《概率论与数理统计》复习提要

第一章　随机事件与概率

1．事件的关系　$A \subset B$　$A \cup B$　AB　$A-B$　$\overline{A}$　Ω　ϕ　$AB=\phi$

2．运算规则　（1）$A \cup B = B \cup A$　　$AB = BA$

（2）$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　　$(AB)C = A(BC)$

（3）$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$　　$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$

（4）$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$　　$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3．概率 $P(A)$ 满足的三条公理及性质：

（1）$0 \le P(A) \le 1$　（2）$P(\Omega)=1$

（3）对互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有 $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$　（n 可以取 ∞）

（4）$P(\phi)=0$　　（5）$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

（6）$P(A-B) = P(A) - P(AB)$，若 $A \subset B$，则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$，$P(A) \le P(B)$

（7）$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

（8）$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

4．古典概型：基本事件有限且等可能

5．几何概率

6．条件概率

（1）　定义：若 $P(B) > 0$，则 $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

（2）　乘法公式：$P(AB) = P(B)P(A|B)$

若 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 为完备事件组，$P(B_i) > 0$，则有

（3）　全概率公式：　$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$

（4）　贝叶斯公式：　$P(B_k|A) = \dfrac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$

7．事件的独立性： A, B 独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$ （注意独立性的应用）

第二章　随机变量与概率分布

1． 离散随机变量：取有限或可列个值， $P(X=x_i)=p_i$ 满足（1） $p_i\ge 0$，（2） $\sum_i p_i=1$

（3）对任意 $D\subset R$， $P(X\in D)=\sum_{i:x_i\in D}p_i$

2． 连续随机变量：具有概率密度函数 $f(x)$，满足（1） $f(x)\ge 0, \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$；

（2） $P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$；（3）对任意 $a\in R$， $P(X=a)=0$

3． 几个常用随机变量

名称与记号	分布列或密度	数学期望	方差
两点分布 $B(1,p)$	$P(X=1)=p$， $P(X=0)=q=1-p$	p	pq
二项式分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\cdots n$，	np	npq
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, k=0,1,2,\cdots$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$P(X=k)=q^{k-1}p, k=1,2,\cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\dfrac{1}{b-a},\ a\le x\le b$，	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

4． 分布函数　 $F(x)=P(X\le x)$，具有以下性质

（1） $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1$；（2）单调非降；（3）右连续；

（4） $P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$，特别 $P(X>a)=1-F(a)$；

（5）对离散随机变量， $F(x)=\sum_{i:x_i\le x}p_i$；

（6）对连续随机变量，$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt$ 为连续函数，且在 $f(x)$ 连续点上，$F'(x)=f(x)$

5． 正态分布的概率计算　以 $\Phi(x)$ 记标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数，则有

（1）$\Phi(0)=0.5$；（2）$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$；（3）若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$；

（4）以 u_α 记标准正态分布 $N(0,1)$ 的上侧 α 分位数，则 $P(X>u_\alpha)=\alpha=1-\Phi(u_\alpha)$

6．随机变量的函数　$Y=g(X)$

（1）离散时，求 Y 的值，将相同的概率相加；

（2）X 连续，$g(x)$ 在 X 的取值范围内严格单调，且有一阶连续导数，则 $f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1}(y))'|$，若不单调，先求分布函数，再求导。

第四章 随机变量的数字特征

1．期望

(1) 离散时 $E(X)=\sum_i x_i p_i$，$E(g(X))=\sum_i g(x_i)p_i$ ；

(2) 连续时 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$，$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$；

(3) 二维时 $E(g(X,Y))=\sum_{i,j}g(x_i,y_j)p_{ij}$，$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$

(4) $E(C)=C$；（5）$E(CX)=CE(X)$；

（6）$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

（7）X,Y 独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$

2．方差

（1）方差 $D(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2)-(EX)^2$，标准差 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$；

（2）$D(C)=0,\ D(X+C)=D(X)$；

（3）$D(CX)=C^2D(X)$；

（4）X,Y 独立时，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

3．协方差

（1）$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)$；

（2）$Cov(X,Y)=Cov(Y,X),\ Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$；

（3）$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$；

（4）$Cov(X,Y)=0$ 时，称 X,Y 不相关，独立 $\Rightarrow$ 不相关，反之不成立，但正态时等价；

（5）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$

4．相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$；有 $|\rho_{XY}|\le 1$，$|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow \exists a,b,\ P(Y=aX+b)=1$

5．k 阶原点矩 $\nu_k=E(X^k)$，k 阶中心矩 $\mu_k=E(X-E(X))^k$

第五章 大数定律与中心极限定理

1．切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 或 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\ge 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$

2．大数定律

3．中心极限定理

（1）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布 $E(X_i)=\mu,\ D(X_i)=\sigma^2$，则

$$\sum_{i=1}^{n}X_i \underset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu,n\sigma^2),\quad 或 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \underset{\text{近似}}{\sim} N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\quad 或 \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\underset{\text{近似}}{\sim} N(0,1),$$

（2）设 m 是 n 次独立重复试验中 A 发生的次数，$P(A)=p$，则对任意 x，有

$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\le x\}=\Phi(x)$ 或理解为若 $X\sim B(n,p)$，则 $X\underset{\text{近似}}{\sim}N(np,npq)$

第六章 样本及抽样分布

1．总体、样本

（1） 简单随机样本：即独立同分布于总体的分布（注意样本分布的求法）；

（2） 样本数字特征：

样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ （$E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$）；

样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ （$E(S^2)=\sigma^2$）样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本 k 阶原点矩 $\nu_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$，样本 k 阶中心矩 $\mu_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$

2．统计量：样本的函数且不包含任何未知数

3．三个常用分布（注意它们的密度函数形状及分位点定义）

（1）χ^2 分布 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布于标准正态分布 $N(0,1)$，若 $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$ 且独立，则 $X+Y\sim\chi^2(n_1+n_2)$；

（2）t 分布 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$，其中 $X\sim N(0,1),\ Y\sim\chi^2(n)$ 且独立；

（3）F 分布 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$，其中 $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$ 且独立，有下面的

性质 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$， $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

4．正态总体的抽样分布

（1）$\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$；　　（2）$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

（3）$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 且与 $\overline{X}$ 独立；　　（4）$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$；

（5）$t=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega}\sqrt{\dfrac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$，$S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

（6）$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

第七章 参数估计

1．矩估计：

（1）根据参数个数求总体的矩；（2）令总体的矩等于样本的矩；（3）解方程求出矩估计

2．极大似然估计：

（1）写出极大似然函数；（2）求对数极大似然函数（3）求导数或偏导数；（4）令导数或偏导数为 0，解出极大似然估计（如无解回到（1）直接求最大值，一般为 $\min\{x_i\}$ 或 $\max\{x_i\}$）

3．估计量的评选原则

(1)无偏性：若 $E(\hat{\theta})=\theta$，则为无偏； (2) 有效性：两个无偏估计中方差小的有效；

4．参数的区间估计（正态）

参数	条件	估计函数	置信区间
μ	σ^2 已知	$u=\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$[\overline{x}\mp u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
	σ^2 未知	$t=\dfrac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$	$[\overline{x}\mp t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}]$
σ^2	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$	$[\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}]$

复习资料

一、填空题（15 分）

题型一：概率分布的考察

【相关公式】（P379）

分布	参数	分布律或概率密度	数学期望（E）	方差（D）
（0—1）分布	$0<p<1$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\ge 1$ $0<p<1$	$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$ $k=0,1,\cdots\cdots,n$	np	$np(1-p)$
负二项分布	$r\ge 1$ $0<p<1$	$P\{X=k\}=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$ $k=r,r+1,\cdots\cdots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
几何分布	$0<p<1$	$P=\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\cdots\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布	N,M,a $(M\le N)$ $(n\le N)$	$P\{X=k\}=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}}$ k为整数$,\max=\{0,n-N+M\}\le k$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
泊松分布	$\lambda>0$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots\cdots$	λ	λ
均匀分布	$a<b$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a<x<b\\ 0,其他\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

【相关例题】

1、设 $X\sim U(a,b)$，$E(X)=2$，$D(Z)=\frac{1}{3}$，则求 a，b 的值。

解：$\because X\sim U(a,b),E(X)=2,D(X)=\frac{1}{3},$ 根据性质：

$\therefore \frac{a+b}{2}=2,\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{3},a<b$

解得：$a=1,b=3.$

2、已知 $X\sim b(n,p),E(X)=0.5,D(X)=0.45$,则求 n，p 的值。

解：

由题意得：$np=0.5,np(1-p)=0.45$

解得：$p=0.1.$

题型二：正态总体均值与方差的区间估计

【相关公式】（P163）

σ^2为已知,由枢轴量$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，得到$\mu$的一个置信水平为1-$\alpha$的置信区间：

$$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

【相关例题】

1、（样本容量已知）

已知总体$X\sim N(\mu,0.81),X_1,X_2,\cdots\cdots,X_{25}$为样本, 且$\overline{X}=5$, 则$\mu$的置信度0.99的置信区间为：

解：代入公式得：

$$\left(\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)=\left(5\pm\frac{0.9}{5}z_{0.025}\right)=\left(5\pm0.18\times1.96\right)=\left(4.6472,5.3528\right)$$

2、（样本容量未知）

已知$X\sim N(\mu,1),X_1,X_2,X_3,,X_n$为样本容量, 若关于$\mu$的置信度0.95的置信区间$(10.88,18.92)$，求样本容量.

