Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №4

По курсу: «Моделирование»

Студент Жигалкин Д.Р.
Группа ИУ7-65Б
Преподаватель Градов В.М.

Москва, 2021 г.

Цель работы: получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа.

Исходные данные

1. Задана математическая модель.

Уравнение для функции $T(x,t)$

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{2}{R}\alpha(x)T+\frac{2T_0}{R}\alpha(x) \tag{1}$$

Краевые условия

$$\begin{cases} t=0, \quad T(x,0)=T_0, \\ x=0, \quad -k(T(0))\,\dfrac{\partial T}{\partial x}=F_0, \\ x=l, \quad -k(T(l))\,\dfrac{\partial T}{\partial x}=\alpha_N\,(T(l)-T_0) \end{cases}$$

В обозначениях уравнения лекции

$$p(x)=\frac{2}{R}\alpha(x) \;\; f(u)\equiv f(x)=\frac{2T_0}{R}\alpha(x)$$

2. Разностная схема с разностным краевым условием при $x=0$ получена в лекции и может быть использована в данной работе. Самостоятельно надо получить интегро-интерполяционным методом разностный аналог краевого условия при x=l, точно так же, как это сделано при x=0. Для этого надо проинтегрировать на отрезке $[X_{N-\frac{1}{2}}, X_N]$ выписанное выше уравнение (1) и учесть, что поток $F_N=\alpha_N(\widehat{y_N}-T_0)$, а $F_{N-\frac{1}{2}}=\widehat{X_{N-\frac{1}{2}}}\frac{\widehat{y_{N-1}}-\widehat{y_N}}{h}$.

3. Значения параметров для отладки (все размерности согласованы)

$k(T)=a_1(b_1+c_1T^{m_1})$, Вт/см К,

$c(T)=a_2+b_2T^{m_2}-\frac{c_2}{T^2}$, Дж/см^{3}К.

a_1=0.0134, b_1=1, c_1=4.35 10^{-4}, m_1=1,

a_2=2.049, b_2=0.563 10^{-3}, c_2=0.528 10^{5}, m_2=1.

$\alpha(x)=\dfrac{c}{x-d}$,

$\alpha_0=0.05$ Вт/см^2 К,

$\alpha_N=0.01$ Вт/см^2 К,

$l=$ 10 см,

$T_0=300$К,

$R=0.5$ см,

$F(t)=50$ Вт/см^2 (для отладки принять постоянным).

Физическое содержание задачи

1. Сформулированная в данной работе математическая модель описывает **нестационарное** температурное поле $T(x,t)$, зависящее от координаты x и меняющееся во времени.

2. Свойства материала стержня привязаны к температуре, т.е. теплоемкость и коэффициент теплопроводности $c(T), k(T)$зависят от T.

3. При $x=0$ цилиндр нагружается тепловым потоком$F(t)$, в общем случае зависящим от времени.

Если в настоящей работе задать поток постоянным, т.е. F(t)=const, то будет происходить формирование температурного поля от начальной температуры T_0 до некоторого установившегося (стационарного) распределения T(x, t). Это поле в дальнейшем с течением времени меняться не будет. Это полезный факт для тестирования программы.

Если после разогрева стержня положить поток F(t)=0, то будет происходить остывание, пока температура не выровняется по всей длине и не станет равной T_0.

При произвольной зависимости потока F(t) от времени температурное поле будет как-то сложным образом отслеживать поток.

Замечание. Варьируя параметры задачи, следует обращать внимание на то, что решения, в которых температура превышает примерно 2000К, физического смысла не имеют и практического интереса не представляют.

Результаты работы

1. Представить разностный аналог краевого условия при x=l и его краткий вывод интегро-интерполяционным методом.

Разностный аналог краевого условия при x = l получается путем интегрирования уравнения

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{2}{R}\alpha(x)T + \frac{2T_0}{R}\alpha(x)$$

на отрезке $[X_{N-\frac{1}{2}},\ X_N]$, с учетом $F_N = \ \alpha_N(\widehat{y_N} - T_0\ ),\ F_{N-\frac{1}{2}} = \ \widehat{X_{N-\frac{1}{2}}}\frac{\widehat{y_{N-1}}-\widehat{y_N}}{h}$.

