山东财经大学 2018-2019 学年第二学期期末试题

概率论与数理统计 试卷 (B)参考答案与评分标准

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. $\dfrac{2}{3}$　2. $\dfrac{9}{2}$　3. e^{-2}　4. 364　5. 1　6. $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}$

二、单项选择题（本题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. (A)　2.（C）3.（D）　4.（B）5.（D）6.（B）

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 10 分，满分 40 分）

1. 解 （1）由题设

$$P\{X\le 50\}=\int_0^{50}\frac{1}{1250}xe^{-\frac{x^2}{2500}}dx=1-e^{-1}$$ ......4 分

（2）设应发射 n 枚炮弹,

设 Y 表示发射 n 枚炮弹中弹着点距离目标不超过50米的次数，则 $Y\sim B(n,1-e^{-1})$.

发射 n 枚炮弹，使摧毁目标的概率大于0.95，即 $P\{Y\ge 1\}\ge 0.95$

$$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-[1-(1-e^{-1})]^n=1-e^{-n}.$$

要使 $P\{Y\ge 1\}\ge 0.95$，即 $1-e^{-n}\ge 0.95$，解得 $n\ge 3$ ....6 分

2. 解 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}Cdy=\dfrac{C}{6}$，得 $C=6$. ......4 分

（2）由 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，可得

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{x^2}^{x}Cdy=6(x-x^2)$.

所以 $f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2),0<x<1\\ 0,\quad 其它\end{cases}$.

由 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$，可得

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y)$.

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y),0<y<1\\ 0,\quad 其它\end{cases}$.

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立. ......4 分

（3）$P(2Y<X)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{\frac{x}{2}}6dy=\frac{1}{8}$ ......2 分

3. 解：（1）0.4+0.2+0.1+a=1， a=0.3 ---------2 分

（2）X、Y 的边缘分布分别为

X	1　　　2
P	0.6　　　0.4

Y	0　　　1
P	0.5　　　0.5

$\mathrm{EX}=1.4$，$EX^2=1^2\bullet 0.6+2^2\bullet 0.4=2.2$，$\mathrm{DX}=EX^2-(EX)^2=0.24$ ，

$\mathrm{EY}=0.5$ ， $\mathrm{DY}=0.25$， ---------4 分

(3) $\mathrm{EXY}=0.8$，

$\mathrm{Cov(X,Y)}=\mathrm{EXY}-\mathrm{EXEY}=0.8-1.4\times 0.5=0.1$ ---------2 分

（4）$\rho_{\mathrm{XY}}=\frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\sqrt{DX}\bullet\sqrt{DY}}=\frac{0.1}{\sqrt{0.24}\bullet\sqrt{0.25}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\approx 0.408$ ---------2 分

4. 解：似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left((\theta+1)\ (x_i-5)^{\theta}\right)=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i-5)\right)^{\theta},5<x_i<6$

当$5<x_i<6,(i=1,2,...,n)$时，恒有$L(\theta)>0$，故

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)$ --------------**6** 分

求导数 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)=0$

解得 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)}$ （而 $\frac{d^2\ln L(\theta)}{d\theta^2}=-\frac{n}{(\theta+1)^2}<0$）

因此θ的最大似然估计为 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i-5)}$ --------------**4** 分

四、应用题（本题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

1. 解：设A_1,A_2,A_3分别表示甲厂、乙厂、丙厂生产的冰柜，B表示冰柜合格，则（1）由全概率公式可得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$
$$=0.6\times 0.9+0.25\times 0.6+0.15\times 0.8=0.81$$

.........6 分

（2）由贝叶斯公式可得

$$P(A_1 \mid \bar{B}) = \frac{P(A_1)P(\bar{B} \mid A_1)}{P(\bar{B})} = \frac{0.6 \times 0.1}{1-0.81} \approx 0.32$$ ....**4** 分

2. 解：设 X=100 人中买报的人数. 则 $X \sim B(100, 0.2)$, $EX = 20, DX = 16$，

由中心极限定理近似有：$X \sim N(20,16)$ --------------5 分

于是 $P\{X \le 21\} \approx \Phi(21) = \Phi_0(\frac{21-20}{\sqrt{16}}) = \Phi_0(0.25) = 0.599$ --------------5 分

五、证明题（本题共 1 小题，满分 4 分）

证：$Y=a\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_m)^2}{(X_{m+1}^2+X_{m+2}^2+\cdots+X_n^2)} \sim F(1,n-m)$， -------------------1 分

由已知，总体 $X \sim N(0,1)$，样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布于 $N(0,1)$，所以

$X_1+X_2+\cdots+X_m \sim N(0,m)$， $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_m}{\sqrt{m}} \sim N(0,1)$，得：

$$\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_m}{\sqrt{m}}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

而 $X_{m+1}^2+X_{m+2}^2+\cdots+X_n^2 \sim \chi^2(n-m)$，

且二者独立，

根据 F 分布的定理知：

$$Y=\frac{\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_m}{\sqrt{m}}\right)^2 \Big/ 1}{[X_{m+1}^2+X_{m+2}^2+\cdots+X_n^2]\big/(n-m)} = \frac{(n-m)}{m} \cdot \frac{(X_1+X_2+\cdots+X_m)^2}{(X_{m+1}^2+X_{m+2}^2+\cdots+X_n^2)} \sim F(1,n-m)$$

可见 $a = \dfrac{(n-m)}{m}$. -------------------3 分

注：本试题中其它解法可根据情况酌情给分。