解：

由题意知：样本长度为7.84，则有：

$$\left(\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)-\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=7.84\Rightarrow\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=3.92$$

代入数据，得:$\sqrt{n}=2\Rightarrow n=4.$

题型三：方差的性质

【相关公式】（P103）

$(1)\,D(C)=0,C$为常数。

$(2)\,D(CX)=C^2D(X),D(X+C)=D(X)$，$C$为常数。

$(3)\,X,Y$相互独立,$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

【相关例题】

1、

已知X_1，X_2两变量，且$X_1\sim U(2,4),X_2\sim N(0,9),X_1,X_2$相互独立, 求$D(X_1-2X_2)$.

解：

$\because X_1 \sim U(2,4), X_2 \sim (0,9)$

$\therefore D(X_1-2X_2)=D(X_1)+4D(X_2)=\dfrac{(b-a)^2}{12}+4\times 9=36\dfrac{1}{3}$

题型四：t分布、χ^2分布的定义

【相关公式】（P140、P138）

(1)设$X\sim(0,1), Y\sim\chi^2(n)$, 且$X,Y$相互独立，则称随机变量

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为n的t分布，记为$t\sim t(n)$.

(2)设$X_1,X_2,X_3,\cdots\cdots,X_n$是来自总体$N(0,1)$的样本, 则称统计量

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2++X_n^2$$

服从自由度为n的χ^2分布, 记为$\chi^2\sim\chi^2(n)$.

【相关例题】

1、若$X\sim(0,1), Y\sim\chi^2(4)$, 且$X,Y$相互独立, $\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim$?

答：$\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(4)$

2、若变量$X_1,X_2,X_3,\cdots\cdots,X_{30}$服从$N(0,1)$, 则$\sum\limits_{i=1}^{30}X_i^2\sim$?

答：$\sum\limits_{i=1}^{30}X_i^2\sim\chi^2(30)$.

题型五：互不相容问题

【相关公式】（P4）

若$A\cap B=\varnothing$, 则称事件A与事件B是互不相容的。

【相关例题】

1、若$P(A)=0.6$, A,B互不相容, 求$P(A\overline{B})$.

解：

$\because A,B$互不相容

$\therefore A\cap B=\varnothing$

$\therefore P(A\overline{B})=P(A(S-B))=P(A-AB)=P(A)=0.6$

二、选择题（15 分）

题型一：方差的性质

【相关公式】（见上，略）
【相关例题】（见上，略）
题型二：考察统计量定义（不能含有未知量）
题型三：考察概率密度函数的性质（见下，略）
题型四：和、乘、除以及条件概率密度（见下，略）
题型五：对区间估计的理解（P161）
题型六：正态分布和的分布
【相关公式】（P105）
【相关例题】

若$X \sim N(0,2), Y \sim N(3,9)$，则$\left(X+Y\right) \sim ?$

答：$N(0+3,2+9)=N(3,11)$.

题型七：概率密度函数的应用
【相关例题】

$$设\ X=f(x)=\begin{cases} 2x, 0<x<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

已知 $P\{X>a\}=P\{X<a\}$，则求a。

解：由题意，得:$1-P\{X \le a\}=P\{X<a\}$

$\therefore P\{X<a\}=\dfrac{1}{2}$

即有:$\int_0^a 2xdx = x^2 |_0^a = \dfrac{1}{2}$

又$\because a>0$

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

三、解答题（70 分）
题型一：古典概型：全概率公式和贝叶斯公式的应用。
【相关公式】

❖ 全概率公式：

设实验E的样本空间为S，A为E的事件，B_1，B_2，……，B_n
为S的划分，且$P(B_i)>0$, 则有：

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

其中有：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$。

特别地：当n=2时，有：

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P\left(\overline{B}\right).$$

❖ 贝叶斯公式：

设实验E的样本空间为S。A为E的事件, B_1，B_2，……，B_n为S的一个划分，且$P(A)>0$，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots\cdots,n)$, 则有：

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$$

特别地：

当n=2时，有：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

【相关例题】

★1、P19 例 5

某电子设备制造厂设用的元件是有三家元件制造厂提供的，根据以往的记录有以下的数据：

元件制造厂	次品率	提供原件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区分标志。

问：

（1）在仓库中随机取一只元件，求它的次品率；

（2）在仓库中随机抽取一只元件，为分析此次品出自何厂，需求出此次品有三家工厂生产的概率分别是多少，试求这些概率。（见下）

解：(1) 设$A=\{$取到一只次品$\}$，$B=\{$在i厂取到产品$\}(i=1,2,3)$. 且B1、B2、B3是S的一个划分。

则由全概率公式有：

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$
$$=0.02\times0.15+0.01\times0.80+0.03\times0.05$$
$$=0.0125$$

(2)由贝叶斯公式有：

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.02\times0.15}{0.0125}=0.24$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=\frac{0.01\times0.80}{0.0125}=0.64$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=\frac{0.03\times0.05}{0.0125}=0.12$$

答：综上可得，次品出自二厂的可能性较大。

2、袋中装有 m 枚正品硬币，n 枚次品硬币（次品硬币两面均有国徽），在袋中任意取一枚，将他掷 r 次，已知每次都得到国徽，问这枚硬币是正品的概率是多少？

解：设$A=\{$所抛掷的硬币是正品$\}$，B=\{抛掷r次都得到国徽\}，本题即求$P(A|B)$，得：

$$P(A)=\frac{m}{m+n},P(\overline{A})=\frac{n}{m+n},P(B|A)=\frac{1}{2^r},P(B|\overline{A})=1.$$

即有：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}=\dfrac{\frac{1}{2^r}\cdot\frac{m}{m+n}}{\frac{1}{2^r}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}}.$

3、设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2%（这一事件记为 A_1），损坏 10%（这一事件记为 A_2），损坏 90%（这一事件记为 A_3），且知 P（A_1）=0.8，P（A_2）=0.15，P（A_3）=0.05.现在从已经运输的物品中随机取 3 件，发现这三件都是好的（这一事件记为 B），

试求$P(A_1|B),P(A_2|B),P(A_3|B)$(这里物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率)。

（见下）

解：由题意可知：

$P(B|A_1)=0.98^3, P(B|A_2)=0.9^3, P(B|A_3)=0.1^3$

$P(A_1)=0.8, P(A_2)=0.15, P(A_3)=0.05$

$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$

$=0.98^3\times 0.8+0.9^3\times 0.15+0.1^3\times 0.05$

$=0.8624$

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.983\times 0.8}{0.8624}=0.8731$$

$P(A_2|B)=0.1268$

$P(A_3|B)=0.0001$

4、将 A、B、C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为α，而输出其他字母的概率都是（1-α）/2.今将字母串 AAAA、BBBB、CCCC 之一输入信道，输入 AAAA、BBBB、CCCC 的概率分别为 p1、p2、p3（p1+p2+p3=1），已知输出为 ABCA。问输入 AAAA 的概率是多少？（设信道传输各字母的工作是相互独立的。）

解：设A=$\{$输入为AAAA$\}$，$B=\left\{\text{输入为}BBBB\right\}$，$C$=$\{$输入为CCCC$\}$，$D$=$\{$输出为ABCA$\}$，依题意求$P\left(A|D\right)$.

$P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)$

$$=\alpha^2(\frac{1-\alpha}{2})^2\cdot p_1+\alpha^3(\frac{1-\alpha}{2})^3\cdot p_2+\alpha^3(\frac{1-\alpha}{2})^3\cdot p_3$$

$$P(A|D)=\frac{P(AD)}{P(D)}=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}=\frac{\alpha^2(\frac{1-\alpha}{2})^2\cdot p_1}{\alpha^2(\frac{1-\alpha}{2})^2\cdot p_1+\alpha(\frac{1-\alpha}{2})^3\cdot p_2+\alpha(\frac{1-\alpha}{2})^3\cdot p_3}$$

$$=\frac{\alpha p_1}{\alpha p_1+(\frac{1-\alpha}{2})\cdot p_2+(\frac{1-\alpha}{2})\cdot p_3}=\frac{\alpha p_1}{\alpha p_1+\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)(1-p_1)}=\frac{\alpha p_1}{(3a-1)p_1+1-\alpha}$$

题型二：1、求概率密度、分布函数；2、正态分布

1、**求概率密度**

【相关公式】已知分布函数求概率密度在连续点求导；已知概率密度 f(x)求分布函数抓住公式：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，且对于任意实数，有：$P\{x_1<X<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$ 。

【相关例题】

（1）设随机变量 X 的分布函数为：

$$F_X(X)=\begin{cases}0, x<1\\ \ln x, 1\le x<e\\ 1, x\ge e\end{cases}$$

① 求$P(X<2)$、$P(0<X\le 3)$、$P(2<X<\frac{5}{2})$

② 求概率密度$f_x(x)$.

