

山东财经大学 2015—2016 学年第 2 学期期末试题

概率论与数理统计 (16200041) 试卷 (B)

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
签字							

注意事项: 所有的答案都必须写在答题纸 (答题卡) 上, 答在试卷上一律无效.

标准正态分布函数值: $\Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9772, \Phi(3) = 0.9987$

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 已知 $P(\bar{A}) = 0.5, P(\bar{A}B) = 0.2, P(B) = 0.4$, 则 $P(\bar{A}\bar{B}) =$ _____.
2. 若 $X \sim U[-1, 2]$, 则 $P\{X \leq 0\} =$ _____.
3. 设 (X, Y) 服从单位圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的均匀分布, 则 $f_X(x) =$ _____.
4. 已知随机变量 X 与 Y 的协方差阵为 $\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, 则 $D(X - 2Y) =$ _____.
5. 若 $X \sim N(21, 25)$, X_1, X_2, \dots, X_{25} 为 X 的一个样本, 则 $D\bar{X} =$ _____.

二、判断题 (本题共 5 小题, 每小题 2 分, 满分 10 分)

1. 如果 $P(A) + P(B) > 1$, 则事件 A 与 B 必定相容. ()
2. 随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则随 σ 的增大, 概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ 将变大. ()
3. 若随机变量 X 与 Y 不相关, 则 X 与 Y 相互独立. ()
4. 设 (X, Y) 的协方差 $\text{cov}(X, Y)$ 存在, 则 $\text{cov}(X, Y) = 0$ 等价于 $D(X + Y) = DX + DY$. ()
5. 若 $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $X + Y \sim \chi^2(m + n)$. ()

三、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 下列命题中错误的是 ().

(A) 若 $X \sim P(\lambda)$, 则 $EX = DX = \lambda$;

(B) 若 $X \sim e(\lambda)$, 则 $EX = DX = \frac{1}{\lambda}$;

(C) 若 $X \sim b(1, p)$, 则 $EX = p, DX = p(1-p)$;

(D) 若 $X \sim U[a, b]$, 则 $EX^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 1)$, 则 ().

(A) $P\{X+Y \leq 0\} = 0.5$

(B) $P\{X+Y \leq 1\} = 0.5$;

(C) $P\{X-Y \leq 0\} = 0.5$;

(D) $P\{X-Y \leq 1\} = 0.5$.

3. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立且都服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 以 $\Phi(x)$ 为极限的是 ().

(A) $P\left\{\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n}} \leq x\right\};$

(B) $P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n}} \leq x\right\};$

(C) $P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\};$

(D) $P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\}.$

4. 总体均值 μ 的 95% 置信区间的意义是 ().

(A) 这个区间以 95% 的概率含样本均值;

(B) 这个区间以 95% 的概率含 μ 的真值;

(C) 这个区间平均含总体 95% 的值;

(D) 这个区间平均含样本 95% 的值.

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自标准正态总体的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则 ().

- (A) \bar{X} 服从标准正态分布; (B) $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布;
(C) $n\bar{X}$ 服从标准正态分布; (D) $(n-1)S^2$ 服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布.

四、计算题 (本题共 4 小题, 每小题 12 分, 满分 48 分)

1. 有甲、乙、丙三个颜色形状同样的罐子, 甲罐装有 2 红 1 黑共 3 个球, 乙罐装有 3 红 1 黑共 4 个球, 丙罐装有 2 红 2 黑共 4 个球. 从中随机取一罐, 再从中任意取出一个球.

(1) 求取到的球是红球的概率;

(2) 若发现取到的球为红球, 求该红球是从甲罐中取出的概率.

2. 设顾客排队等待服务的时间 X (以分钟计) 服从 $\lambda = 1/5$ 的指数分布, 某顾客等待服务. 若超过 10 分钟, 他就离开, 他一个月要去等待服务 5 次, 以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开的次数, 试求 $P\{Y \geq 1\}$.

3. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

(1) 求参数 k 的值; (2) 求 $P\{X+Y \leq 4\}$; (3) 求 $E(XY)$.

