



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 2

Тема Программно-алгоритмическая реализация метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности при решении системы ОДУ в задаче Коши.

Студент Жигалкин Д.Р.

Группа ИУ7-65Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2021 г.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения задачи Коши при реализации моделей, построенных на системе ОДУ, с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

Исходные данные. Задана система электротехнических уравнений, описывающих разрядный контур, включающий постоянное активное сопротивление R_k , нелинейное сопротивление $R_p(I)$, зависящее от тока I , индуктивность L_k и емкость C_k .

$$\begin{cases} \frac{dI}{dT} = \frac{U - (R_k + R_p(I))I}{L_k} \\ \frac{dU}{dt} = -\frac{I}{C_k} \end{cases}$$

Начальные условия: $t = 0, I = I_0, U = U_0$.

Здесь I, U - ток и напряжение на конденсаторе. Сопротивление R_p рассчитать по формуле.

$$R_p = \frac{l_p}{2\pi R^2 \int_0^1 \sigma(T(z))z dz}.$$

Для функции $T(z)$ применить выражение $T(z) = T_0 + (T_w - T_0)z^m$.

Параметры T_0, m находятся интерполяцией из табл.1 при известном токе I . Коэффициент электропроводности $\sigma(T)$ зависит от T и рассчитывается интерполяцией из табл.2.

Таблица 1.

I, A	T ₀ , K	m
0.5	6730	0.50
1	6790	0.55
5	7150	1.7
10	7270	3
50	8010	11
200	9185	32
400	10010	40
800	11140	41
1200	12010	39

Таблица 2.

T, K	σ , 1/Ом см
4000	0.031
5000	0.27
6000	2.05
7000	6.06
8000	12.0
9000	19.9
10000	29.6
11000	41.1
12000	54.1
13000	67.7
14000	81.5

Параметры разрядного контура:

$$R=0.35 \text{ см}$$

$$l_3=12 \text{ см}$$

$$L_k=187 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

$$C_k=268 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$R_k=0.25 \text{ Ом}$$

$$U_{co}=1400 \text{ В}$$

$$I_o=0.3 \text{ А}$$

$$T_w=2000 \text{ К}$$

Теоретические сведения:

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

Дана система уравнений вида

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u, v) \\ v'(x) = \varphi(x, u, v) \\ u(\xi) = \eta_1 \\ v(\xi) = \eta_2 \end{cases}$$

Тогда

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4}{6}, \text{ где}$$

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n, z_n)$$

$$g_1 = h_n \varphi(x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{g_1}{2}\right)$$

$$g_2 = h_n \varphi\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{g_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{g_2}{2}\right)$$

$$g_3 = h_n \varphi\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{g_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3, z_n + g_3)$$

$$g_4 = h_n \varphi(x_n + h_n, y_n + k_3, z_n + g_3)$$

Реализация.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности:

```
def runge_kutta_fourth_order(xn, yn, zn, hn, Rp):
    k1 = hn * f(xn, yn, zn, Rp)
    q1 = hn * phi(xn, yn, zn)

    k2 = hn * f(xn + hn / 2, yn + k1 / 2, zn + q1 / 2, Rp)
    q2 = hn * phi(xn + hn / 2, yn + k1 / 2, zn + q1 / 2)

    k3 = hn * f(xn + hn / 2, yn + k2 / 2, zn + q2 / 2, Rp)
    q3 = hn * phi(xn + hn / 2, yn + k2 / 2, zn + q2 / 2)

    k4 = hn * f(xn + hn, yn + k3, zn + q3, Rp)
    q4 = hn * phi(xn + hn, yn + k3, zn + q3)

    y_next = yn + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
    z_next = zn + (q1 + 2 * q2 + 2 * q3 + q4) / 6

    return y_next, z_next

def f(x, y, z, Rp):
    return -(Rp + Rk) * y - z / Lk

def phi(x, y, z):
    return -y / Ck
```

