

# Probabilités II


STEP, MINES ParisTech\*

25 septembre 2019 (#78eca1a)

## Table des matières

<b>Variables aléatoires réelles</b>	<b>2</b>
Remarque . . . . .	3
Proposition . . . . .	3
Définition . . . . .	4
Proposition . . . . .	4
Proposition . . . . .	4
Définition . . . . .	5
Exemple . . . . .	5
<b>Moments d’une variable aléatoire à densité</b>	<b>5</b>
Définition . . . . .	5
Proposition . . . . .	6
<b>TODO</b> Remarque : analogie avec le cas discret . . . . .	6
Définition . . . . .	6
Proposition . . . . .	6
Remarque . . . . .	7
Exemple : <b>TODO illustration écart type</b> . . . . .	7
Définition . . . . .	7
Remarque . . . . .	8
Inégalité de Cauchy-Schwartz . . . . .	8
Remarque . . . . .	9
Proposition . . . . .	9
<b>TODO : à développer, notamment figures Densités réelles usuelles</b>	<b>9</b>

---

\*Ce document est un des produits du projet  **boisgera**/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d’utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

<b>Vecteurs aléatoires à densité</b>	<b>10</b>
Définitions . . . . .	10
Définition . . . . .	10
Proposition . . . . .	10
Moments d'un vecteur aléatoire . . . . .	11
Définition . . . . .	11
Proposition . . . . .	11
Exemple : Vecteur Gaussien $n$ -dimensionnel . . . . .	11
Variables aléatoires indépendantes . . . . .	12
Définition . . . . .	12
Proposition . . . . .	12
Proposition . . . . .	13
Remarque . . . . .	13
Corollaire . . . . .	13
Remarque . . . . .	13
<b>Identification de densité</b>	<b>14</b>
Proposition . . . . .	14
TODO Exemples ou exercices ? . . . . .	16
<b>Exercices</b>	<b>16</b>

**TODO : donner des exemples d'analogie avec le cas discret**

## Variables aléatoires réelles

En théorie moderne des probabilités, on préfère prendre un point de vue fonctionnel plutôt qu'ensembliste, et utiliser les variables aléatoires plutôt que les événements. Ce point de vue sera développé dans la suite du cours. Nous en donnons ici les idées de base.

Une variable aléatoire est une grandeur qui dépend du résultat de l'expérience. Par exemple,

- le nombre de 6 obtenus dans un lancer de 3 dés,
  - le nombre d'appels dans un central téléphonique pendant une heure,
  - la distance du point d'atteinte d'une flèche au centre de la cible,
  - la valeur maximale d'un prix d'actif sur un intervalle de temps donné,
- sont des variables aléatoires.

La définition formelle d'une variable aléatoire fait intervenir des éléments de la théorie de la mesure. On s'intéressera dans un premier temps au cas d'une variable réelle dont on donne une définition partielle :

Soit  $\Omega$  l'espace fondamental muni de sa tribu  $\mathcal{A}$ . Une *variable aléatoire*  $X$  est

une application de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans un ensemble  $E$ ,

$$\omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in E \quad (1)$$

En pratique, l'ensemble  $E$  pourra être un ensemble fini ou dénombrable ou  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^d$  ou encore un espace plus sophistiqué tel que l'ensemble  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

### Remarque

La terminologie, consacrée par l'usage, peut être trompeuse. Une variable aléatoire n'est pas une variable (au sens de l'analyse) mais une fonction. Cette terminologie est apparentée à la notion de variable en physique ou en sciences humaines où on désigne volontiers par "variable" la valeur prise par une fonction de l'état du système étudié.

L'intérêt principal de travailler avec des variables aléatoires est de pouvoir substituer à l'espace abstrait  $\Omega$  des résultats de l'expérience l'espace  $E$ , mieux connu dans la pratique. Ainsi, grâce à une variable aléatoire  $X$ , nous pouvons transporter la structure abstraite du modèle probabiliste  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sur l'espace d'arrivée  $E$ , en posant pour  $B \subset E$

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega, X(\omega) \in B\}) \quad (2)$$

Cette formule définit une nouvelle probabilité, notée  $\mathbb{P}_X$  et définie sur  $E$ , qui s'appelle la *loi de la variable  $X$* .

