{I_k} f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Preuve du lemme de Henstock

Il existe une famille finie d'intervalles fermés $\{J_j\}$, $j = 1, \ldots, m$ telle que l'union des familles $\{I_k\}$ et $\{J_j\}$ forme une subdivision (complète) de $[a, b]$. Pour tout

$\eta > 0$, sur chaque intervalle J_j, il existe une jauge γ_j telle que si $\mathcal{D}_j$ est une subdivision pointée de J_j subordonnée à γ_j, alors

$$\left| S(f, \mathcal{D}_j) - \int_{J_j} f(t)\, dt \right| \leq \eta.$$

Si de plus on choisit $\mathcal{D}_j$ subordonnée à la restriction de γ à J_j, alors $\mathcal{D} \cup (\cup_j \mathcal{D}_j)$ est une subdivision pointée (complète) de $[a, b]$ subordonnée à γ. On déduit de l'hypothèse centrale du lemme que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) + \sum_j S(f, \mathcal{D}_j) - \sum_k \int_{I_k} f(t)\, dt + \sum_j \int_{J_j} f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon$$

et donc par l'inégalité triangulaire que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_k \int_{I_k} f(t)\, dt \right| \leq \varepsilon + m\eta.$$

Le choix de $\eta > 0$ étant arbitraire, l'inégalité cherchée est établie.

Continuité des intégrales indéterminées

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et pour tout nombre réel étendu a, l'application

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

est continue.

Démonstration Montrons la continuité de l'intégrale à droite en x, la continuité à gauche s'établissant de façon similaire. Par additivité de l'intégrale, il suffit de montrer que la grandeur

$$\int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

tend vers 0 quand $h > 0$ tend vers 0. Par restriction, la fonction f est intégrable sur $[x, x + \infty]$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge γ sur $[x, x + \infty]$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[x, x + \infty]$ subordonnée à γ, l'écart entre la somme de Riemann $S(f, \mathcal{D})$ et l'intégrale de f entre 0 et $+\infty$ est au plus $\varepsilon/2$.

On peut remplacer γ par une jauge ν définie (partiellement en x) par $\nu(x) \subset \gamma(x)$ et $\nu(t) = \gamma(t) \cap \,]x, +\infty]$ sinon ; cela garantit que pour tout subdivision pointée $\mathcal{D}$ subordonnée à ν, $\mathcal{D}$ est subordonnée à γ et si $(t, J) \in \mathcal{D}$ et $x \in J$, alors $t = x$.

Le lemme de Henstock, appliqué à toute subdivision partielle $\mathcal{D} = \{(x, J)\}$ subordonnée à ν, c'est-à-dire telle que $J := [x, x + h] \subset \nu(x)$, fournit

$$\left| f(x)h - \int_x^{x+h} f(t)\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

dont on déduit par l'inégalité triangulaire que

$$\left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(x)|h.$$

Il suffit donc de choisir $\nu(x)$ tel que $|f(x)|h \leq \varepsilon/2$ quand $[x, x+h] \subset \nu(x)$ pour assurer que

$$\left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

■

Exercices

Intervalle

Montrer qu'un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si il *est connexe par arcs*, c'est-à-dire si et seulement si pour tout couple de points x et y de I on peut trouver un chemin de I joignant x à y, c'est-à-dire une fonction continue $\phi : [0,1] \to I$, telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. **(?)**

Subdvisions subordonnées à une jauge I

Soit γ la jauge sur $[0,1]$ définie par $\gamma(0) = \,]-1/2, 1/2[$ et $\gamma(t) = \,]0, 2t[$ si $t > 0$.