Функция $T(z)$

```
def T(z):
    return T0 + (Tw - T0) * z ** m
```

Вычисление R_p

```
def Rp(I):
    global m
    global T0

    I_from_table = []
    for i in range(len(table1)):
        I_from_table.append(table1[i][0])

    T0_from_table = []
    for j in range(len(table1)):
        T0_from_table.append(table1[j][1])

    m_from_table = []
    for z in range(len(table1)):
        m_from_table.append(table1[z][2])

    m = interpolate(I, I_from_table, m_from_table)
    T0 = interpolate(I, T0_from_table, T0_from_table)

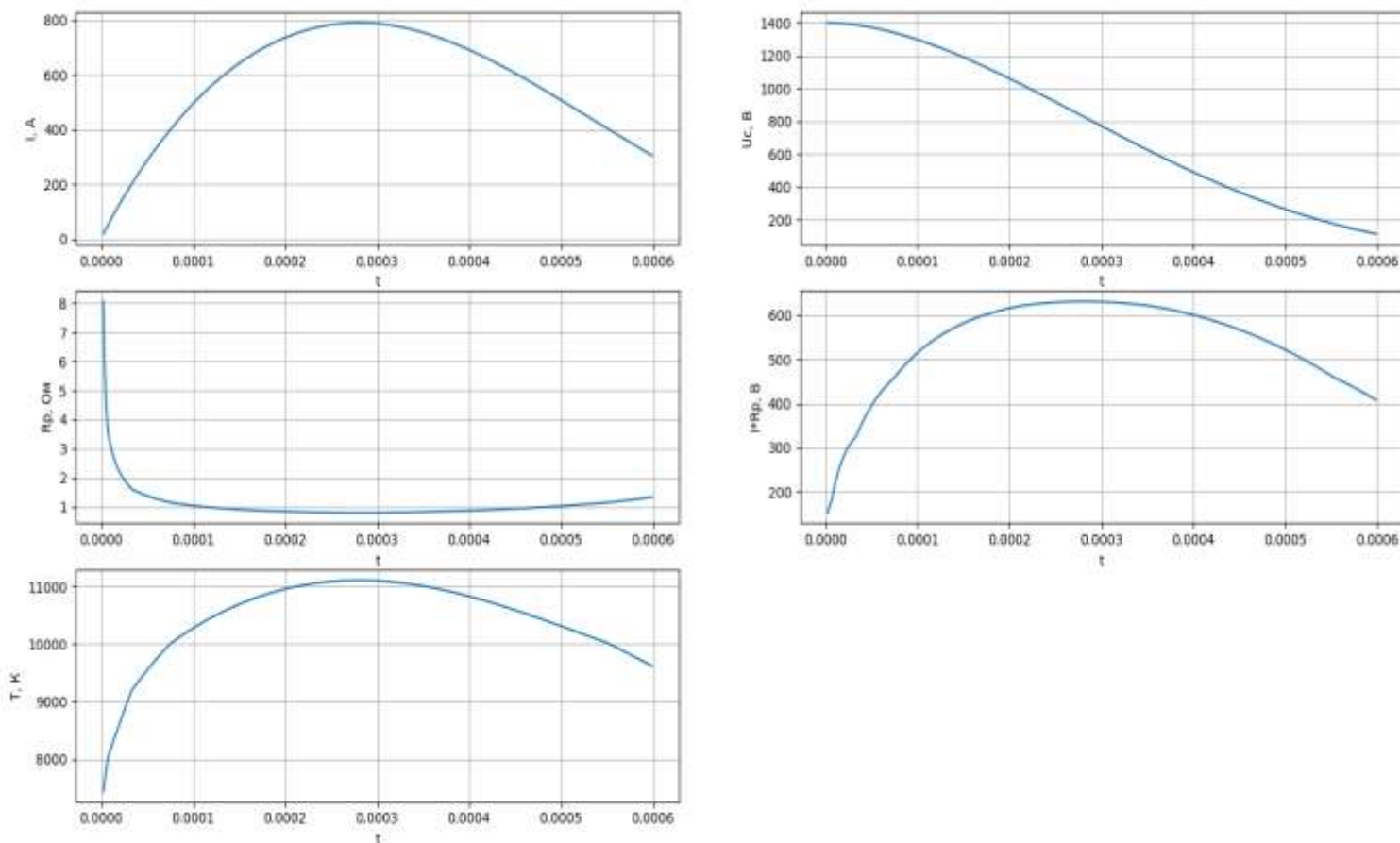
    func = lambda z: sigma(T(z)) * z
    integral = integrate.quad(func, 0, 1)

    Rp = Le / (2 * pi * R ** 2 * integral[0])

    return Rp
```

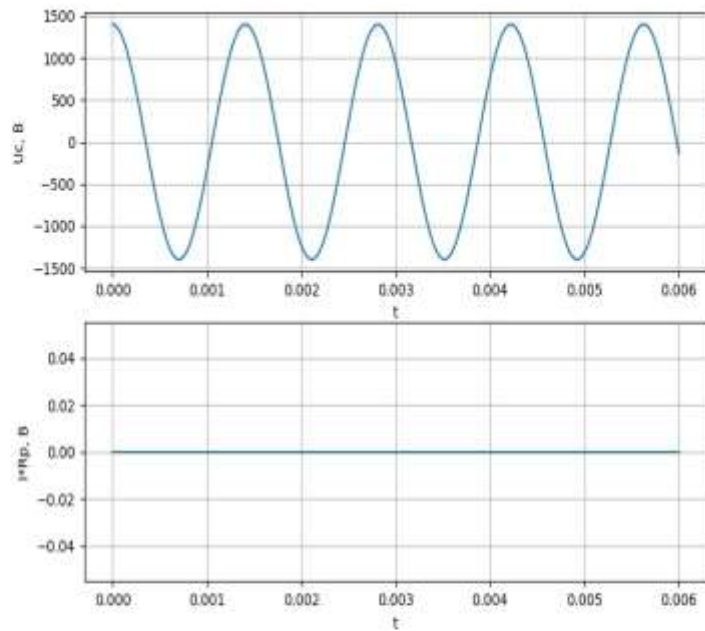
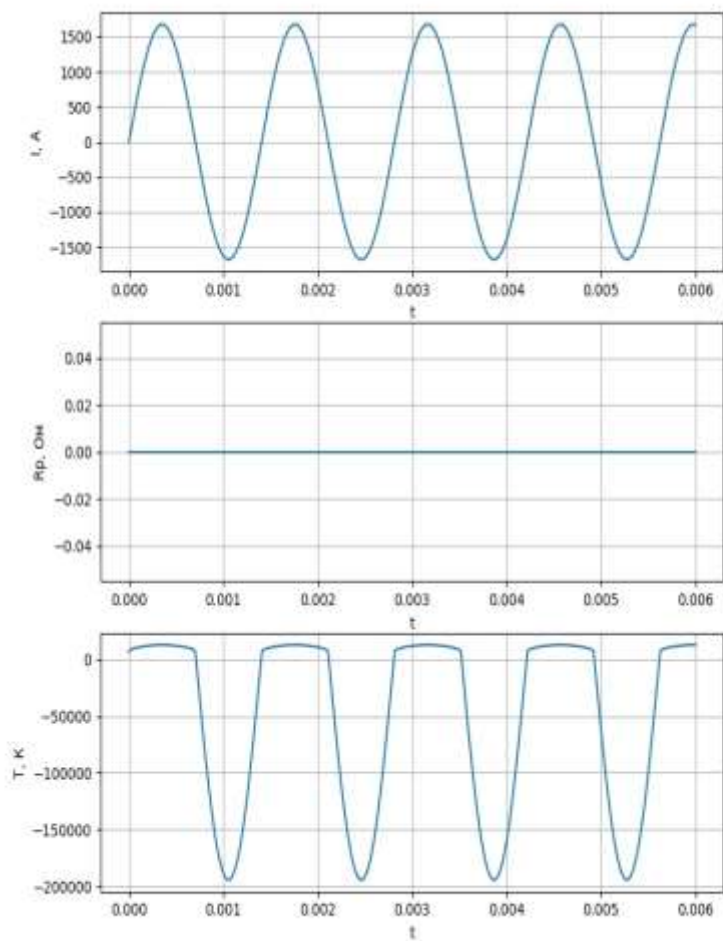
Результат работы программы.