4. 设总体 $X \sim b(1, p)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的一个样本, 试求参数 p 的最大似然估计.

五、应用题 (本题满分 12 分)

一盒同型号螺丝钉共有 100 个, 已知该型号的螺丝钉的重量是一个随机变量, 期望值是 100 克, 标准差是 10 克, 试用中心极限定理求一盒螺丝钉的重量超过 10.2 千克的概率.

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB).$$

$$\text{故 } P(AB) = 0.2.$$

$$\text{故 } P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7$$

山东财经大学 2015—2016 学年第 2 学期期末考试

概率论与数理统计 (16200041) 试卷 (B)

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A+B})$$

$$= 1 - P(A+B)$$

$= 1 - 0.7 = 0.3$ 参考答案与评分标准 (圣井校区)

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 0.3

2. $\frac{1}{3}$

3. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

4. 28

$D\bar{X} = \frac{1}{n} \sigma^2 = \frac{25}{25} = 1$

5. 1

二、判断题 (本题共 5 小题, 每小题 2 分, 满分 10 分)

1. √

2. ×

3. ×

4. √

5. √ 定理 6.3.

三、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. B

2. B

3. C

4. B

5. D 用 B33 反性质 B2

四、计算题 (本题共 4 小题, 每小题 12 分, 满分 48 分)

1. 解: 令 A_1 = “取到甲罐”, A_2 = “取到乙罐”, A_3 = “取到丙罐”, B = “取到

红球”, 则 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$, $P(B|A_1) = \frac{2}{3}$,

$$P(B|A_2) = \frac{3}{4}, P(B|A_3) = \frac{1}{2}. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$(1) \text{ 由全概率公式得 } P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B|A_i)P(A_i) \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$= \frac{23}{36} \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 Bayes 公式得 } P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{8}{23} \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

三点一刻刀鱼

2. 解: 因为 $X \sim e(\frac{1}{5})$, 所以其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}, & x > 0, \\ 0, & \text{else}, \end{cases} \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

令 $A =$ “该顾客等待 10 分钟没等到服务而离开”, 则

$$P(A) = P\{X \geq 10\} = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = e^{-2}, \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$Y \sim b(5, e^{-2})$, 则 $P\{X = k\} = C_5^k (e^{-2})^k (1 - e^{-2})^{5-k}, k = 0, 1, \dots, 5$, $\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - e^{-2})^5. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

3. 解: (1) 由二维连续型随机变量密度函数的性质得

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^2 [\int_2^4 k(6-x-y) dy] dx = 8k, \text{ 所以 } k = \frac{1}{8}, \quad \dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) P\{X+Y \leq 4\} = \int_0^2 [\int_2^{4-x} \frac{1}{8} (6-x-y) dy] dx = \frac{2}{3} \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(3) EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy = \frac{1}{8} \int_0^2 [\int_2^4 xy(6-x-y) dy] dx = \frac{7}{3} \quad \dots 12 \text{ 分}$$

4. 解: 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自总体 X 的一组样本观测值, 则 X 的分布为

$$P\{X = x\} = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0, 1 \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{似然函数为 } L(p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{取对数得 } \ln L_1(p) = (\sum_{i=1}^n x_i) \ln p + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \ln(1-p).$$

$\dots\dots 7 \text{ 分}$
🐟 三点一刻刀鱼

$$\text{求导得 } \frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0, \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \hat{p}_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \text{ 即最大似然估计量为 } \hat{p}_L = \bar{x} \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

五、应用题（本题满分 12 分）

解：用 X_i 表示第 i 个螺丝钉的重量 ($i=1, 2, \dots, 100$)，则 X_1, X_2, \dots, X_{100} 相互独立同分布，
 $\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{此时 } EX_i = 100, DX_i = 100 (i=1, 2, \dots, 100), \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

由中心极限定理近似的有 $\sum_{i=1}^{100} X_i \square N(10000, 10000)$ ，
 $\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\text{则 } P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 10200\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 10000}{100} > 2\right\} \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 10000}{100} \leq 2\right\} = 1 - \Phi(2) = 0.02275 \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$