Discrete Mathematics Review Version 1.5.0

Peng Lv (plvorg@126.com)

May 30, 2022

Contents

1 命题逻辑 **3**
1.1 命题公式 . . . 3
1.1.1 命题联结词 . . . 3
1.1.2 命题公式 . . . 3
1.1.3 命题公式等值演算 . . . 3
1.2 范式 . . . 3
1.2.1 几个概念和定理 . . . 3
1.2.2 析取范式 . . . 4
1.2.3 合取范式 . . . 4
1.2.4 范式的求解方法 . . . 4
1.3 主范式 . . . 4
1.3.1 主析取范式 . . . 4
1.3.2 主合取范式 . . . 4
1.3.3 主析取范式和主合取范式的联系 . . . 5
1.3.4 主范式的求解方法 . . . 5
1.4 命题逻辑推理 . . . 5
1.4.1 推理的形式结构 . . . 5
1.4.2 判断推理蕴含式为永真式的三种方法 . . . 6
1.4.3 逻辑推理规则 . . . 6
1.4.4 三种推理构造证明方法 . . . 6
1.4.5 推理构造证明技巧 . . . 7

2 一阶逻辑 **7**
2.1 一阶逻辑基本概念 . . . 7
2.2 一阶逻辑符号化 . . . 8
2.3 一阶逻辑等值演算 . . . 9
2.3.1 一阶逻辑等值式 . . . 9
2.3.2 置换与换名规则 . . . 10
2.3.3 一阶逻辑前束范式及求解 . . . 10
2.4 一阶逻辑推理 . . . 10
2.4.1 一阶逻辑推理定律 . . . 10
2.4.2 一阶逻辑推理技巧及注意事项 . . . 11

3 二元关系 **11**
3.1 二元关系的定义 . . . 11
3.2 二元关系的运算 . . . 12
3.3 二元关系的性质 . . . 12
3.3.1 基本定义和性质 . . . 12
3.3.2 关系的表达及判定 . . . 13

3.4 等价关系 13
3.5 偏序关系 14

4 函数 **14**

5 图 **15**

6 树 **15**

1 命题逻辑

1.1 命题公式

1.1.1 命题联结词

- 否定，$\neg$，对应汉语中“不”“否”“没有”等
- 析取，$\vee$，对应汉语中“或”等
- 合取，$\wedge$，对应汉语中“并且”“不仅…而且…”“虽然…但是…”
- 蕴含，$\rightarrow$，对应汉语中“如果…那么…”“除非…才…”“除非…否则…”
- 等价，$\leftrightarrow$，对应汉语中“等价于”“当且仅当”

1.1.2 命题公式

- 命题符号化。根据汉语句会进行符号化，尤其重点关注“蕴含联结词$\rightarrow$”。
- 概念定义。命题变元、合式公式、命题公式、成真赋值、成假赋值。
- 真值表。会根据命题公式写出其真值表。
- 命题公式分为：重言式（永真式）、矛盾式（永假式）、可满足式。

1.1.3 命题公式等值演算

- 会根据真值表判断两个命题公式是否等值。
- 牢记以下16组重要并且常用的等值式：

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A.$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$; $A \wedge A \Leftrightarrow A.$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$; $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A.$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$;
$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C).$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B.$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$;
$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A.$

零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$; $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0.$

同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A$; $A \wedge 1 \Leftrightarrow A.$

排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1.$

矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0.$

蕴涵等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B.$

等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$

假言易位 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A.$

等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B.$

归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A.$

- 会根据命题等价公式对命题进行化简、判断（永真式、永假式、可满足式）。

1.2 范式

1.2.1 几个概念和定理

文字： 命题变元及其否定统称为文字，例如$p, \neg p$。

简单析取式： 仅由有限个文字构成的析取式，例如$p, q \vee \neg r$。

- 一个简单析取式是重言式$\Leftrightarrow$同时含某个命题变项p_i和它的否定式$\neg p_i$

简单合取式： 仅由有限个文字构成的合取式，例如$p, q \wedge \neg r$。

- 一个简单合取式是矛盾式⇔同时含某个命题变项p_i和它的否定式$\neg p_i$。

范式存在定理： 任意命题公式都存在与其等值的析取范式和合取范式，但不唯一。

1.2.2 析取范式

定义： 有限个简单合取式的析取。

形式： $(\cdots\wedge\cdots\wedge\cdots)\vee\cdots\vee(\cdots\wedge\cdots\wedge\cdots)$