1) Графики зависимости от времени импульса t : $I(t), U(t), R_p(t)$, произведения $I(t) \cdot R_p(t), T_0(t)$ при заданных выше параметрах. Указать шаг сетки.

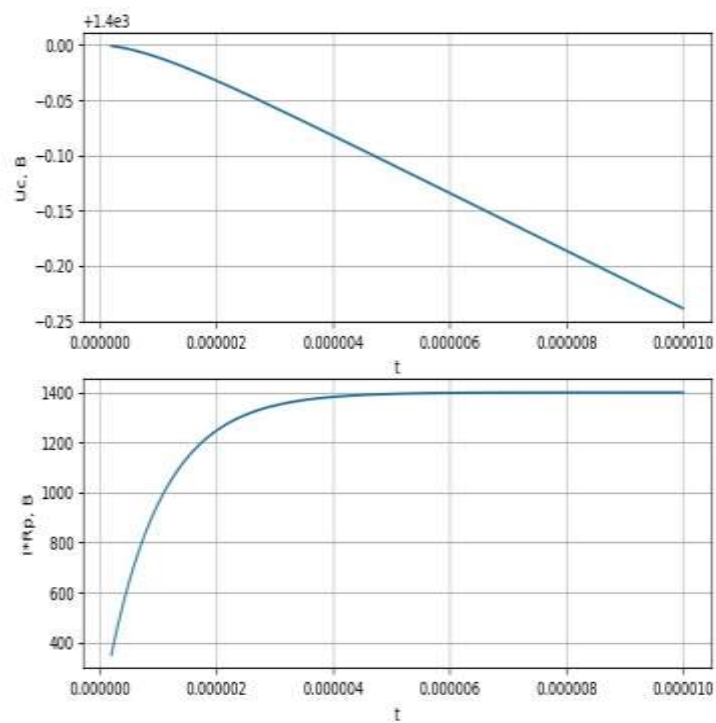
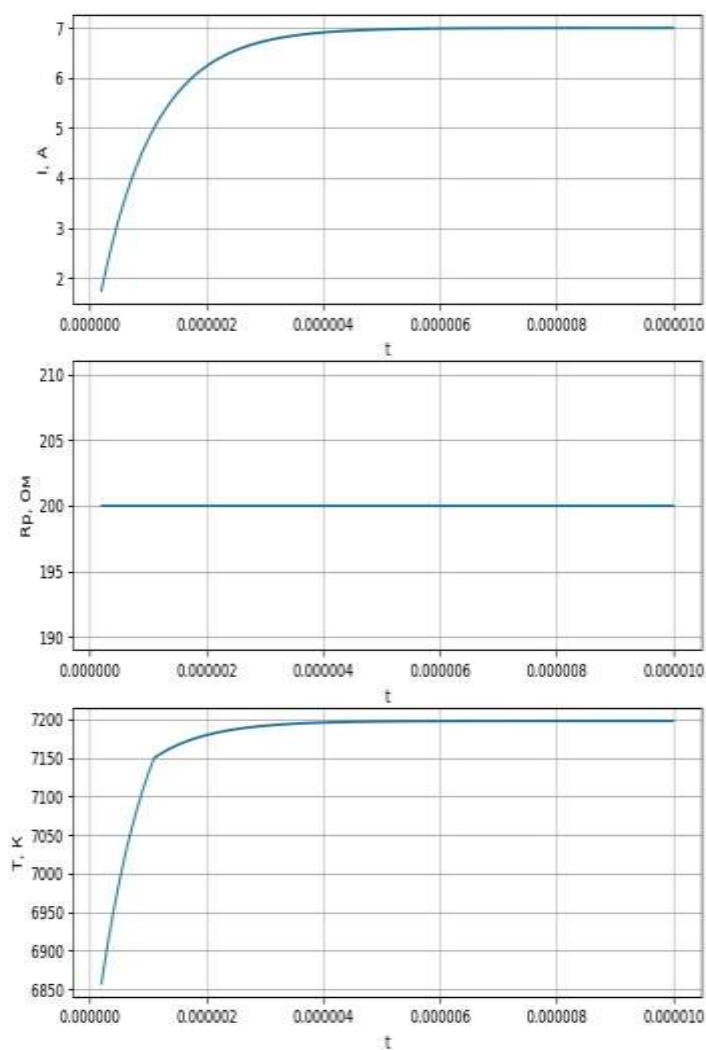


Шаг сетки: $h = 1e-06$

2) График зависимости $I(t)$ при $R_k + R_p = 0$. Обратить внимание на то, что в этом случае колебания тока будут незатухающими.



3) График зависимости $I(t)$ при $R_k + R_p = \text{const} = 200 \text{ Ом}$ в интервале значений $0 - 20 \text{ мкс}$.



4) Результаты исследования влияния параметров контура C_k, L_k, R_k на длительность импульса $t_{имп}$ апериодической формы. Длительность импульса определяется по кривой зависимости тока от времени на высоте $0.35I_{max}, I_{max}$ значение тока в максимуме (см.рисунок).

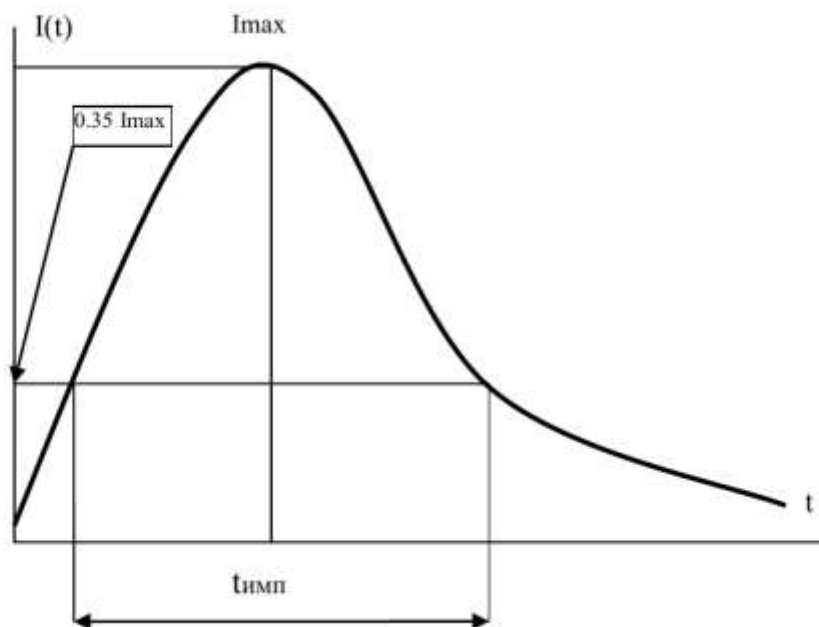


График $I(t)$ при начальных параметрах.

