

Билеты по матлогике

Содержание

I	Логика и арифметика	7
a.	Определения	7
	Булевы функции	7
	Классы булевых функций	7
	Замыкание класса булевых функций	8
	Композиция булевых функций	8
	Замкнутость	8
	Полнота	8
	Пропозициональные формулы	8
	Скобочный итог	8
	Тавтология	8
	Противоречие	9
	КНФ, ДНФ, СКНФ, СДНФ	9
	Полином Жегалкина	9
b.	Простые утверждения	9
	Т. о существовании КНФ/ДНФ	9
	Т. замкнутости классов Поста	10
	Вывод $A \rightarrow A$	11
c.	Вопросы на 3	12
	Теорема об однозначном представлении булевой функции многочленом Жегалкина	12
d.	Вопросы на 4	13
e.	Вопросы на 5	13
f.	Доп вопросы на 5	13
	Теорема об однозначности синтаксического разбора пропозициональных формул	13
	Критерий Поста	13
g.	Доп вопросы на 6	15
	Базис монотонных функций	15
h.	Доп вопросы на 7	16
II	Теория множеств	17
a.	Определения	17
	Множество	17
	Объединение	17
	Пересечение	17
	Разность	17
	Симметрическая разность	17
	Упорядоченная пара	17

Декартово произведение	17
Соответствие	17
Отображение	17
Образ	17
Прообраз	17
Инъекция	17
Сюръекция	17
Биекция	17
Композиция	17
Множество в степени множества	17
Равномощность	17
Счетность	17
Континуальность	18
Бинарное отношение	18
Свойства отношений	18
Отношение эквивалентности	18
Отношение порядка	18
Линейный порядок	18
ЧУМ	18
ЛУМ	18
Фундированность	18
ВУМ	18
Минимальный элемент	18
Максимальный элемент	19
Наименьший элемент	19
Наибольший элемент	19
Цепь	19
Верхняя грань	19
Нижняя грань	19
Точная верхняя грань	19
Точная нижняя грань	19
Гомоморфизм ЧУМов	19
Изоморфизм ЧУМов	19
Сложение ЧУМов	19
Произведение ЧУМов	19
Декартово произведение ЧУМов	19
Начальный отрезок	19
Предельный элемент	19

	Транзитивные множества	19
	Порядковые типы и ординалы	19
	Аксиома выбора	20
	Базис Гамеля	20
b.	Простые утверждения	20
	Основные тождества тм	20
	Равномощность	22
	Объединение и декартово произведение счетных множеств	22
	В любом бесконечном множестве найдётся счётное подмножество	23
	Несчётность множества точек на отрезке	24
	Нефундированность прямого лексикографического порядка на конечных словах	24
	Любой начальный отрезок вполне упорядоченного множества, отличный от всего множества, представляется в виде $[0, a)$	24
	Вполне упорядоченное множество изоморфно своему начальному отрезку вида $[0, a)$	25
	Сумма и произведение фундированных множеств фундированы, вполне упорядоченных - вполне упорядочены	25
	Свойства сложения и умножения вполне упорядоченных множеств	25
	Сравнимость любых двух множеств по мощности	26
c.	Вопросы на 3	26
	Эквивалентность фундированности, отсутствия бесконечно убывающей последовательности эле- ментов и принципа трансфинитной индукции	26
	Лемма о монотонной функции из вполне упорядоченного множества в себя	27
	Теорема о структуре вполне упорядоченного множества	27
	Теорема о трансфинитной рекурсии	28
d.	Вопросы на 4	28
	Сравнимость любых двух вполне упорядоченных множеств	28
	Любой частичный порядок можно дополнить до линейного	29
	Теорема о вычитании ординалов	29
	Теорема о делении ординалов	29
e.	Вопросы на 5	30
	Теорема Цермело	30
	Лемма Цорна	32
	Объединение двух бесконечных множеств равномощно одному из них	32
	Декартов квадрат бесконечного множества равномощен ему	32
f.	Доп вопросы на 5	33
g.	Доп вопросы на 6	33
h.	Доп вопросы на 7	33

III	Вычислимость	34
a.	Определения	34
b.	Простые утверждения	34
	Композиция вычислимых функций вычислима	34
	Перечислимость любого разрешимого множества	34
	Существование вычислимой в обе стороны биекции между \mathbb{N}^2 и \mathbb{N}	34
c.	Вопросы на 3	34
d.	Вопросы на 4	34
e.	Вопросы на 5	34
f.	Доп вопросы на 5	34
g.	Доп вопросы на 6	34
h.	Доп вопросы на 7	34

Предисловие

Данные билеты были написаны [Калининым Иваном](#), поэтому по всем вопросам обращаться ко мне в лс. Также буду признателен за сообщения об опечатках в индексах, как это часто бывает, и об ошибках в определениях/доказательствах - надеюсь, их все же нет.

Экзамен по матлогике предполагает выбор лишь 3-х вопросов по каждой теме из доп вопросов, поэтому здесь написаны лишь по 3 билета на каждый балл доп вопроса на выбор автора теха.

P.S. Данные решения не являются единственно верными, и существует большое множество других вариантов доказательств. Поэтому не надо воспринимать данный тех как сборник единственно верных решений.

I Логика и арифметика

а. Определения

1. *n-арной булевой функцией* называется произвольное отображение $\phi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

Откуда тривиальным образом¹ получаем, что от n аргументов существует ровно $|\{0, 1\}|^{|\{0, 1\}^n|} = 2^{2^n}$

Стартерпак булевых функций:

От нуля переменных будет всего две функции: \perp - тавтологический 0, \top - тавтологическая 1

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

	<table><tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>$x_1 \vee x_2$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1		<table><tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>$x_1 \rightarrow x_2$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$																															
0	0	0																															
0	1	1																															
1	0	1																															
1	1	1																															
x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$																															
0	0	1																															
0	1	1																															
1	0	0																															
1	1	1																															
Дизъюнкция:		Импликация:																															

Исключающее или (XOR):	<table><tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>$x_1 \oplus x_2$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	Эквиваленция:	<table><tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>$x_1 \leftrightarrow x_2$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	x_1	x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
	x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$																														
	0	0	0																														
	0	1	1																														
	1	0	1																														
1	1	0																															
x_1	x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$																															
0	0	1																															
0	1	0																															
1	0	0																															
1	1	1																															

	<table><tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>$x_1 x_2$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x_1	x_2	$x_1 x_2$	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0		<table><tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>$x_1 \downarrow x_2$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
x_1	x_2	$x_1 x_2$																															
0	0	1																															
0	1	1																															
1	0	1																															
1	1	0																															
x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$																															
0	0	1																															
0	1	0																															
1	0	0																															
1	1	0																															
Штрих Шеффера (NAND):		Стрелка Пирса (NOR):																															

2. Классы функций

P_0 - Сохраняющие 0

Класс² булевых функций (далее бф), таких что на наборе (0 ... 0) они принимают значение 0.

¹def: A^B - множество всех отображений из B в A

²Множество

P_1 - *Сохранившие 1*

Класс булевых функций (далее бф), таких что на наборе $(1 \dots 1)$ они принимают значение 1.

S - *самодвойственные*

Пусть $f^{(n)}$ ³ - n -арная бф, тогда *двойственной* к ней называется такая n -арная бф $g^{(n)}$, что $f(x_1 \dots x_n) = \neg g(\neg x_1 \dots \neg x_n)$

Тогда S - класс бф, являющихся двойственными по отношению к самим себе

M - *монотонные*

Класс бф, таких что $f(x_1 \dots x_n) \geq f(x'_1 \dots x'_n)$, если $\forall i \in \{1 \dots n\} \hookrightarrow x_i \geq x'_i$

$A(L)$ - *Аффинные (линейные)*

Класс бф, таких что их представление полиномом Жегалкина является линейным. ⁴

3. **Замыканием класса булевых функций** называется класс бф, составленный из композиций исходного любого уровня вложенности, обозначается $[Q]$, где Q - класс булевых функций

4. **Композицией булевых функций** уровня вложенности n называется:

- $n = 0$, Множество всех проекторов
- $n > 0$, Множество всех возможных композиций из $n-1$ уровня и функций из данного класса

5. Класс булевых функций Q называется **замкнутым**, если $[Q] = Q$

6. Класс булевых функций Q называется **полным**, если $[Q]$ - множество всех возможных булевых функций

7. Определение **пропозициональной формулы** (индуктивное):

1. Если p - переменная, то p - пропозициональная формула
2. Если ψ - пропозициональная формула, то $\neg\psi$ - тоже пропозициональная формула
3. Если φ и ψ - пропозициональные формулы, то $(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \vee \varphi)$, $(\psi \rightarrow \varphi)$ - тоже пропозициональные формулы

8. **Скобочным итогом** пропозициональной формулы называют разность между количеством открывающих и закрывающих скобок.

9. **Тавтологией** называется формула, истинная на любом наборе переменных

Примеры: ⁵

- (a) Закон тождества $A \rightarrow A$
- (b) Закон непротиворечия $\neg(A \wedge \neg A)$
- (c) Закон исключенного третьего $\neg A \vee A$
- (d) Закон двойного отрицания $(A \rightarrow \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \rightarrow A)$
- (e) Закон контрапозиции $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \wedge ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$

³Будем вверху в скобках показывать аридность функции

⁴Подробнее в пункте про полиномы Жегалкина

⁵Здесь я немного поменял примеры Мусатова - заменил эквиваленцию на конъюнкцию двух импликаций, чтобы подходило под определение пропозициональной формулы

- (f) Законы де Моргана $(\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)) \wedge ((\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B))$ и $(\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B))$
- (g) Закон силлогизма $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

10. **Противоречием** называется формула, ложная на любом наборе переменных

11. **Литералом** называется переменная или ее отрицание.