（见下）

解：

$$(1)P(X<2)=P(X\le 2)=\ln 2$$

$$P(0<X\le 3)=F_X(3)-F_X(0)=1-0=1$$

$$P(2<X<\frac{5}{2})=F_X(\frac{5}{2})-F_X(2)=\ln\frac{5}{4}$$

$$(2)\frac{d}{dx}F_X(X)=\frac{1}{x}$$

$$\therefore f_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},1<x<e\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

（2） $f(x)=\frac{A}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)$，是确定常数 A。

解：由相关性质得:$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{1+x^2}dx=1$

解得：$A([\arctan x]_{-\infty}^{0}+[\arctan x]_{0}^{+\infty}=1$

$$A=-\frac{1}{\pi}$$

（3）

设随机变量 X 具有概率密度 f(x)=$\begin{cases}\frac{x}{6},0\le x<3\\ 2-\frac{x}{2},3\le x<4\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，求 X 的分布函数。

解：

$$F(x)=\begin{cases}0，x<0\\ \int_0^x\frac{x}{6}dx,0\le x<3\Rightarrow\frac{x^2}{12},0\le x<3\\ \int_0^3\frac{6}{x}+\int_3^x 2-\frac{2}{x},3\le x<4\Rightarrow -3+2x-\frac{x^2}{4},3\le x<4\\ 1,x\ge 4\end{cases}$$

2、正态分布(高斯分布)

【相关公式】

（1）公式 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<+\infty)$ 其中：

μ,σ为常数，则称X服从参数为μ,σ的正态分布。

（2）若 $X\sim N\left(\mu，\sigma^2\right)$，则$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$

（3）相关概率运算公式：

$$P\{X\le x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma});$$

$$P\{x_1\le X<x_2\}=P\{\frac{x_1-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{x_2-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma});$$

$$\Phi(x)=1-\Phi(-x).$$

【相关例题】

1、（P58 27）某地区 18 岁女青年的血压（收缩压：以 mmHg 计）服从 N~（110,12^2），在该地任选一名 18 岁女青年，测量她的血压 X，求：

（1） $P\{X\le105\},P\{100<X\le120\};$

（2）确定最小的x,使$P\{X>x\}\le0.05$

解：

$(1)\because X\sim N(110,12^2)$

$$\therefore P\{X<105\}=P\{\frac{X-110}{12}<\frac{105-110}{12}\}=\Phi(-\frac{5}{12})\doteq1-\Phi(0.42)=1-0.6628=0.3372;$$

$$P\{100<X\le120\}=P\{\frac{100-110}{12}<\frac{X-110}{12}\le\frac{120-110}{12}\}=\Phi(\frac{10}{12})-\Phi(-\frac{10}{12})=2\Phi(\frac{10}{12})-1=0.5934$$

$$(2)P\{X>x\}=1-P\{X\le x\}=1-P\{\frac{X-110}{12}\le\frac{x-110}{12}\}=1-\Phi(\frac{x-110}{12})\le0.05$$

即有：$\Phi(\frac{x-110}{12})\ge0.95\doteq\Phi(1.65)$

$$\Rightarrow\frac{x-110}{12}\ge1.65\Rightarrow x\ge129.8$$

$$\therefore x_{\min}=129.8$$

2、由某机器生产的螺栓的长度（cm）服从参数 $\mu=10.05,\sigma=0.06$ 的正态分布，规定长度在范围10.05 ± 0.12 内为合格品，求一螺栓为不合格的概率。

（见下）

解：设$A=\{$一螺栓合格$\}$，本题求$P\left(\overline{A}\right)$.

$$P(A)=P\{\frac{9.93-10.05}{0.06}\le\frac{X-10.05}{0.06}\le\frac{10.17-10.05}{0.06}\}=P(-2\le\frac{X-10.05}{0.06}\le 2)=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$$\therefore P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.9544=0.0456$$

题型三：二维随机变量的题型

【相关公式】

1、二维随机变量的求法:$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=\int_{\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\right]dy=1$

2、联合概率密度求法:$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

3、随机变量的函数分布：

$(1)Z=X+Y:f_x*f_y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$(2)Z=XY:f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dx$

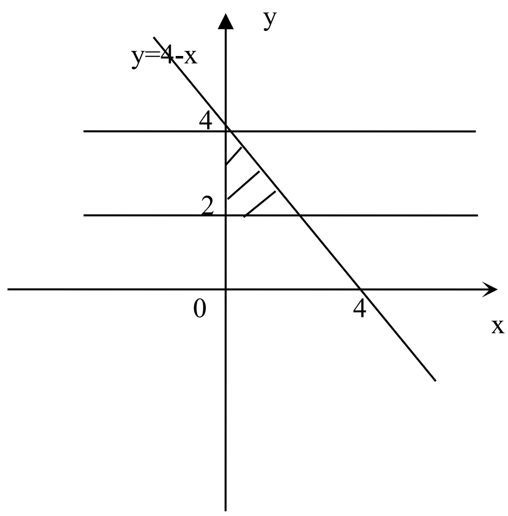
$(3)Z=\frac{Y}{X}:f_{\frac{Y}{X}}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f_X(x)f_Y(xz)dx$

【注意点】讨论x, y取值范围。

【相关例题】

1、（P84　3）设随机变量（X,Y）的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y),0<x<2,2<y<4\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$



(1)确定常数k.

(2)求$P\{X<1,Y<3\}$.

(3)求$P\{X<1.5\}$.

(4)求$P\{X+Y\le 4\}$.

（见下）

解：

$$(1)\int_2^4\left[\int_0^2 k(6-x-y)dx\right]dy=k\int_2^4\left[6x-\frac{x^2}{2}-xy\right]|_0^2\,dy=k\int_2^4(10-2y)dy=1$$

解得：$k=\dfrac{1}{8}$

$$(2)由题意即求:\frac{1}{8}\int_2^3\left[\int_0^1(6-x-y)dx\right]dy=\frac{3}{8}$$

$$(3)由题意即求:\frac{1}{8}\int_2^4\left[\int_0^{1.5}(6-x-y)dx\right]dy=\frac{27}{32}$$

$$(4)由题意即求(如图):\frac{1}{8}\int_2^4\left[\int_0^{4-y}(6-x-y)dx\right]dy=\frac{2}{3}$$

2、（P86　18）设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在区间（0,1）上服从均匀分布，Y 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}},y>0\\ 0,其他\end{cases}$$

(1)求X和Y的联合概率密度.

(2)求$P\{X\le Y\}$.

解：由题意的：X的概率密度如下：

$$f_X(X)=\begin{cases}1,0<x<1\\ 0,其他\end{cases}$$

$$\therefore f(x,y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}},0<x<1,y>0$$

$$f(x,y)=0,其他$$

(2)由题意，即求：

$$\int_0^1\left[\int_x^\infty\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_x^\infty(-2)\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}d\left(-\frac{y}{2}\right)\right]dx=-\int_0^1\left(e^{-\frac{y}{2}}\right)|_x^\infty\,dx$$

$$=2e^{-\frac{1}{2}}-1$$

3、（P87　25）设随机变量 X，Y 相互独立，且具有相同的分布，它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases} e^{1-x}, x>1 \\ 0，其他 \end{cases}$$

求 Z=X+Y 的概率密度。

解：

$$f_{X+Y}(x,y)=\int_0^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^{\infty} e^{1-x}\cdot e^{x-z+1}dx$$

$$=\int_1^{z-1} e^{2-z}dx=e^{2-z}(z-2).(x>2)$$

4、（P87　　26）设随机变量 X,Y 相互独立，它们的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0，其他 \end{cases}$$

求 Z=Y/X 的概率密度。

解：由题意知$:X>0,Z>0.$

当$x>0$时，

$$f(Z)=f(\frac{Y}{X})=\int_0^{\infty}|x|fX(x)fY(zx)dx=\int_0^{\infty}|x|fX(x)fY(zx)dx$$

$$=\int_0^{\infty}|x|e^{-x}e^{-zx}dx=\int_0^{\infty}xe^{-x}e^{-zx}dx=\int_0^{\infty}xe^{-(z+1)x}dx=\frac{1}{(z+1)^2}.$$

当$x\le 0$时$,f(Z)=0.$

综上所述，Z的概率密度为：

$$f_Z(z)=\begin{cases} \frac{1}{(z+1)^2}, z>0 \\ 0, z\le 0 \end{cases}$$

题型四：最大似然估计的求解

【相关公式】

(1)当只有一个变量θ的时候，有：

$$\frac{d}{d\theta}L(\theta)=0\text{或}\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0;$$

(2)当未知变量有i的时候$(i\geq 2)$，有：

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}L=0\text{或}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L=0(i=1,2,3,\cdots\cdots,k)$$

【相关例题】

1、设概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},0<x<1\\ \\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

求λ的最大似然估计.