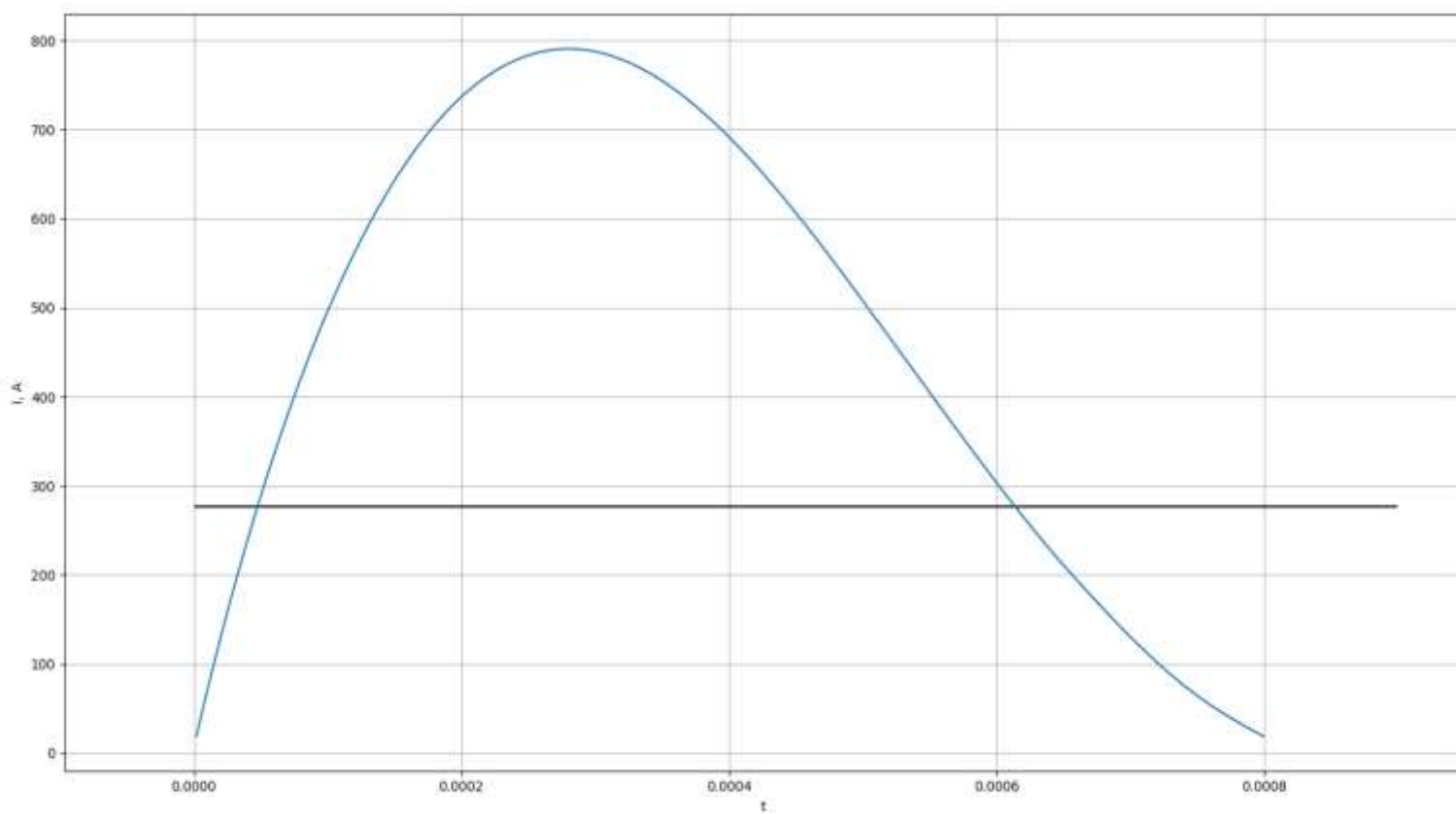
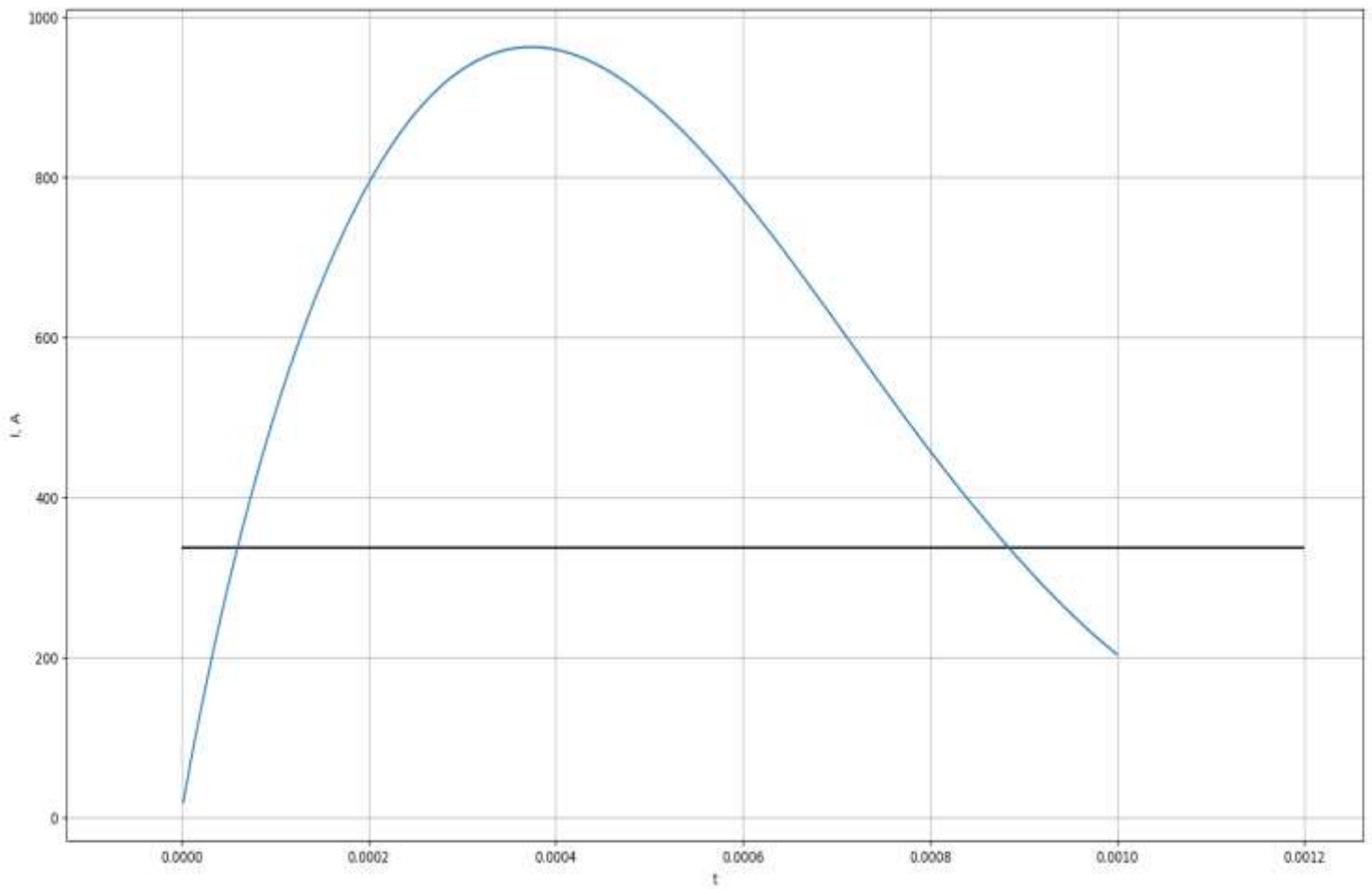
