

2013-2014 学年第二学期《概率论与数理统计》B 卷
参考答案与评分标准

一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1、 $\frac{3}{5}$ ；2、0.18；3、 $\frac{16}{3}$ ；4、 $\frac{1}{4}$ ；5、6；6、2；7、 α ；8、 $(n-1)\sigma^2$

二、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1、C；2、B；3、C；4、D；5、C；6、B

三、计算和应用题（58 分）

1、（8 分）解：解 设 A 表示事件“从剩下的产品中任取一件是正品”， B_i 表示事件“已经出售的 2 件中有 i 件次品”（ $i=0,1,2$ ），则

$$P(B_0) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2}; P(A/B_0) = \frac{5}{8} \cdots \cdots 2 \text{ 分}; P(B_1) = \frac{C_7^1 C_3^1}{C_{10}^2}; P(A/B_1) = \frac{6}{8} \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2}; P(A/B_2) = \frac{7}{8} \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } P(A) = \sum_{i=0}^2 P(B_i)P(A/B_i) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{C_7^1 C_3^1}{C_{10}^2} \cdot \frac{6}{8} + \frac{C_3^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{7}{8} = 0.7 \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

2、（10 分）解：（I）由 $\int_0^1 ax dx + \int_1^2 b dx = 1 \cdots \cdots 2 \text{ 分}$

$$\int_0^1 ax^2 dx + \int_1^2 b x dx = \frac{13}{12} \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\text{得 } a=1, b=\frac{1}{2} \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{2} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

3、（10 分）解：（I） $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 + 1 \leq y)$

当 $y \leq 1$ 时， $F_Y(y) = 0 \cdots \cdots 1 \text{ 分}$

当 $y > 2$ 时， $F_Y(y) = 1 \cdots \cdots 2 \text{ 分}$

当 $1 < y \leq 2$ 时， $F_Y(y) = P(X^2 + 1 \leq y) = P(-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}) = 2 \int_0^{\sqrt{y-1}} x dx = y-1 \cdots \cdots 5 \text{ 分}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 1 \leq y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

(II) $E(X) = 0$ ， $E(Y) = E(X^2 + 1) = \frac{3}{2}$ ， $E(XY) = E(X^3 + X) = 0$ ， $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ； $\cdots \cdots 8 \text{ 分}$

$$(III) F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{3}, X^2 \leq \frac{1}{4}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{72} \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

4、(10分) 解：(I) 由 $P\{X+Y=1|X=0\} = \frac{a}{a+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ 得 $a = \frac{1}{6}$,2分

由 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + a + b = 1$ 得 $b = \frac{1}{6}$ 4分

(II) $E(X) = \frac{1}{2}$, $E(Y) = -\frac{1}{3}$, $E(XY) = -\frac{1}{6}$ 7分

$\text{cov}(X, Y) = 0$ 8分

(III) 因为 $P(X=0, Y=0) = 0$, $P(X=0) = \frac{1}{2}$, $P(Y=0) = \frac{1}{6}$ 9分

所以 X 与 Y 不独立。10分

5、(10分) 解： D 的面积 $A = \int_0^1 (x-x^2)dx = \frac{1}{6}$, $f(x, y) = \begin{cases} 6, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$ 2分

(1) $f_X(x) = \begin{cases} 6(x-x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 4分

$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y}-y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 6分

(2) $E(XY) = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 6xy dy$ 8分
 $= \frac{1}{4}$ 10分

6、(10分) 解：(I) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 1分

$= \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}$ 4分

$\hat{\lambda} = \frac{2}{x}$ 5分

2) 似然函数 $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$ 6分

$= \prod_{i=1}^n \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i} = \lambda^{2n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i$ 7分

$\ln L = 2n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln x_i$ 8分

$\frac{d \ln L}{d \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$ 9分

$\hat{\lambda} = \frac{2}{x}$ 10分