

实验报告

实验题目	班级	姓名	学号	指导教师
欧几里得算法与素数检测	计科 2303 班	林烨洋	202318140126	程昊苏

算法概述：

实验 1： 欧几里得算法-求最大公约数

欧几里得算法（Euclidean Algorithm）是一种用于求两个整数最大公约数（GCD）的高效方法。其基本思想是利用带余除法原理，通过不断用较小数去除较大数并取余，递归或循环地将问题规模缩小，直到余数为零为止，此时除数即为最大公约数。

1. 递归做法

➤ 代码及运行结果计时情况如下所示

The screenshot shows two terminal windows side-by-side. The left window displays the Python code for Euclid's algorithm, specifically a recursive implementation. The right window shows the execution of this code and its performance metrics.

Terminal 1 (Code):

```
Terminal
File Edit View Search Terminal Help
import random
def gcd_recursive(a, b):
    if b == 0:
        return a
    else:
        return gcd_recursive(b, a % b)
if __name__ == "__main__":
    n = 512
    a = random.getrandbits(n)
    b = random.getrandbits(n)
    result = gcd_recursive(a, b)
    print("gcd({}),\n{} =\n{}".format(hex(a), hex(b), hex(result)))
```

"euclid1.py" 12L, 320C

1,1 All

Terminal 2 (Execution and Timing):

```
Terminal
File Edit View Search Terminal Help
bigdata@ubuntu:~$ time python3 euclid1.py
gcd(0xa92ad124cc1cb45011f9c8be52b042489f0a8d52103e6c2f144626a70604750d5b8f852342
4db87e568db543f98caa0c090820061ee2dee9d027f97543fb3b1e,
0xb17e87fdcdcf54f9375580dab5598d44b2ec75899b4e44418288841dcc881ea5ba6b5a9d8feb9
26ac065892c56adc32ddfc2167ea3f72510dafb2ef026e86a1e) =
0x2

real    0m0.023s
user    0m0.008s
sys     0m0.012s
bigdata@ubuntu:~$ vi euclid1.py
bigdata@ubuntu:~$ time python3 euclid1.py
gcd(0x3d9a3b1fec514425aecb3db3c6b330263eee0ce3ece202e47430a36c2d039d139f486f10c4
1e3979a5a45093c3db25ef6ac009e76d1936a21064fc6c45cfdb48,
0xee0306cd27ef3b53adc7fa9e419eaf10b20f583616768a5220015ab8ad01f737212cdeec1d056
2f1605d156aedf2b12ee919926cc5ee3d3ccce70ea8db907b2) =
0x2

real    0m0.024s
user    0m0.016s
sys     0m0.004s
bigdata@ubuntu:~$
```

➤ 运行结果说明

gcd(0x3d9a3b1fec514425aecb3db3c6b330263eee0ce3ece202e47430a36c2d039d139f486f10c
41e3979a5a45093c3db25ef6ac009e76d1936a21064fc6c45cfdb48,

0xee0306cd27ef3b53adc7fa9e419eaf10b20f583616768a5220015ab8ad01f737212cdeec1d05
62f1605d156aedf2b12ee919926cc5ee3d3ccce70ea8db907b2) =
0x2

