

# Topologie

## Contents

<b>Complétude</b>	<b>1</b>
TODO: . . . . .	1
Théorème de Point Fixe de Banach . . . . .	1
Démonstration . . . . .	1
TODO . . . . .	2
<b>Exercices</b>	<b>3</b>
Comparaison des normes . . . . .	3
Normes d'opérateurs . . . . .	3
Equations Linéaires et Point Fixes . . . . .	3

## Complétude

### TODO:

- evn, espace métrique (comme sous-ensemble d'un e.v.n.), suite de Cauchy, complétude
- application lipschitzienne, (et lip est cont) contractante,  $\kappa$ -contractante

### Théorème de Point Fixe de Banach

Soit  $f : E \rightarrow E$  une application contractante dans un espace métrique  $E$ . Si l'espace  $E$  est complet, l'application  $f$  admet un unique *point fixe*  $x$ , c'est-à-dire une unique solution  $x \in E$  à l'équation

$$x = f(x).$$

### Démonstration

L'unicité du point fixe (l'existence d'au plus une solution à  $x = f(x)$ ) est simple à établir: si  $x$  et  $y$  sont deux points fixes de  $f$ , c'est-à-dire si  $x = f(x)$  et  $y = f(y)$ ,

alors  $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$ . L'application  $f$  étant  $\kappa$ -contractante, on a donc

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq \kappa\|x - y\|;$$

et puisque  $0 \leq \kappa < 1$ , cette inégalité entraîne  $\|x - y\| = 0$ , soit  $x = y$ .

Quant à l'existence du point fixe, sa preuve est constructive: nous allons établir que quel que soit le choix de  $x_0 \in E$ , la suite de valeurs définie par

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers le point fixe. Le point crucial est d'établir que cette suite admet une limite  $x_\infty$ ; en effet, si ce résultat est acquis, en passant à la limite sur  $n$  dans la relation de récurrence, et exploitant la continuité de l'application  $f$ , on obtient

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_\infty).$$

A cette fin, nous allons prouver que la suite des  $x_n$  est de Cauchy; l'existence d'une limite se déduira alors de la complétude de  $E$ . On remarque tout d'abord que pour tout entier  $n$ ,

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \leq \kappa\|x_{n+1} - x_n\|,$$

ce qui par récurrence fournit pour tout  $n$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \kappa^n \|x_1 - x_0\|.$$

Par conséquent, pour tout couple d'entiers  $n$  et  $p$ , on a

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \|x_{n+k+1} - x_{n+k}\| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \kappa^{n+k} \|x_1 - x_0\|.$$

Dans le second membre apparaît une somme de termes d'une suite géométrique:

$$\sum_{k=0}^{p-1} \kappa^{n+k} = \kappa^n \frac{1 - \kappa^p}{1 - \kappa} \leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa};$$

on en déduit

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa} \|x_1 - x_0\|.$$

Le second membre de cette inégalité tendant vers 0 indépendamment de  $p$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , la suite des  $x_n$  est bien de Cauchy, ce qui conclut la preuve.

## TODO

Applis, exemples, par exemple dans le cas matriciel, pour la résolution des systèmes linéaires, lien avec la norme d'opérateur.

## Exercices

### Comparaison des normes

TODO: comparaison manuelle, meilleure bornes

### Normes d'opérateurs

Changer les normes au départ et à l'arrivée, calculer les normes d'opérateurs associées sur la base d'une représentation matricielle (ex: norme sup au départ et à l'arrivée)

### Equations Linéaires et Point Fixes

Préparer et résoudre numériquement des systèmes de la forme  $Ax = b$  dans des cas simples (ex: Jacobi, Gauss-Seidel, cas diagonally dominant ?).

Exemples concrets (ex: Poisson Image editing) et exemples où “ça ne marche pas” en itérant sans s'assurer du caractère contractant.

Lien norme d'opérateur et rayon spectral ???