Дизъюнктом называется дизъюнкция литералов

Конъюнктом называется конъюнкция литералов

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция дизъюнктов

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конъюнктов

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая КНФ, что в каждом дизъюнкте каждая переменная встречается ровно один раз (или если побольше демагогий, то

1. каждая переменная не повторяется внутри дизъюнкта
2. в каждом дизъюнкте присутствуют все переменные от которых зависит функция
3. нет одинаковых дизъюнктов)

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется такая ДНФ, что в каждом дизъюнкте каждая переменная встречается ровно один раз (или если побольше демагогий, то

1. каждая переменная не повторяется внутри конъюнкта
2. в каждом конъюнкте присутствуют все переменные от которых зависит функция
3. нет одинаковых конъюнктов)

12. **Мономом Жегалкина** называется конъюнкция переменных ⁶, при чем принято опускать знак конъюнкции, как в обычных школьных алгебраических мономах.

Полиномом Жегалкина называется сумма мономов Жегалкина, где под суммой понимается исключающее или.

б. Простые утверждения

1. Наличие КНФ или ДНФ для любой бф

КНФ:

Пусть ψ - n-арная булева функция. Тогда по каждому набору (их 2^n), n-мерному вектору x , если функция ложна на нем, построим дизъюнкт по следующему правилу, если $x_i = 0$, то включим i-ую переменную⁷ в дизъюнкт, иначе - ее отрицание. Потом возьмем конъюнкцию всех дизъюнктов. Формально получим:

$$CNF_{\psi} = \bigwedge_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ f(x)=0}} \bigvee_{j=1}^n p_j^{1-x_j}, \quad \text{где } p_j^{x_j} = \begin{cases} p_j & x_j = 1 \\ \neg p_j & x_j = 0 \end{cases}$$

⁶Важно отметить, что конъюнкция переменных (моном) \neq конъюнкт, т.к. второй допускает инверсию переменных, а в мономе никаких инверсий быть не может

⁷Будем обозначать i-ую переменную как p_i

Заметим, что каждый дизъюнкт $\bigvee_{j=1}^n p_i^{1-x_i}$ ложен только на своем наборе x , поэтому конечная формула будет ложна только на тех наборах, где бф принимает 0, значит, постоили для нее КНФ. Даже более того, СКНФ. Непокрытым остался лишь случай, когда функция - тавтологическая единица, тогда она представима в виде $p \vee \neg p$, но это не является СКНФ. Для тавтологий нет СКНФ.

ДНФ:

Пусть ψ - n -арная булева функция. Тогда по каждому набору (их 2^n), n -мерному вектору x , если функция истинна на нем, построим конъюнкт по следующему правилу, если $x_i = 1$, то включим i -ую переменную в конъюнкт, иначе - ее отрицание. Потом возьмем дизъюнкцию всех конъюнктов. Формально получим:

$$DNF_{\psi} = \bigvee_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ f(x)=1}} \bigwedge_{j=1}^n p_i^{x_i}, \quad \text{где } p_i^{x_i} = \begin{cases} p_i & x_i = 1 \\ \neg p_i & x_i = 0 \end{cases}$$

Заметим, что каждый конъюнкт $\bigwedge_{j=1}^n p_i^{x_i}$ истинен только на своем наборе x , поэтому конечная формула будет истинна только на тех наборах, где бф принимает 1, значит, постоили для нее ДНФ. Даже более того, СДНФ. Непокрытым остался лишь случай, когда функция - тавтологический ноль, тогда она представима в виде $p \wedge \neg p$, но это не является СДНФ. Для противоречий нет СДНФ.

2. Классы поста (P_0, P_1, S, M, A) замкнуты

P_0 :

$$f^{(n)}, g^{(k)} = \left\| \begin{array}{c} g_1^{(k)} \\ \vdots \\ g_n^{(k)} \end{array} \right\| \in P_0$$

$$h^{(k)} = f \circ g$$

$$h(0...0) = f(g(0...0))$$

$$g_i \in P_0 \Rightarrow h(0...0) = f(0...0) = 0 \Rightarrow h \in P_0$$

P_1 :

$$f^{(n)}, g^{(k)} = \left\| \begin{array}{c} g_1^{(k)} \\ \vdots \\ g_n^{(k)} \end{array} \right\| \in P_1$$

$$h(1...1) = f(g(1...1))$$

$$g_i \in P_1 \Rightarrow h(1...1) = f(1...1) = 1 \Rightarrow h \in P_1$$

M :

$$f^{(n)}, g^{(k)} = \left\| \begin{array}{c} g_1^{(k)} \\ \vdots \\ g_n^{(k)} \end{array} \right\| \in M$$

$$h^{(k)} = f(g)$$

Пусть x, y — n -мерные векторы⁸ $x \geq y$ (покоординатно)

$$g_i \in M \Rightarrow g_i(x) \geq g_i(y) \Rightarrow g(x) \geq g(y)$$

$$h(x) = f(g(x)) > f(g(y)) = h(y) \Rightarrow h \in M$$

S :

$$f^{(n)}, g^{(k)} = \left\| \begin{array}{c} g_1^{(k)} \\ \vdots \\ g_n^{(k)} \end{array} \right\| \in S$$

$$g_i \in M \Rightarrow g_i(x) = \neg g_i(\neg x^9) \Rightarrow g(x) = \neg g(\neg x)$$

$$h(x) = f(g(x)) = f(\neg g(\neg x)) = \neg f(g(\neg x)) = \neg h(\neg x) \Rightarrow h \in S$$

A :

$$f^{(n)}, g^{(k)} = \left\| \begin{array}{c} g_1^{(k)} \\ \vdots \\ g_n^{(k)} \end{array} \right\| \in A$$

$$g_m \in A \Rightarrow g_j = \alpha_0^j \oplus \bigoplus_{i=1}^k \alpha_i^j p_i, \text{ где } \alpha_i^j \in \{0, 1\}$$

$$f \in A \Rightarrow f = \beta_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^n \beta_j q_j, \text{ где } \beta_j \in \{0, 1\}$$

$$h = f \circ g = \beta_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^n \beta_j (\alpha_0^j \oplus \bigoplus_{i=1}^k \alpha_i^j p_i) = \beta_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^n \beta_j \alpha_0^j \oplus \bigoplus_{j=1}^n \bigoplus_{i=1}^k \beta_j \alpha_i^j p_i$$

что является линейным полиномом $\Rightarrow h \in A$

3. Вывод $A \rightarrow A$

$$1. A \rightarrow (A \rightarrow A) - Ax.1$$

$$2. A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) - Ax.1$$

$$3. (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) - Ax.2$$

$$4. (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) - MP\ 2, 3$$

$$5. (A \rightarrow A) - MP\ 2, 4$$

⁸Компоненты векторов — 0 или 1, т.е. это есть не что иное, как наборы значений переменных

⁹Покомпонентная инверсия вектора

с. Вопросы на 3

1. Теорема об однозначном представлении булевой функции многочленом Жегалкина

Для любой бф найдется и при том единственный до перестановки переменных и слагаемых полином Жегалкина¹⁰

Доказательство

Всего функций от n переменных - 2^{2^n} штук. Мономов Жегалкина - 2^n штук (моном по сути - некоторое подмножество переменных, а всего подмножеств - мощность булеана), при чем перед каждым мономом стоит коэффициент 0 или 1. Итого всего 2^{2^n} полиномов Жегалкина от n переменных. Тогда, если мы покажем, что разным полиномам соответствуют разные функции, то мы докажем данное утверждение. Докажем, что разным полиномам сопоставляются разные функции. Предположим противное - пусть существуют два различных полинома, представляющих одну и ту же функцию. Вычтем их друг из друга и получим противоречие

Формально:

$$f = \alpha_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^{2^n} \alpha_j m_j, \text{ где } \alpha_j \in \{0, 1\}$$

Где m_j - это j -ый моном (т.е. занумеруем как-то мономы - их конечное число, поэтому данная операция проста и возможна)

$$f = \beta_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^{2^n} \beta_j m_j, \text{ где } \beta_j \in \{0, 1\}$$

$$\exists y \in \{0 \dots 2^n\} : \alpha_y \neq \beta_y$$

Приравняем два равенства:

$$\alpha_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^{2^n} \alpha_j m_j = \beta_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^{2^n} \beta_j m_j$$

Так как полином Жегалкина не просто называется полиномом)¹¹, то перенесем все вправо и получим (Помним, что хог - это одновременно и сложение и вычитание):

$$\alpha_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^{2^n} \alpha_j m_j \oplus \beta_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^{2^n} \beta_j m_j = 0$$

$$(\alpha_0 \oplus \beta_0) \oplus \bigoplus_{j=1}^{2^n} (\alpha_j \oplus \beta_j) m_j = 0$$

Откуда: $\forall j \hookrightarrow \alpha_j \oplus \beta_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = \beta_j$ - получили противоречие. **Ч.Т.Д.**

¹⁰Здесь предполагается, что все повторяющиеся мономы сокращены

¹¹Это все же лучше не говорить на экзамене

d. Вопросы на 4

e. Вопросы на 5

f. Доп вопросы на 5

1. Лемма о скобочном итоге

Пусть ψ - пропозициональная формула¹², s - ее префикс. Тогда скобочный итог s неотрицательный, причем он равен 0 только тогда, когда $s = \psi$ или $s = \{\neg\}^*$

Доказательство индукцией по построению формулы

Для переменной все верно тривиально выполнено

Пусть для ψ условие выполнено. Проверим для $\neg\psi$:

Т.к. \neg на скобочный итог не влияет, то на \neg - выполнено, а далее все как и в ψ - поэтому верно

Пусть для ψ и φ условие выполнено. Проверим для $(\psi * \varphi)$:

Любой нетривиальный префикс $(\psi * \varphi)$ - это либо (ψ') , где $\psi' \sqsubset \psi$, либо $(\psi * \varphi')$, где $\varphi' \sqsubset \varphi$. В первом случае верность следует из предположения индукции (Для ψ - лемма выполняется - значит скобочный итог ψ' неотрицателен, со скобкой же получим, что больше 0). Во втором же случае скобочный итог формулы есть сумма скобочных итогов $(\psi, *, \varphi')$ - он больше 0, т.к. по предположению индукции для φ' он неотрицателен, для ψ и $*$ - равен 0, скобка же увеличит его на 1 \Rightarrow будет больше 0. А итог всего $(\psi * \varphi)$ равен 0. **Ч.Т.Д.**

2. Лемма о беспрефиксности пропозициональных формул

Никакая пропозициональная формула не может быть префиксом другой.