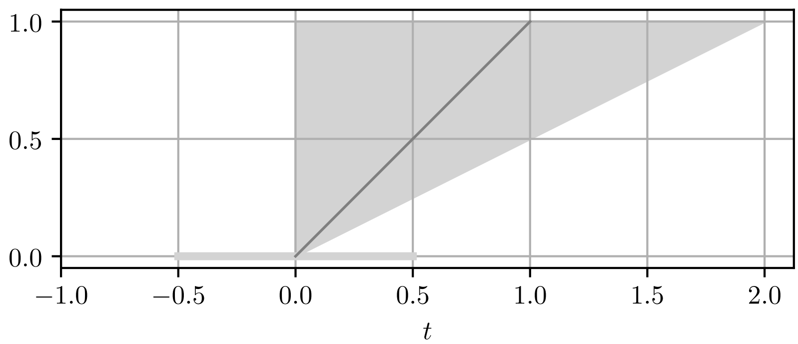

Figure 5 – Graphe de la jauge γ.

Déterminer une subdivision pointée de $[0,1]$ qui soit subordonnée à γ. **(?)**

Subdvisions subordonnées à une jauge II

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$; soit γ une jauge sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\text{pour tout } t \in [a, b], \ ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\subset \gamma(t).$$

Suggérer un procédé plus simple que le procédé très général utilisé par le lemme de Cousin pour construire une subdivision pointée subordonnée à γ. **(?)**

L'intégrale de Riemann est absolue

Montrer que l'intégrale de Riemman est absolue: si une fonction f est intégrable au sens de Riemann, sa valeur absolue $|f|$ l'est également. **(?)**

Continuité presque partout

Question 1 Est-ce qu'une fonction égale presque partout à une fonction continue est presque partout continue ? La réciproque est-elle vraie ? **(?)**

Question 2 La fonction de Dirichlet $1_{\mathbb{Q}}$ – ou fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ – définie par

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est-elle intégrable sur $[0, 1]$ au sens de Riemann ? Et au sens de Henstock-Kurzweil ? **(?)**

Continuité par morceaux

Montrer que toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil. **(?)**

Un ensemble de Cantor

Chaque nombre réel x de $[0, 1[$ peut être représenté par un développement décimal de la forme noté noté $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ où $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, une notation qui signifie que

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i 10^{-i}.$$

Ce développement est unique si on lui impose d'être propre, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de séquences infinie de nombres 9 consécutifs [8].

On définit l'ensemble A comme le sous-ensemble de $[0, 1[$ dont le développement décimal ne comporte que des nombres pairs. Par exemple, $x = 2/3 = 0.666\cdots$ appartient à A, mais $x = \sqrt{2}/2 = 0.707\cdots$ non.

8. Dans le cas contraire, on pourrait par exemple représenter $x = 1/2$ comme $0.5000\cdots$ ou comme $0.4999\cdots$.

Question 1 Montrer que l'ensemble A est négligeable. **(?)**

Question 2 Montrer néanmoins que A n'est pas dénombrable, mais a la "puissance du continu" (qu'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{R}$ ou avec un intervalle de longueur non vide de $\mathbb{R}$, ce qui revient au même). **(?)**

Séries et intégrales

Soit a_k, $k \geq 0$ une série de valeurs réelles ; on lui associe la fonction $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a_k$ quand $k \leq x < k + 1$.

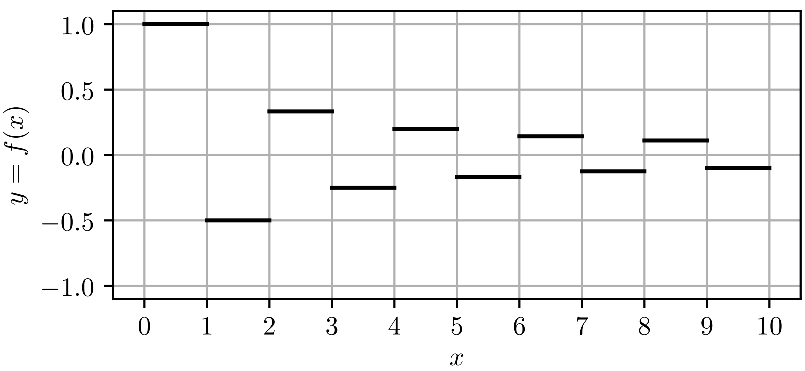

FIGURE 6 – Graphe de la fonction f associée à la suite $a_k = (-1)^k/(k+1)$.