Введем следующее обозначение:

$$F = \ -k(u)\frac{\partial T}{\partial x}$$

Проинтегрируем уравнение:

$$\int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(t)\frac{\partial T}{\partial t}dt =$$

$$= \ -\int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N} \frac{\partial F}{\partial x}\ dx - \int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x)Tdt$$

$$+ \int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(x)dt$$

Интегрируя аналогично разностному аналогу краевого условия при $x = 0$ получим, учтя $F_N = \alpha_N(\widehat{y_N} - T_0)$, $F_{N-\frac{1}{2}} = \widehat{X_{N-\frac{1}{2}}} \frac{\widehat{y_{N-1}} - \widehat{y_N}}{h}$:

$$\frac{h}{4}\left(\widehat{c_N}(\widehat{y_N} - y_N) - \widehat{c_{N-\frac{1}{2}}}\left(\frac{\widehat{y_N} + \widehat{y_{N-1}}}{2} - \frac{y_N + y_{N+1}}{2}\right)\right) =$$

$$= -\tau\left(\alpha_N(\widehat{y_N} - T_0) - \widehat{X_N}\frac{\widehat{y_N} + \widehat{y_{N-1}}}{h}\right)$$

$$- \tau\frac{h}{4}\left(p_N\widehat{y_N} - p_{n-\frac{1}{2}}\frac{\widehat{y_N} + \widehat{y_{N-1}}}{2} + \left(\widehat{f_N} - \widehat{f_{N-\frac{1}{2}}}\right)\right)$$

Приведем уравнение к каноническому виду систем с трехдиагональной матрицей.

$$\left(\frac{h}{4}\widehat{c_N} + \frac{h}{8}\widehat{c_{N-\frac{1}{2}}} + \tau\,\alpha_N + \frac{\tau}{h}\widehat{X_{N-\frac{1}{2}}} + \frac{h}{4}\tau\,p_N + \frac{h}{8}\tau\,p_{N-\frac{1}{2}}\right)\widehat{y_N}$$

$$+ \left(\frac{h}{8}\widehat{c_{N-\frac{1}{2}}} - \frac{\tau}{h}\widehat{X_{N-\frac{1}{2}}} + \frac{h}{8}\,\tau\,p_{N-\frac{1}{2}}\right)\widehat{y_{N-1}}$$

$$= \alpha_N\,\tau\,T_0 + \frac{h}{4}\widehat{C_N}y_N + \frac{h}{8}\widehat{c_{N-\frac{1}{2}}}(y_N + y_{N-1}) + \frac{h}{4}\tau\,(\widehat{f_N} + \widehat{f_{N-\frac{1}{2}}})$$

Примем простую аппроксимацию:

$$p_{N-\frac{1}{2}} = \frac{p_{N-1} + p_N}{2}$$

В итоге система примет канонический вид:

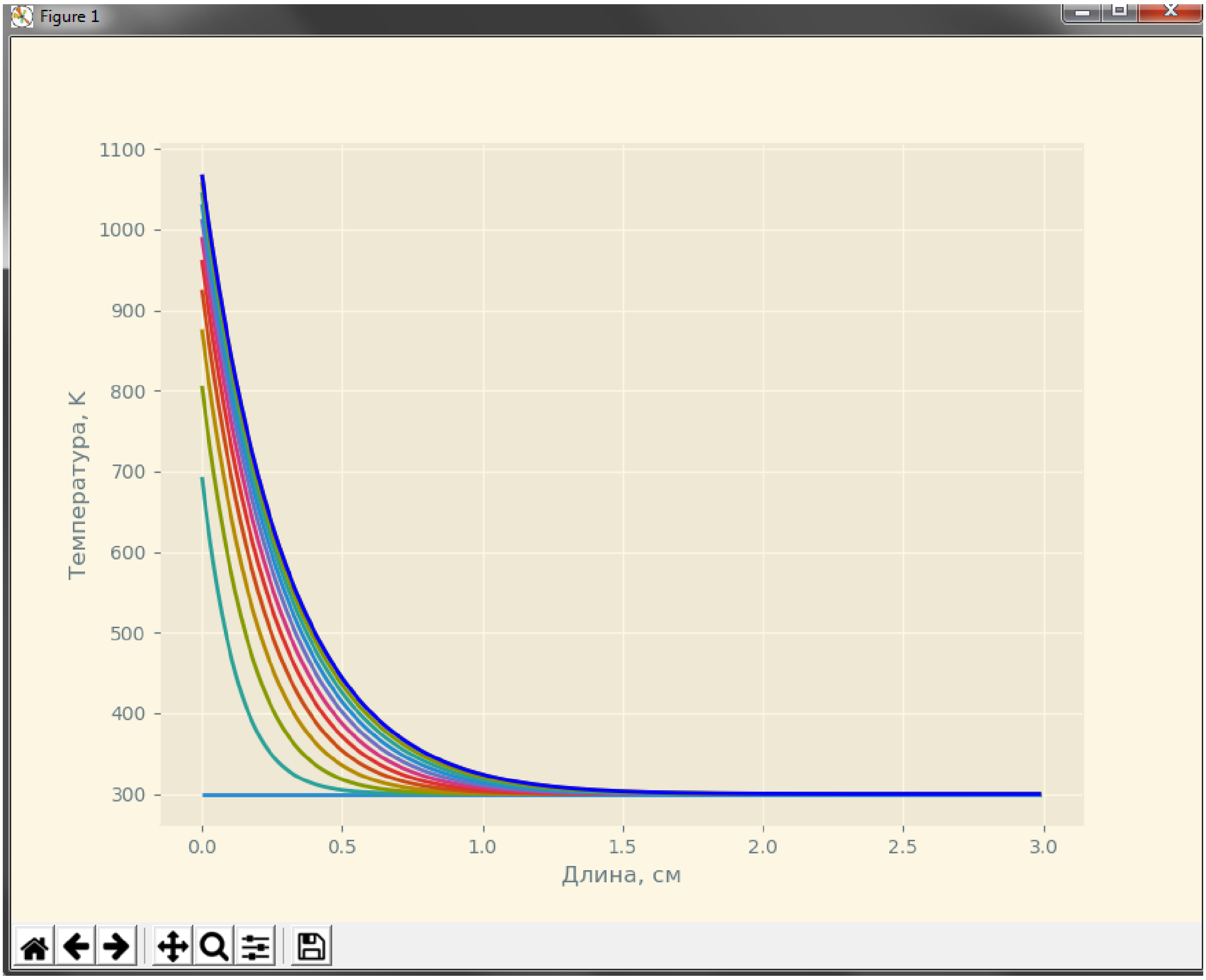
$$\begin{cases} \widehat{K_0}\widehat{y_0} + \widehat{M_0}\widehat{y_1} = \widehat{P_0} \\ \widehat{A_n}\widehat{y_{n-1}} - \widehat{B_n}\widehat{y_n} + \widehat{D_n}\widehat{y_{n+1}} = -\widehat{F_n} \\ \widehat{K_N}\widehat{y_N} + \widehat{M_{N-1}}\widehat{y_{N-1}} = \widehat{P_N} \end{cases}$$

Систему выше можно решить методом итераций.
Пусть s – номер итерации.

$$\hat{A}_n^{s-1}\hat{y}_{n+1}^s - \hat{B}_n^{s-1}\hat{y}_n^s + \hat{D}_n^{s-1}\hat{y}_{n-1}^s = -\hat{F}_n^{s-1}$$

В качестве начального приближения $\hat{y}_n^0$ задается сошедшееся решение $\hat{y}_n$ с предыдущего шага $t = t_m$, т. е $\hat{y}_n^0 = \hat{y}_n$