Доказательство от противного

Пусть нашлись две такие пропозициональные формулы, что одна является префиксом другой. Тогда по лемме о скобочном итоге мы получим, что с одной стороны скобочный итог первой должен быть равен 0 - т.к. это вся формула, с другой же стороны получим, что он больше нуля - т.к. это нетривиальный префикс второй формулы \Rightarrow его скобочный итог больше 0. Имеем противоречие **Ч.Т.Д.**

3. Теорема об однозначности синтаксического разбора пропозициональных формул

По пропозициональной формуле можно однозначно сказать, из каких подформул она была получена и по каким правилам.

Доказательство

Если ψ - переменная, то все тривиально выполнено.

Иначе посмотрим на первый символ ψ - это не переменная. Если это \neg - то построено по правилу 2 из формулы полученной из ψ путем вычеркивания символа отрицания. Иначе первый символ ψ - скобка.

Тогда покажем единственность разбора:

Пусть существует два разбора $(\psi_1 * \varphi_1) = (\psi_2 * \varphi_2)$ Если $\psi_1 = \psi_2$, то и $\varphi_1 = \varphi_2$ - разборы совпали. Тогда $\neg(\psi_1 = \psi_2)$. БОО $\psi_1 \sqsubset \psi_2$ - имеем противоречие с леммой о беспрефиксности. **Ч.Т.Д.**

¹²Здесь полагаем, что все переменные являются односимвольными и все символы различны.

¹³Это один из символов $\rightarrow, \wedge, \vee$

4. Критерий Поста

Класс K является полным тогда и только тогда, когда он полностью не вложен ни в один из классов P_0, P_1, M, S, A .

Доказательство

Если K вложен в какой-то из классов, то его замыкание тоже будет вложено в этот класс. Значит, для полноты класса необходима невложенность не в один из классов выше.

Пусть K не вложен и содержит не сохраняющую 0 функцию f , не сохраняющую 1 функцию g , немонотонную m , несамодвойственную s и неаффинную a . Возможно, некоторые из них совпадут.

Т.к. f не сохраняет 0, то $f(0 \dots 0) = 1$, если тогда еще f не сохраняет 1, то $f(1 \dots 1) = 0$, т.е. $f(p \dots p)$ - отрицание. Иначе $f(1 \dots 1) = 1$, т.е. $f(p \dots p) = \top$. Т.к. g не сохраняет 1, то все то же самое - \perp или \neg . Итого, двумя функциями можно получить или две константы, или константу и отрицание, тогда применив отрицание к константе получим вторую, либо же только отрицание - $f = g$.

m - немонотонна, тогда найдутся такие i и $x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_m$, что $m(x_1 \dots x_{i-1}, 0, x_{i+1} \dots x_m) = 1$ и $m(x_1 \dots x_{i-1}, 1, x_{i+1} \dots x_m) = 0$. Подставим выраженные константы и получим отрицание:

$$m(x_1 \dots x_{i-1}, p, x_{i+1} \dots x_m) = \neg p$$

s - несамодвойственная, тогда найдутся такие $x_1 \dots x_m$, что $s(x_1 \dots x_m) = s(\neg x_1 \dots \neg x_m)$. Имея отрицание подберем вектор из p и отрицания $\neg p$ так, чтобы получить чередования значений ровно как в $x_1 \dots x_m$: т.е. если $x_1 \dots x_m = 1, 0, 0, 0, 1, 1$, то построим вектор $w = (\neg p, p, p, p, \neg p, \neg p)$. Тогда $h(w) = h(\neg w)$ - значит это константа - при p и $\neg p$ принимает одинаковые значения. Тогда, получив одну константу, применим отрицание к ней и получим вторую.

Итого, точно имеем константы и отрицание.

a - неаффинная функция. Тогда пускай БОО он содержит моном, включающий в себя x_1, x_2 , т.е. $a = x_1 x_2 P(x_3 \dots x_n) \oplus x_1 Q(x_3 \dots x_n) \oplus x_2 R(x_3 \dots x_n) \oplus S(x_3 \dots x_n)$. Тогда найдется какие-то $y_3 \dots y_m$, что $P(y_3 \dots y_m) = 1$. Подставим уже выраженные константы вместо $y_3 \dots y_m$ и получим функцию $\hat{a} = x_1 x_2 \oplus q x_1 \oplus r x_2 \oplus s$

Тогда имеем функции:

q	r	s	\hat{a}
0	0	0	$x_1 \wedge x_2$
0	0	1	$x_1 x_2$
0	1	0	$x_1 \nrightarrow x_2$
0	1	1	$x_1 \rightarrow x_2$
1	0	0	$x_1 \nwarrow x_2$
1	0	1	$x_1 \leftarrow x_2$
1	1	0	$x_1 \vee x_2$
1	1	1	$x_1 \downarrow x_2$

В каждом из случаев имеет полную систему - просто выразим через \perp, \top, \neg и одну из функций выше \wedge - получим систему (\neg, \wedge) - полную. **Ч.Т.Д.**

g. Доп вопросы на 6

1. Лемма о дополнительных классах бф

\bigwedge - класс конъюнктивных функций и \bigvee - класс дизъюнктивных функций замкнуты.

Доказательство

\bigwedge - класс таких функций, что $f(x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n) = f(x_1, \dots, x_n) \wedge f(y_1, \dots, y_n)$. Покажем его замкнутость:

$$f^{(n)}, g^{(k)} = \left\| \begin{array}{c} g_1^{(k)} \\ \vdots \\ g_n^{(k)} \end{array} \right\| \in \bigwedge$$

$$h^{(k)} = f \circ g$$

$$g_i \in \bigwedge \Rightarrow g_i(x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n) = g_i(x_1, \dots, x_n) \wedge g_i(y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{Значит, } g(x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n) = g(x_1, \dots, x_n) \wedge^{14} g(y_1, \dots, y_n)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда, } h(x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n) &= f(g(x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n)) = f(g(x_1, \dots, x_n) \wedge g(y_1, \dots, y_n)) = \\ &= f(g(x_1, \dots, x_n)) \wedge f(g(y_1, \dots, y_n)) = h(x_1, \dots, x_n) \wedge h(y_1, \dots, y_n) \Rightarrow h \in \bigwedge \end{aligned}$$

Аналогично показывается замкнутость класса \bigvee - класс таких функций, что $f(x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n) = f(x_1, \dots, x_n) \vee f(y_1, \dots, y_n)$.

2. Базис монотонных функций

$1, 0, \wedge, \vee$ - базис M .

Доказательство

Так как все эти функции монотонны, то их замыкание лежит в M . Также, ни одна из них не может быть выражена через другие (без 0 (1) - все сохраняют 1 (0), без \wedge - все вложены в класс конъюнктивных функций, без \vee - в класс дизъюнктивных функций)

Покажем, что любую монотонную можно выразить через данные 4 функции:

Если функция - константа, то тривиально выполнено, иначе - не константа, тогда на (0 ... 0) она принимает значение 0, а на (1 .. 1) - 1. Назовем набор значений минимальным, если смена любой единицы на ноль приведет к уменьшению значения функции. Тогда по каждому минимальному набору построим конъюнкцию переменных: если значение соответствующей переменной равно 1, то включим ее в конъюнкцию. Потом возьмем дизъюнкцию все полученных конъюнкций.

Полученная формула - есть представление функции. Т.к. если f приняла значение 1 на каком-то наборе, то найдется такая конъюнкция, что содержит часть переменных, что равны 1 на данном наборе. (Найдет предшествующий данному набору минимальный - при "подъеме" вверх по таблице истинности "триггерные" переменные не поменяют значение и будут равны 1, дойдем до минимального - для него есть конъюнкция по построению дающая 1, "спустившись" обратно вниз снова "триггеры" не поменяют значение) **Ч.Т.Д.**

¹⁴Покомпонентная конъюнкция

н. Доп вопросы на 7

II Теория множеств

а. Определения

1. *Множество* - неопределяемое понятие

2. *Объединение множеств*:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

3. *Пересечение множеств*:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

4. *Разность множеств*:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$$

5. *Симметрическая разность множеств*:

$$A \Delta B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}$$

6. *Упорядоченная пара*

$$\text{По Куратовскому: } (a, b) := \{a, \{a, b\}\}$$

7. *Декартово произведение*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

8. *Соответствием* называют производное подмножество декартова произведения множеств.