Question 1 Montrer que si la série $\sum_k a_k$ est divergente, f n'est pas intégrable. **(?)**

Question 2 Montrer que si la série $\sum_k a_k$ est convergente, alors la fonction est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

(?)

Question 3 En déduire une fonction $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ qui soit intégrable sans que $|f|$ le soit (on dit que f est conditionnellement intégrable). **(?)**

Solutions

Intervalle

Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Supposons que x et y appartiennent à I et que x soit inférieur ou égal à y. Alors pour tout $t \in [0,1]$, $\phi(t) = (1-t)x + ty$ est un point intermédiaire entre x et y, et par conséquent, appartient à I. La fonction ϕ ainsi définie est clairement continue et vérifie $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$; c'est donc un chemin de I qui joint x à y. Par conséquent, I est connexe par arcs.

Réciproquement, si I est connexe par arcs et contient les points x et y, tout chemin de I qui joint x et y, continu et à valeurs réelles, vérifie le théorème des valeurs intermédiaires: pour toute valeur intermédiaire z entre x et y, il existe donc un $t \in [0,1]$ tel que $\phi(t) = z$. Comme ϕ est à valeurs dans I, $z \in I$; l'ensemble I est donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

Subdvisions subordonnées à une jauge I

On applique pas à pas la démarche de la preuve du lemme de Cousin.

On considère initialement les subdivisions pointées de la forme $\{(t_1, [0,1])\}$. Mais quel que soit $t_1 \in [0,1]$, on réalise que $[0,1] \not\subset \gamma(t_1)$. En effet, $[0,1] \not\subset \gamma(0) =]-1/2, 1/2[$ et comme pour tout $t_1 > 0$, $0 \notin \gamma(t)$, on ne peut avoir $[0,1] \subset \gamma(t)$.

On considère donc les subdivisions de la forme

$$\{(t_1, [0,1/2]), (t_2, [1/2,1])\}.$$

Concernant le second terme de cette subdivision, on se rend compte que pour $t_2 = 1$, on a $\gamma(t_2) =]0,2[$ et donc $[1/2,1] \subset \gamma(t_2)$. Par contre on peut se convaincre comme à la première étape du processus qu'il est impossible d'avoir $[0,1/2] \subset \gamma(t_1)$ quand $t_1 \in [0,1/2]$.

On considère donc les subdivisions de la forme

$$\{(t_1, [0,1/4]), (t_2, [1/4,1/2]), (1, [1/2,1])\}.$$

Cette fois-ci, on constate que $t_1 = 0$ fournit $[0,1/4] \subset \gamma(0) =]-1/2, 1/2[$, et qu'avec $t_2 = 1/2$, on a $[1/4,1/2] \subset \gamma(t_2) =]0,1[$.

Par conséquent, la subdivision

$$\mathcal{D} = \{(t_1, [0,1/4]), (t_2, [1/4,1/2]), (1, [1/2,1])\}$$

est subordonnée à γ.

Subdvisions subordonnées à une jauge II

Sous l'hypothèse énoncée, il suffit de limiter la recherche aux subdivisions uniformes

$$\mathcal{D}_m = \left\{ \left(t_k, \left[a + k\frac{b-a}{m}, a + (k+1)\frac{b-a}{m} \right] \right) \;\middle|\; k \in \{0, \dots, m-1\} \right\},$$