Comme  $\mathbb{P}(A)$  n'est définie que pour les  $A$  de la tribu  $\mathcal{A}$ , la formule (2) ne permet de définir  $\mathbb{P}_X(B)$  que pour les ensembles  $B$  tels que  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , d'où l'importance de la proposition suivante :

### Proposition

- a) La famille  $\mathcal{E}$  des parties  $B$  de  $E$  telles que  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  est une tribu de  $E$ .
- b) L'application  $\mathbb{P}_X$  définie pour  $B \in \mathcal{E}$  par

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

définit une probabilité sur le couple  $(E, \mathcal{E})$ .

**Démonstration** Les 3 propriétés de la définition d'une tribu pour  $\mathcal{E}$  ainsi que les deux propriétés de la définition de la probabilité pour  $\mathbb{P}_X$  découlent

immédiatement des mêmes propriétés pour  $\mathcal{A}$  et  $\mathbb{P}$ , une fois remarquées les propriétés élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} X^{-1}(\emptyset) &= \emptyset, X^{-1}(E) = \Omega, X^{-1}(B^c) = X^{-1}(B)^c \\ X^{-1}(\cap_i A_i) &= \cap_i X^{-1}(A_i), X^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i X^{-1}(A_i) \end{aligned}$$

■

$\mathbb{P}_X$  sera plus facile à caractériser que  $\mathbb{P}$  puisque  $E$  est un ensemble connu (on pourra en particulier utiliser ses propriétés topologiques) alors que  $\Omega$  est un espace abstrait. Les variables que nous rencontrerons dans ce cours seront soit à valeurs dans un ensemble dénombrable, soit à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{R}^d$ . Nous les appellerons respectivement des variables aléatoires discrètes, réelles ou des vecteurs aléatoires. Leurs lois seront alors des probabilités respectivement sur un ensemble dénombrable, sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{R}^d$ . Les probabilités sur un espace fini ou dénombrable sont considérées connues.

La proposition ci-dessus implique que l'ensemble  $X^{-1}(B)$  soit un évènement, pour tout  $B$  dans  $\mathcal{E}$ . Cela nous conduit à poser

### Définition

Soit l'espace d'état  $\Omega$  munit de la tribu  $\mathcal{A}$  des évènements. Une application  $X$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  est une *variable aléatoire réelle* si  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  pour tout  $B$  dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ .

On a alors le résultat très utile suivant que nous admettrons dans un premier temps.

### Proposition

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires réelles et si  $g$  est une fonction continue par morceaux de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $Y = g(X_1, \dots, X_n)$  est une variable aléatoire réelle.

Comme application de ce résultat, on a les propriétés suivantes :

### Proposition

Soient  $X, Y$  et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  des variables aléatoires réelles. On a

1.  $X + Y, XY, \frac{X}{Y}$  si  $Y \neq 0$ , sont des variables aléatoires.
2.  $\sup_{1 \leq p} X_n, \inf_{1 \leq p} X_n$ , sont des variables aléatoires.
3.  $\sup_{n \geq 1} X_n, \inf_{n \geq 1} X_n$ , sont des variables aléatoires.
4. Si  $X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z(\omega), \forall \omega$ , alors la limite  $Z$  est une variable aléatoire.
5.  $Z = 1_A$  est une variable aléatoire  $\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$

**Note : A démontrer dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^n$ . Renvoyer le cas général au CI 5. L'idée à partir d'ici est de donner des résultats uniquement dans le cas à densité**

### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire. On dit que  $X$  a une *loi de densité*  $f$  (ou par abus de langage “est de densité  $f$ ”), si  $\mathbb{P}_X$  admet la densité  $f$  et donc si pour tout réel  $x$ ,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy.$$