9. *Отображением* называют такое соответствие, что у каждого элемента ровно один образ.

10. *Образом* множества S называют множество $f(S) := \bigcup_{x \in S} f(x)$.

11. *Прообразом* множества S называют множество $f^{-1}(S) := \{x \mid f(x) \in S\}$.

12. *Инъекцией* называют такое отображение $f : A \rightarrow B$, что $\forall a_1 \neq a_2 \in A \hookrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

13. *Сюръекцией* называют такое отображение $f : A \rightarrow B$, что $\forall b \in B \exists a \in A \hookrightarrow f(a) = b$.

14. *Биекцией* называют отображение, являющееся и инъекцией, и сюръекцией.

15. Пусть $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ - отображения. Тогда *композицией* отображений f и g называют отображение $h : A \rightarrow C$, обозначаемое $h = g \circ f$, которое определяется как $\{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in f \wedge (b, c) \in g\}$

16. Пусть A и B - произвольные множества, тогда A^B - множество всех отображений из B в A

17. Пусть A и B - произвольные множества, тогда они называются *равномощными*, если существует биекция из A в B . Обозначение: $A \cong B$

18. Множество называется **счетным**, если оно равномощно \mathbb{N} .
19. Множество называется **континуальным**, если оно равномощно \mathbb{R} .
20. **Бинарным отношением** на множестве называют любое подмножество его декартова квадрата.
21. **Свойства отношений**. Пусть \mathcal{R} - отношение на A :

(a) Рефлексивность

$$\forall a \in A \hookrightarrow a\mathcal{R}a$$

(b) Иррефлексивность

$$\forall a \in A \hookrightarrow \neg(a\mathcal{R}a)$$

(c) Симметричность

$$\forall a \in A \forall b \in A \hookrightarrow a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$$

(d) Антисимметричность

$$\forall a \in A \forall b \in A \hookrightarrow a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$$

(e) Транзитивность

$$\forall a \in A \forall b \in A \forall c \in A \hookrightarrow a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$$

(f) Полнота

$$\forall a \in A \forall b \in A \hookrightarrow a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$$

22. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется **отношением эквивалентности**.
23. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется **отношением порядка**.
24. Порядок \preceq на A будет называться **линейным**, если:

$$\forall a \in A \forall b \in A \hookrightarrow a \preceq b \vee b \preceq a$$

25. Множество с введенными на нем порядком называется **(Частично) Упорядоченным Множеством - ЧУМ/УМ**
26. Множество с введенными на нем линейным порядком называется **Линейно Упорядоченным Множеством - ЛУМ**
27. Множество, в каждом подмножестве которого существует минимальный элемент¹⁵, называется **фундированным**.
28. Фундированное множество с линейным порядком называется **Вполне Упорядоченным Множеством - ВУМ**

¹⁵т.е. такой, меньше которого нет, - не путать с наименьшим - меньше всех

29. **Минимальным** называют элемент, меньше которого нет.
30. **Максимальным** называют элемент, больше которого нет.
31. **Наименьшим** называют элемент в множестве, который не больше всех элементов в данном множестве.
32. **Наибольшим** называют элемент в множестве, который не меньше всех элементов в данном множестве.
33. **Цепью** в упорядоченном множестве $\langle M, \lesssim \rangle$ называют последовательность элементов $a_1 \dots a_n$, такую что $a_1 \lesssim a_2 \lesssim \dots \lesssim a_n$
34. **Верхней гранью** множества $S \subseteq M : \langle M, \lesssim \rangle$ называется $m \in M$, такое что $\forall s \in S (m \gtrsim s)$
35. **Нижней гранью** множества $S \subseteq M : \langle M, \lesssim \rangle$ называется $m \in M$, такое что $\forall s \in S (s \gtrsim m)$
36. **Точной верхней гранью** множества $S \subseteq M : \langle M, \lesssim \rangle$ или **супремумом** называют такую верхнюю грань, что она принадлежит S и является наименьшей среди всех остальных верхних граней.
37. **Точной нижней гранью** множества $S \subseteq M : \langle M, \lesssim \rangle$ или **инфимумом** называют такую нижнюю грань, что она принадлежит S и является наибольшей среди всех остальных нижних граней.
38. **Гомоморфизмом** ЧУМов называют отображение, уважающее порядок. Формально: $\langle A, \lesssim_A \rangle$ и $\langle B, \lesssim_B \rangle$ - ЧУМы, $\varphi : A \rightarrow B$ - гомоморфизм, если $\forall x, y \in A (x \lesssim_A y \Leftrightarrow \varphi(x) \lesssim_B \varphi(y))$
39. **Изоморфизмом** ЧУМов называют гомоморфизм ЧУМов, являющийся биекцией.
40. **Суммой** ЧУМов $\langle A, \lesssim_A \rangle$ и $\langle B, \lesssim_B \rangle$ называют такой ЧУМ $\langle C, \lesssim_C \rangle$,
что $C = A \cup B, x \lesssim_C y$, если $\begin{cases} 1. x \in B \wedge y \in A \\ 2. x, y \in A \wedge x \lesssim_A y \\ 3. x, y \in B \wedge x \lesssim_B y \end{cases}$
41. **Прозведением** ЧУМов $\langle A, \lesssim_A \rangle$ и $\langle B, \lesssim_B \rangle$ называют такой ЧУМ $\langle C, \lesssim_C \rangle$,
что $C = A \times B, (p, q) \lesssim_C (s, t)$, если $\begin{cases} 1. q \succ_B t \\ 2. q =_B t \wedge p \lesssim_A s \end{cases}$
42. **Декартово проведением** ЧУМов $\langle A, \lesssim_A \rangle$ и $\langle B, \lesssim_B \rangle$ называют такой ЧУМ $\langle C, \lesssim_C \rangle$,
что $C = A \times B, (p, q) \lesssim_C (s, t)$, если $q \lesssim_B t \wedge p \lesssim_A s$
43. Пусть ВУМ Ψ разбит на две непересекающиеся части $M \sqcup \Lambda = \Psi$, такие что $\forall \mu \in M \forall \lambda \in \Lambda (\mu < \lambda)$. Тогда множество M называется **начальным отрезком** ВУМа Ψ .
44. **Предельным элементом** в ВУМе называют такой элемент, у которого нет предыдущего. Формально:
 $\langle A, \leq_A \rangle$ - ВУМ, тогда a - предельный, если $\nexists y : y \leq a$
45. Множество M называется **транзитивным**, если $\forall A \in M \forall x \in A (x \in M)$

46. **Порядковым типом** или **ординалом** называют такое транзитивное множество, что любой его элемент тоже транзитивен.

Примеры:

1. ω - наименьший счетный ординал, $\omega = \sup\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
2. $\omega^k, k \in \mathbb{N} = \omega^{k-1} \cdot \omega$, причем $\omega^0 = 1$
3. $\omega^\omega = \sup\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \dots\}$
4. $\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\}$

47. Аксиома выбора

Формулировки (эквивалентны):

1. $\forall M \exists \varphi : 2^M \setminus M \rightarrow M$ такая что $\forall M' \subsetneq M (\varphi(M') \notin M')$
2. $\forall M \exists \varphi : 2^M \setminus \emptyset \rightarrow M$ такая что $\forall M' \subsetneq M (\varphi(M') \in M')$

48. **Базисом Гамеля**¹⁶ называется линейно независимый набор векторов, такой что любой вектор пространства является их линейной комбинацией.

в. Простые утверждения

1. Основные тождества теоретико-множественных операций, декартово произведение и возведение множества в степени множества.

Данные тождества слишком тривиальны, чтобы приводить их доказательства. Опишу лишь способы доказательства:

- Круги Эйлера

Просто нарисовали три кружочка и красим области

- По определению

Расписываем, что значит, что x принадлежит левой части равенства, выводим из этого правую. (Показали вложенность левого множества в правое) Аналогично проделываем справа налево. В итоге правое в левом, а левое в правом, следовательно, они равны.

- Булевы функции

Данный метод эквивалентен предыдущему. Сопоставляем каждому множеству в равенстве его характеристическую функцию (1 - если лежит, 0 - в противном случае) и переходим на булевы функции и фокусы покус там. Вот список переходов из операций тм в операции бф:

ТМ	БФ
\cup	\vee
\cap	\wedge
Δ	\oplus
\setminus	\rightarrow
$-$	\neg

¹⁶Или если говорить для простых смертных *просто базисом*

Теперь сами тождества:

Ассоциативность

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \Delta B = B \Delta A$$

Инволютивность

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Идемпотентность

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Аннигиляция

$$A \setminus A = \emptyset$$

$$A \Delta A = \emptyset$$

де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Дистрибутивность

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

Правила отождествления кортежей¹⁷:

$$1. ((a, b), c) \sim (a, (b, c))$$

$$2. (a, \emptyset) \sim (a)$$

3. Правила 1 и 2 можно применять к составным частям кортежа. Свойства декартового умножения:

$$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$$

$$A^n \sim \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}}$$

$$A^m \times A^k \sim A^{m+k}$$

$$A \times \{\emptyset\} \sim A$$

$$(A^n)^m \sim A^{nm}$$

Доказательства

1. Вытекает из того, что мы отождествляем $((a, b), c)$ и $(a, (b, c))$

¹⁷Здесь надо напомнить, что под кортежем длины 0 мы понимаем пустое множество, а под кортежем длины $n > 0$ мы понимаем упорядоченную пару из первого элемента данного кортежа и другого кортежа длины $n-1$, построенного из оставшихся элементов