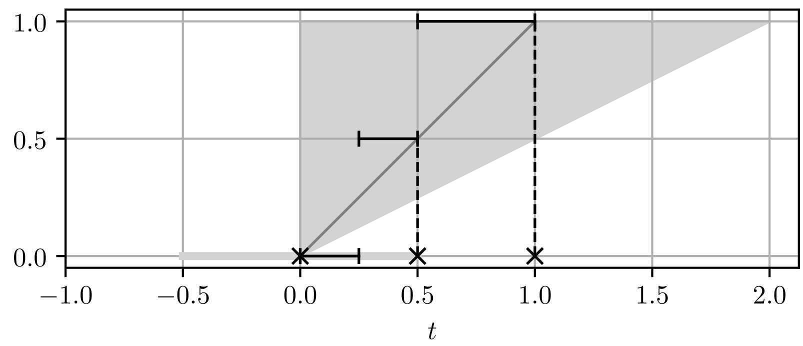

FIGURE 7 – Graphe de la jauge γ et de la subdivision pointée $\mathcal{D}$

et le choix des t_k importe peu. En effet, dès que m est assez grand pour que l'on ait

$$\frac{b-a}{m} < \varepsilon,$$

alors pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$ et pour tout $t \in \left[a + k\frac{b-a}{m}, a + (k+1)\frac{b-a}{m}\right]$,

$$\left[a + k\frac{b-a}{m}, a + (k+1)\frac{b-a}{m}\right] \subset \left]t - \varepsilon, t + \varepsilon\right[\subset \gamma(t).$$

La jauge $\mathcal{D}_m$ est donc subordonnée à γ.

L'intégrale de Riemann est absolue

Nous exploitons le critère de Lebesgue pour l'intégrabilité au sens de Riemann: si f est intégrable au sens de Riemann, elle est bornée – et donc f également – et continue presque partout – et donc $|f|$ également ($|f|$ est continue en tout point où f est continue comme composée de fonctions continues en un point). Par conséquent, $|f|$ est intégrable au sens de Riemann.

Continuité presque partout

Question 1 Une fonction égale presque partout à une fonction continue n'est pas nécessairement presque partout continue. La fonction de Dirichlet de la question 2 fournit un bon example: elle est égale à la fonction identiquement nulle – qui est continue – sur tout $\mathbb{R}$ à l'exception des rationnels, et l'ensemble des rationnels est négligeable, car dénombrable. Mais elle n'est continue en aucun point, car tout nombre rationnel est limite de nombres irrationnels et réciproquement.

La réciproque n'est pas vérifiée non plus: la fonction de Heaviside $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – ou fonction indicatrice de $[0, +\infty[$, définie par

$$e(x) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est continue presque partout (sauf en 0). Mais aucune modification de cette fonction sur un ensemble négligeable ne pourra la rendre continue en 0 ; il faudrait pour cela modifier tout un intervalle de la forme $]-\varepsilon, 0[$ ou de la forme $]0, \varepsilon[$ pour un $\varepsilon > 0$, mais aucun de ces deux intervalles n'est négligeable.

Question 2 La fonction de Dirichlet $1_{\mathbb{Q}}$ sur $[0, 1]$ est égale presque partout à la fonction identiquement nulle qui est continue, elle est donc intégrable au sens de Henstock-Kurzweil. Mais elle n'est pas continue presque partout, donc elle n'est pas intégrable au sens de Henstock-Kurzweil.

Continuité par morceaux

On peut bien sûr exploiter les propriétés de l'intégrale de Riemann pour répondre à cette question : toute fonction continue par morceaux $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann ; comme toute fonction intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil, le résultat est acquis.

Si l'on souhaite montrer directement ce résultat, sans passer par l'intégrale de Riemann, on peut tout d'abord réduire ce problème à celui de l'intégrabilité des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. En effet, supposons les fonctions continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ intégrables ; si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut décomposer $[a, b]$ en une union finie d'intervalles $[a_k, b_k]$ qui ne se chevauchent pas, et tels que la restriction de f à chaque $[a_k, b_k]$ soit continue – ou diffère d'une fonction continue en au plus deux points. Deux fonctions égales presque partout étant intégrables (ou non) simultanément, ces restrictions sont toutes intégrables. Par additivité, la fonction f est donc intégrable.