解：

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x}=\lambda^n\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$l(\lambda)=\ln L(\theta)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{d}{d\lambda}l(\lambda)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i$$

令$\frac{d}{d\lambda}l(\lambda)=0$，即有:$\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{x}_n}$.

2、（P174　8）设$X_1,X_2,X_3,\cdots\cdots,X_n$ 是来自概率密度为：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1},0<x<1\\ \\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

的总体的样本，θ未知，求θ的最大似然估计。

解：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x^{\theta-1}=\theta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta-1}$$

$$l(\theta)=\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$\frac{d}{d\theta}\ln l(\theta)=\frac{n}{\theta}+\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)$$

令 $\frac{d}{d\theta}\ln l(\theta)$=0，得：

$$\hat{\theta}=\frac{-n}{\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)}$$

题型五：正态总体均值的假设检验、正态总体方差的假设检验

【相关公式】

1、正态总体均值的假设检验

(1)标准差σ已知（Z检验法）：

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

(2)标准差σ未知（t检验法）：

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

拒绝域为:$|t|=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\geq t_{\alpha/2}(n-1)$

2、正态总体方差的假设检验

当H_0为真时，有：

$$\frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}\sim\chi^2(n-1)$$

拒绝域为:$\dfrac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}\geq{\chi_{1-\alpha}}^2(n-1)$

【相关例题】

1、（P218　3）某批矿砂的 5 个样品中的镍含量，经测定（%）

3.25　3.27　3.24　3.26　3.24

设测定值总体服从正态分布，但参数均未知，问在α=0.01 下能否接受假设，这批矿砂的镍含量的均值为 3.25.

解：

在显著性水平α=0.01下检验问题：

H_0:$\overline{x}=3.25H_1: x\neq 3.25$

检验统计量$\overline{x}=3.252$，S=0.013，μ_0=3. 25, n=5。

代入数据，得观察值：t=$\dfrac{\overline{X}\text{-}\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{3.252-3.25}{0.013/\sqrt{5}}\doteq 0.3442$

拒绝域为:$|t|=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t0.005(4)=4.6061$

即：$t\in(-\infty,-4.6061)\cup(4.6061,+\infty)$

$\because 0.3442<4.6061$

$\therefore$接受H_0

$\therefore$在α=0.01的情况下可以接受假设，这批矿砂的镍含量均值为3.25.

2、（P220　12）某种导线，要求电阻的标准差不得超过0.005Ω，尽在一批导线中取样品9根，测得s=0.007Ω，设总体为正态分布，参数值均未知，问在显著水平α=0.05下能否认为这批导线的标准差显著偏大？

解：

在显著水平α=0.05下检验问题：

H_0：$\sigma\leq 0.005H_1$：$\sigma>0.005$

检验统计量：$s=0.007, n=9, \sigma=0.005$

代入数据，得观察值:$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{8\times 0.007^2}{0.005^2}=15.68$

拒绝域为:$t\geq\chi^2{}_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2{}_{0.05}(8)=15.507$

$\because 15.68>15.507$

$\therefore$拒绝H_0

$\therefore$在显著性水平α=0.05下能认为这批导线的标准差显著性偏大。

模拟试题一

一、填空题（每空3分，共45分）

1、已知P(A) = 0.92, P(B) = 0.93, P(B|$\overline{A}$) = 0.85, 则P(A|$\overline{B}$) = __　P(A∪B) =

2、设事件A与B独立，A与B都不发生的概率为$\dfrac{1}{9}$，A发生且B不发生的概率与B发生且A不发生的概率相等，则A发生的概率为: ________________;

3、一间宿舍内住有6个同学，求他们之中恰好有4个人的生日在同一个月份的概率: ______________; 没有任何人的生日在同一个月份的概率________________;

4、已知随机变量X的密度函数为: $\varphi(x)=\begin{cases}Ae^x, & x<0\\ 1/4, & 0\leq x<2\\ 0, & x\geq 2\end{cases}$，则常数A=_________,

分布函数 $F(x)=$ ____________，概率 $P\{-0.5<X<1\}=$ ________________;

5、设随机变量 X¯ B(2，p)、Y¯ B(1，p)，若 $P\{X\geq 1\}=5/9$，则 p = __________，

若 X 与 Y 独立，则 Z=max(X,Y)的分布律: ______________________________;

6、设 $X\sim B(200,0.01), Y\sim P(4)$, 且 X 与 Y 相互独立，则 D(2X-3Y)=____________，

COV(2X-3Y, X)=__________________;

7、设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，则当 $k=$_______时，

$$Y=\frac{k(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\sim t(3);$$

8、设总体 $X\sim U(0,\theta)$ $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为

样本均值，则 θ 的矩估计量为: ___________________。

9、设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 来自正态总体 $N(a,1.44)$，计算得样本观察值 $\overline{x}=10$，求参

数 a 的置信度为 95%的置信区间: ___________________;

二、计算题（35 分）

1、(12 分)设连续型随机变量 X 的密度函数为:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\leq x\leq 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求: 1）$P\{|2X-1|<2\}$；2）$Y=X^2$ 的密度函数 $\varphi_Y(y)$；3）$E(2X-1)$；

2、(12 分)设随机变量(X,Y)的密度函数为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1/4, & |y|<x, 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

1）求边缘密度函数 $\varphi_X(x),\varphi_Y(y)$；

2）问 X 与 Y 是否独立？是否相关？

3）计算 Z = X + Y 的密度函数 $\varphi_Z(z)$；

3、(11 分）设总体 X 的概率密度函数为:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases},\qquad \theta>0$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$是取自总体 X 的简单随机样本。

1）求参数θ的极大似然估计量$\hat{\theta}$;

2）验证估计量$\hat{\theta}$是否是参数θ的无偏估计量。

三、应用题（20 分）

1、（10 分）设某人从外地赶来参加紧急会议，他乘火车、轮船、汽车或飞机来的概率分别是 3/10，1/5，1/10 和 2/5。如果他乘飞机来，不会迟到；而乘火车、轮船或汽车来，迟到的概率分别是 1/4，1/3，1/2。现此人迟到，试推断他乘哪一种交通工具的可能性最大？

2.（10 分）环境保护条例，在排放的工业废水中，某有害物质不得超过 0.5‰，假定有害物质含量 X 服从正态分布。现在取 5 份水样，测定该有害物质含量，得如下数据:

0.530‰，0.542‰，0.510‰，0.495‰，0.515‰

能否据此抽样结果说明有害物质含量超过了规定（$\alpha=0.05$）?

附表:

模拟试题二

一、填空题(45 分，每空 3 分)

1. 设$P(A)=0.5,\ P(B\mid A)=0.6,\ P(\overline{A}B)=0.1,$ 则$P(B)=$________ $P(\overline{A}\overline{B})=$______

2. 设A,B,C三事件相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)$，若$P(A\cup B\cup C)=\dfrac{37}{64}$，则$P(A)=$________________。

3. 设一批产品有 12 件，其中 2 件次品，10 件正品，现从这批产品中任取 3 件，若用X表示取出的 3 件产品中的次品件数，则X的分布律为___________。

4. 设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan(x),\qquad x\in R$$

则$(A,B)=$__________________，X的密度函数$\varphi(x)=$__________________。

5. 设随机变量 $X \sim U[-2,2]$，则随机变量 $Y=\frac{1}{2}X+1$ 的密度函数 $\varphi_Y(y)=$___________

6. 设 X,Y 的分布律分别为

X	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
P	1/2	1/2

且 $P\{X+Y=0\}=0$，则 (X,Y) 的联合分布律为________。和 $P\{X+Y=1\}=$____

7．设 $(X,Y)\sim N(0,25;0,36;0.4)$，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=$ _______________________，$D(3X-\frac{1}{2}Y+1)=$___。

8. 设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是总体 $N(0,4)$ 的样本，则当 $a=$_______，$b=$_________时，统计量 $X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布。

9．设 $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是总体 $N(a,\sigma^2)$ 的样本，则当常数 $k=$___________时，

$\hat{\sigma}^2=k\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是参数 σ^2 的无偏估计量。

10. 设由来自总体 $X\sim N(a,0.9^2)$ 容量为 9 的样本，得样本均值 $\bar{x}$=5，则参数 a 的置信度为 0.95 的置信区间为_____________________。