2. Вытекает из того, что мы отождествляем $((\dots((a_0, a_1), a_2) \dots), a_n)$ и $(a_0, a_1 \dots, a_n)$

3. Аналогично отождествляем (x, \emptyset) и x

4. Данное отождествление выполняется, если справедливо отождествление $((a_1, \dots, a_k), (a_{k+1}, \dots, a_n)) \sim (a_1, \dots, a_n)$. Покажем это:

$$((a_1, \dots, a_k), (a_{k+1}, \dots, a_n)) \sim ((a_1, \dots, a_k), (a_{k+1}, (a_{k+2}, \dots, a_n))) \sim (((a_1, \dots, a_k), a_{k+1}), (a_{k+2}, \dots, a_n))) \sim ((a_1, \dots, a_k, a_{k+1}), (a_{k+2}, \dots, a_n))) \sim \dots \sim ((a_1, \dots, a_n), \emptyset) \sim (a_1, \dots, a_n)$$

5. Абсолютно также показывается, что $((a_{1,1}, \dots, a_{n,1}), \dots, (a_{1,m}, \dots, a_{n,m})) \sim (a_1, \dots, a_n m)$

Свойста возведения множеств в степень множества:

$$1. A^B \times A^C \cong A^{B \sqcup C}$$

$$2. A^C \times B^C \cong (A \times B)^C$$

$$3. (A^B)^C \cong A^{B \times C}$$

Доказательства

1. Элемент $A^{B \sqcup C}$ - это функция $f : (B \sqcup C) \rightarrow A$, элемент $A^B \times A^C$ - это пара функций (g_1, g_2) , таких что $g_1 : B \rightarrow A$, $g_2 : C \rightarrow A$. Рассмотрим функцию¹⁸ $\varphi : f \mapsto (g_1, g_2)$, $\varphi : \begin{cases} g_1(x) = f(x), \text{ если } x \in B \\ g_2(x) = f(x), \text{ если } x \in C \end{cases}$

Данная функция - это биекция¹⁹.

2. Аналогичными соображениями с п.1 получаем биекцию $\varphi : f \mapsto (g_1, g_2)$, $\varphi : \begin{cases} g_1 = pr_1 \circ f \\ g_2 = pr_2 \circ f \end{cases}$,

где pr_i - функция возвращающая i -ую компоненту кортежа (по сути проектор).

3. Аналогичными соображениями с п.1 получаем биекцию $\varphi : f \mapsto h$, где $f : C \rightarrow g$, $g : B \rightarrow A$, $h : (B \times C) \rightarrow A$, $\varphi : h(b, c) = (f(c))(b)$ ²⁰.

2. Равномощность - отношение эквивалентности.

Доказательство

1. Рефлексивность

$A \cong A$, т.к. существует биекция из A в A : $id_A : A \rightarrow A$ - тождественное отображение.

2. Симметричность

Пусть $A \cong B$, тогда есть биекция $\psi : A \rightarrow B$. Но $\psi^{-1} : B \rightarrow A$ - обратное отображение к ψ - тоже биекция. Откуда получаем, что $B \cong A$

3. Транзитивность

Пусть $A \cong B$ и $B \cong C$, тогда найдутся две биекции $\varpi : A \rightarrow B$ и $\vartheta : B \rightarrow C$. Возьмем их композицию: $\varphi = \vartheta \circ \varpi$, $\varphi : A \rightarrow C$, т.к. композиция двух биекций - биекция, то получим, что $A \cong C$.

Выполнены три аксиомы отношения эквивалентности \Rightarrow равномощность - отношение эквивалентности.

Ч.Т.Д.

¹⁸Это такая интересная херня, которая по одной функции строит две

¹⁹Биективность ее очевидна: по любым двум можно построить прообраз просто объединив их - имеем сюръективность, по различным двум функциям получатся две различные пары (отличаются значения на каком-то x , БОО он в $B \Rightarrow g_1$ от них будут различны) - значит инъективна

²⁰Напоминаем, что $f(c)$ - это какая-то функция из B в A

3. Объединение счётных множеств счётно.

Пусть A и B - счетные множества, $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow A$, $\beta : \mathbb{N} \rightarrow B$ - их биекции из натуральных чисел. Если пересечение A и B пусто, то построим биекцию $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow (A \sqcup B)$ по следующему правилу: если x - чётно, то $\gamma(x) = \alpha(x)$, иначе $\gamma(x) = \beta(x)$. Если же их пересечение непусто, то их объединение содержит A , следовательно, не менее чем счетно. Но с другой стороны $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$, $(B \setminus (A \cap B)) \subseteq B$, а потому не более чем счетно, значит, их дизъюнктное объединение не более чем счетно (Здесь формально делается так: A счетно, потому есть биекция в четные числа, из B аналогично в нечетные, тогда если $(B \setminus (A \cap B)) \subseteq B$, то есть биекция из $(B \setminus (A \cap B))$ в некоторое подмножество нечетных. Тогда их дизъюнктное объединение - биекция в некоторое подмножество натуральных чисел (четные и нечетные - непересекаются, потому все ок), а, значит, не более чем счетно)²¹, откуда по теореме Кантора-Бернштейна имеем счетность их объединения.

4. Декартово произведение счётных множеств счётно.

Аналогично A и B - счетные множества. Тогда построим табличку $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, в которой под элементом на пересечении i -ой строки и j -го столбца будем понимать пару из i -го элемента A и j -го элемента B :

	1	2	3	4	5	...
1	1	2	4	7	11	...
2	3	5	8	12	17	...
3	6	9	13	18	24	...
4	10	14	19	25	32	...
5	15	20	26	33	41	...
...

Для данной нумерации можно привести конкретную функцию:

Элементу (i, j) сопоставляется число $\frac{i(i+1)}{2} + \frac{2i-2+j}{2}(j-1)$.²² Инъективность данной формулы очевидна, сюръективность же.. Расскажем как искать прообраз числа:

Сначала зажимаем натуральное число между двумя треугольными: по сути решаем уравнение $\frac{k(k+1)}{2} = n$ или $k^2 + k - 2n = 0$ Используем всемогущий дискриминант $k_1 = \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2}$, $k_2 = \frac{-\sqrt{1+8n}-1}{2}$. Так как работаем с натуральными числами, то, очевидно, что нам нужен k_1 , или, если быть точнее, $\varkappa = \lceil k_1 \rceil$ ²³. Теперь вычисляем $\Delta = \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2} - n$. Тогда прообразом числа n будет $(\varkappa - \Delta, \Delta + 1)$. Откуда имеем биекцию.²⁴

5. В любом бесконечном множестве найдётся счётное подмножество.

²¹ Данный метод необходим в силу того, что первый способ применим только для дизъюнктного объединения

²² Для тех кому интересно откуда такая чудо формула: Заметим что, по первому столбцу расположены треугольные числа для них формула $\frac{i(i+1)}{2}$, далее числа в i -ой строке получаются прибавлением $i, i+1, \dots$ к первому числу в строке - арифметическая прогрессия, формула $\frac{2i-2+j}{2}(j-1)$

²³ Округляем **вверх**

²⁴ Очень вероятно, что вас кокнет это говно, поэтому объясню зачем: далее в блоке вычислимость будет нужно говорить про вычислимую в обе стороны биекцию, здесь же она и приведена. Да еще и показана как все вычисляется в обе стороны.

Пусть \mathcal{M} - бесконечное множество. Выделим из него счетное подмножество \mathcal{L} следующим образом: согласно аксиоме выбора, т.к. $\mathcal{M} \neq \emptyset$ можно выбрать какой-то элемент $\alpha_0 \in \mathcal{M}$, положим его в \mathcal{L} . Далее т.к. $\mathcal{M} \setminus \{\alpha_0\} \neq \emptyset$ (иначе \mathcal{M} было бы конечно), то выделим из него α_1 и снова положим в \mathcal{L} . Аналогичным образом будем продолжать для любого α_i - таким образом выделим счетное подмножество $\mathcal{L} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$

6. Несчётность множества точек на отрезке.

Т.к. любой отрезок $[\alpha; \beta]$ может быть получен из $[0; 1]$ путем применения к элементам $[0; 1]$ следующей функции²⁵ $\psi(x) = (p \circ r)(x)$, где $p(x) = x + \alpha$, а $r(x) = \beta x$, то достаточно показать несчетность точек на $[0; 1]$. Для этого воспользуемся приемом, называемым **диагональным методом Кантора**

Сопоставим каждому числу из $[0; 1]$ его разложение в виде бесконечной десятичной дроби, у которой целая часть равна 0. (Для 1 – это 0,91) Оговорим, что если есть два представления, а именно БОО²⁶ $0, \dots 1(0)$ и $0, \dots 0(9)$, то для однообразности выберем второй вариант. Теперь предположим обратное: чисел на единичном отрезке лишь счетное число.²⁷ Тогда построим число γ следующим образом:

1. $\gamma = 0$,
2. Берем i -ое число и его i -ую цифру в дробной части. Если она равна 9, то i -ую цифру в дробной части числа γ положим за 0, иначе за 9.

Очевидно, $\gamma \in [0; 1]$, но оно отличается от всех занумерованных чисел. Получили противоречие, значит их несчетно. **Ч.Т.Д.**

7. Нефундированность прямого лексикографического порядка на конечных словах.