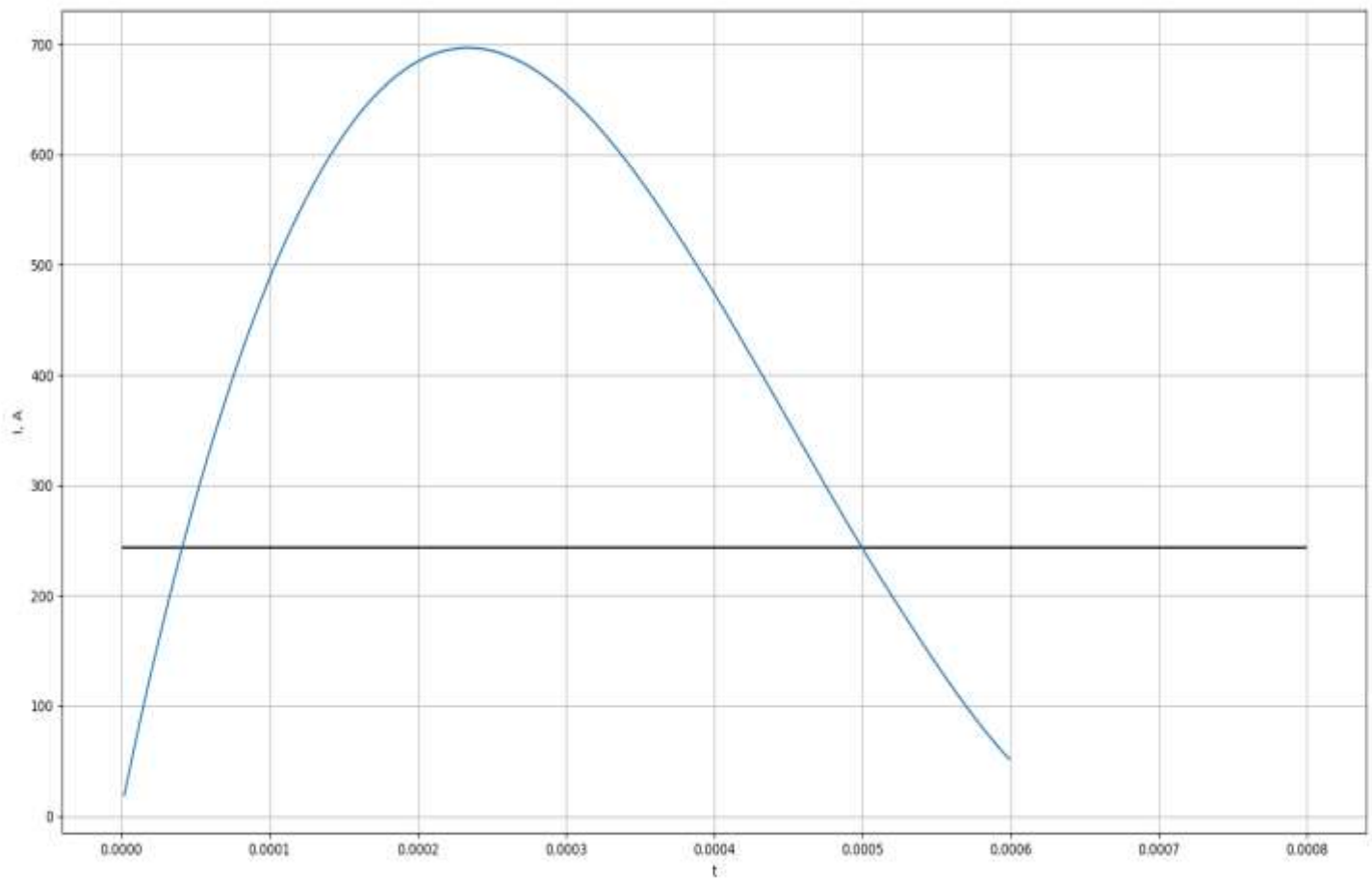