real 0m0.024s

user 0m0.016s

sys 0m0.004s

代表这两个 512bit 的数的最大公因数的 16 进制表示为 **0x2**

且运行时间分别为

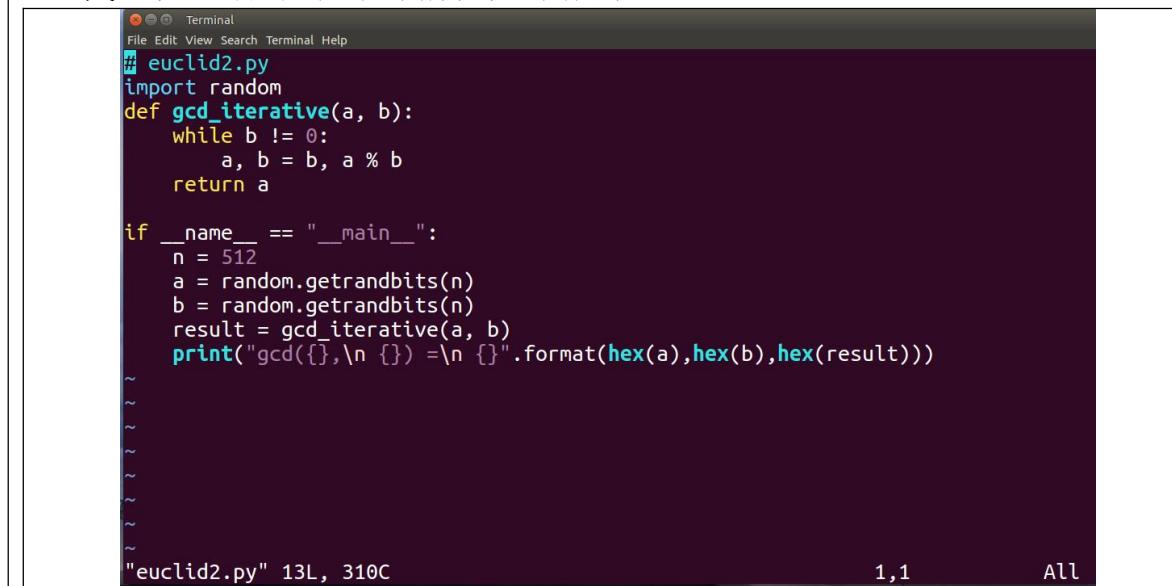
real (实际时间) 0m0.024s

user (用户态时间) 0m0.016s

sys (内核时间) 0m0.004s

2. 非递归做法

➤ 代码及运行结果计时情况如下所示



```
Terminal
File Edit View Search Terminal Help
# euclid2.py
import random
def gcd_iterative(a, b):
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a

if __name__ == "__main__":
    n = 512
    a = random.getrandbits(n)
    b = random.getrandbits(n)
    result = gcd_iterative(a, b)
    print("gcd({}, {}) = {}".format(hex(a), hex(b), hex(result)))
~
~
```

"euclid2.py" 13L, 310C 1,1 All

```

Terminal
File Edit View Search Terminal Help
bigdata@ubuntu:~$ time python3 euclid2.py
gcd(0xc980183b365dea1019cd7e69cf421291425d9ec21d75c7ecbc23b820ec1a69d91eb9fd2e7e
6ca8a5ad4beb1cc2788c9d611dca67b70704c2d22e2e1702ef6156,
 0xc613158982245a6971d4f4a0b90bcb06cdade8e4304516459f3a53707abcf8ffb98c5cb7d83ed
76581cc028299bcea5533e663c7390cd9a6db190e3a56ae7a7f) =
0x1

real    0m0.023s
user    0m0.012s
sys     0m0.008s
bigdata@ubuntu:~$ vi euclid2.py
bigdata@ubuntu:~$ time python3 euclid2.py
gcd(0x690017624f0f8cd5661f7210603cbbfe70a06f8bbcea5a1fc2536315e0b11dbd8d8c516b83
b355e05ec17de2db22982946538404d20823319d373f4544e13db6,
 0x53b375141d260a68dca30ef2e11a3551aa4cf1991109ec1667aabc2aa6f2fbfd08807cda73fb7
1626772c91bab5c4e479ed0205fd1ed89856e888cdc9a404d11) =
0x1

real    0m0.023s
user    0m0.012s
sys     0m0.008s
bigdata@ubuntu:~$
```

➤ 运行结果说明

$\text{gcd}(0x690017624f0f8cd5661f7210603cbbfe70a06f8bbcea5a1fc2536315e0b11dbd8d8c516b83b355e05ec17de2db22982946538404d20823319d373f4544e13db6,$

$0x53b375141d260a68dca30ef2e11a3551aa4cf1991109ec1667aabc2aa6f2fbfd08807cda73fb71626772c91bab5c4e479ed0205fd1ed89856e888cdc9a404d11) =$