Supposons désormais $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Comme nous ne connaissons pas a priori la valeur de son intégrale (éventuelle), nous allons essayer de prouver son intégrabilité en utilisant le critère de Cauchy. Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux subdivisions pointées de $[a, b]$. Si $\mathcal{D}$ est composée des paires (t_i, I_i) et $\mathcal{D}'$ des paires (s_j, J_j), en notant $K_{ij} = I_i \cap J_j$, on obtient

$$\begin{aligned}
|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}')| &= \left| \sum_i f(t_i) \ell(I_i) - \sum_k f(s_j) \ell(I_j) \right| \\
&= \left| \sum_i f(t_i) \left(\sum_j \ell(K_{ij}) \right) - \sum_j f(s_j) \left(\sum_i \ell(K_{ij}) \right) \right| \\
&= \left| \sum_{i,j} (f(t_i) - f(s_j)) \ell(K_{ij}) \right|.
\end{aligned}$$

De toute évidence, on peut limiter dans la dernière expression la somme aux ensemble K_{ij} non vides, c'est-à-dire tels que $I_i \cap J_j \neq \varnothing$. Supposons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient subordonnées à une jauge γ de $[a, b]$, telle que si $x \in \gamma(t)$, alors

$$|f(x) - f(t)| \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Une telle jauge existe par continuité de f. Alors, si $t_i \in I_i$, $s_j \in J_j$ et $x \in I_i \cap J_j$,

$$|f(t_i) - f(s_j)| \leq |f(x) - f(s_j)| + |f(x) - f(t_i)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

et par conséquent

$$|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}')| \leq \sum_{i,j} |f(t_i) - f(s_j)| \, \ell(K_{ij}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i,j} \ell(K_{ij}) = \varepsilon.$$

Par le critère de Cauchy, la fonction f est donc intégrable.

Un ensemble de Cantor

Question 1 L'ensemble A peut être recouvert par la collection ne contenant que l'intervalle $\mathcal{A}_0 = [0, 1[$, ou par la collection d'intervalles

$$\mathcal{A}_1 = \{[0, 1/10[\,, [2/10, 3/10[\,, \dots, [8/10, 9/10[\}$$

qui contient exactement les nombres x de $[0, 1[$ dont le premier chiffre du développement décimal propre est pair. On a clairement

$$\sum_{I \in \mathcal{A}_1} \ell(I) = \ell([0, 1[) = 1 \text{ et } \sum_{I \in \mathcal{A}_1} \ell(I) = 5 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{2}.$$

On peut poursuivre le procédé en considérant la collection $\mathcal{A}_n$ des 5^n intervalles dont l'union forme l'ensemble des nombres x dont les n premiers chiffres du développement décimal propre sont pairs, ensemble qui inclus A. On peut de plus se convaincre par récurrence que

$$\sum_{I \in \mathcal{A}_n} \ell(I) = 5^n \times \frac{1}{10^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Comme $1/2^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, nous avons établi que A est négligeable.

Question 2 L'opération qui à $x = 0.a_1a_2 \cdots \in A$ associe $y = 0.b_1b_2 \cdots$ où $b_i = a_i/2$ est une bijection de A sur $[0, 0.444 \cdots [= [0, 4/9[$, ce qui montre que A à la puissance du continu (et donc n'est pas dénombrable).