### Exemple

La durée de fonctionnement d'un ordinateur avant sa première panne est une variable aléatoire positive de densité donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} \exp\left(-\frac{x}{100}\right) & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Calculons la probabilité que cette durée de fonctionnement  $X$  soit comprise entre 50 et 150 heures, elle vaut

$$\mathbb{P}(X \in [50, 150]) = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} \exp\left(-\frac{x}{100}\right) dx = \exp(-1/2) - \exp(-3/2) \approx 0,38.$$

Calculons la probabilité que l'ordinateur fonctionne moins de 100 heures :

$$\mathbb{P}(X \leq 100) = \int_0^{100} \frac{1}{100} \exp\left(-\frac{x}{100}\right) dx = 1 - e^{-1} \approx 0,63.$$

## Moments d'une variable aléatoire à densité

La densité de probabilité d'une variable aléatoire va nous permettre de calculer aisément des grandeurs caractéristiques telles que sa valeur moyenne et sa variance définies ci-dessous :

### Définition

La variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de densité  $f$  est dite *intégrable* si  $\int_{\mathbb{R}} |x|f(x)dx < +\infty$ , autrement dit si le produit  $xf(x)$  est absolument intégrable. On définit alors son *espérance* par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$$

**note : pour introduire proprement l'espérance d'une variable aléatoire réelle, on a besoin de l'intégrale de Lebesgue -> CI 5**

On note  $\mathcal{L}^1$  l'ensemble de toutes les variables réelles  $X$  à densité intégrables. Les propriétés suivantes découlent directement des propriétés de l'intégrale.

**Proposition**

—  $\mathcal{L}^1$  est un espace vectoriel et  $\forall X, Y \in \mathcal{L}^1, \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

—  $X \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow |X| \in \mathcal{L}^1$ , et dans ce cas

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

— Si  $X \geq 0$  et  $X \in \mathcal{L}^1$ , alors  $\mathbb{E}(x) \geq 0$ .

— Si  $X, Y \in \mathcal{L}^1$  sont telles que  $X \leq Y$ , alors

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

— Si  $\exists b \in \mathbb{R}$  tel que  $|X| \leq b$ , alors  $X \in \mathcal{L}^1$  et  $\mathbb{E}(X) \leq b$ .

**TODO Remarque : analogie avec le cas discret**

Outre l'espace  $\mathcal{L}^1$ , nous pouvons définir l'espace  $\mathcal{L}^2$  des variables aléatoires réelles dont le carré  $X^2$  est dans  $\mathcal{L}^1$ .

**Définition**

La variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de densité  $f$  est dite *de carré intégrable* si  $\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx < +\infty$ , autrement dit si le produit  $x^2 f(x)$  est intégrable. Sa *variance* est définie par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

**Proposition**

$\mathcal{L}^2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}^1$ , et si  $X \in \mathcal{L}^2$ ,

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$$

**Démonstration** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles de  $\mathcal{L}^2$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Comme  $(aX + Y)^2 \leq 2a^2 X^2 + 2Y^2$ , alors  $aX + Y \in \mathcal{L}^2$ . Ainsi,  $\mathcal{L}^2$  est un espace vectoriel.

L'inclusion  $\mathcal{L}^2 \in \mathcal{L}^1$  découle de  $|X| \leq 1 + |X^2|$  et de la proposition précédente.

La première inégalité a déjà été vue ci-dessus. Pour la seconde, nous pouvons nous limiter au cas où  $X$  est positive. Soit alors  $a = \mathbb{E}(X)$  et  $Y = X - a$ . Par linéarité, on a

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2a\mathbb{E}(X) + a^2 = \mathbb{E}(X^2) - a^2.$$

Et  $\mathbb{E}(Y^2) \geq 0$  par le troisième point de la proposition ci-dessus. Par conséquent,  $\mathbb{E}(X)^2 = a^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$  ce qui est le résultat recherché. ■

### Remarque

En vertu de cette proposition,  $\mathbb{V}(X)$  est **positive** et sa racine carrée  $\sigma_X$  s'appelle l'*écart-type* de  $X$ . L'écart-type est une grandeur qui mesure la moyenne (en un certain sens) de l'écart des valeurs de  $X$  à sa moyenne, d'où son nom.