График $I(t)$ при увеличении изначального значения C_k в 2 раза.



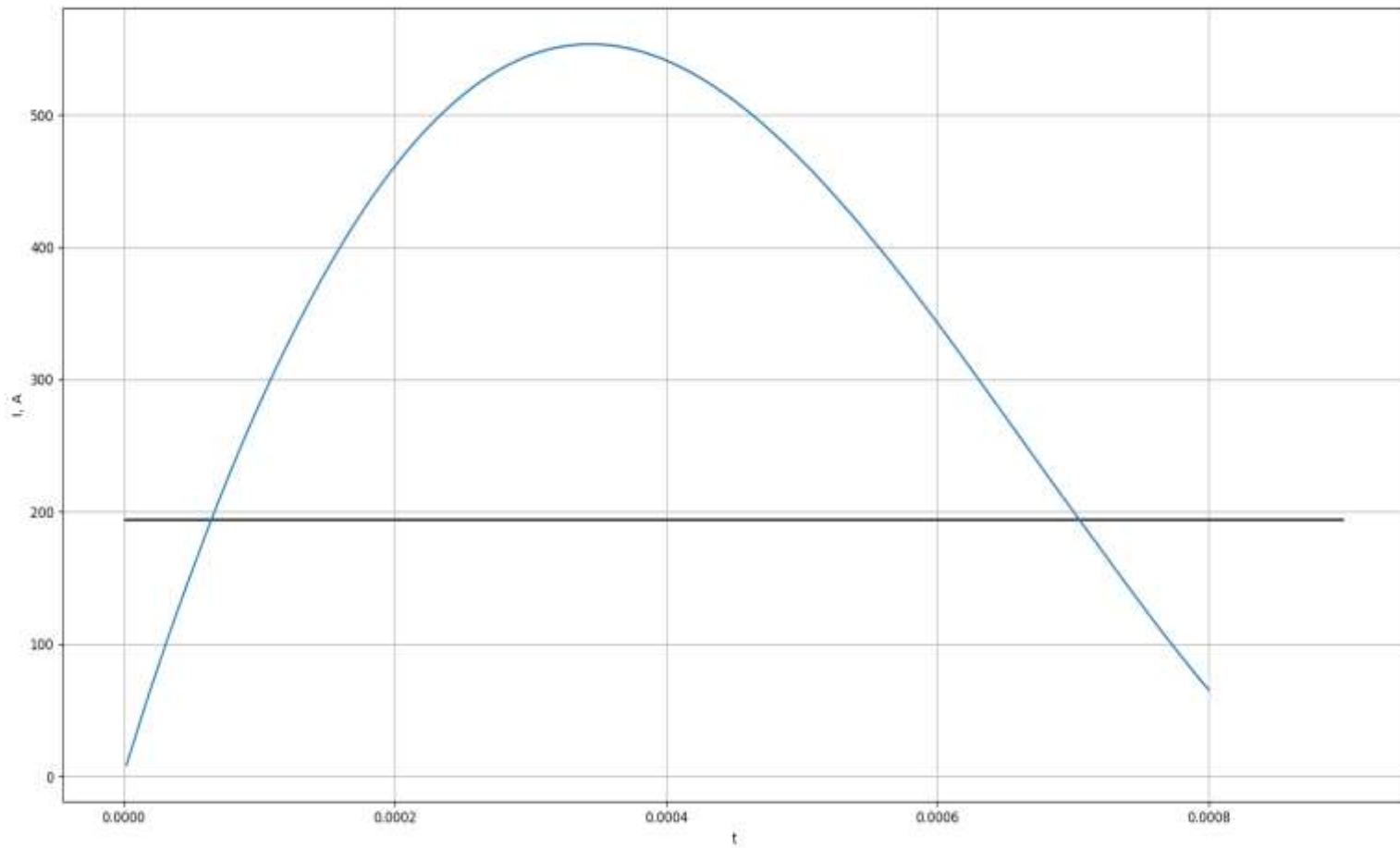
Из графика видно, что при увеличении C_k значение $t_{\text{имп}}$ также увеличивается.

График $I(t)$ при уменьшении изначального значения C_k в 1.5 раза.



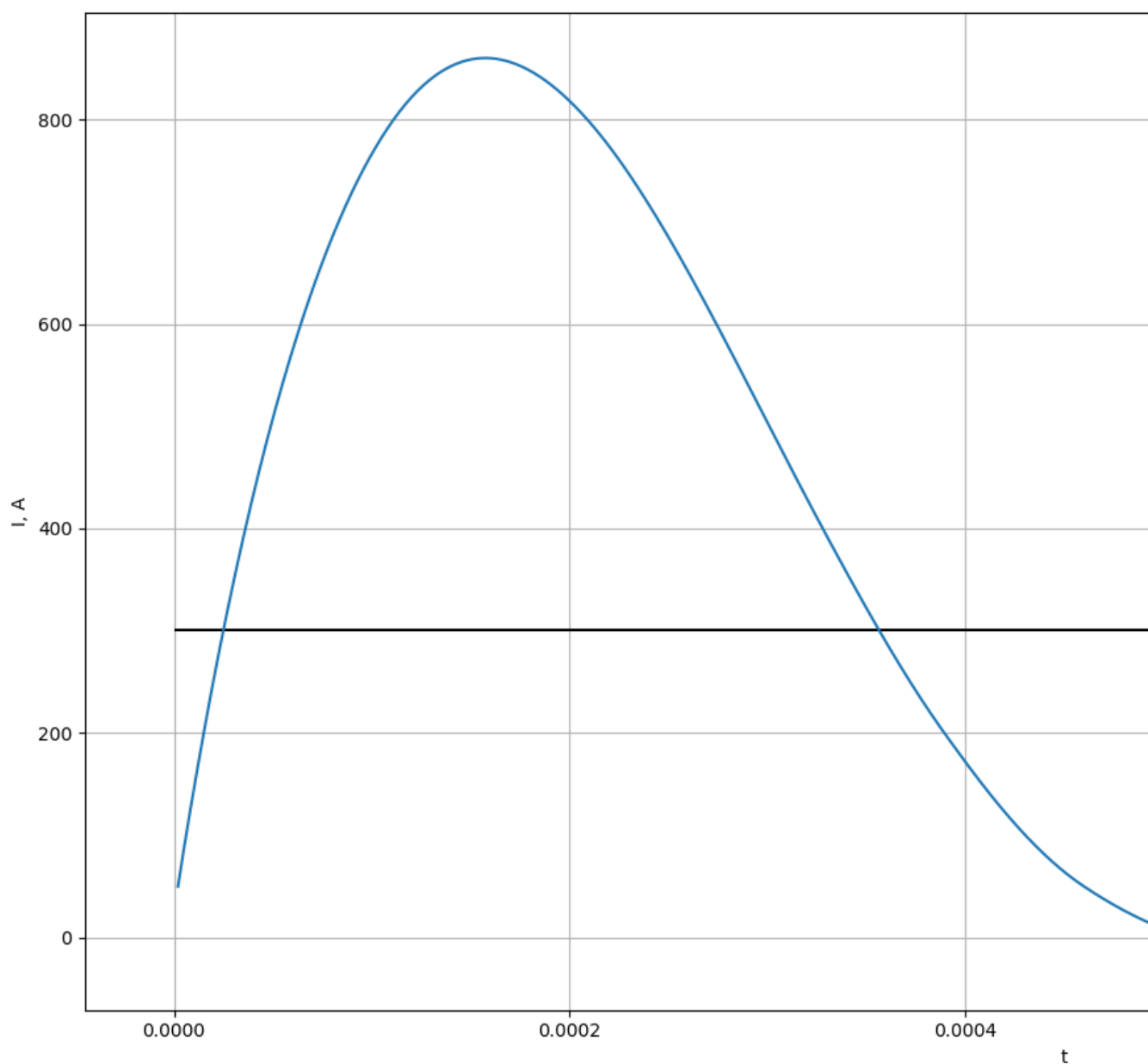
Из графика видно, что при уменьшении C_k значение $t_{\text{имп}}$ также уменьшается.