定理： 一个析取范式是矛盾式⇔每个简单合取式都是矛盾式

1.2.3 合取范式

定义： 有限个简单析取式的合取。

形式： $(\cdots\vee\cdots\vee\cdots)\wedge\cdots\wedge(\cdots\vee\cdots\vee\cdots)$

定理： 一个合取范式是重言式⇔每个简单析取式都是重言式

1.2.4 范式的求解方法

(1) 消去命题中的→和↔；

(2) 处理命题中的¬：双重否定律消去¬，德摩根律内移¬；

(3) 使用**分配律**

- 若求**析取范式**，则将所有的∨移到括号最外层（即∧对∨的分配律）；
- 若求**合取范式**，则将所有的∧移到括号最外层（即∨对∧的分配律）。

1.3 主范式

定理 任何命题公式都存在唯一与之对应的主析（合）取范式（存在性、唯一性）。

1.3.1 主析取范式

极小项 简单合取式，一定含有每个命题变项或其否定式，二者必须出现一个，且只能出现一个，且只能出现一次。例如含有3个命题变项的$\neg p\wedge q\wedge r,\neg p\wedge q\wedge\neg r$都是极小项。

- 形式：$m_{(1)}\vee m_{(2)}\vee\cdots\vee m_{(k)}$
- 所有的命题赋值中，只有一组赋值是某个极小项m_i的**成真赋值**
- m_i的编码是其成真赋值的十进制表示，例如$\neg p\wedge q\wedge r=m_3$（011为成真赋值）
- 用于揭示命题公式什么时候为真（k种情况）

1.3.2 主合取范式

极大项 简单析取式，一定含有每个命题变项或其否定式，二者必须出现一个，且只能出现一个，且只能出现一次。例如含有3个命题变项的$\neg p\vee q\vee r,\neg p\vee q\vee\neg r$都是极大项。

- 形式：$M_{(1)}\wedge M_{(2)}\wedge\cdots\wedge M_{(s)}$
- 所有的命题赋值中，只有一组赋值是某个极大项M_i的**成假赋值**
- M_i的编码是其成假赋值的十进制表示，例如$\neg p\vee q\vee r=M_4$（100为成假赋值）
- 用于揭示命题公式什么时候为假（s种情况）

1.3.3 主析取范式和主合取范式的联系

1) $k+s=2^n$

2) $m_i \Leftrightarrow \neg M_i$

3) $m_i \wedge m_j \Leftrightarrow 0, M_i \vee M_j \Leftrightarrow 1, i \neq j$

4) $m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow 1$，即即总有一组赋值是某个极小项$m_i$的成真赋值

5) $M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow 0$，即即总有一组赋值是某个极大项$M_i$的成假赋值

6) 主合取范式与主析取范式是互补的

1.3.4 主范式的求解方法

(1) **真值表法**（适合变量少，公式简单的类型，例如$p \to q$）

a) 列出命题公式的完整真值表；

b) 若求**主析取范式**，则选取所有的成真赋值作为各个极小项编码；

c) 若求**主合取范式**，则选取所有的成假赋值作为各个极大项编码。

(2) **等值演算法**（较为常用，尤其适合已经求出范式的类型）

a) 先求命题公式的析取范式$A_{(1)} \vee A_{(2)} \vee \cdots \vee A_{(k)}$，或者，合取范式$B_{(1)} \wedge B_{(2)} \wedge \cdots \wedge B_{(s)}$；

b) 若求**主析取范式**，则补全其析取范式的每个简单合取式为**极小项**。例如，若简单合取式A_i缺少变项p，则做变化：$A_i \Leftrightarrow A_i \wedge 1 \Leftrightarrow A_i \wedge (p \vee \neg p) \Leftrightarrow (A_i \wedge p) \vee (A_i \wedge \neg p) \Leftrightarrow m_{(a)} \vee m_{(b)}$。缺少其他变量以此类推补全，进而，缺少$k$个变项则会生成$2^k$个极小项。

c) 若求**主合取范式**，则补全其合取范式的每个简单析取式为**极大项**。例如，若简单析取式B_i缺少变项p，则做变化：$B_i \Leftrightarrow B_i \vee 0 \Leftrightarrow B_i \vee (p \wedge \neg p) \Leftrightarrow (B_i \vee p) \wedge (B_i \vee \neg q) \Leftrightarrow M_{(a)} \wedge M_{(b)}$。缺少其他变量以此类推补全，进而，缺少$k$个变项则会生成$2^k$个极小项。

d) 最后，将重复的极小项或极大项消去，并按编码顺序写出主范式。

(3) **主范式互补法**（适合已经求出主范式的类型）

a) 前提是已经求出主析取范式或者主合取范式

b) 根据**主范式极小（大）项互补原则**，主析取范式中所有极小项的编号和主合取范式所有极大项的编号正好互补（即两组编号相加正好是从0到2^n-1的所有数字）例如：$m_1 \vee m_3 \vee m_4 \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$（编号相加正好为排列$0, 1, \cdots, 7$）