二、计算题(27 分)

1. (15 分)设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1） 求 X 与 Y 的边缘密度函数 $\varphi_X(x),\varphi_Y(y)$；

（2） 判断 X 与 Y 是否独立？为什么？

（3） 求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $\varphi_Z(z)$。

2. (12 分)设总体 X 的密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$$

其中$\theta>0$是未知参数，$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为总体X的样本，求

（1）参数θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$；　　（2）θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_2$。

三、应用题与证明题(28 分)

1. (12 分)已知甲，乙两箱中有同种产品，其中甲箱中有 3 件正品和 3 件次品，乙箱中仅有 3 件正品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，

（1）求从乙箱中任取一件产品为次品的概率;

（2）已知从乙箱中取出的一件产品为次品，求从甲箱中取出放入乙箱的 3 件产品中恰有 2 件次品的概率。

2. (8 分)设某一次考试考生的成绩服从正态分布，从中随机抽取了 36 位考生的成绩，算得平均成绩$\overline{x}=66.5$分，标准差$\tilde{s}=15$分，问在显著性水平$\alpha=0.05$下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分，并给出检验过程。

3. (8 分)设$0<P(A)<1$，证明：A与B相互独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A})$。

附表：　$u_{0.95}=1.65,\ u_{0.975}=1.96,\ t_{0.95}(35)=1.6896,\ t_{0.95}(36)=1.6883,$

$t_{0.975}(35)=2.0301,\ t_{0.975}(36)=2.0281,$

模拟试题三

一、填空题（每题 3 分，共 42 分）

1. 设$P(A)=0.3,\quad P(A\cup B)=0.8$，若$A$与$B$互斥，则$P(B)=$______________；$A$与$B$独立，则$P(\overline{B})=$______________；若$A\subset B$，则$P(\overline{A}B)=$______________。

2. 在电路中电压超过额定值的概率为p_1，在电压超过额定值的情况下，仪器烧坏的概率为p_2，则由于电压超过额定值使仪器烧坏的概率为______________；

3. 设随机变量X的密度为$\varphi(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，则使$P\{X>a\}=P\{X<a\}$成立的常数$a=$___________；$P\{0.5<X<1.5\}=$_______________；

4. 如果(X,Y)的联合分布律为

Y	1	2	3

X			
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

则 α,β 应满足的条件是 $\underline{\ 0\le\alpha\le 1, 0\le\beta\le 1, \alpha+\beta=1/3\ }$，若 X与Y 独立，

$\alpha=$__________，$\beta=$____________，$E(X+3Y-1)=$____________。

5. 设 $X\sim B(n,p)$，且 $EX=2.4,\quad DX=1.44,$ 则 $n=$__________，$p=$_________。

6. 设 $X\sim N(a,\sigma^2)$，则 $Y=\dfrac{X-3}{2}$ 服从的分布为________________。

7. 测量铝的比重 16 次，得 $\overline{x}=2.705,\quad s=0.029$， 设测量结果服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$，参数 a,σ^2 未知，则铝的比重 a 的置信度为 95%的置信区间为______________________。

二、（12 分）设连续型随机变量 X 的密度为：

$$\varphi(x)=\begin{cases} ce^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

（1）求常数 c；

（2）求分布函数 $F(x)$；

（3）求 $Y=2X+1$ 的密度 $\varphi_Y(y)$

三、（15 分）设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} c, & 0<x<1,\quad 0<y<x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（1）求常数 c；　　（2）求 X与Y 的边缘密度 $\varphi_X(x),\varphi_Y(y)$；

（3）问 X与Y 是否独立？为什么？

（4）求 $Z=X+Y$ 的密度 $\varphi_Z(z)$；　　（5）求 $D(2X-3Y)$。

四、(11 分)设总体 X 的密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

其中$\theta>-1$是未知参数，$(X_1,\ldots,X_n)$是来自总体 X 的一个样本，求

(1) 参数θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$;

(2) 参数θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_2$;

五、(10 分)某工厂的车床、钻床、磨床和刨床的台数之比为 9: 3: 2: 1，它们在一定时间内需要修理的概率之比为 1: 2: 3: 1，当有一台机床需要修理时，求这台机床是车床的概率。

六、(10 分)测定某种溶液中的水份，设水份含量的总体服从正态分布$N(a,\sigma^2)$，得到的 10 个测定值给出$\bar{x}=0.452,\quad \tilde{s}=0.037$，试问可否认为水份含量的方差$\sigma^2=0.04$？($\alpha=0.05$)

附表:

$\chi^2_{0.05}(10)=3.94,\quad \chi^2_{0.025}(10)=3.247,\quad \chi^2_{0.05}(9)=3.325,\quad \chi^2_{0.05}(9)=2.7,$

$\chi^2_{0.975}(10)=20.483,\quad \chi^2_{0.975}(9)=19.023,\quad \chi^2_{0.95}(10)=18.307,\quad \chi^2_{0.95}(9)=16.919,$

模拟试题四

一、填空题(每题 3 分，共 42 分)

1、设A、B为随机事件，$P(B)=0.8$，$P(B-A)=0.2$，则A与B中至少有一个不发生的概率为______________________；当A与B独立时，则$P(B|(A\cup B))=$___________

2、据以往资料表明，一个三口之家患某种传染病的概率有以下规律: P(孩子得病)=0.6，P(母亲得病| 孩子得病)=0.5，P(父亲得病|母亲及孩子得病)=0.4，那么一个三口之家患这种传染病的概率为____。

3、设离散型随机变量X的分布律为：$P(X=k)=a\dfrac{3^k}{k!}(k=0,1,2,\ldots)$，则

a=-------$P(X\le 1)=$____________________。

4、若连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{3}, & -3<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

则常数 $A=$_______，$B=$_________，密度函数 $\varphi(x)=$______________

5、已知连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{\frac{-x^2+2x-1}{8}},-\infty<x<+\infty$，则 $E(4X-1)=$____________，$EX^2=$____________。$P(|X-1|<2)=$________________。

6、设 $X\backsim U[1,3]$，$Y\sim P(2)$，且 X 与 Y 独立，则 $D(X-Y-3))=$____________________________。

7、设随机变量 X,Y 相互独立，同服从参数为分布 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，令 $U=2X+Y,V=2X-Y$ 的相关系数。则 $COV(U,V)=$ ____________，$\rho_{U,V}=$_________ 。

（注：$\Phi(1)=0.8143,\Phi(0.5)=0.6915$ ）

二、计算题（34 分）

1、（18 分）设连续型随机变量 $(X，Y)$ 的密度函数为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（1）求边缘密度函数 $\varphi_X(x),\varphi_Y(y)$；

（2）判断 X 与 Y 的独立性;

（3）计算 $\mathrm{cov}(X,Y)$；

（3）求 $Z=\max(X,Y)$ 的密度函数 $\varphi_Z(z)$

2、（16 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且同分布于 $B(1,p)(0<p<1)$。令

$$Z=\begin{cases}1, & 若X+Y为偶数\\ 0, & 若X+Y为奇数\end{cases}。$$

（1）求 Z 的分布律;

（2）求 (X,Z) 的联合分布律;

（3）问 p 取何值时 X 与 Z 独立？为什么？

三、应用题（24 分）

1、（12 分）假设一部机器在一天内发生故障的概率是 0.2。若一周 5 个工作日内无故障则可获 10 万元；若仅有 1 天故障则仍可获利 5 万元；若仅有两天发生故障可获利 0 万元；若有 3 天或 3 天以上出现故障将亏损 2 万元。求一周内的期望利润。

2、（12 分）将 A、B、C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 0.8，而输出为其它一字母的概率都为 0.1。今将字母 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 之一输入信道，输入 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 的概率分别为 0.5，0.4，0.1。已知输出为 $ABCA$，问输入的是 $AAAA$ 的概率是多少？（设信道传输每个字母的工作是相互独立的）。

答　案（模拟试题一）

四、填空题（每空 3 分，共 45 分）

1、0.8286，0.988；　2、2/3；　3、$\dfrac{C_{12}^1C_6^4\times 11^2}{12^6}$，$\dfrac{C_{12}^6 6!}{12^6}$；

4、1/2，　$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x, & x\le 0\\ \frac{1}{2}+\frac{x}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$，　$P\{-0.5<X<1\}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}e^{-0.5}$；

5、p = 1/3，　Z=max(X,Y)的分布律：

Z	0	1	2
P	8/27	16/27	3/27;

6、D(2X-3Y)=43.92，　COV(2X-3Y, X)=3.96；　7、当 $k=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ 时，

$$Y=\frac{k(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\sim t(3);$$　　8、θ的矩估计量为：$2\overline{X}$。9、[9.216，10.784]；