Сначала напомним, что есть прямой лексикографический порядок. Пусть задан порядок на символах алфавита. Тогда $a \prec b$, если:

1. $a \sqsubset$ ²⁸ b
2. $a = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n \tau \dots$, $b = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n \pi \dots$ и $\tau \prec \pi$

Теперь покажем бесконечно убывающую цепочку, что равносильно нефундированности²⁹:

1. 11
2. 101
3. 1001
4. 10001
5. 100001
6. 1000001
- ...

8. Любой начальный отрезок вполне упорядоченного множества, отличный от всего множества, представ-

²⁵Это биекция как композиция биекций, потому они все равномощны. Биективность же p и r остается в качестве несложного упражнения читателю))

²⁶Возможно не 1 и 0, а 2 и 1, 3 и 2 ...

²⁷Формально обратным будет утверждение, что их не более чем счетное, но их бесконечность весь очевидна, а кому нет - тогда вот вам числа: $\{\frac{1}{n}\}$ их бесконечно много, значит и на $[0; 1]$ тоже бесконечно много.

²⁸Не совпадают конечно же

²⁹Здесь приведен пример для $\{0, 1\}^*$ как стандартного алфавита для машин Тьюринга

ляется в виде $[0, a)$.

Назовем исходное множество M , а отрезок O . Тогда из того, что $O \neq M$ имеем $M \setminus O \neq \emptyset$, а значит из фундированности M имеем $\exists a (a = \min(M \setminus O))$ из линейности порядка получим, что a - наименьший.

1. $O \subseteq [0, a)$: От противного, пусть есть x принадлежащий $[0, a)$, но не O , тогда a - не минимальный. 2. $[0, a) \subseteq O$: Возьмем произвольный элемент M который не лежит в O , тогда он лежит в $M \setminus O$. Значит, он больше или равен a (a - наименьший), следовательно, он не лежит в $[0, a)$. По контрапозиции получим, если элемент лежит в $[0, a)$, то он также лежит и в O .

Тогда имеем, что $O = [0, a)$ **Ч.Т.Д.**

9. Вполне упорядоченное множество неизоморфно своему начальному отрезку вида $[0, a)$.

Доказательство: (от противного)

Пусть $\psi : M \rightarrow [0, a)$ - изоморфизм. Он сохраняет порядок, а потому монотонная функция. $\psi(a) \in [0, a) \Rightarrow \psi(a) < a$. Тогда по лемме о монотонной функции $\psi(a) \geq a$ - имеем противоречие. **Ч.Т.Д.**

10. Сумма и произведение фундированных множеств фундированы, вполне упорядоченных - вполне упорядочены.

Сумма:

Пусть $\Lambda \subseteq A + B$. Если $\Lambda \subseteq A$ или $\Lambda \subseteq B$, то в нем есть минимальный элемент, как подмножества фундированных множеств, если же Λ содержит элементы и из A и из B , то рассмотрим $\Lambda' = \Lambda|_A$, т.е. все такие x из Λ , что лежат в A , Λ' имеет минимальный, как подмножество фундированного, но его минимальный также является минимальным для Λ , ибо все элементы из B больше чем элементы из A в данной сумме³⁰. Тогда любое подмножество $A + B$ имеет минимальный, откуда, сумма фундированна.

Произведение:

Пусть $\Lambda = A \cdot B$. Рассмотрим произвольную убывающую цепочку Λ . B - фундированно, значит любая убывающая цепочка должна стабилизироваться, т.е. вторая координата рано или поздно стабилизируется, тогда из определения порядка на произведении, если бы существовала бесконечно убывающая цепочка, то должна была бы бесконечно убывать первая координата, но первая координата - это элементы A , которое в свою очередь также фундированно, значит любая цепочка в произведении стабилизируется. Откуда получаем ее фундированность.

Осталось добавить, что сумма и произведение ЛУМов - ЛУМ. (Если любые два элемента A и B сравнимы, то любые элементы сравнимы либо если оба из A/B , либо если один из A , а второй из B - то по определению порядка на сумме. На произведении получим же, что все первые/вторые координаты сравнимы между собой, тогда по определению порядка любые две пары из произведения сравнимы).

Тогда получим фундированность $+ \text{ЛУМ} = \text{ВУМ}$ **Ч.Т.Д.**

11. Свойства сложения и умножения вполне упорядоченных множеств.

Сумма:

³⁰Если бы взяли $B + A$, то все было бы наоборот.

Ассоциативность

$(A + B) + C = A + (B + C)$ - Следует напрямую из ассоциативности объединения множеств

Отсутствие коммутативности

$\{a\} + \mathbb{N} \neq \mathbb{N} + \{a\}$, т.к. первое не имеет наибольшего элемента, а второе имеет.

Нейтральный элемент

$\forall A (\emptyset + A = A + \emptyset = A)$, т.к. $\emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A$

Произведение:

Ассоциативность

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - Следует напрямую из ассоциативности объединения множеств

Отсутствие коммутативности

$\{1, 2\} \cdot \mathbb{N} \neq \mathbb{N} \cdot \{1, 2\}$, т.к. первое изоморфно \mathbb{N} - изоморфно покраске четных чисел в 2, а нечетных в 1, второе же изоморфно $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ - в нем есть 2 предельных элемента (0 из первой копии и 0 из второй), в первом же нет.

Нулевой элемент

$\forall A (\emptyset \cdot A = A \cdot \emptyset = \emptyset)$, т.к. $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$

Левая дистрибутивность и отсутствие правой

$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ Это вытекает из дистрибутивности декартового произведения множеств и объединения + справа все элементы из B меньше C, тогда при сравнении по второй координате пары $(a, b) < (a, c)$, что равносильно сложить все пары (a, b) и (a, c) способом слева.

Но $(\{1\} + \{2\}) \cdot \mathbb{N} \not\approx (\{1\} \cdot \mathbb{N}) + (\{2\} \cdot \mathbb{N})$ первое в свою очередь изоморфно \mathbb{N} , а второе $\mathbb{N} + \mathbb{N}$, что, как было отмечено выше, не изоморфно.

12. Сравнимость любых двух множеств по мощности.

По теореме Цермело вполне упорядочим данные два множества. Далее к ним можно применить теорему о сравнении ВУМов, получим, что одно изоморфно начальному отрезку другого, а, значит, есть биекция в некоторое подмножество, откуда получим, что одно множество не более мощно, чем другое. (Возможно, и из второго есть изоморфизм в начальный отрезок первого - тогда по теореме Кантора-Бернштейна получим равномощность, но это только возможно)

с. Вопросы на 3

1. Эквивалентность фундированности, отсутствия бесконечно убывающей последовательности элементов и принципа трансфинитной индукции.

Данные три определения эквивалентны:

1. Множество фундированно, т.е. в любом его непустом множестве есть минимальный элемент
2. Во множестве нет бесконечно убывающей цепочки
3. Ко множеству применим принцип индукции:

$$\forall x (\forall y ((y < x) \rightarrow A(y)) \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall x A(x)$$

Доказательство:

$\neg 1 \rightarrow \neg 2$

Если M не пусто³¹ и не фундированно, то существует $M' \subseteq M$, не имеющее минимального элемента, т.е. $\forall x \in M' \exists y \in M' (y < x)$. Возьмем произвольный $x_0 \in M'$, для него есть $x_1 < x_0$, для которого найдется $x_2 < x_1 < x_0$ и т.д. - имеем бесконечно убывающую цепочку.

$\neg 2 \rightarrow \neg 1$

Если есть бесконечно убывающая цепочка во множестве, то возьмем его подмножество, порожденное данной цепочкой, в нем не найдется минимального элемента.

$3 \rightarrow 1$ - от противного

Пусть M не фундированно, тогда B - его непустое подмножество без минимального элемента. Положим $A(x) - x \in \bar{M}$. Если для всех $y < x$ это верно, то и для x тоже, иначе x - минимальный элемент, а такого в B нет. Значит, по индукции получим, что для всех элементов B справедливо, что они лежат в его дополнении, т.е. B - пусто. Противоречие

$1 \rightarrow 3$ - от противного

Пусть M - фундированно, тогда пусть верно предположение для $A(x)$, но она - верная не везде функция. Значит, множество $\{x \mid \neg A(x)\}$ не пусто, откуда по фундированности найдется его минимальный элемент - x_0 , тогда для любого $y < x_0$ $A(y)$ верно, откуда по предположению индукции $A(x_0)$ истинно, что противоречит выбору x_0 , тогда $A(x)$ истинна на всех x .

2. Лемма о монотонной функции из вполне упорядоченного множества в себя.

Пусть f - строго монотонная функция действующая из ВУМа в самого себя, тогда образ любого элемента ВУМА больше или равен ему самому. Формально:

$$\forall x \forall y ((x < y) \rightarrow (f(x) < f(y))) \quad \text{Тогда } \forall x (f(x) \geq x)$$

Через фундированность:

Пусть $A = \{x \mid f(x) < x\} \neq \emptyset$, тогда найдется x_0 - его минимальный элемент, тогда $f(x_0) < x_0$. По монотонности $f(f(x_0)) < f(x_0)$, значит $f(x_0) \in A$ - имеем противоречие с минимальностью x_0 .

Через бесконечный спуск:

Опять же от противного пусть существует x , такой что $f(x) < x$, тогда по монотонности $f(f(x)) < f(x) < x$, и так далее - получим бесконечную цепочку - получим противоречие с тем, что исходное множество ВУМ.

Через индукцию:

Пусть $\forall y < x (f(y) \geq y)$, но $f(x) < x$, тогда по монотонности: $f(f(x)) < f(x)$, но по предположению индукции $f(f(x)) \geq f(x)$ - противоречие, следовательно, $f(x) \geq x$. Откуда по принципу индукции имеем: $\forall x (f(x) \geq x)$

3. Теорема о структуре вполне упорядоченного множества.