1.4 命题逻辑推理

1.4.1 推理的形式结构

定义： 对于任意一组赋值，如果使命题公式$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$为真时，命题$B$也为真，那么称$B$是前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$的有效结论（推理正确）。

定理： B是前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$的有效结论$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$为永真式

- 正确推理的记法：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$

- 推理的形式结构：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$

- 几组常用的推理定律：

附加律 $A \Rightarrow (A \vee B)$;

化简律 $A \wedge B \Rightarrow A$;

假言推理 $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$;

拒取式 $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$;

析取三段论 $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$;

假言三段论 $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$;

等价三段论 $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$;

构造性二难 $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$;

破坏性二难 $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$.

1.4.2 判断推理蕴含式为永真式的三种方法

(1) 真值表法

* 适合变项少，公式简单的类型，例如$p \to q$
- 对命题进行符号化后，列出蕴含式的真值表判断是否为永真式。

(2) 公式等值转换法

* 此方法为常用方法
- 对命题进行符号化后，根据命题公式16组常用等值式对其化简。若最终化简为1（即为重言式），则可以判定上述蕴含式为永真式（推理正确）；否则，推理错误。

(3) 主析取范式法

* 复杂度较高，最后才考虑的方法
- 对命题进行符号化后，先求析取范式，再求主析取范式。
- 若最终的主析取范式中含有所有的极小项，则可以判定上述蕴含式为永真式（推理正确）；否则，推理错误。（注意，此处一定记住是求主析取范式，不是主合取范式）

1.4.3 逻辑推理规则

- 三个基本推理规则：

  a) 前提引用规则。在证明的任何步骤都可以引入前提。

  b) 结论引入规则。在证明的任何步骤都可以引入前面所得到的子结论作为新前提。

  c) 置换规则。在证明的任何步骤，都可以将命题中的子公式用等值的公式置换。

- 逻辑推理的第二种形式结构

  – 前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$

  – 结论：B

  – 证明：（即使用三种构造证明方法）

1.4.4 三种推理构造证明方法

(1) 直接证明法

- 适用：简单容易的非蕴含式结论的推理，例如型为$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$的结构
- 方法：直接引入前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$来推理得到B
* 示例：$(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$的证明

(2) 附加前提证明法

- 适用：常见的蕴含式结论的推理，例如型为$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow (A \rightarrow B)$的结构
- 方法：将A作为附加前提使用，再用直接证明法证明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \Rightarrow B$
- 原理：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B) \Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B$

* 示例：$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (\neg s \vee p) \wedge q \Rightarrow (s \rightarrow r)$的证明

(3) 归谬法

- 适用：不容易直接证明的非蕴含式结论的推理，例如型为$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$的结构
- 方法：将$\neg B$作为附加前提使用，证明$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B \Leftrightarrow 0$
- 原理：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$

* 示例：$((p \wedge q \rightarrow r)) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s \wedge p \Rightarrow \neg q$的证明

实际上，上述三种证明方法是一致的，请仔细体会下面四个等价公式：

$$
\begin{array}{lll}
 & (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B) & \text{（直接证明法）} \\
\Leftrightarrow & (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B & \text{（附加前提证明法）} \\
\Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A \wedge \neg B) & \text{（针对上式结论的归谬法）} \\
\Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg(A \rightarrow B)) & \text{（针对原式结论的归谬法）}
\end{array}
$$

1.4.5 推理构造证明技巧

(1) 技巧一

* 前提1：牢记几种基本的推理定律形式；

* 前提2：正确的将推理前提和结论符号化为命题公式；

a) 首先，分析形式简单、含有变项少的前提，从而确定某个变项的真值；

b) 然后，推广到其他前提，一步一步的确定剩余变项的真值；

c) 最终，把得到的有效结论汇总，实现结论的证明。

(2) 技巧二

a) 一般情况下，若结论为$A \rightarrow B$的形式，使用附加前提法构造推理更加方便；

b) 对于不容易直接推理的非蕴含式结论，通常使用归谬证明法，即将$\neg B$引入前提；

c) 其他情况尝试采用直接证明法。

(3) 注意事项

- 逻辑推理$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$正确，并不意味着 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \leftrightarrow B$。（因为前提是充分条件，而不是充要条件）例如：$p \wedge q \Rightarrow p$正确，但并不意味着$p \wedge q \leftrightarrow p$。
- 有些时候只需要使用部分前提即可推出结论（只是在练习题中此类情况较少）。