五、计算题（35分）

1、解 1） $P\{|2X-1|<2\}=P\{-0.5<X<1.5\}=\frac{9}{16}$

2）
$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}(\varphi_X(\sqrt{y})+\varphi_X(-\sqrt{y})), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le y\le 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3）$E(2X-1)=2EX-1=2\times\frac{4}{3}-1=\frac{5}{3}$

2、解：1）
$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\frac{1}{4}dy, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{2}\frac{1}{4}dx, & |y|<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4}(2-|y|), & |y|<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2）显然，$\varphi(x,y)\ne\varphi_X(x)\varphi_Y(y)$，所以X与Y不独立。

又因为EY=0，EXY=0，所以，COV(X,Y)=0，因此X与Y不相关。

3）

$$\varphi_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,z-x)dx$$
$$=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{2}\frac{1}{4}dx, & 0<z<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{z}{8}, & 0<z<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3、解 1）$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=-n\ln\theta-\frac{n\overline{x}}{\theta}$$

令$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{n\overline{x}}{\theta^2}=0$　　　　解出：$\hat{\theta}=\overline{X}$

2）$\because E\hat{\theta}=E\overline{X}=EX=\theta$

$\therefore \hat{\theta}$是θ的无偏估计量。

六、应用题（20分）

1 **解**：设事件A1，A2，A3，A4分别表示交通工具“火车、轮船、汽车和飞机”，其概率分别等于3/10，1/5，1/10和2/5，事件B表示“迟到”，

已知概率$P\{B \mid A_i\}, i=1,2,3,4$分别等于1/4，1/3，1/2，0

则$P\{B\}=\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B \mid A_i)=\frac{23}{120}$

$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)}=\frac{9}{23}$，$P(A_2 \mid B)=\frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)}=\frac{8}{23}$

$P(A_3 \mid B)=\frac{P(A_3)P(B \mid A_3)}{P(B)}=\frac{6}{23}$，$P(A_4 \mid B)=\frac{P(A_4)P(B \mid A_4)}{P(B)}=0$

由概率判断他乘火车的可能性最大。

2. 解：$H_0: a \le 0.5$（‰），$H_1: a>0.5$

拒绝域为：$\chi_0=\{\frac{\overline{x}-0.5}{s}\sqrt{5}>t_{0.95}(4)\}$

计算$\overline{x}=0.5184, s=0.018$

$t=\frac{\overline{x}-0.5}{s}\sqrt{5}=2.2857>t_{0.95}(4)$，

所以，拒绝H_0，说明有害物质含量超过了规定。

答　案（模拟试题二）

一、填空题(45分，每空3分)

1. $P(B)=0.4,\qquad P(\overline{A}\overline{B})=0.4$　　2. $P(A)=\frac{1}{4}$

3. X　0　1　2　P　6/11　9/22　1/22

4. $(A,B)=(\frac{1}{2},\frac{1}{\pi})$，　$\varphi(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\qquad x\in R$

5. $\varphi_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & y\in[0,2]\\ 0, & y\notin[0,2]\end{cases}$

6.

$X \backslash Y$	0	1
−1	1/4	0
0	0	1/2
1	1/4	0

$P\{X+Y=1\}=\dfrac{3}{4}$

7. $\operatorname{cov}(X,Y)=12,\qquad D(3X-\dfrac{1}{2}Y+1)=198$

8. $a=\dfrac{1}{20},\qquad b=\dfrac{1}{100}$；

9. $k=\dfrac{1}{n-1}$；　　10. $(4.412,\ \ 5.588)$

二、计算题(27 分)

1.（1）$\varphi_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(x+1), & x\in[0,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases},\qquad \varphi_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(y+1), & y\in[0,2]\\ 0, & y\notin[0,2]\end{cases}$

（2）不独立

（3）$\varphi_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}z^2, & 0\le z\le 2\\ \dfrac{1}{8}z(4-z), & 2\le z\le 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

2.（1）计算 $EX=\int_{\theta}^{+\infty}xe^{-(x-\theta)}dx=\theta+1$

根据矩估计思想，$\overline{x}=EX=\theta+1$　　解出：$\hat{\theta}_1=\overline{X}-1$；

（2）似然函数 $L(x_1,\ldots,x_n,\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}e^{-(x_i-\theta)}, & x_i\ge\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}e^{-n\overline{x}+n\theta}, & x_i\ge\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

显然，用取对数、求导、解方程的步骤无法得到θ的极大似然估计。用分析的方法。因为$\theta \le x_{(1)}$，所以$e^{\theta} \le e^{x_{(1)}}$，即$L(x_1,\ldots,x_n,\theta) \le L(x_1,\ldots,x_n,x_{(1)})$

所以，当$\hat{\theta}_2 = X_{(1)} = \min(X_1,\ldots,X_n)$时，使得似然函数达最大。极大似然估计为$\hat{\theta}_2$。

三、1. 解:（1）设A_i表示“第一次从甲箱中任取 3 件，其中恰有 i 件次品”，（i=0, 1, 2, 3）

设B表示“第二次从乙箱任取一件为次品”的事件;

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i) = \frac{C_3^3}{C_6^3}\cdot 0 + \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3}\cdot\frac{C_1^1}{C_6^1} + \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3}\cdot\frac{C_2^1}{C_6^1} + \frac{C_3^3}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^1}{C_6^1} = \frac{1}{4}$$

（2）$P(A_2 \mid B) = \dfrac{P(A_2 B)}{P(B)} = 0.6$

2. 解: $H_0: a = 70$（‰），$H_1: a \ne 70$

拒绝域为: $\chi_0 = \{|\dfrac{\bar{x}-70}{\tilde{s}}|\sqrt{36} > t_{0.975}(35)\}$ ...

根据条件$\bar{x} = 66.5$，$\tilde{s} = 15$，计算并比较

$$\frac{\bar{x}-70}{\tilde{s}}\sqrt{36} = 1.4 < t_{0.975}(35) = 2.0301$$

所以，接受H_0，可以认为平均成绩为 70 分。

3. (8 分)证明: 因为$P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A}) \Leftrightarrow P(AB)P(\bar{A}) = P(\bar{A}B)P(A)$

$\Leftrightarrow P(AB)[1-P(A)] = [P(B)-P(AB)]P(A)$

$\Leftrightarrow P(AB) = P(B)P(A) \quad \Leftrightarrow A$与$B$相互独立

答　案（模拟试题三）

一、填空题（每题 3 分，共 42 分）

1. 0.5; 2/7; 0.5。 2. $p_1 p_2$; 3. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $P\{0.5 < X < 1.5\} =$ 15/16;

4. $0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1, \alpha + \beta = 1/3$，$\alpha =$ 2/9，$\beta =$ 1/9，17/3。

5. $n =$ 6，$p =$ 0.4。 6. $N(\dfrac{a-3}{2}, \dfrac{\sigma^2}{4})$。 7. (2.6895, 2.7205)。

二、解:（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} ce^{-x}dx = c = 1$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}, & x>0\end{cases}$

（3）Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\{2X+1<y\}=P\{X<\frac{y-1}{2}\}$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{y-1}{2}}e^{-x}dx, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-\frac{y-1}{2}}, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}$$

$$\therefore\quad \varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y-1}{2}}, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}$$

三、解:（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x cdydx=\frac{c}{2}$，$\quad\therefore\quad c=2$

（2）$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 2dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 2dy=2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（3）X与Y 不独立;

（4）$\varphi_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{z/2}^{z}2dy=z, & 0<z<1\\ \int_{z/2}^{1}2dy=2-z, & 1<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（5）$EX=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$，$\qquad EX^2=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$

$EY=\int_0^1 2y(1-y)dy=\frac{1}{3}$，$\qquad EY^2=\int_0^1 2y^2(1-y)dx=\frac{1}{6}$

$DX=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{18}$，$\qquad DY=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$

$EXY=\int_0^1\int_0^x 2xydydx=\frac{1}{4}$，

$\therefore\quad \operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$

$\therefore\quad D(2X-3Y)=4DX+9DY-2\operatorname{cov}(2X,3Y)=\frac{7}{18}$

四、解：（1）$EX=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$,

令 $EX=\overline{x}$，即 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{x}$　　　解得 $\hat{\theta}_1=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$。

（2）$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i,\theta)=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta},\quad 0<x_i<1, i=1,2,...,n$

$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，$\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

解得 $\hat{\theta}_2=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

五、解：设 A_1={某机床为车床}，$P(A_1)=\dfrac{9}{15}$;

A_2={某机床为钻床}，$P(A_2)=\dfrac{1}{5}$;　A_3={某机床为磨床}，$P(A_3)=\dfrac{2}{15}$;

A_4={某机床为刨床}，$P(A_4)=\dfrac{1}{15}$;

B ={需要修理}，$P(B|A_1)=\dfrac{1}{7}$，$P(B|A_2)=\dfrac{2}{7}$，$P(B|A_3)=\dfrac{3}{7}$，$P(B|A_4)=\dfrac{1}{7}$