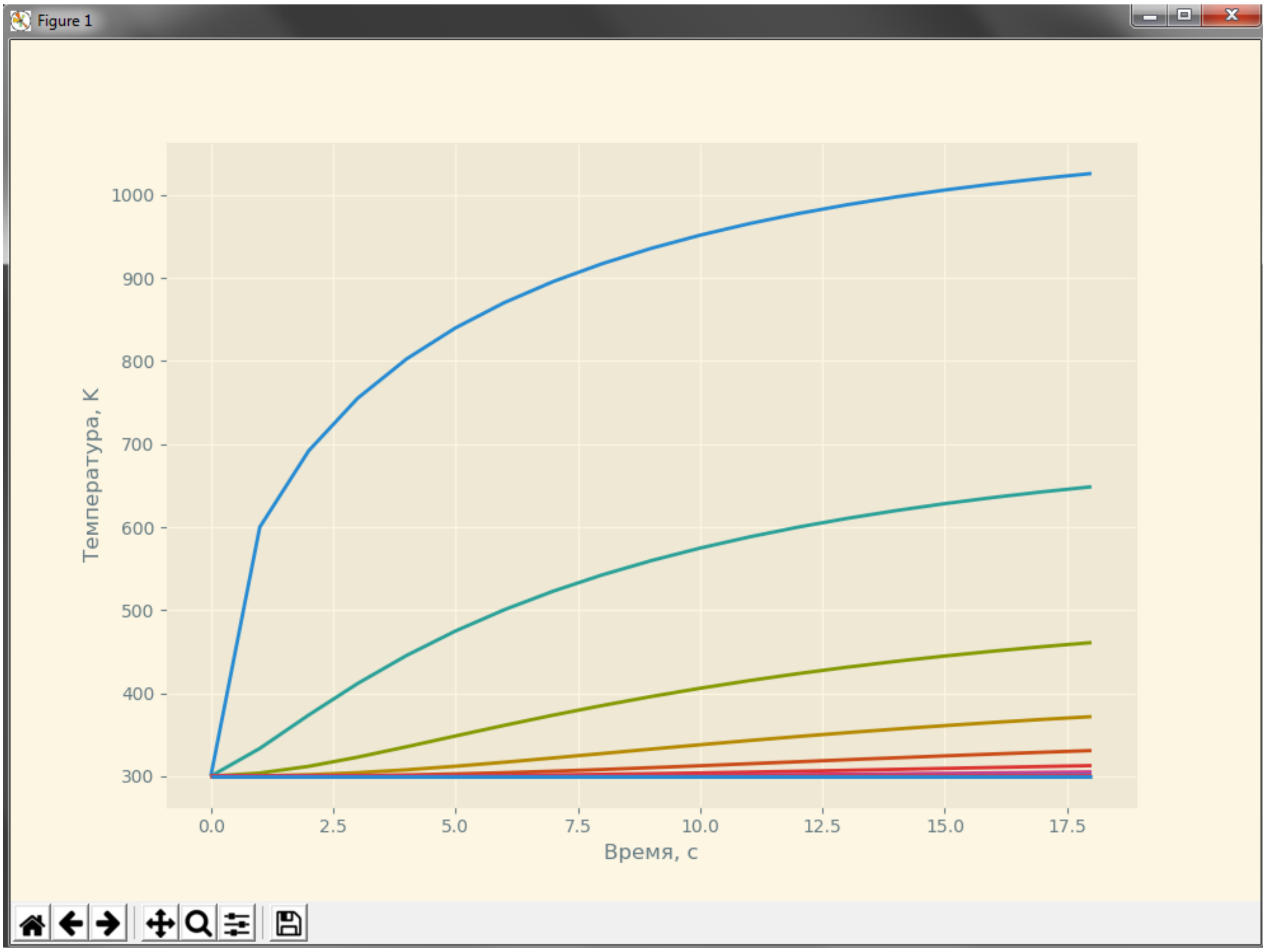
2. <u>График зависимости температуры $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t_m})$от координаты x при нескольких фиксированных значениях времени $\boldsymbol{t_m}$ при заданных выше параметрах.</u>



На рисунке представлены графики зависимости температуры от координаты при фиксированных t = 0, 2, 4, ...

Последняя – синяя кривая соответствует установившемуся режиму, когда поле перестает меняться с точностью 1e-3.

3. <u>График зависимости $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{t})$ при нескольких фиксированных значениях координаты $\boldsymbol{x_n}$. Обязательно представить случай n=0, т.е. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{0}$.</u>