2 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

个体词 在原子命题中，可以独立存在的具体或抽象的客体。

- 个体常量：表示具体或特定的个体词，例如3、小明、北京等
- 个体变量：表示抽象的或泛指的个体词，例如x等

个体域 个体词的取值范围。

谓词 刻划个体的性质或个体之间的相互关系。

- 谓词常项：表示具体性质或关系，例如“x+y是有理数”；
- 谓词变项：表示抽象或泛指的性质或关系，例如“x和y具有关系L”；
- 0元谓词：不带个体变项的谓词，例如“2是有理数”；
- N元谓词：带有n个个体变项的谓词，例如“x和y具有关系L”，“a和b相差3”是2元谓词；

量词 表示个体常项或变项之间的数量关系。

- $\forall$，全称量词，表示“一切”“所有”“全部”“每一个”“任意的”；
- $\exists$，存在量词，表示“存在”“有的”“一些”“至少有一个”等；

2.2 一阶逻辑符号化

- 注意几种情况
  a) “所有的···都是···”，符号化为 $\forall x(A(x) \to B(x))$
  b) “有的···是···”，符号化为 $\exists x(A(x) \wedge B(x))$
  c) “没有···是···”，符号化为 $\neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$
  d) “所有的···都不是···”，符号化为 $\forall x(A(x) \to \neg B(x))$
  * 以上c, d两式表达的是同一个意思，并且符号化公式也等价： $\neg\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \to \neg B(x))$
  * 注意对命题不同的阐述方式可能导致符号化结果不同，但并不影响结果的正确性。例如“并不是所有的兔子都比乌龟跑得快”的符号化为： $\neg\forall x\forall y(A(x) \wedge B(y) \to Fast(x, y))$。还可以理解为“存在一些兔子和乌龟，这些兔子不比这些乌龟跑得快”，即 $\exists x\exists y(A(x) \wedge B(y) \wedge \neg Fast(x, y))$。上述两种符号化形式都是正确的（一定仔细体会其中的联系）。
- 个体域不同，命题的符号化形式可能不同；
- 个体域不同，命题的真值可能不同；

辖域 此处指量词的作用范围。

- 若量词后有括号 $\forall x(\cdots)$，则括号内的子公式$(\cdots)$就是该量词的辖域；
- 若量词后无括号 $\forall x A(x)$，则与量词邻接的子公式$A(x)$为该量词的辖域。

变元 一阶逻辑中的变量，例如x，y等。

- 约束变元：变元x出现在使用该变元的量词（$\forall, \exists$）的**辖域**之内，称为约束变元；
- 自由变元：不满足约束变元定义，称为自由变元；

代换实例 含有n个命题变项$p_1, \cdots, p_n$的命题公式P，若用n个谓词公式$A_1, \cdots, A_2$严格依次替换命题公式中$p_1, \cdots, p_n$，那么所得新公式A称为原命题公式P的代换实例。

- 重言式的代换实例都是重言式；
- 矛盾式的代换实例都是矛盾式；

2.3 一阶逻辑等值演算

2.3.1 一阶逻辑等值式

(1) 基本的一阶逻辑等值式

- 借助于代换实例规则，将基本的16组命题逻辑等值式进行代换，即可得到类似的16组一阶逻辑等值式。

(2) 量词否定等值式

- $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
- $\neg\exists x(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

(3) 量词辖域收缩与扩张等值式

a) 全称量词$\forall$

- $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$
- $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$
- $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$（根据量词否定等值式得到）
- $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$（根据量词否定等值式得到）

b) 存在量词$\exists$

- $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$
- $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$
- $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$（根据量词否定等值式得到）
- $\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$（根据量词否定等值式得到）

c) 关于$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$的理解，请仔细体会以下几组例子。其中，令$x$为“地球上所有的交通工具”，$A(x)$代表“$x$是飞机”，$B$代表“全球是可达的”：

* $\forall x(A(x) \rightarrow B)$：对于地球上任意的交通工具$x$，如果$x$是飞机，那么全球是可达的；
* $\exists x A(x) \rightarrow B$：如果地球上的某些交通工具$x$是飞机，那么全球是可达的；
* $\forall x A(x) \rightarrow B$：如果地球上所有的交通工具$x$都是飞机，那么全球是可达的；
* $\exists x(A(x) \rightarrow B)$：对于地球上的某些交通工具$x$来说，如果是飞机，那么全球是可达的。
* 前两项显然中文是表达的同一个意思，其符号化也恰好等价。但后两项虽然等价，但其中文意思却不尽相同（仔细想想其中的差别，此实例仅做示范，并不是严谨的推理）。

d) 关于$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$的证明（其他类似可推）

$$
\begin{aligned}
& \forall x(A(x) \rightarrow B) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(\neg A(x) \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \neg A(x) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists x A(x) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \exists x A(x) \rightarrow B.
\end{aligned}
$$