0x1

real 0m0.023s
user 0m0.012s
sys 0m0.008s

代表这两个 512bit 的数的最大公因数的 16 进制表示为 **0x1**

且运行时间分别为

real (实际时间)	0m0.023s
user (用户态时间)	0m0.012s
sys (内核时间)	0m0.008s

实验 2：欧几里得扩展算法 模运算求逆

扩展欧几里得算法是在普通欧几里得算法基础上发展而来，不仅能求出两个整数的最大公约数，还能同时求得满足 $sa + tb = \text{gcd}(a, b)$ 的整数 s 、 t 。当 a 与 b 互素时，该算法可用于求解模逆元 $a^{-1} \bmod m$ 。其核心思想是通过不断的带余除法与线性组合迭代更新，逐步得到逆元的系数，算法高效且实现简单。

```
Terminal
File Edit View Search Terminal Help
extEuclid.py
# 扩展欧几里得算法求模逆元
def getInverse(m, b):
    print("{:>4} {:>6} {:>6} {:>6} {:>6} {:>6} ".format('Q', 'A1', 'A2', 'A
3', 'B1', 'B2', 'B3'))
    print("{:>4} {:>6} {:>6} {:>6} {:>6} ".format('-', 1, 0, m, 0, 1,
b))

    A1, A2, A3 = 1, 0, m
    B1, B2, B3 = 0, 1, b

    while True:
        if B3 == 0:
            print("\n无逆元 (gcd != 1) ")
            return None
        if B3 == 1:
            inverse = B2 % m
            print("\n逆元存在 : b^(-1) ≡ {} (mod {})".format(inverse, m))
            return inverse

        Q = A3 // B3
        T1 = A1 - Q * B1
        T2 = A2 - Q * B2
        T3 = A3 - Q * B3

        print("{:>4} {:>6} {:>6} {:>6} {:>6} ".format(Q, A1, A2, A3,
B1, B2, B3))

        # 更新
        A1, A2, A3 = B1, B2, B3
        B1, B2, B3 = T1, T2, T3

if __name__ == "__main__":
    m = 1759
    b = 550
    print("计算 {} 在模 {} 下的逆元 :\n".format(b, m))
    inverse = getInverse(m, b)

    if inverse is not None:
        # 验证结果正确性
        print("\n验证 : ({}) * {} % {} = {}".format(b, inverse, m, (b * inverse)
% m))
    ~
~
```

```

Terminal
File Edit View Search Terminal Help

Q      A1      A2      A3      B1      B2      B3
-       1       0     1759      0       1     550
3       1       0     1759      0       1     550
5       0       1     550       1      -3     109
21      1      -3     109      -5      16      5
1      -5      16      5     106    -339      4

逆元存在 : b^(-1) ≡ 355 (mod 1759)

验证 : (550 * 355) % 1759 = 1
bigdata@ubuntu:~$ vi extEuclid.py
bigdata@ubuntu:~$ python3 extEuclid.py
计算 550 在模 1759 下的逆元 :

Q      A1      A2      A3      B1      B2      B3
-       1       0     1759      0       1     550
3       1       0     1759      0       1     550
5       0       1     550       1      -3     109
21      1      -3     109      -5      16      5
1      -5      16      5     106    -339      4

逆元存在 : b^(-1) ≡ 355 (mod 1759)

验证 : (550 * 355) % 1759 = 1
bigdata@ubuntu:~$
```

➤ 运行结果说明

此结果展示扩展欧几里得算法求 550 模 1759 逆元过程。

表格列示每步商 Q 及系数 A1-A3、B1-B3，体现迭代计算。

最终得逆元 355，验证 $550 \times 355 \bmod 1759 = 1$ ，符合逆元定义（乘积模 m 为 1）。

实验 3：大整数素性检测

$6N \pm 1$ 素性检测法基于素数分布规律：除 2 和 3 外，所有素数均可表示为 $6N-1$ 或 $6N+1$ 的形式。算法首先排除能被 2 和 3 整除的数，然后仅对形如 $6N \pm 1$ 的数进行整除性检测，显著减少计算次数，提高检测效率。该方法简单高效，适用于中等规模整数的素性判断。

➤ 代码及运行结果计时情况如下所示

```
Terminal
File Edit View Search Terminal Help
# isPrimeNumber1.py
# 实验三：大整数素性检测 (6N±1 法)
import math

def isPrime(n):
    """使用 6N±1 法判断 n 是否为素数"""
    if n <= 1:
        return False
    if n <= 3:
        return True
    # 排除能被 2 或 3 整除的数
    if n % 2 == 0 or n % 3 == 0:
        return False
    # 仅检测 6k±1 形式的数
    i = 5
    while i * i <= n:
        if n % i == 0 or n % (i + 2) == 0:
            return False
        i += 6
    return True

if __name__ == "__main__":
    num = 2**61 - 1
    print("实验三：大整数素性检测 (6N±1 法) \n")
    print("检测整数 n = {}".format(num))
    result = isPrime(num)
    print("结果：{}" .format("是素数" if result else "不是素数"))

~
~
~
~
Software Center isPrimeNumber1.py" 27L, 740C 1,1 All
```

```
Terminal
File Edit View Search Terminal Help
sys      0m0.016s
bigdata@ubuntu:~$ vi isPrimeNumber1.py
bigdata@ubuntu:~$ time python3 isPrimeNumber1.py
实验三：大整数素性检测 (6N±1 法)

检测整数 n = 65536
结果：不是素数

real      0m0.017s
user      0m0.012s
sys       0m0.004s
bigdata@ubuntu:~$ vi isPrimeNumber1.py
bigdata@ubuntu:~$ time python3 isPrimeNumber1.py
实验三：大整数素性检测 (6N±1 法)

检测整数 n = 2147483647
结果：是素数

real      0m0.019s
user      0m0.016s
sys       0m0.000s
bigdata@ubuntu:~$ vi isPrimeNumber1.py
bigdata@ubuntu:~$ time python3 isPrimeNumber1.py
实验三：大整数素性检测 (6N±1 法)

检测整数 n = 2305843009213693951
结果：是素数

real      0m41.843s
user      0m41.780s
sys       0m0.000s
bigdata@ubuntu:~$
```