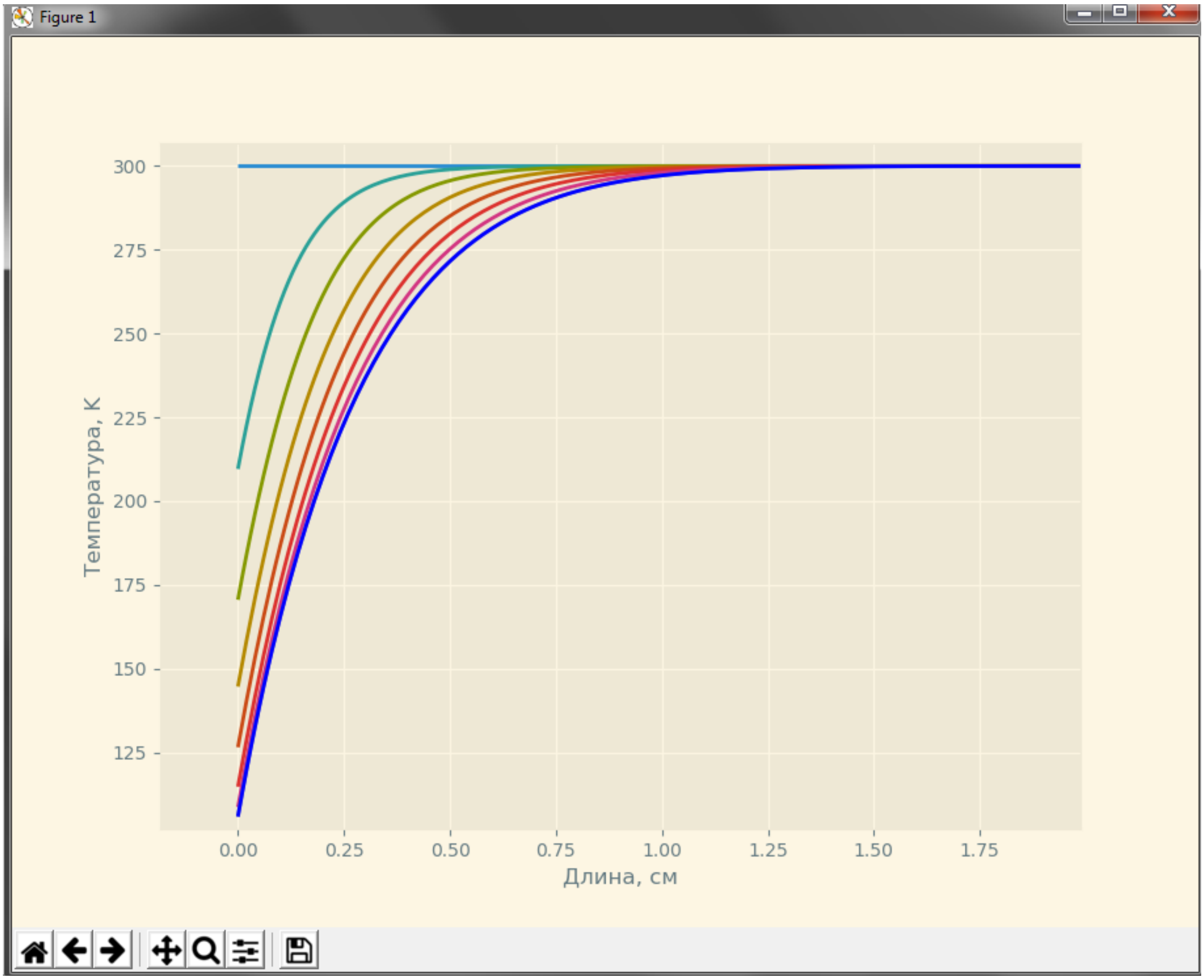
На рисунке представлены графики зависимости температуры от времени при фиксированных x = 0, 0.2, 0.4, .. 3.2

Вопросы при защите лабораторной работы

1. Приведите результаты тестирования программы (графики, общие соображения, качественный анализ).

Основываясь на физическом смысле задачи, можно принять F0 = -10

При отрицательном тепловом потоке слева должен идти съем тепла.