On a également

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

que l'on obtient en développant  $(X - \mathbb{E}(X))^2$ . Cette manipulation anodine est fort utile dans la pratique. On retiendra que "La variance est égale à la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne".

### Exemple : TODO illustration écart type

On peut remarquer que si  $X$  et  $Y$  sont dans  $\mathcal{L}^2$ , la variable aléatoire  $XY$  est dans  $\mathcal{L}^1$ . En effet, on a  $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ . On peut ainsi définir la *covariance* de deux variables aléatoires :

### Définition

Si  $X$  et  $Y$  sont dans  $\mathcal{L}^2$ , la variable aléatoire  $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$  est intégrable. On appelle la *covariance* de  $X$  et  $Y$  l'espérance de cette variable aléatoire et on la note :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

Le *coefficient de corrélation* des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est le nombre

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}}$$

qui est bien défini lorsque  $\mathbb{V}(X) > 0$  et  $\mathbb{V}(Y) > 0$ .

Du fait de la linéarité de l'espérance, on a

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

et d'ailleurs, on voit que la formule de calcul de la variance donnée plus haut est un cas particulier de cette formulation car  $\mathbb{V}(X) = \text{Cov}(X, X)$ . La linéarité de l'espérance nous donne encore pour  $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((aX + b)(a'Y + b')) &= aa'\mathbb{E}(XY) + ab'\mathbb{E}(X) + a'b\mathbb{E}(Y) + bb' \\ \mathbb{E}(aX + b)\mathbb{E}(a'Y + b') &= aa'\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + ab'\mathbb{E}(X) + a'b\mathbb{E}(Y) + bb'\end{aligned}$$

On en déduit que la covariance est une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel des variables aléatoires de carré intégrable, et nous avons

$$\text{Cov}(aX + b, a'Y + b') = aa'\text{Cov}(X, Y)$$

En particulier, on a

$$\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$$

On en déduit que les coefficients de corrélation de  $X$  et  $Y$  et de  $aX + b$  et  $a'Y + b'$  sont égaux lorsque  $aa' > 0$ .

### Remarque

D'après ce qui précède, si  $X$  est une variable aléatoire de carré intégrable, d'espérance  $\mathbb{E}(X)$  et d'écart-type  $\sigma_X > 0$ , alors la variable aléatoire

$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$$

est d'espérance nulle et de variance 1. On dira qu'une telle variable aléatoire est *centrée et réduite*.

### Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de carré intégrable, alors on a *l'inégalité de Cauchy-Schwartz* :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

avec égalité si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont presque-sûrement proportionnelles.

**Démonstration** La première inégalité est évidente. Pour la seconde, on a  $\forall x \in \mathbb{R}$  d'après la linéarité de l'espérance :

$$x^2\mathbb{E}(X^2) + 2x\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}((xX + Y)^2) \geq 0.$$

Mais ceci n'est possible que si ce trinôme en  $x$  n'a au plus qu'une seule racine réelle ; son discriminant doit donc être négatif ou nul ce qui donne le résultat.

Le discriminant est nul si et seulement si il admet une racine double  $x_0$  et dans ce cas,  $Y(\omega) = -x_0X(\omega)$  pour presque tout  $\omega$ . ■



### Remarque

On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que le coefficient de corrélation de  $X$  et  $Y$  vérifie

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

Enfin, il peut être intéressant de pouvoir calculer l'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire réelle à densité qui est une variable aléatoire en vertu de la proposition.

