

2013-2014 学年第二学期《概率论与数理统计》A 卷
参考答案与评分标准

一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1、0.4；2、 $\frac{1}{2}e^{-2}$ ；3、6；4、 $F_X(\frac{y-2}{3})$ ；5、0.4；6、 $t(5)$ ；7、 $\frac{\lambda}{n}$ ；8、 $\frac{1}{2}u_{0.02}$

二、选择题（每题 3 分，共 24 分）

1、A；2、A；3、D；4、C；5、A；6、C

三、计算和应用题（58 分）

1、（8 分）解：A：患病，B：测试结果呈阳性，则 $B = AB + \bar{A}B$

$$(1) P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.2 + 0.8 \times 0.05 = 0.24 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.24} = \frac{5}{6} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

2、（10 分）解：(I) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$(II) P(|X| > 1) = P(X > 1) = 1 - F(1) = 2e^{-1} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(III) E(e^{-X}) = \int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{4} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

3、（10 分）解：X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$(I) F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

当 $y \leq 0$ 时， $F_Y(y) = 0$

当 $y > 1$ 时， $F_Y(y) = 1 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\text{当 } 0 < y \leq 1 \text{ 时， } F_Y(y) = 2 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{y} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(II) E(X) = 0, E(Y) = E(X^2) = \frac{1}{3}, E(XY) = E(X^3) = 0, \text{Cov}(X, Y) = 0; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(III) F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{3}, X^2 \leq \frac{1}{4}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

4、（10 分）解：(I)

	Y	0	1	2
X				

0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

.....6 分

$$(II) E(X) = \frac{1}{3}, E(Y) = \frac{2}{3}, E(XY) = \frac{2}{15} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{cov}(X, Y) = -\frac{4}{45} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$5、(10 \text{ 分}) \text{ 解: } ① f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$② P(X \leq 1 | Y \leq 1) = \frac{P(X \leq 1, Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= \frac{\int_0^1 dx \int_0^x e^{-x} dy}{\int_0^1 dy \int_y^{+\infty} e^{-x} dx} = \frac{e-2}{e-1} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$6、(10 \text{ 分}) \text{ 解: } 1) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, \theta) dx \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\theta^2}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\hat{\theta} = \bar{x} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$2) \text{ 似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{\theta^2}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_i}} = \frac{\theta^{2n}}{(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0 \text{ 得 } \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$