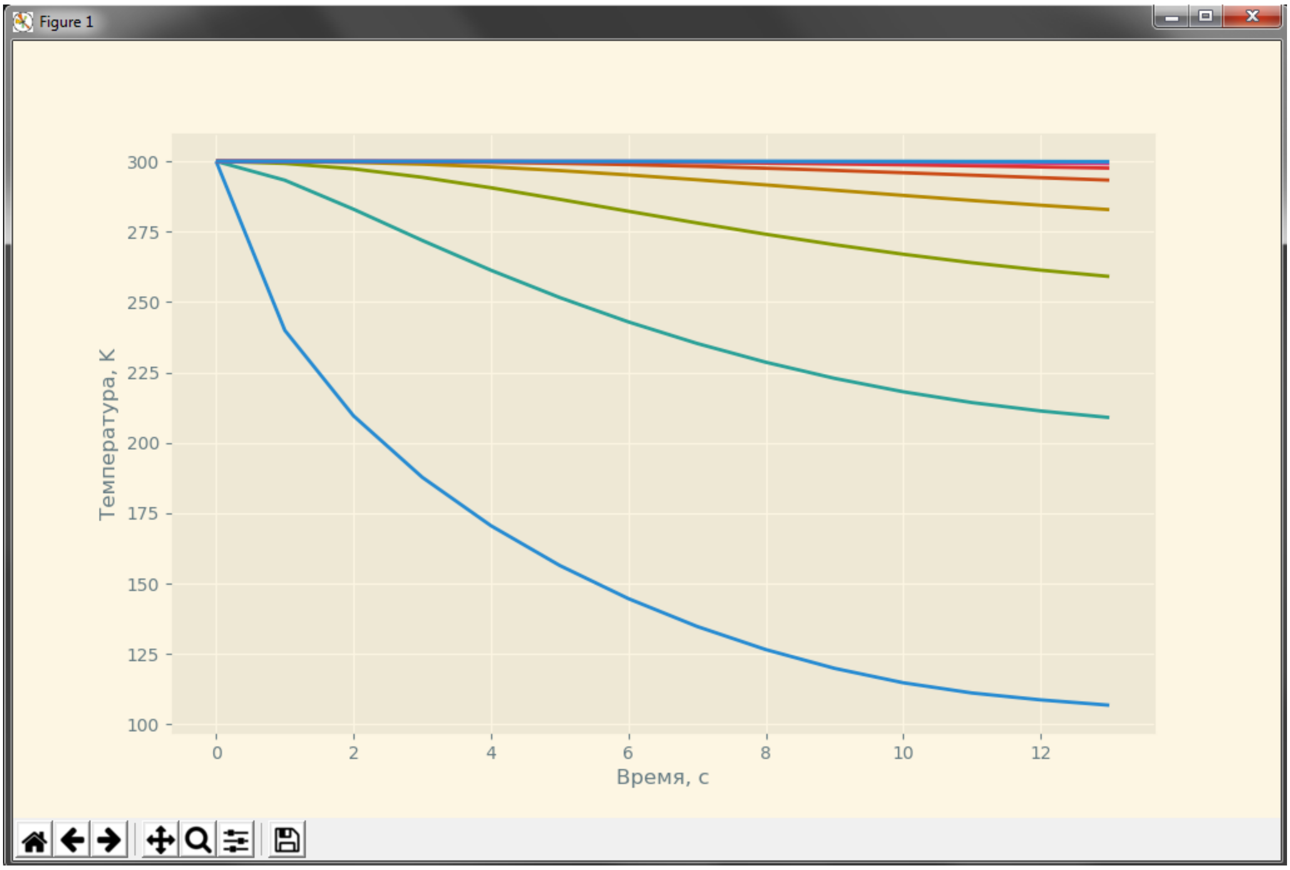