### Proposition

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle admettant la densité  $f$ , et  $g$  une fonction continue par morceaux de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $g(X)$  est intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|f(x)dx \leq +\infty,$$

et dans ce cas

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx.$$

Nous n'avons pas les éléments permettant de démontrer ce résultat, mais l'argument heuristique suivant permet de comprendre pourquoi il est vrai : ###  
**TODO** développer dans le cas de l'intégrale HK

## TODO : à développer, notamment figures Densités réelles usuelles

Nous donnons ici quelques exemples de densités de probabilité. ### *loi uniforme* sur  $[a, b]$ , où  $a < b$  et on note  $X \sim \mathcal{U}[a, b]$  si  $X$  admet la densité

$$\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x).$$

### *loi exponentielle* de paramètre  $\lambda > 0$  et on note  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  si  $X$  admet la densité

$$\lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}.$$

### *loi gaussienne* ### *loi de Cauchy* ### *loi Gamma*

**note : ajouter de jolies figures**

## Vecteurs aléatoires à densité

Nous allons généraliser ici la notion de variable aléatoire en considérant qu'elle peut prendre ses valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Les vecteurs aléatoires se rencontrent naturellement lorsqu'on s'intéresse à plusieurs quantités conjointement, par exemple dans le cas de la météo, la température, la pluviométrie et la vitesse et la direction du vent.

### Définitions

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (ou vecteur aléatoire) est simplement une collection de  $n$  variables réelles définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , qui sont les *composantes* de  $X$  : on écrit  $X = (X_1, \dots, X_n)$ .

De même qu'en dimension 1, la loi de  $X$  est caractérisée par la fonction de répartition multi-dimensionnelle  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}_X(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

Mais caractériser les fonctions de répartition sur  $\mathbb{R}^n$  est assez délicat, de sorte que cette notion est rarement utilisée. Nous allons plus particulièrement nous intéresser aux vecteurs aléatoires à densité.

### Définition

On dit que  $X$  admet la densité  $f$  si la fonction réelle  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  est positive, intégrable et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

et si

$$\mathbb{P}_X(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

De la même manière que dans la proposition, on a :

### Proposition

Soit  $X$  un vecteur aléatoire de densité  $f$ , et soit  $g$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , continue par morceaux (i.e. continue sauf sur une "bonne" surface de dimension au plus  $n - 1$ ). On a alors  $g(X) \in \mathcal{L}^1$  si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x_1, \dots, x_n)| f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n < \infty,$$

et dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

## Moments d'un vecteur aléatoire

### Définition

Si les composantes  $X_i$  du vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_n)$  sont intégrables, nous pouvons définir le *vecteur espérance*

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))$$

Si les composantes  $X_i$  du vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_n)$  sont de carré intégrable, la *matrice de covariance* de  $X$  est la matrice  $C_X = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  de taille  $n \times n$  et dont les éléments valent

$$c_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j)$$

### Proposition

La matrice de covariance est symétrique non-négative (ou encore semi-définie positive).

**Démonstration** La symétrie est évidente. Non-négative signifie que pour tous réels  $a_1, \dots, a_n$ , on a  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j c_{i,j} \geq 0$ . Un calcul simple montre que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j c_{i,j} = \mathbb{V}(\sum_{i=1}^n a_i X_i).$$

■

### Exemple : Vecteur Gaussien $n$ -dimensionnel

Un exemple de vecteurs aléatoires est celui des vecteurs gaussiens, que nous étudierons en détail au cours suivant. Soient  $m \in \mathbb{R}^n$  et  $C$  une matrice symétrique définie positive (c'est-à-dire telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  non identiquement nul  $x^t C x > 0$  où  $^t$  désigne la transposée). Le vecteur  $X \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur aléatoire gaussien d'espérance  $m$  et de matrice de covariance  $C$  si sa densité s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi^{n/2}) \sqrt{\det(C)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^t C^{-1}(x-m)\right)$$

On a alors  $\mathbb{E}(X) = m$  et  $C_X = C$ .

**TODO** figure densité Gaussienne

## Variables aléatoires indépendantes

Dans ce paragraphe, on considère un couple  $(X, Y)$  de vecteurs aléatoires respectivement à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ . Les résultats s'étendent sans peine à une famille finie quelconque.

