ЗАДАНИЕ
на лабораторную работу №3

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе ОДУ второго порядка с краевыми условиями II и III рода.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на ОДУ второго порядка.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель.

Квазилинейное уравнение для функции $T(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(T)\frac{dT}{dx}\right) - 4\cdot k(T)\cdot n_p^2\cdot\sigma\cdot(T^4 - T_0^4) = 0 \qquad (1)$$

Краевые условия

$$\begin{cases} x = 0, \ -\lambda(T(0))\dfrac{dT}{dx} = F_0, \\ x = l, \ -\lambda(T(l))\dfrac{dT}{dx} = \alpha(T(l) - T_0) \end{cases}$$

2. Функции $\lambda(T),\ k(T)$ заданы таблицей

T, K	λ, Вт/(см К)		T, K	k, см$^{-1}$
300	1.36 10^{-2}		293	2.0 10^{-2}
500	1.63 10^{-2}		1278	5.0 10^{-2}
800	1.81 10^{-2}		1528	7.8 10^{-2}
1100	1.98 10^{-2}		1677	1.0 10^{-1}
2000	2.50 10^{-2}		2000	1.3 10^{-1}
2400	2.74 10^{-2}		2400	2.0 10^{-1}

3. Разностная схема с разностным краевым условием при $x = 0$. Получена в Лекции №7 , и может быть использована в данной работе. Самостоятельно надо получить интегро -интерполяционным методом разностный аналог краевого условия при $x = l$, точно так же, как это было сделано применительно к краевому условию при $x = 0$ в указанной

лекции. Для этого надо проинтегрировать на отрезке [$x_{N-1/2}$, x_N] записанное выше уравнение (1) и учесть, что поток $F_N = \alpha_N\,(y_N - T_0)$, а $F_{N-1/2} = \chi_{N-1/2}\,\dfrac{y_{N-1} - y_N}{h}$.

4. Значения параметров для отладки (все размерности согласованы)

$n_p = 1.4$ – коэффициент преломления,

$l =$ 0.2 см – толщина слоя,

$T_0 = 300$К – температура окружающей среды,

σ=5.668 10^{-12} Вт/(см^{2}К^4)- постоянная Стефана- Больцмана,

F_0=100 Вт/см^2 - поток тепла,

$\alpha = 0.05$ Вт/(см^2 К) – коэффициент теплоотдачи.

5. Выход из итераций организовать по температуре и по балансу энергии, т.е.

$$\max\left|\frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{y_n^s}\right| \le \varepsilon_1,\ \text{для всех}\ n = 0,1,\dots N.$$

и

$$\max\left|\frac{f_1^s - f_2^s}{f_1^s}\right| \le \varepsilon_2,$$

где

$$f_1 = F_0 - \alpha(T(l) - T_0)\ \text{и}\quad f_2 = 4n_p^2\,\sigma\int_0^l k(T(x))(T^4(x) - T_0^4)\,dx.$$

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы**).**

Сформулированная математическая модель описывает температурное поле $T(x)$ в плоском слое с внутренними стоками тепловой энергии. Можно представить, что это стенка из полупрозрачного материала, например, кварца или сапфира, нагружаемая тепловым потоком на одной из поверхностей (у нас - слева). Другая поверхность (справа) охлаждается потоком воздуха, температура которого равна T_0. Например, данной схеме удовлетворяет цилиндрическая оболочка, ограничивающая разряд в газе, т.к. при больших диаметрах цилиндра стенку можно считать плоской. При высоких температурах раскаленный слой начинает объемно излучать, что описывает второе слагаемое в (1) (закон Кирхгофа). Зависимость от температуры излучательной способности материала очень резкая. При низких температурах стенка излучает очень слабо, второе слагаемое в уравнении

(1) практически отсутствует. Функции $\lambda(T), k(T)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности и оптического поглощения материала стенки.

Результаты работы.

1. Представить разностный аналог краевого условия при $x = l$ и его краткий вывод интегро -интерполяционным методом.

2. График зависимости температуры $T(x)$ от координаты x при заданных выше параметрах.

Выяснить, как сильно зависят результаты расчета $T(x)$ и необходимое для этого количество итераций от начального распределения температуры и шага сетки.

3. График зависимости $T(x)$ при F_0 =-10 Вт/см^2.

Справка. При отрицательном тепловом потоке слева идет съем тепла, поэтому производная $T'(x)$ должна быть положительной.

4. График зависимости $T(x)$ при увеличенных значениях α (например, в 3 раза). Сравнить с п.2.

Справка. При увеличении теплосъема и неизменном потоке F_0 уровень температур $T(x)$ должен снижаться, а градиент увеличиваться.

5. График зависимости $T(x)$ при $F_0 = 0$.

Справка. В данных условиях тепловое нагружение отсутствует, причин для нагрева нет, температура стержня должна быть равна температуре окружающей среды T_0 (разумеется с некоторой погрешностью, определяемой приближенным характером вычислений).

. 6. Для указанного в задании исходного набора параметров привести данные по балансу энергии, т.е. значения величин

$$f_1 = F_0 - \alpha(T(l) - T_0) \text{ и } \quad f_2 = 4n_p^2\sigma\int_0^l k(T(x))(T^4(x) - T_0^4)\,dx\,.$$

Каковы использованные в работе значения точности выхода из итераций ε_1 (по температуре) и ε_2 (по балансу энергии)?

Вопросы при защите лабораторной работы.

Ответы на вопросы дать письменно в Отчете о лабораторной работе.

1. Какие способы тестирования программы можно предложить?

2. Получите простейший разностный аналог нелинейного краевого условия при $x = l$

$$x = l, \quad -k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N \,(T(l) - T_0) + \varphi(T),$$

где $\varphi(T)$ - заданная функция.

Производную аппроксимируйте односторонней разностью.

3. Опишите алгоритм применения метода прогонки, если при $x = 0$ краевое условие квазилинейное (как в настоящей работе), а при $x = l$, как в п.2.

4. Опишите алгоритм определения **единственного** значения сеточной функции y_p в **одной** заданной точке p. Использовать встречную прогонку, т.е. комбинацию правой и левой прогонок (лекция №8). Оба краевых условия линейные.

Методика оценки работы.

Модуль 2, срок - 12-я неделя.

1. Задание полностью выполнено - 6 баллов (минимум).

2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на все вопросы - 10 баллов (максимум).

3. В дополнение к п.1 даны удовлетворительные ответы на отдельные вопросы – от 7 до 9 баллов.