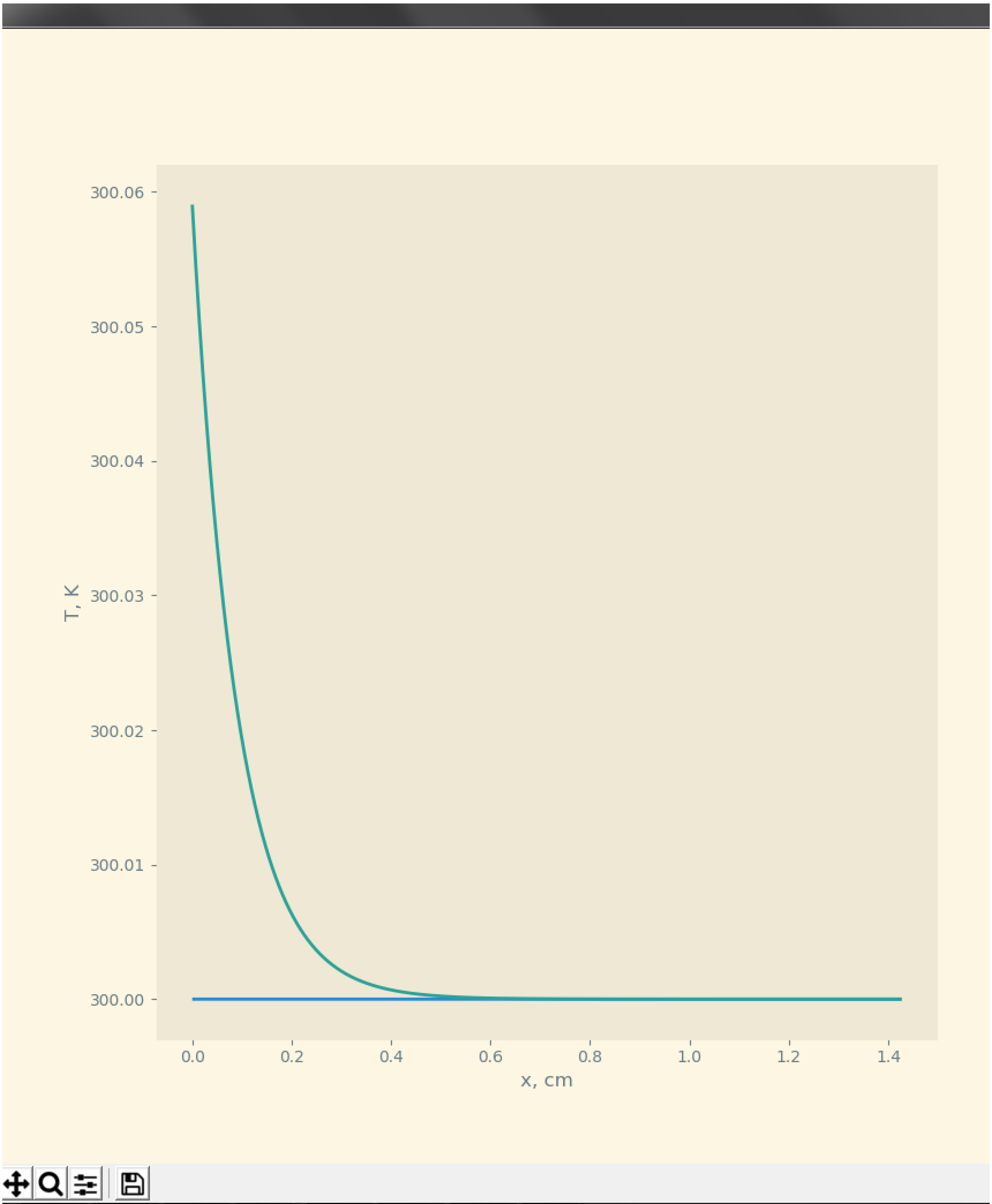