Séries et intégrales

Question 1 Si $\sum_k a_k$ est divergente, f ne satisfait pas le critère d'intégrabilité de Cauchy. En effet, la série elle-même ne satisfait pas le critère de Cauchy: il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier j, il existe un entier n tel que

$$\left| \sum_{k=j}^{j+n} a_k \right| > \varepsilon.$$

Soit γ une jauge sur $[0, +\infty]$ et soit

$$\mathcal{D} = \{(t_k, [x_k, x_{k+1}]\}_{k=1}^{m}$$

une subdivision subordonnée à γ ; on peut toujours supposer que $\gamma(t) \subset [0, +\infty[$ quand $t \in [0, +\infty[$ quite à rendre plus fine la jauge initiale, ce qui entraine $t_m = x_{m+1} = +\infty$. Dans ce cas, on a en particulier $[x_m, +\infty] \subset \gamma(+\infty)$; si l'entier j est supérieur à x_k, la subdivision

$$\mathcal{D}' = \{(t_k, [x_k, x_{k+1}]\}_{k=1}^{m-1} \cup \{(k, [k, k+1])\}_{k=j}^{j+n} \cup \{(+\infty, [j+n+1, +\infty])\}$$

est également subordonnée à γ et

$$S(f, \mathcal{D}') = S(f, \mathcal{D}) + \sum_{k=j}^{j+n} a_k.$$

Il est donc possible de choisir $\mathcal{D}'$ telle que la distance entre $S(f, \mathcal{D})$ et $S(f, \mathcal{D}')$ soit strictement supérieure à ε, ce qui contredit le critère d'intégrabilité de Cauchy. La fonction f n'est donc pas intégrable.

Question 2 Supposons la série $\sum_k a_k$ convergente. Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{D}$ une subdivision pointée de $[0, +\infty]$, de la forme

$$\mathcal{D} = \{(t_k, (x_k, x_{k+1})\}_{k=1}^{m},$$

subordonnée à une jauge γ telle que $\gamma(t) \subset [0, +\infty[$ quand $t \in [0, +\infty[$. Si $\lceil x \rceil$ désigne l'entier immédiatement supérieur au nombre réel x (et $\lfloor x \rfloor$ l'entier immédiatement inférieur), on a

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| \leq \left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_{k=0}^{\lceil x_{m+1} \rceil} a_k \right| + \left| \sum_{k=\lceil x_{m+1} \rceil + 1}^{+\infty} a_k \right|.$$

Si $|\sum_{k=j}^{+\infty} a_k| \leq \varepsilon/2$, pour tout $j \geq n$, il suffit donc d'imposer $\lceil x_{m+1} \rceil + 1 \geq n$ pour garantir que

$$\left| \sum_{k=\lceil x_{m+1} \rceil + 1}^{+\infty} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

C'est donc le cas si $\gamma(+\infty) =]n, +\infty]$. Pour le reste des valeurs de la jauge, prenons $\gamma(t) =]\lfloor t \rfloor, \lceil t \rceil[$ si $t \notin \mathbb{N}$, et $\gamma(k) = \left]k - \varepsilon'/2^{k+1}, k + \varepsilon'/2^{k+1}\right[$ si $k \in \mathbb{N}$. Un calcul direct montre alors que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_{k=0}^{\lceil x_{m+1} \rceil} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{k+1} - a_k| \frac{\varepsilon'}{2^{k+1}} \leq \left(\sup_k |a_{k+1} - a_k| \right) \times \varepsilon'.$$

Il suffit de sélectionner $\varepsilon' = (\varepsilon/2) / \left(\sup_k |a_{k+1} - a_k|\right)$ pour obtenir

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat cherché.

Question 3 La fonction f associée à la suite des

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)}, \; k \geq 0$$

est conditionnellement convergente. En effet, $\sum_k a_k$ est convergente – donc f est intégrable – mais $\sum_k |a_k|$ ne l'est pas ($\sum_k a_k$ n'est pas absolument convergente). Or la fonction associée aux $|a_k|$ n'est autre que $|f|$; la fonction $|f|$ n'est donc pas intégrable.

Références

Burk, Frank E. 2007. *A Garden of Integrals.* Washington, DC: Mathematical Association of America (MAA).

Swartz, Charles. 2001. *Introduction to Gauge Integrals.* Singapore: World Scientific.