Любое вполне упорядоченное множество представимо в виде $\omega \cdot L + F$

³¹Думаю данный случай тривиален и не стоит расписывания

Доказательство**4. Теорема о трансфинитной рекурсии.**

Сначала немного обозначений:

$f(x) = F(f(y)|_{y < x})$ - Рекуррентно заданная функция f рекурсивным правилом F .

Формулировка теоремы:

Если A - ВУМ, то любое рекурсивное правило F задает функцию f , действующую из A в какое-то непустое множество, причем единственным образом.

Доказательство**1. Существование**

Зададим свойство $A(x)$ - существует $f|_{[0, x)}$, заданное правилом F .

Пусть найдется такое t , что $x = t + 1$. Тогда по предположению индукции верно $A(t)$, т.е. существует $f|_{[0, t)}$, тогда определим $f(t) = F(f|_{[0, t)})$. Откуда определено $f|_{[0, t+1)}$ или же $f|_{[0, x)}$

Теперь пусть x - предельный элемент. Тогда по предположению индукции $f|_{[0, t)}$ определено для всех $t < x$. Значит, положим $f|_{[0, x)}$ как объединение всех $f|_{[0, t)}$ - по единственности все будет корректно (см. далее)

2. Единственность

От противного: пусть по одному и то му же рекурсивному правилу заданы две различные функции: $f(x) = F(f(y)|_{y < x})$ и $g(x) = F(g(y)|_{y < x})$. Тогда $\exists x (g(x) \neq f(x))$ Из того, что A - ВУМ, среди данных иксов будет минимальный - x_0 . Значит $\forall y < x_0 (f(y) = g(y)) \Rightarrow f|_{[0, x_0)} = g|_{[0, x_0)} \Rightarrow f(x_0) = F(f(y)|_{y < x_0}) = F(g(y)|_{y < x_0}) = g(x_0)$ - Противоречие. **Ч.Т.Д.**

d. Вопросы на 4**1. Сравнимость любых двух вполне упорядоченных множеств.**

Сначала введем отношение порядка на всех ВУМах: скажем, что $A < B$, если A изоморфно некоторому собственному³² начальному отрезку B .

Теперь перейдем к доказательству самой теоремы. Пусть A и B - ВУМы. Введем функцию $f(a) = \min\{b \in B \mid b \neq f(t) \text{ для } t < a\}$ Пусть это не сюръекция, тогда найдутся такое b , что $f^{-1}(b)$ неопределено. Выберем из них минимальное - b_0 , так как B - ВУМ. Для всех $k < b_0$ $f^{-1}(k)$ определена. Возьмем минимум из всех $t > f^{-1}(k) \forall k$. Тогда для него по построению должен был использоваться b_0 - противоречие. Итого сюръекция. Покажем сохранение порядка: Если $k < t$, то если $f(t) < f(k)$, получим, что когда определяли $f(k)$, $f(t)$ было не занято, а потому мы не могли выбрать $f(k)$, равенство же не достигается из того, что в определении есть $b \neq f(t)$ - это показывает инъективность функции. Итого получили, что данная функция действительно изоморфизм.

Возможно, f будет неопределено, если множество внутри \min - пустое. Тогда по обобщенной теореме о трансфинитной рекурсии f определено либо на начальном отрезке, либо на всем A . В первом случае

³²Т.е. не равному самому множеству

получим что $A < B$, во втором же если образ A - все B , то они изоморфны, иначе образ - не все,

2. Любой частичный порядок можно дополнить до линейного.

Пусть \mathcal{O} - частичный порядок. Рассмотрим семейство частичных порядков \mathcal{PO} с введенным на нем отношением вложенности порядков. Тогда покажем выполнимость условия леммы Цорна для этого множества:

Пусть $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_\alpha\}$ - это какая-то цепь из порядков. Она определенно имеет верхнюю грань - объединение всех порядков как множеств пар. Покажем, что данное объединение тоже порядок:

Рефлексивность:

$$x \in \mathcal{R} \Rightarrow x \in \mathcal{R}_\alpha \Rightarrow x\mathcal{R}_\alpha x \Rightarrow x\mathcal{R}x$$

Антисимметричность:

Если обе пары лежат в одном и том же множестве - все вытекает из порядка соответствующего множества, если же нет, то: $x\mathcal{R}_\alpha y, y\mathcal{R}_\beta x$ БОО $\mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{R}_\beta$. Тогда $x\mathcal{R}_\alpha y \Rightarrow x\mathcal{R}_\beta y$ По антисимметричности \mathcal{R}_β имеем равенство.

Аналогично транзитивность.

Покажем, что \mathcal{R} - линейный порядок. Пусть не так, тогда $\exists a \exists b (\neg a\mathcal{R}b \wedge \neg b\mathcal{R}a)$. Определим порядок \mathcal{R}'

$$\text{как } x\mathcal{R}'y \text{ если } \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ x\mathcal{R}a \wedge b\mathcal{R}y \end{cases}$$

Очевидно, $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{R}'$. Покажем, что \mathcal{R}' - тоже порядок, тогда получим противоречие, а, значит, докажем теорему.

Рефлексивность, тривиально выполнена.

Антисимметричность:

1. $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$ - все супер по антисимметричности \mathcal{R} .

2. $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}a \wedge b\mathcal{R}x$ - по транзитивности \mathcal{R} получим, что $b\mathcal{R}a$ - противоречие. Симметричный случай аналогично.

3. $x\mathcal{R}a \wedge b\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}a \wedge b\mathcal{R}x$. По транзитивности \mathcal{R} получим, что $b\mathcal{R}a$ - имеем противоречие.

Транзитивность абсолютно аналогично. **Ч.Т.Д.**

3. Теорема о вычитании ординалов.

Формальное сложение ординалов (рекурсивное):

$$1. \alpha + 0 = \alpha$$

$$2. \alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$$

$$3. \alpha + \sup(\beta) = \sup(\alpha + \beta) \text{ Формулировка теоремы:}$$

Если $\alpha < \beta$, то существует и единственное такое γ , что $\alpha + \gamma = \beta$

Существование: $\gamma \simeq \beta \setminus \alpha$

Единственность: От противного, пусть таких ординала два: γ_1 и γ_2 . Тогда по теореме о сравнении

ВУМов, БОО $\gamma_1 < \gamma_2$, откуда $\alpha + \gamma_1 < \alpha + \gamma_2$ - Противоречие. **Ч.Т.Д.**

4. Теорема о делении ординалов.

Формальное умножение ординалов (рекурсивное):

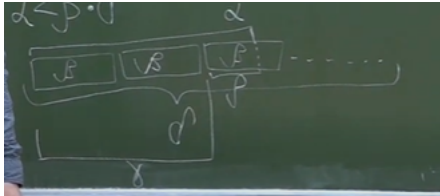
$$1. \alpha \cdot 0 = 0$$

$$2. \alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$

$$3. \alpha \cdot \sup(\beta) = \sup(\alpha \cdot \beta) \text{ Формулировка теоремы:}$$

Если $\alpha < \beta$ и $\alpha \neq 0$, то существуют и причем единственные γ и $\delta < \alpha$, такие что $\alpha \cdot \gamma + \delta = \beta$

Существование: Возьмем γ' , такое что $\alpha \cdot \gamma'$ заведомо больше β , например, $\gamma' = \beta + 1$. Тогда γ - начальный отрезок $\alpha \cdot \gamma'$, пусть будет $[0, \rho)$. Данный же отрезок будет представим в виде $\alpha \cdot \gamma + \delta$.



Единственность: Единственность остатков получим как следствие из единственности сложения, если же частны не равны: БОО $\gamma_1 < \gamma_2$, тогда $\gamma_1 + 1 \leq \gamma_2$. Откуда получим: $\alpha\gamma_1 + \delta < \alpha\gamma_1 + \alpha = \alpha(\gamma_1 + 1) \leq \alpha\gamma_2 \leq \alpha\gamma_2 + \delta$ - Противоречие. **Ч.Т.Д.**

е. Вопросы на 5

1. Теорема Цермело.

Формулировки:

1. Любое множество можно вполне упорядочить.

2. Для любого множества найдется равномощное ему вполне упорядоченное.

Возьмем из аксиомы выбора функцию $\varphi : 2^M \setminus M \rightarrow M$ такая что $\forall M' \subsetneq M (\varphi(M') \notin M')$

Введем объект:

Корректным отрезком называется ВУМ $(S, \leq_S)^{33}$, такой что $\forall s \in S (s = \varphi([0, s)))^{34}$

Лемма 1

Для любых двух корректных отрезков S и T справедливо, что один из них является начальным отрезком другого.

Доказательство

Сначала небольшое пояснение к тому, что тут вообще происходит. S и T - ВУМы, а значит один из них изоморфен начальному отрезку другого. Но и S и T - это подмножества нашего множества, которого мы хотим упорядочить. Поэтому мы докажем, что имеет не просто изоморфизм, а равенство.

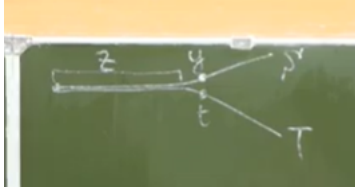
Пусть $S \simeq$ какому-то начальному отрезку T , $p(x)$ - изоморфизм.