如代码所示，只需要修改 num 的值即可依次看三个数是否是质数并且分别计算三个数的素性检测的运行时间

该结果展示了 $6N\pm 1$ 法对三个大整数的素性检测： 2^{16} (65536) 因能被 2 整除判定为非素数，耗时仅 0.017 秒； $2^{31}-1$ 和 $2^{61}-1$ 均判定为素数，前者耗时 0.019 秒，后者因数值极大耗时 41.843 秒，体现出大整数检测的时间成本随位数显著增加。

思考题：更高效的素性检测算法

该程序实现两种素性检测算法。 $6N\pm 1$ 法为确定性算法，基于素数（除 2 、 3 外）必形如 $6k\pm 1$ 的特性，通过检验 n 是否能被 5 至 \sqrt{n} 间 $6k\pm 1$ 形式的数整除判断素性，适用于小数。Miller-Rabin 算法为概率性测试，先将 $n-1$ 分解为 $2^s t$ ，再随机选 k 个基底 a ，检验 $a^t \bmod n$ 是否为 1 或 $n-1$ ，及后续平方结果是否为 $n-1$ ，通过多次测试降低误判率，效率远高于 $6N\pm 1$ 法，适合大整数检测。

部分代码展示如下

```
Terminal File Edit View Search Terminal Help
# isPrimeNumber2.py
# 实验四：大整数素性检测 (Miller-Rabin 算法)
import random
import time

# ----- 6N±1法 -----
def isPrime_6N(n):
    """确定性素数检测：6N±1法"""
    if n <= 1:
        return False
    if n <= 3:
        return True
    if n % 2 == 0 or n % 3 == 0:
        return False

    i = 5
    while i * i <= n:
        if n % i == 0 or n % (i + 2) == 0:
            return False
        i += 6
    return True

# ----- Miller-Rabin算法 -----
def isPrime_MR(n, k=10):
    """
    Miller-Rabin 素性测试
    n: 待测整数
    k: 随机测试次数（越大越准确）
    """
    if n <= 1:
        return False
    if n <= 3:
        return True
    if n % 2 == 0:
        return False

    # 将 n-1 写为 2^s * t (t 为奇数)
"isPrimeNumber2.py" 88L, 2314C 1,1 Top
```

运行结果如下

```
Terminal File Edit View Search Terminal Help
bigdata@ubuntu:~$ vi isPrimeNumber1.py
bigdata@ubuntu:~$ vi isPrimeNumber2.py
bigdata@ubuntu:~$ time python3 isPrimeNumber2.py
实验四：大整数素性检测 (Miller-Rabin算法)

检测：2^11 - 1 = 2047
6N±1 法结果：不是素数，耗时 0.000006 秒
Miller-Rabin 法结果：不是素数，耗时 0.000025 秒
-----
检测：2^61 - 1 = 2305843009213693951
6N±1 法结果：是素数，耗时 61.362846 秒
Miller-Rabin 法结果：可能是素数，耗时 0.000247 秒
-----
检测：2^71 = 2361183241434822606848
6N±1 法检测略过 (数值过大，效率低)
Miller-Rabin 法结果：不是素数，耗时 0.000002 秒
-----
检测：2^89 - 1 = 618970019642690137449562111
6N±1 法检测略过 (数值过大，效率低)
Miller-Rabin 法结果：可能是素数，耗时 0.000264 秒
-----
real    1m1.399s
user    1m1.064s
sys     0m0.060s
bigdata@ubuntu:~$
```

备注：

2025 年 10 月 16 日