(4) 量词分配等值式

- $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
- $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
- $\forall x(A(x) \vee B(x)) \neq \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$（**注意是不等价!**）
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \neq \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$（**注意是不等价!**）

2.3.2 置换与换名规则

(1) 规则1：约束变元的改名规则

a) 将量词中的变元以及该量词辖域中此变元之所有约束出现都用新的个体变元替换；
b) 新的变元一定要有别于改名辖域中的所有其它变元。

(2) 规则2：自由变元的代入规则

a) 将公式中出现该自由变元的每一处都用新的个体变元替换；
b) 新的变元不允许在原公式中以任何约束形式出现。也可用个体常量代入。

2.3.3 一阶逻辑前束范式及求解

前束范式 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中$Q_i$为量词，$A$不含任何量词。

前束范式存在定理 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

前束范式求解步骤：

1) 处理$\rightarrow,\leftrightarrow$：消去公式中的联结词$\rightarrow,\leftrightarrow$

2) 处理$\neg$：反复运用**量词否定等值式**、**德摩根律**、**双重否定律**，将所有$\neg$都内移到原子谓词公式的前端。

   * 例如：$\neg(\forall xA(x)\wedge\exists x\neg B(x))\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\neg\exists x\neg B(x))\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\forall xB(x)$；

3) 处理量词：反复运用**换名规则**、**量词等价公式**将所有量词提到公式的最前端。

例子 求$\neg(\forall xP(x,y)\rightarrow\exists yQ(x,y))$的前束范式

第一步 处理$\rightarrow,\leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \neg(\neg\forall xP(x,y)\vee\exists yQ(x,y))$ （蕴含等值式，消去$\rightarrow$）

第二步 处理$\neg$

$\Leftrightarrow\ \forall xP(x,y)\wedge\neg\exists yQ(x,y)$ （德摩根律、双重否定律）

$\Leftrightarrow\ \forall xP(x,y)\wedge\forall y\neg Q(x,y)$ （量词否定等值式）

第三步 处理量词

$\Leftrightarrow\ \forall xP(x,s)\wedge\forall y\neg Q(t,y)$ （换名规则，替换了自由变元，此处也可以替换约束变元）

$\Leftrightarrow\ \forall x\forall y(P(x,s)\wedge\neg Q(t,y))$ （量词等价公式，收缩扩张）

2.4 一阶逻辑推理

2.4.1 一阶逻辑推理定律

整体上，一阶逻辑的推理构造证明与上一章命题逻辑的推理构造证明类似。都是通过不断运用推理规则、等值变换实现推理的证明。这里重点关注几条一阶逻辑的推理规则加以区分：

(1) 命题逻辑推理定律的**代换实例**（如下两条仅作示例）

- $\forall xA(x)\wedge\forall yB(y)\Rightarrow\forall xA(x)$（原型：$p\wedge q\Rightarrow p$）
- $\forall xA(x)\Rightarrow\forall xA(x)\vee\forall yB(y)$（原型：$p\Rightarrow p\vee q$）

(2) 基本等值式生成的推理定律（如下两条仅作示例）

- $\forall xA(x)\Rightarrow\neg\neg\forall xA(x)$，$\neg\neg\forall xA(x)\Rightarrow\forall xA(x)$，（原型：$\forall xA(x)\Leftrightarrow\neg\neg\forall xA(x)$）
- $\neg\forall xA(x)\Rightarrow\exists x\neg A(x)$，$\exists x\neg A(x)\Rightarrow\neg\forall xA(x)$，（原型：$\exists x\neg A(x)\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)$）

(3) 常用的重要推理定律

- $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$
- $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$
- $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$

(4) 量词的消去和引入规则（$\forall+, \forall-, \exists+, \exists-$），非常重要

* 以下y为任意个体变项，c为个体常项
- $\forall+$规则： $A(y) \Rightarrow \forall xA(x)$
- $\forall-$规则： $\forall xA(x) \Rightarrow A(y)$ 或 $\forall xA(x) \Rightarrow A(c)$
- $\exists+$规则： $A(y) \Rightarrow \exists xA(x)$ 或 $A(c) \Rightarrow \exists xA(x)$
- $\exists-$规则： $\exists xA(x) \Rightarrow A(c)$