График $I(t)$ при увеличении изначального значения L_k в 2 раза.



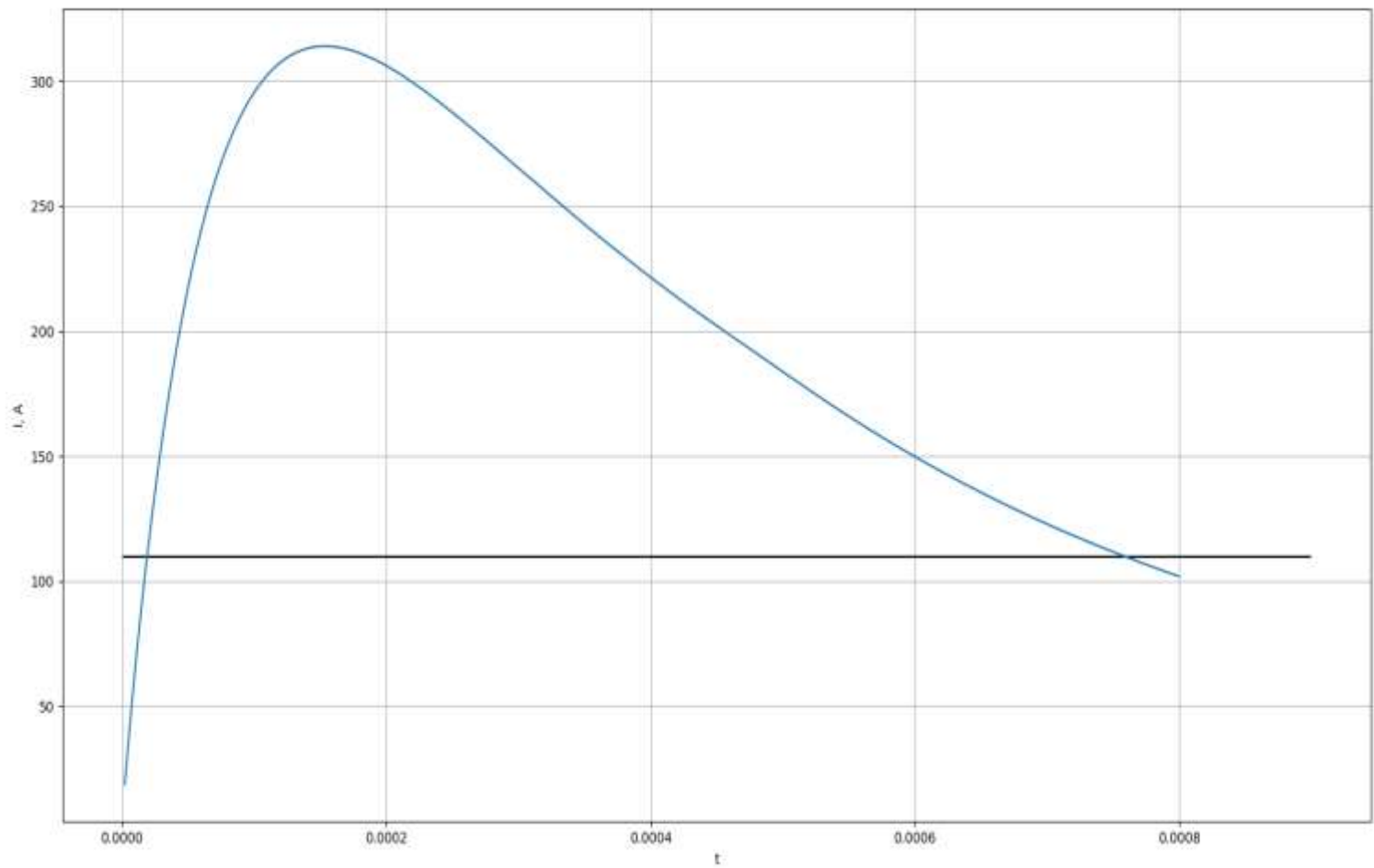
Из графика видно, что при увеличении L_k значение $t_{\text{имп}}$ также увеличивается.

График $I(t)$ при уменьшении изначального значения L_k в 2 раза.