则 $P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=\dfrac{22}{105}$　　　$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{9}{22}$。

六、解：$H_0:\sigma^2=0.04,\quad H_1:\sigma^2\neq 0.04$

拒绝域为：$\{\dfrac{(n-1)\tilde{S}}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}$或$\{\dfrac{(n-1)\tilde{S}}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}$

计算得 $\dfrac{(n-1)\tilde{s}}{\sigma_0^2}=\dfrac{(9-1)\times 0.037^2}{0.04}=0.2738$，查表得 $\chi^2_{0.025}(9)=2.7>0.2738$

样本值落入拒绝域内，因此拒绝 H_0。

附表：　$\chi^2_{0.05}(10)=3.94,\quad \chi^2_{0.025}(10)=3.247,\quad \chi^2_{0.05}(9)=3.325,\quad \chi^2_{0.05}(9)=2.7,$

$\chi^2_{0.975}(10)=20.483,\quad \chi^2_{0.975}(9)=19.023,\quad \chi^2_{0.95}(10)=18.307,\quad \chi^2_{0.95}(9)=16.919,$

答 案（模拟试题四）

一、填空题（每题 3 分，共 42 分）

1、 0.4 ； 0.8421 。　　　　2、 0.12 。

3、$\underline{e^{-3}}$， $\underline{4e^{-3}}$。　　4、$\underline{1/2}$，$\underline{1/\pi}$， $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & -3<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$。

5、$\underline{3}$， $\underline{5}$， $\underline{0.6286}$。　　6、$\underline{2.333}$。

7、$\underline{3/\lambda^2}$， $\rho_{U,V}=\underline{3/5}$。

二、1、解 （18分）

（1） $\varphi_X(x)=\varphi_Y(x)=\begin{cases}x+1/2, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$　　（2）不独立

（3） $\varphi_Z(z)=\begin{cases}3z^2, 0\le z\le 1\\ 0, 其他\end{cases}$

2、解 （1）求Z的分布律;

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=2pq$$

$$P(Z=1)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=p^2+q^2$$

（2）$(X，Z)$的联合分布律:

X \ Z	0	1	
0	pq	q^2	q
1	pq	p^2	p
	$2pq$	p^2+q^2	

（3）当 $p=0.5$时，X与Z独立。

三、应用题（24分）

1、解：设X表示一周5个工作日机器发生故障的天数，则$X\sim B(5,0.2)$，分布律为：

$$P(X=k)=C_5^k 0.2^k 0.8^{5-k}, k=0,1,...,5$$

设Y（万元）表示一周5个工作日的利润，根据题意，Y的分布律

$$Y=f(X)=\begin{cases}10, X=0, P(X=0)=0.328\\5, X=1, P(X=1)=0.410\\0, X=2, P(X=2)=0.205\\-2, X\geq 3, P(X\geq 3)=0.057\end{cases}$$ 则 $EY=5.216$（万元）。

2、解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示输入 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 的事件，$\widetilde{B}$ 表示输出为 $ABCA$ 的随机事件。由贝叶斯公式得：$P(A_1|\widetilde{B})=\dfrac{P(A_1)P(\widetilde{B}|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\widetilde{B}|A_i)}$

$$P(A_1)=0.5, P(A_2)=0.4, P(A_3)=0.1$$

$$P(\widetilde{B}|A_1)=0.8\times 0.1\times 0.1\times 0.8=0.0064$$

$$P(\widetilde{B}|A_2)=0.1\times 0.8\times 0.1\times 0.1=0.0008$$

$$P(\widetilde{B}|A_3)=0.1\times 0.1\times 0.8\times 0.1=0.0008$$

$$P(A_1|\tilde{B})=\frac{0.5\times 0.0064}{0.5\times 0.0064+0.0008\times 0.4+0.0008\times 0.1}=\frac{8}{9}$$

07 试题

一、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，总计 18 分）

1. 设 A,B 为随机事件,$P(A)+P(B)=0.7, P(AB)=0.3$,则 $P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=$__________
2. 10 件产品中有 4 件次品,从中任意取 2 件,则第 2 件为次品的概率为___________
3. 设随机变量 X 在区间 $[0,2]$ 上服从均匀分布,则 $Y=X^2$ 的概率密度函数为__________
4. 设随机变量 X 的期望 $E(X)=3$,方差 $D(X)=5$,则期望 $E\left[(X+4)^2\right]=$_______
5. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布,则应用切比雪夫不等式估计得 $P\{|X-2|\geq 2\}\leq$__________________.
6. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $X\sim N(0,4)$ 的样本,则当 $a=$______________时, $Y=a(X_1+2X_2)^2+a(X_3-2X_4)^2\sim\chi^2(2)$.

二、选择题（在各小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 6 个小题，每小题 3 分，总计 18 分）

1. 设 A,B 为对立事件，$0<P(B)<1$，则下列概率值为 1 的是(　　　)

   (A) $P(\overline{A}\,|\,\overline{B})$； (B) $P(B\,|\,A)$； (C) $P(\overline{A}\,|\,B)$； (D) $P(AB)$

2. 设随机变量 $X\sim N(1,1)$,概率密度为 $f(x)$,分布函数 $F(x)$,则下列正确的是(　　　)

   (A) $P\{X\leq 0\}=P\{X\geq 0\}$； (B) $P\{X\leq 1\}=P\{X\geq 1\}$；

   (C) $f(x)=f(-x)$，$x\in R$； (D) $F(x)=1-F(-x)$，$x\in R$

3. 设 $f(x)$ 是随机变量 X 的概率密度,则一定成立的是(　　　)

(A) $f(x)$定义域为$[0,1]$； (B) $f(x)$非负;

(C) $f(x)$的值域为$[0,1]$； (D) $f(x)$连续

4. 设$P\{X\le 1, Y\le 1\}=\dfrac{4}{9}$, $P\{X\le 1\}=P\{Y\le 1\}=\dfrac{5}{9}$,则$P\{\min\{X,Y\}\le 1\}=$(　　)

(A) $\dfrac{2}{3}$; (B) $\dfrac{20}{81}$; (C) $\dfrac{4}{9}$; (D) $\dfrac{1}{3}$

5. 设随机变量(X,Y)的方差$D(X)=4$，$D(Y)=1$，相关系数$\rho_{XY}=0.6$，则方差$D(3X-2Y)=$ (　　)

(A) 40; (B) 34; (C) 17.6; (D) 25.6

6. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本,其中σ已知,μ未知,则下列不是统计量的是(　　)

(A) $\max\limits_{1\le k\le n} X_k$; (B) $\min\limits_{1\le k\le n} X_k$; (C) $\bar{X}-\mu$; (D) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{X_k}{\sigma}$

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共计 60 分）

1．甲乙丙三个同学同时独立参加考试,不及格的概率分别为: 0.2 ,0.3,0.4,

(1) 求恰有 2 位同学不及格的概率；

(2) 若已知 3 位同学中有 2 位不及格,求其中 1 位是同学乙的概率.

2．已知连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\end{cases}$,

求: (1) 常数A,B的值; (2) 随机变量X的密度函数$f(x)$;(3) $P\left(\sqrt{2}<X<2\right)$

3．设随机变量X与Y相互独立,概率密度分别为:

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求随机变量$Z=X+Y$的概率密度

4．设二维随机变量(X,Y)的密度函数：$f(x,y)=\begin{cases}A, & 0<x<2, |y|<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（1）求常数A的值；（2）求边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$；

（3） X和Y是否独立?

5．设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数：$f(x,y)=\begin{cases}3y, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求（1）数学期望$E(X)$与$E(Y)$；（2） X与Y的协方差$Cov(X,Y)$

6．设总体X概率密度为$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$\theta>-1$未知，$X_1,X_2,\cdots X_n$为来

自总体的一个样本. 求参数θ的矩估计量和极大似然估计量.

四、证明题（本大题共 1 小题，每小题 4 分，共 4 分）

1. 设A,B,C任意三个事件,试证明:$P(AB)+P(BC)-P(B)\le P(AC)$

06 试题

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，总计 20 分）

1. 设A,B为随机事件,$P(A)=0.5$,$P(B)=0.6$,$P(A\cup B)=0.7$,则$P(A|B)=$_____

2．设 10 把钥匙中有 2 把能打开门，现任意取两把，能打开门的概率是____________

3．设$X\sim N(10,3)$, $Y\sim N(1,2)$，且X与Y相互独立，则$D(3X-2Y)=$_______________

4．设随机变量X在区间$[0,6]$上服从均匀分布,则关于未知量x的方程$x^2+2Xx+1=0$有实根的概率为________

5. 设随机变量X的数学期望$E(X)=7$,方差$D(X)=5$,用切比雪夫不等式估计得$P\{2<X<12\}\ge$_________________.