2.4.2 一阶逻辑推理技巧及注意事项

- 要正确的写出一阶逻辑符号化公式，包括量词、谓词的正确符号化；
- 一阶逻辑的推理构造过程与命题逻辑推理构造过程的基本一致，可使用代换实例规则建立这两部分的联系；
- 一阶逻辑与命题逻辑的构造证明有一个明显的不同：即前提与结论包含了量词。因此，要灵活运用四个量词规则（$\forall+, \forall-, \exists+, \exists-$），并且注意它们的使用条件：
  - 结论包含$\forall$时，注意在推理过程中引入任意变量y（即$\forall+$规则）
  - 结论包含$\exists$时，则推理过程中可以引入常量c或变量y（即$\exists+$规则）
  - 推理过程中如对同一变元使用$\forall-, \exists-$规则，应当首先使用$\exists-$规则引入c，然后在使用$\forall-$规则
  - 推理过程中一定不要违反$\forall+, \forall-, \exists+, \exists-$的使用规则

3 二元关系

3.1 二元关系的定义

有序对 由两个元素按照一定的次序组成的二元组称为序偶，记作$< x, y >$，其中x是第一元素，y是第二元素。有序对具有以下性质

- 当$x \neq y$时,$< x, y > \neq < y, x >$
- $< x, y > = < u, v > \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$

笛卡儿积 设A, B是两个集合，称集合$A \times B = \{< x, y > | \ (x \in A) \wedge (y \in B)\}$ 为集合A与B的笛卡儿积。笛卡儿积具有以下性质：

- 对于任意集合A，$A \times \varnothing = \varnothing, \varnothing \times A = \varnothing$
- 笛卡儿积运算不满足交换律，即$A \times B \neq B \times A$
- 笛卡儿积运算不满足结合律，即$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
- 笛卡儿积运算对**并和交**运算满足分配律.

二元关系 如果一个集合满足以下条件之一：1）集合非空，且它的元素都是有序对；2）集合是空集；则该集合称为一个二元关系（或简称为：关系）。通常记为R, S,或T等符号。

集合上的关系 设A, B为集合，$A \times B$的任何子集所定义的二元关系称为从A到B上的二元关系。特别的，$\varnothing$称为集合A上的空关系。

- 全域关系 $E_A = \{< x, y >| x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$
- 恒等关系 $I_A = \{< x, x >| x \in A\}$
- 此外，需了解实数集A上的**小于等于关系**、**整除关系**以及集合族上的**包含关系**、**真包含关系**等

3.2 二元关系的运算

定义域 $domR = \{x \mid \exists y(< x, y >\in R)\}$，即关系$R$中所有有序对的第一元素构成的集合

值域 $ranR = \{y \mid \exists x(< x, y >\in R)\}$，即关系$R$中所有有序对的第二元素构成的集合

域 $fldR = domR \cup ranR$，即关系R的定义域和值域的并集

逆关系 $R^{-1} = \{< x, y >|< y, x >\in R\}$

右复合 $F \circ G = \{< x, y >| \exists t(< x, t >\in F \wedge < t, y >\in G\}$

n次幂R^n $R^0 = I_A = \{< x, x >| x \in A\}$，$R^{n+1} = R^n \circ R$

几个基本性质： (需会证明)

1) $(F^{-1})^{-1} = F$
2) $domF^{-1} = ranF, ranF^{-1} = domF$
3) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$
4) $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$
5) $R \circ I_A = I_A \circ R = R$

几个延伸的性质： (需会证明）

1) $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$
2) $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$
3) $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$
4) $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$

3.3 二元关系的性质

3.3.1 基本定义和性质

自反 $\forall x(x \in A \rightarrow < x, x >\in R)$

- 集合A的全域关系E_A、恒等关系I_A、小于等于、整除关系都是自反关系。

反自反 $\forall x(x \in A \rightarrow < x, x >\notin R)$

- 小于关系、真包含关系都是反自反关系。

对称 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge < x, y >\in R \rightarrow < y, x >\in R)$

- 集合A的全域关系E_A、恒等关系I_A、空关系$\varnothing$都是对称关系。

反对称 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge < x, y >\in R \wedge < y, x >\in R \rightarrow x = y)$

- 集合A的全域关系E_A、空关系$\varnothing$都是对称关系。

传递 $\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in A \wedge < x, y >\in R \wedge < y, z >\in R \rightarrow < x, z >\in R)$