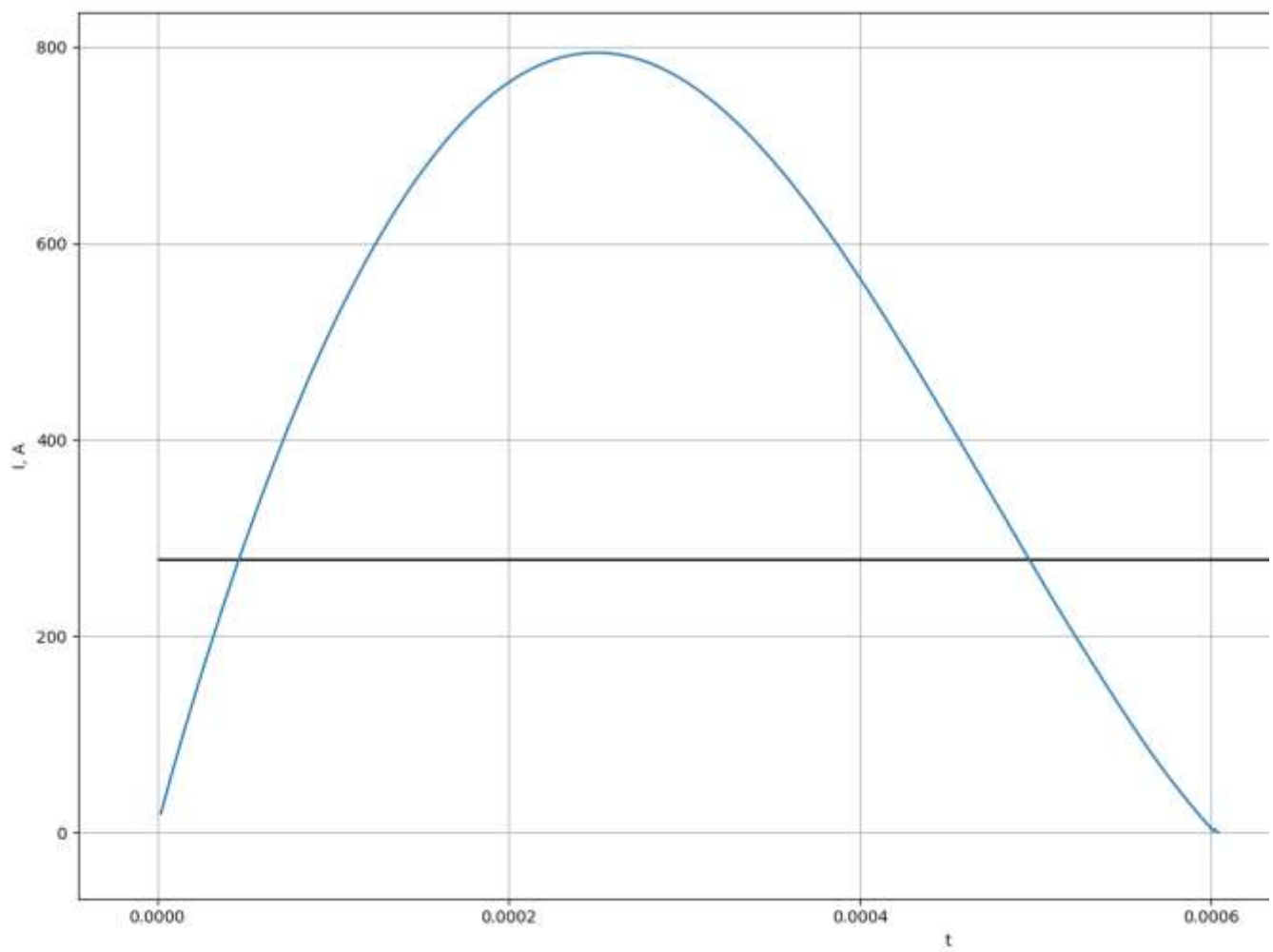
Из графика видно, что при уменьшении L_k значение $t_{\text{имп}}$ также уменьшается.

График $I(t)$ при увеличении изначального значения R_k в 10 раз.



Из графика видно, что при увеличении R_k значение $t_{\text{имп}}$ также увеличивается.

График $I(t)$ при уменьшении изначального значения R_k в 10 раз.



Из графика видно, что при уменьшении R_k значение $t_{\text{имп}}$ также уменьшается.

Ответы на вопросы по лабораторной работе.

1. Какие способы тестирования программы, кроме указанного в п.2, можете предложить еще?

Ответ: например, убрать лампу, при большом значении параметра R_k будет апериодическое затухание, при небольших значениях будут затухающие колебания.

2. Получите систему разностных уравнений для решения сформулированной задачи неявным методом трапеций. Опишите алгоритм реализации полученных уравнений.

Ответ:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2} [f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})] + O(h^2)$$

$$\begin{cases} \frac{dI}{dT} = \frac{U - (R_k + R_p(I))I}{L_k} \\ \frac{dU}{dt} = -\frac{I}{C_k} \end{cases}$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{h}{2} \left[\frac{U_n - (R_k + R_p(I_n))I_n}{L_k} + \frac{U_{n+1} - (R_k + R_p(I_{n+1}))I_{n+1}}{L_k} \right]$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2} \left[-\frac{I_n}{C_k} - \frac{I_{n+1}}{C_k} \right] = U_n - \frac{h}{2} \left[\frac{I_n + I_{n+1}}{C_k} \right]$$

Подставим U_{n+1} в выражение для I_{n+1}

$$I_{n+1} = I_n + \frac{h}{2L_k} \left[2U_n - \left(R_k + R_p(I_n) + \frac{h}{2C_k} \right) I_n - \left(R_k + R_p(I_{n+1}) + \frac{h}{2C_k} \right) I_{n+1} \right]$$

3. Из каких соображений проводится выбор того или иного метода, учитывая, что чем выше порядок точности метода, тем он более сложен?

Ответ: оценка погрешности для частного случая вида правой части дифференциального уравнения

$$\varphi(x, v) \equiv \varphi(x)$$

Если функция $\varphi(x, v)$ непрерывна и ограничена, а также непрерывны и ограничены её четвертые производные, то наилучший результат достигается при использовании схемы

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3)$$

Если функция $\varphi(x, v)$ не имеет таких производных, то четвертый порядок схемы выше не может быть достигнут и тогда целесообразно применение более простых схем.