On peut se ramener aux évènements pour caractériser l'indépendance de deux variables aléatoires. En effet, considérons le vecteur aléatoire  $Z = (X, Y)$ ,  $A$  et  $B$  deux ensembles mesurables de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ . On a vu que les évènements  $X \in A$  et  $Y \in B$  sont aléatoires si et seulement si  $\mathbb{P}_Z(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))\mathbb{P}(Y^{-1}(B)) = \mathbb{P}_X(X \in A)\mathbb{P}_Y(Y \in B)$ . Pour que deux vecteurs aléatoires soient indépendants, on va donc demander que ceci soit valable quelque soient  $A$  et  $B$ .

### Définition

Les vecteurs aléatoires  $X$  et  $Y$  sont *indépendants* si pour tous ensembles mesurables  $A$  et  $B$  dans les espaces correspondants,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Cette définition se traduit en termes de densités dans la proposition suivante que l'on énonce pour un couple de variables aléatoires pour simplifier

### Proposition

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles de densités  $f_X$  et  $f_Y$ .  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si le couple  $Z = (X, Y)$  a pour densité (sur  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$f_Z(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

**Démonstration** S'il y a indépendance, la définition implique

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du \int_{-\infty}^y f_Y(v)dv$$

ce qui montre que  $\mathbb{P}_Z$  vérifie la définition avec  $f_Z = f_X f_Y$ .

Inversement, si  $f_Z = f_X f_Y$ , on a pour tous  $A, B$  mesurables dans  $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \int_A \int_B f_X(x)f_Y(y)dxdy = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

■

Considérons maintenant deux fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$  telles que  $g(X)$  et  $h(Y)$  soient aussi des variables aléatoires (par exemple continues par morceaux).

### Proposition

Avec les notations précédentes, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes de densités respectives  $f_X$  et  $f_Y$ , les variables aléatoires  $g(X)$  et  $h(Y)$  sont aussi indépendantes. Si de plus  $g(X)$  et  $h(Y)$  sont intégrables, alors le produit  $g(X)h(Y)$  est aussi intégrable, et on a

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$$

**Démonstration** La première assertion est évidente par définition de l'indépendance. Par ailleurs, si  $g(X)$  et  $h(Y)$  sont intégrables, en notant  $f_{(X,Y)}$  la densité du couple  $(X, Y)$ , et en utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)h(Y)) &= \int_{\mathbb{R}^{m+n}} g(x)h(y)f_{(X,Y)}(x,y)dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)dx dy \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^m} g(x)f_X(x)dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} h(y)f_Y(y)dy \right) \\ &= \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))\end{aligned}$$

■

### Remarque

Ce résultat est encore valable si  $X$  et  $Y$  n'admettent pas de densité mais nous ne disposons pas encore des outils de théorie de la mesure nécessaires à sa démonstration.

On déduit de ce résultat et de la définition de la covariance que :

### Corollaire

Si les variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et de carré intégrable, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  et  $\rho(X, Y) = 0$ .

### Remarque

Attention, la réciproque est fautive. Par exemple, si  $X \sim \mathcal{U}_{[-1,1]}$  et  $Y = X^2$ .  $X$  et  $Y$  ne sont clairement pas indépendante mais on a

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X^2) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = 0$$

## Identification de densité

Un problème important est le suivant. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, admettant la densité  $f_X$ . Soit  $g$  une fonction mesurable, de sorte que  $Y = g(X)$  soit aussi une variable aléatoire. Est-ce que  $Y$  admet une densité, et si oui, comment la calculer ?

On peut déjà remarquer que cette densité n'existe pas toujours. Si par exemple  $g(x) = a$  pour tout  $x$ , la loi de  $Y$  est la masse de Dirac en  $a$ , qui n'a pas de densité.

Pour résoudre ce problème, l'idée consiste à essayer de mettre  $E(h(Y)) = E(h \circ g(X))$  sous la forme  $\int h(y)f_Y(y)dy$  pour une fonction convenable  $f_Y$ , et une classe de fonctions  $h$  suffisamment grande. La fonction  $f_Y$  sera alors la densité cherchée.