- 全域关系E_A、恒等关系I_A、空关系$\varnothing$、小于等于关系、包含关系都是传递关系。

3.3.2 关系的表达及判定

(1) 关系的集合表达

a) 枚举法：$R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<2,4>,<3,3>,<4,4>\}$等

b) 叙述法：$S = \{<x,y>| \ (x,y \in R) \wedge (x = y)\}$等

(2) 关系的图表达

- 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，$R$ 是从 A 到 B 的一个关系
- 集合中的元素$a_1, a_2, \cdots, a_n$和$b_1, b_2, \cdots, b_m$分别作为关系图中的节点
- 如果$<a_i, b_j> \in R$，则从a_i到b_j可用一条有向边$a_i \to b_j$相连。

(3) 关系的矩阵表达

- 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，$R$ 是从 A 到 B 的一个关系
- 构造大小为$n \times m$的**邻接矩阵**： $M_R = (m_{ij})_{n \times m}$
- 如果$<a_i, b_j> \in R$，则使$m_{ij} = 1$；否则$m_{ij} = 0$。

(4) 了解布尔矩阵的并、交、积运算

(5) 5种关系性质的判定方法

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
定义	$\forall x \in A$, 有 $<x,x>\in R$	$\forall x \in A$, 有 $<x,x>\notin R$	$\forall x,y \in A$, 若 $<x,y>\in R$, 则 $<y,x>\in R$	$\forall x,y \in A$, 若 $<x,y>\in R$ 且 $<y,x>\in R$, 则 $x=y$	$\forall x,y,z \in A$, 若 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in R$, 则 $<x,z>\in R$
关系运算	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R_{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系图	每个结点都有环	每个结点都无环	任两结点间，要么没有边，要么有方向相反的两条边	任两结点间，至多有一条边	如果从 x 到 y 有边，从 y 到 z 有边，则从 x 到 z 一定有边
关系矩阵	主对角线上全为 1	主对角线上全为 0	对称矩阵（$M_R = M_R^T$）	$\forall i \neq j, r_{ij} = 0$ 或 $r_{ji} = 0$	$\forall i,j,k$, 若 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$, 必有 $r_{ik} = 1$

3.4 等价关系

等价关系 设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是自反的、对称的、传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

- R为一个等价关系，若$<x,y>\in R$，称x等价于y，记为$x \sim y$
- 判断R是否为等价关系，只需验证R是否满足以上三个性质即可（参照同余关系的证明）

等价类 设R是非空集合A上的等价关系，$\forall x \in A$，称集合 $[x]_R = \{y \mid y \in A, <x,y>\in R\}$为$x$关于$R$的等价类。

生成元 若$[x]_R$为由x生成的等价类，则x称为$[x]_R$的生成元。

等价类的几个性质 设R为非空集合A上的等价关系，那么

1) $\forall x \in A$，$[x]_R$都是A的非空子集；
2) $\forall x \forall y \in A$，如果$xRy$，则$[x]_R = [y]_R$；

3) $\forall x \forall y \in A$，如果$x \not R y$，则$[x]_R$与$[y]_R$不相交；

4) $\cup\{[x]_R \mid x \in A\} = A$.

商集 设R是非空集合A上的等价关系，由R确定的一切等价类的集合称为集合A上关于R的商集，记为A/R，即 $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$。计算商集$A/R$的通用过程如下：

a) 任选A中一个元素x，计算$[x]_R$；

b) 如果 $[x]_R \neq A$，任选一个元素$y \in A - [x]_R$，计算$[y]_R$；

c) 如果 $[x]_R \cup [y]_R \neq A$，任选一个元素$z \in A - ([x]_R \cup [y]_R)$，计算$[z]_R$；

d) 以此类推，直到 A 中所有元素都包含在计算出的等价类中.

等价划分 设R是非空集合A上的等价关系，则A对R的商集A/R是集合A的一个划分，称为由R所导出的等价划分.

3.5 偏序关系

偏序关系 设R是非空集合A上的关系, 如果R是自反的、反对称的、传递的，则称R为A上的偏序关系。偏序关系记为"$\preccurlyeq$"，读作"小于等于", 并将"$< a, b > \in R$"记为$a \preccurlyeq b$。

- "小于"：$\forall x \forall y \in A, x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$
- "可比"：$\forall x \forall y \in A$，$x$与$y$可比$\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

全序关系 设R是非空集合A上的偏序关系，如果$\forall x, y \in A$，x与y都是可比的，则称R为集合A上的全序关系。

- 偏序：集合内只有部分元素之间在这个关系下是可以比较的。
- 例：复数集中并不是所有的数都可以比较大小，那么"大小"就是复数集上的一个偏序关系。
- 全序：集合内任何一对元素在在这个关系下都是相互可比较的。
- 例：任何英文单词可以按照字典序进行比较；那么"字典序"就是英文单词集合上的一个全序关系。