Если для любого x $p(x) = x$, то все супер и равенство очевидно, но если $p(x)$ - не тождественный изоморфизм, то найдется такие x , что $p(x) \neq x$. В силу вполне упорядоченности среди них найдется минимальный - y . Положим $p(y) = t$.

³³Далее будем просто называть S

³⁴Эта штука кажется весь неправдоподобной, поэтому ловите примеры: $\{\varphi(\emptyset)\}$, $\{\varphi(\emptyset), \varphi(\{\varphi(\emptyset)\})\}$ и т.д.

Тогда $\varphi([0, y)) = y$, а $\varphi([0, t)) = t$ - из корректности отрезков. Но т.к. все точки из отрезка $[0, y)$ меньше чем y , то тогда для них p - тождественный изоморфизм, а значит $[0, y) = [0, t) = z$ - на картинке, откуда следует равенство $y = t$, т.е. $y = p(y)$. А, значит, так S и тот отрезок, которому оно изоморфно "как молния" получатся одинаковыми:



Лемма 2

Объединение любого числа корректных отрезков - корректный отрезок.

Доказательство

1. Получится порядок:

Снова небольшое пояснение: так как на каждом корректном отрезке свой порядок, а объединяем мы их следующим образом: отдельно объединили множества, а отдельно порядки, как пары элементов. То на самом деле вообще нигде не понятно, что за динозавр получается в итоге.

Итак, $S = \bigcup_i S_i$

Рефлексивность:

$$x \in S \Rightarrow x \in S_i \Rightarrow x \leq_{S_i} x \Rightarrow x \leq_S x$$

Антисимметричность:

Если обе пары лежат в одном и том же множестве - все вытекает из порядка соответствующего множества, если же нет, то: $x \leq_{S_i} y, y \leq_{S_j} x$ По лемме 1 один из данных корректных отрезков - нач отрезок другого. БОО S_i - нач отрезок S_j . Тогда $x \leq_{S_i} y \Rightarrow x \leq_{S_j} y$ По антисимметричности \leq_{S_j} имеем равенство.

Аналогично транзитивность.

Итого порядок!! Теперь линейность:

Если x и y из одного множества, то они сравнимы из-за линейности соответствующего порядка. Иначе $x \in S_i, y \in S_j$ БОО S_i - нач отрезок S_j . Тогда $x \in S_j$, следовательно, x и y сравнимы по порядку \leq_{S_j} , а, значит, и по агрегированному.

Фундированность:

Пусть есть бесконечно убывающая цепочка $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$. Пусть $x_i \in S_\alpha$, тогда и все последующие в S_α . Пусть не так, тогда какой-то лежит в S_β , начальным отрезком которого будет S_α , тогда по порядку \leq_{S_β} последующий будет больше x_i , чего быть не может. Но S_α - ВУМ, значит данная цепочка будет стабилизироваться - имеем фундированность.

Корректность:

$$x \in S \Rightarrow x \in S_i \Rightarrow x = \varphi([0, x)_{S_i}) \Rightarrow x = \varphi([0, x)_S) - \text{получили корректность.}$$

О чудо! Доказали эту дичь!³⁵

Теперь непосредственно доказательство теоремы Цермело:

Покажем, что объединение все таких корректных отрезков - это исходное множество: Пусть не так. Тогда рассмотрим множество $S \cup \{\varphi(S)\}$. Это корректный отрезок, причем он больше чем S - но S - объединение всех корректных отрезков - получили противоречие. Значит объединение всей этой бурды и есть наше множество. **Ч.Т.Д.**

2. Лемма Цорна.

Формулировка: Пусть любая цепь ЧУМа имеет верхнюю грань, тогда все множество имеет максимальный элемент. Более того, $\forall a \exists m > a$ (m - максимум)

Доказательство

Пусть (A, \leq) - искомый ЧУМ. Тогда положим $I = (2^A, \preceq)$ - ВУМ³⁶. По теореме же Цермело можно ввести вполне порядок на A . Теперь построим функцию $f : I \rightarrow A$ по следующему правилу:

$f(0) = a$ - тот самый элемент для которого мы ищем максимальный. $f = \min^{37} \{x \in A \mid \forall y \preceq x (b > f(y))\}$

Теперь по теореме о трансфинитной рекурсии получим, что f определена либо на всем I , либо на каком-то его начальном отрезке, первое же невозможно т.к. I по теореме Кантора более мощно, чем A и f по построению инъекция. Тогда f определена на каком-то начальном отрезке I .

Пусть она определена на $[0; x]$, тогда $f(x)$ - максимум. Если же на $[0; x)$ то тогда $\{f(y) \mid y \in [0, x)\}$ - цепь, тогда по условию будет ее верхняя грань, а данное множество не имеет - противоречие.

Итого получили, что найдется максимум. **Ч.Т.Д.**

Лемма

Если A - бесконечно, то $A \times \mathbb{N} \cong A$

Доказательство

По теореме Цермело упорядочим A , тогда по теореме о структуре ВУМов $A \cong \omega \cdot L + F$. Откуда $A \cong \mathbb{N} \times L \cup F \cong \mathbb{N} \times L$.

$A \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times A \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times F \cong \mathbb{N} \times F \cong A$ **Ч.Т.Д.**

3. Объединение двух бесконечных множеств равномощно одному из них.

Если A, B - бесконечно, $A \lesssim B$ то $A \cup B \cong B$ $A \cup B \lesssim A \times \{0\} \sqcup B \times \{1\} \lesssim \times \{0, 1\} \lesssim B \times \mathbb{N} \cong B \lesssim A \cup B$

Откуда по теореме Кантора-Бернштейна: $A \cup B \cong B$ **Ч.Т.Д.**

4. Декартов квадрат бесконечного множества равномошен ему.

Рассмотрим множество пар (C, f) , таких что $C \subseteq A$, $f : C \rightarrow C^2$. Введем на данном множестве порядок:

$(C, f) \leq (D, g)$, если $C \subseteq D$ и $f = g|_C$.

Для данного множества выполнено условие леммы Цорна: верхней гранью цепи будет объединение как

³⁵ Сам в ахере

³⁶ Данная хуйня существует по теореме Цермело

³⁷ В смысле вполне порядка на A

множеств, так и функций - как множеств пар. Покажем это:

Пусть $\{C_\alpha\}$ - это семейство множеств, $f_\alpha : C_\alpha \rightarrow C_\alpha^2$.

1. f - функция

$$x \in C \Rightarrow x \in C_\alpha \Rightarrow f_\alpha(x) \in C_\alpha^2 \Rightarrow f(x) \in C^2$$

Значение и будет какое-то, то единственное, потому что БОО $C_\alpha \subseteq C_\beta \Rightarrow f_\alpha(x) = f_\beta(x)$

2. f - инъекция

$x \in C_\alpha, y \in C_\beta$, БОО $C_\alpha \subseteq C_\beta \Rightarrow f_\alpha(x) = f_\beta(x)$. Так как f_β - инъекция, то $f(x) = f_\alpha(x) = f_\beta(x) \neq f_\beta(y) = f(y)$

2. f - сюръекция

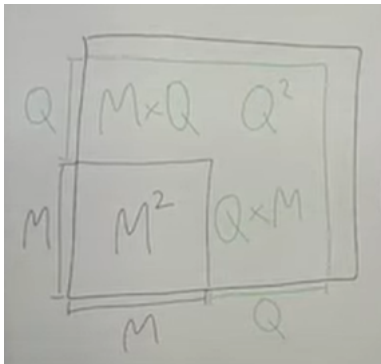
$(x, y) \in C^2 \Rightarrow x \in C_\alpha, y \in C_\beta$, БОО $C_\alpha \subseteq C_\beta \Rightarrow (x, y) \in C_\beta^2$, но f_β - сюръекция, поэтому и найдется прообраз из $C_\beta \subseteq C$.

Итак, по лемме Цорна получим (M, h) - максимальный элемент.

Если $M \cong A$, тогда $A \cong M \cong M^2 \cong A^2$

Если $M \lesssim A$, тогда $A \setminus M \cong A$, тогда существует $Q \subseteq A \setminus M : Q \cong M$

Получаем, что $Q \cong M \cong M^2 \cong Q^2 \cong Q^2 \times \{0, 1, 2\} \cong Q \times M \cup Q^2 \cup M \times Q$



А, значит, h можно продолжить на $M \cup Q$. Откуда (M, h) - не максимально - противоречие. **Ч.Т.Д.**

f. Доп вопросы на 5

g. Доп вопросы на 6

h. Доп вопросы на 7

III Вычислимость

a. Определения

b. Простые утверждения

1. Композиция вычислимых функций вычислима.

Пусть первую функцию вычисляет машина Тьюринга M , а вторую - K . Тогда построим машину тьюринга вычисляющую их композицию: Это будет машина Тьюринга L , которая сначала работает как M , а когда она попадает в завершающее состояние M , то она запускает машину тьюринга K . (Соответственно нумерацию состояний сдвинем на нужное число и получим общую нумерацию для L).

2. Перечислимость любого разрешимого множества.

Множество разрешимо, следовательно, вычислима его характеристическая функция, тогда построим по ней полухарактеристическую функцию: если характеристическая возвращает 1, то и характеристическая тоже, а если 0 - то заикливается.

3. Существование вычислимой в обе стороны биекции между \mathbb{N}^2 и \mathbb{N} .

Самое время сослаться на тот ужас, что я написал в простых утверждения в тм. "Декартово произведение счётных множеств счётно"

c. Вопросы на 3

d. Вопросы на 4

e. Вопросы на 5

f. Доп вопросы на 5

g. Доп вопросы на 6

h. Доп вопросы на 7