Figure 1
Температура, К
300
275
250
225
200
175
150
125
100
0
2
4
6
8
10
12
Время, с

График при F0 = 0.



Тепловой поток отсутствует, причин для нагрева нет, температура стержня должна быть равна температуре окружающей среды T0. На графике видна погрешность.

Листинг

```
def k(T):
        return a1 *(b1 + c1 * T**m1)

def c(T):
        return a2 + b2 * T**m2 -(c2 / T**2)

def alpha(x):
        d =(alphaN*l)/(alphaN-alpha0)
        c =- alpha0 * d
        return c /(x-d)

def p(x):
        return(2/R)* alpha(x)

def f(x):
        return(2*T0/R)* alpha(x)


def A(T):
        return t/h * approc_minus_half(k, T, t)

def D(T):
        return t/h * approc_plus_half(k, T, t)

def B(x, T):
        return A(T)+ D(T)+ h*c(T)+ h*t*p(x)

def F(x, T):
        return h*t*f(x)+ T*h*c(T)


def approc_plus_half(func, n, step):
        return(func(n)+ func(n + step))/2

def approc_minus_half(func, n, step):
        return(func(n)+ func(n - step))/2

def left_boundary_condition(T_prev):
    T_prev_0 = T_prev[0]
    c_plus = approc_plus_half(c, T_prev_0, t)
    k_plus = approc_plus_half(k, T_prev_0, t)
    c0 = c(T_prev_0)

    K0 = h/8* c_plus + h/4* c0 + t/h * k_plus + \
         t * h/8* p(h/2)+ t * h/4* p(0)

    M0 = h/8* c_plus - t/h * k_plus + t * h/8* p(h/2)

    P0 = h/8* c_plus *(T_prev_0 + T_prev[1])+ \
         h/4* c0 * T_prev_0 + F0 * t + t * h/8*(3* f(0)+ f(h))

    return K0, M0, P0

def right_boundary_condition(T_prev):
    T_prev_N = T_prev[-1]
    c_minus = approc_minus_half(c, T_prev_N, t)
    k_minus = approc_minus_half(k, T_prev_N, t)
    cN = c(T_prev_N)

    KN = h/8* c_minus + h/4* cN + t/h * k_minus + t * alphaN + \
```

```
        t * h/8* p(l - h/2)+ t * h/4* p(l)

    MN = h/8* c_minus - t/h * k_minus + t * h/8* p(l - h/2)

    PN = h/8* c_minus *(T_prev_N + T_prev[-2])+ \
        h/4* cN * T_prev_N + t * alphaN * T0 + t * h/4*(f(l)+ f(l - h/2))

    return KN, MN, PN


def get_T_new(T_prev):
    K0, M0, P0 = left_boundary_condition(T_prev)
    KN, MN, PN = right_boundary_condition(T_prev)

    eps =[0,-M0 / K0]
    eta =[0, P0 / K0]

    x = h
    n = 1

    while(x + h < l):
        T_prev_n = T_prev[n]
        denominator =(B(x, T_prev_n)- A(T_prev_n)* eps[n])

        next_eps = D(T_prev_n)/ denominator
        next_eta =(F(x, T_prev_n)+ A(T_prev_n)* eta[n])/ denominator

        eps.append(next_eps)
        eta.append(next_eta)

        n +=1
        x += h

    T_new =[0]*(n +1)
    T_new[n]=(PN - MN*eta[n])/(KN + MN*eps[n])

for i inrange(n -1,-1,-1):
        T_new[i]= eps[i+1]* T_new[i+1]+ eta[i+1]

       return T_new
```

```
def simple_iter():
    step1 =int(l / h)
    T =[T0]*(step1 +1)
    T_new =[0]*(step1 +1)
    ti =0
    res =[]
    res.append(T)
    lent =len(T)

    while True:
        T_prev = T
        while True:
            T_new = get_T_new(T_prev)
            cur_max = fabs((T[0]- T_new[0])/ T_new[0])
            for i inrange(lent):
                d = fabs(T[i]- T_new[i])/ T_new[i]
                if d > cur_max:
                    cur_max = d

            if cur_max < 1:
                break
            T_prev = T_new

        res.append(T_new)
        ti += t

        flag_eps_ok =True
        for i inrange(lent):
                if fabs((T[i]- T_new[i])/ T_new[i])>1e-2:
                        flag_eps_ok =False
        if flag_eps_ok:
                break
        T = T_new

        return res, ti


if__name__== "__main__":
    a1 =0.0134
    b1 =1
    c1 =4.35e-4
    m1 =1
    a2 =2.049
    b2 =0.563e-3
    c2 =0.528e5
    m2 =1

    alpha0 =0.05
    alphaN =0.01
    l =10
    T0 =300
    R =0.5
    F0 =50

    h =1e-3
    t =1

    res, ti = simple_iter()

    lenres =len(res)
    last =int(len(res[0])/7)
    res_cutted=[i[0:last:]for i in res]
```

```
    fig,(first_graph, second_graph)= plt.subplots(
        nrows=1, ncols=2,
        figsize=(8,4))

# Первая cm - K
    x =list(np.arange(0, l, h))
    x_cutted = x[:last:]
    step =3
for i in res_cutted[::step]:
        first_graph.plot(x_cutted, i)
    first_graph.plot(x_cutted, res_cutted[-1])
    first_graph.set_xlabel("x, cm")
    first_graph.set_ylabel("T, K")
    first_graph.grid()

# Вторая sec - K
    te =list(range(0, ti, t))
for i in np.arange(0, l/3,0.2):
        line =[j[int(i/h)]for j in res]
        second_graph.plot(te, line[:-1])
    second_graph.set_xlabel("t, sec")
    second_graph.set_ylabel("T, K")
    second_graph.grid()
    fig.show()
```