偏序集 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$构成的序偶$< A, \preccurlyeq >$，称为偏序集。

哈斯图 会根据偏序关系绘制关系图的**哈斯图**。

最小元、最大元、极小元、极大元 设$< A, \preccurlyeq >$为偏序集，$B \subseteq A, y \in B$，那么

1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立，则称$y$为最小元;
2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立，则称$y$为最大元;
3) 若$\forall x(x \in B \wedge x \preccurlyeq y \rightarrow x = y)$成立，则称$y$为极小元；
4) 若$\forall x(x \in B \wedge y \preccurlyeq x \rightarrow x = y)$成立，则称$y$为极大元；

4 函数

函数 令F为二元关系，若$\forall x \in domF$都存在唯一的$y \in ranF$使得xFy成立，则称F为函数。对于函数F，如果有xFy，则记为$y = F(x)$，并称y为F在x处的值。

函数的基本性质 设$f : A \rightarrow B$，即f为从A到B的函数，那么

1) 若$ranf = B$，则称函数$f : A \rightarrow B$是满射的;
2) 若$\forall y \in ranf$都存在唯一的$x \in A$使得$f(x) = y$，则称函数$f : A \rightarrow B$是单射的;
3) 若$f : A \rightarrow B$即是单射又是满射的，则称函数$f : A \rightarrow B$是双射的（一一映射）。

5 图

图的定义 一个图是一个序偶$<V,E>$，记为$G=<V,E>$，其中：

- $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$是有限非空集合，v_i称为顶点或结点，V称为结点集
- $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$是有限集合，称为边集。E中的每个元素都有V中的顶点对与之对应，称之为边。

图 了解无向图、有向图、平凡图、零图、多重图、简单图的定义

顶点和边的关系 了解边的始点和终点、关联次数、度数、环、孤立点的定义

图的矩阵表示 掌握无向图的两种矩阵表达方法，如下.$G=<V,E>,V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$

关联矩阵： 令$m_{ij}=$顶点v_i与边e_j的关联次数，则称$M(G)=(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的关联矩阵。

邻接矩阵： 令$a_{ij}=$顶点v_i到顶点v_j的边的条数，则称$A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$为$G$的邻接矩阵。

图中路径的数目 掌握图中长度为m的路径数目计算方法与原理

图中的最短路 了解图中两点间最短路径的计算方法与原理

图的连通性 了解通路、通路长度、简单通路、复杂通路、回路、简单回路、复杂回路的概念

握手定理 图中结点度数的总和等于边数的二倍

图的割集 掌握点割集、边割集、割点、割边的概念，并会判断与识别

欧拉图

欧拉通路： 通过图G中每条边且只通过一次，并且经过每一顶点的通路。

欧拉回路： 通过图G中每条边且只通过一次，并且经过每一顶点的回路。

欧拉图： 存在欧拉回路的图。

哈密顿图

哈密顿通路： 图G中经过每个顶点一次且仅一次的通路。

哈密顿回路： 图G中经过每个顶点一次且仅一次的回路。

哈密顿图： 存在哈密顿回路的图。

了解几种基本的图论问题的概念（算法不做要求）

最小生成树问题： 求赋权无向连通图G的生成树中边权值之和最小的生成树。

最短路径问题： 求赋权连通图G中任意两点间距离最短的通路。

最小割边集问题： 求赋权无向连通图G中权值之和最小的割边集。

中国邮递员问题： 求赋权无向连通图G中每一条边至少经过一次的最短回路。

旅行商问题： 求赋权无向连通图G中最短的哈密顿回路。

6 树

树的定义 树的定义、二叉树的概念、生成树的概念和性质

哈夫曼树 又称最优二叉树，是一种带权路径长度最短的二叉树。所谓树的带权路径长度，就是树中所有的叶结点的权值乘上其到根结点的路径长度（若根结点为0层，叶结点到根结点的路径长度为叶结点的层数）。树的路径长度是从树根到每一结点的路径长度之和。

哈夫曼树计算过程

(1) 将所有结点$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$作为只有根节点的树。

(2) 在森林中选出两棵根节点的权值最小的树作为一棵新树的左、右子树，且置新树的附加根节点的权值为其左，右子树上根节点的权值之和。（注意，左子树的权值应小于右子树的权值。）

(3) 从森林中删除这两棵树，同时把新树加入到森林中。

(4) 重复2，3步骤，直到森林中只有一棵树为止，此树便是哈夫曼树。