La proposition implique

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h \circ g(X)) = \int_{\mathbb{R}} h \circ g(x) f_X(x) dx$$

et on fait le changement de variable  $y = g(x)$  dans cette intégrale. Cela nécessite que  $g$  soit dérivable et bijective "par morceaux", et il faut faire très attention aux domaines où  $g$  est croissante ou décroissante. Puisque la fonction  $h$  est arbitraire appelle couramment cette technique la *méthode de la fonction muette*. Cette approche résulte en fait de la proposition suivante que nous ne démontrerons pas :

### Proposition

Si il existe une fonction  $f$  telle que pour toute fonction continue bornée  $h$ ,

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx$$

alors la loi de  $X$  admet la densité  $f$ .

L'idée de la preuve repose sur le fait que les fonctions continues bornées peuvent approcher une fonction  $h = 1_{]-\infty, y]}$ , pour laquelle la formule précédente donne la fonction de répartition de  $f$ .

Nous donnons ici quelques exemples d'application de cette méthode :

- Soit  $Y = aX + b$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Si  $a = 0$ , alors  $Y = b$  et la loi de  $Y$  est la masse de Dirac en  $b$  (sans densité). Si  $a \neq 0$ , on fait le changement de variable  $y = ax + b$ , ce qui donne

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{\mathbb{R}} h(ax + b) f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} h(y) f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|} dy$$

Donc

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}$$

- Soit  $Y = X^2$ . La fonction  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .  
Le changement de variable  $y = x^2$  donne alors

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{-\infty}^0 h(x^2) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^0 h(x^2) f_X(x) dx$$

Dans le cas des vecteurs aléatoires, l'idée est la même. Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , un vecteur aléatoire de densité  $f_X$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $g$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  et  $Y = g(X)$ . Plusieurs cas sont à considérer :

1.  $m > n$ , le vecteur  $Y$  n'admet pas de densité
2.  $m = n$ , on utilise comme dans le cas unidimensionnel le changement de variable  $y = g(x)$  dans

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h \circ g(X)) = \int_{\mathbb{R}^n} h \circ g(x) f_X(x) dx$$

Supposons d'abord que  $g$  soit une bijection continûment différentiable de  $A$  dans  $B$ , ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Le théorème de changement de variable nous assure :

$$\int_A h \circ g f_X(x) dx = \int_B h(y) f_X \circ g^{-1}(y) \frac{1}{|\det Dg(y)|} dy$$

où  $Dg$  désigne la matrice de Jacobi associée à la différentielle de  $g$ . Dans le cas où  $f_X(x) = 0$  en dehors de  $A$ , on obtient que  $Y$  admet la densité

$$f_Y(y) = 1_B(y) f_X \circ g^{-1}(y) \frac{1}{|\det Dg(y)|}.$$

Lorsque  $g$  est simplement continûment différentiable, il existe souvent une partition finie  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  de l'ensemble  $\{x; f_X(x) > 0\}$ , telle que  $g$  soit injective sur chaque  $A_i$ . On note alors  $B_i = g(A_i)$  l'image de  $A_i$  par  $g$ . On découpe alors l'intégrale selon les  $A_i$ , on applique la formule précédente à chaque morceau et on somme pour obtenir :

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n 1_{B_i}(y) f_X \circ g^{-1}(y) \frac{1}{|\det Dg(y)|},$$

où  $g^{-1}$  est bien définie sur chaque  $B_i$  comme image réciproque de la restriction de  $g$  à  $A_i$ .

3.  $m < n$ , on commence par "compléter"  $Y$ , en essayant de construire une application  $g'$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  dont les  $m$  premières composantes coïncident avec les composantes de  $g$  et pour laquelle on peut appliquer l'une des deux formules précédentes. On obtient ainsi la densité  $f'_{Y'}$  de  $Y' = g'(X)$  puis on obtient la densité de  $Y$  en calculant sa *loi marginale* :

$$f_Y(y_1, \dots, y_m) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} f'_{Y'}(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n) dy_{m+1} \dots dy_n$$

**TODO Exemples ou exercices ?**

1. Coordonnées polaires
2. Loi Beta
3. Somme de deux variables aléatoires indépendantes

## **Exercices**