二、选择题（在各小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 5 个小题，每小题 4 分，总计 20 分）

1．设事件A,B相互独立,且$P(A)>0$,$P(B)>0$,，则有________

(A) $P(B|A)=0$;　　(B) $P(A|B)=P(A)$;

(C) $P(A|B)=0$;　　(D) $P(AB)=P(A)$

2. 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,那么概率$P\{X<\mu+2\}$________

(A) 随μ增加而变大;　(B) 随μ增加而减小;

(C) 随σ增加而不变;　(D) 随σ增加而减小

3. 设$P\{X\ge 0,Y\ge 0\}=\dfrac{1}{5}$,$P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\dfrac{2}{5}$,则$P\{\max\{X,Y\}\ge 0\}=$______

(A) $\dfrac{1}{5}$;　(B) $\dfrac{2}{5}$;　(C) $\dfrac{3}{5}$;　(D) $\dfrac{4}{5}$

4．设X,Y相互独立，X服从$(0,2)$上的均匀分布，Y的概率密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, y\ge 0\\ 0, \quad y<0\end{cases}$，则$P\{X+Y\ge 1\}=$_______

(A) $1-e^{-1}$;　(B) $1-e^{-2}$;　(C) $1-2e^{-2}$;　(D) $1-0.5e^{-1}$

5. 设总体X, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的一个样本，$\overline{X}$为样本均值，则不是总体期望μ的无偏估计量的是________

(A) $\overline{X}$; (B) $X_1+X_2-X_3$; (C) $0.2X_1+0.3X_2+0.5X_3$; (D) $\sum_{i=1}^{n}X_i$

三、计算题（本大题共 5 小题，每小题 10 分，共计 50 分）

1．某产品整箱出售，每一箱中 20 件产品，若各箱中次品数为 0 件，1 件，2 件的概率分别为 80%，10%，10%，现在从中任取一箱，顾客随意抽查 4 件，如果无次品，则买下该箱产品，如果有次品，则退货，求: (1) 顾客买下该箱产品的概率；(2) 在顾客买下的一箱产品中，确实无次品的概率.

2．已知随机变量X的密度为$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,且$P\{x>1/2\}=5/8$,

求: (1) 常数a,b的值; (2) 随机变量X的分布函数$F\left(x\right)$

3．设二维随机变量(X,Y)有密度函数：$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\frac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（1）求边缘概率密度$f_X\left(x\right),f_Y\left(y\right)$；（2）求条件密度$f_{X|Y}\left(x\mid y\right),f_{Y|X}\left(y\mid x\right)$；

（3）求概率$P\left\{X>Y\right\}$.

4．设随机变量X,Y独立同分布，都服从参数为λ的泊松分布，设$U=2X+Y$,$V=2X-Y$, 求随机变量U与V的相关系数ρ_{UV}

5．设总体$X\sim b(100,p)$为二项分布，$0<p<1$未知，$X_1,X_2,\cdots X_n$为来自总体的一个样本. 求参数p的矩估计量和极大似然估计量。

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 设事件A,B,C相互独立,证明事件$A-B$与事件C也相互独立

2. 设总体为X，期望$E\left(X\right)=\mu$,方差$D\left(X\right)=\sigma^2$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的一个样本, 样本均值$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,样本方差$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$,证明: S^2是参数σ^2的无偏估计量

06 答案

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，总计 20 分）

1. 2/3　　2．17/45　　3．35　　4．5/6　　5.　4/5

二、选择题（在各小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 5 个小题，每小题 4 分，总计 20 分）

1.　(B)　　2．(D)　　3．(C)　　4．(D)　　5.　(D)

三、计算题（本大题共 5 小题，每小题 10 分，共计 50 分）

1.解:设A表示“顾客买下该箱产品”，B_i分别表示“箱中次品数为 0 件，1 件，2 件”$i=0,1,2$

则$P\left(B_0\right)=80\%$，$P\left(B_1\right)=10\%$ $P\left(B_2\right)=10\%$，，$P\left(A\mid B_0\right)=1$，$P\left(A\mid B_1\right)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}$，

$P\left(A \mid B_2\right)=\dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4}$，(3 分)

由全概率公式得：$P\left(A\right)=\sum_{i=0}^{2} P\left(A \mid B_i\right) P\left(B_i\right)=448/475$，(7 分)

由贝叶斯公式得：$P\left(B_0 \mid A\right)=\dfrac{P\left(A \mid B_0\right) P\left(B_0\right)}{P(A)}=95/112$　(10 分)

2．解: (1)　由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx=a/2+b$，$5/8=P\{X>1/2\}=\int_{1/2}^{+\infty} f(x) dx=3a/8+b/2$

解得 $a=1, b=1/2$　(4 分)

(2) $f(x)=\begin{cases} x+0.5, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,当 $x<0$ 时，$F\left(x\right)=P\{X \leq x\}=0$，当 $0 \leq x<1$ 时，

$F\left(x\right)=P\{X \leq x\}=\int_0^x\left(x+0.5\right) dx=\left(x^2+x\right)/2$，当 $x \geq 1$ 时，$F\left(x\right)=1$，

所以　$F\left(x\right)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \left(x^2+x\right)/2, & 0 \leq x<1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$　(10 分)

3．解: （1）$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy=\begin{cases} 2x^2+2x/3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx=\begin{cases} 1/3+y/6, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$　(4 分)

(2) 当 $0 \leq y \leq 2$ 时，$f_{X|Y}\left(x \mid y\right)=\dfrac{f(x, y)}{f_Y(y)}==\begin{cases} \dfrac{6x^2+2xy}{2+y}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

当 $0<x \leq 1$ 时，$f_{Y|X}\left(y \mid x\right)=\dfrac{f(x, y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{3x^2+xy}{6x^2+2x}, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$　(8 分)

(3) $P\{X>Y\}=\int\limits_{x>y} f(x, y) dy=\int_0^1 dx \int_0^x\left(x^2+\dfrac{1}{3} xy\right) dy=7/24$　(10 分)

4 .解: $E\left(X\right)=E\left(Y\right)=\lambda, D\left(X\right)=D\left(Y\right)=\lambda, E\left(U\right)=3\lambda, E\left(V\right)=3\lambda$

$D\left(U\right)=D\left(V\right)=5\lambda, Cov\left(U, V\right)=4D\left(X\right)-D\left(Y\right)=3\lambda$，(8 分)

$\rho_{UV}=\dfrac{Cov\left(U, V\right)}{\sqrt{D\left(U\right)} \sqrt{D\left(V\right)}}$=3/5　(10 分)

5 .解：由 $E(X)=100p=\bar{X}$，得 p 的矩估计量 $\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{100}$　(4 分)

似然函数为$L(p)=\prod_{i=1}^{n} C_{100}^{x_i} p^{x_i}(1-p)^{100-x_i}$，

$\ln\left(L(p)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln C_{100}^{x_i}+x_i\ln p+\left(100-x_i\right)\ln\left(1-p\right)\right)$

由$\dfrac{d\left(\ln\left(L(p)\right)\right)}{dp}=0$，得极大似然估计量$\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{100}$　　　(10 分)

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 证明：由于事件A,B,C相互独立，所以$P\left(ABC\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(C\right)$，$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$，$P\left(AC\right)=P\left(A\right)P\left(C\right)$，$P\left(BC\right)=P\left(B\right)P\left(C\right)$，(2 分)所以

$$P\left(\left(A-B\right)C\right)=P\left(AC-BC\right)=P\left(AC\right)-P\left(ABC\right)$$

$$=P\left(A\right)P\left(C\right)-P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(C\right)=P\left(A-B\right)P\left(C\right)$$

即$P\left(\left(A-B\right)C\right)=P\left(A-B\right)P\left(C\right)$,所以事件$A-B$与$C$也相互独立 (5 分)

2. 证明：$E\left(X\right)=\mu$，$D\left(X\right)=\sigma^2$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的一个样本，所以$E\left(\bar{X}\right)=\mu$，$D\left(\bar{X}\right)=\sigma^2/n$，所以$E\left(S^2\right)=\dfrac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right]$

$=\dfrac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)-nE\left(\bar{X}^2\right)\right]=\dfrac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2+\mu^2\right)-n\left(\sigma^2/n+\mu^2\right)\right]=\sigma^2$，即$S^2$是参数$\sigma^2$的无偏估计量(5 分)

07 答案

一、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，总计 18 分）

1. 0.1　2．0.4　3. $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1/\left(4\sqrt{y}\right), & 0<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　4． 54　5. 1/2　6. 1/20

二、选择题（在各小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 6 个小题，每小题 3 分，总计 18 分）

1. (C)　2．(B)　3．(B)　4. (A)　5. (D)　6. (C)

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共计 60 分）

1．解:设A,B,C分别表示“甲,乙,丙同学不及格”，则$P\left(A\right)=0.2$，$P\left(B\right)=0.3$，

$P\left(C\right)=0.4$，由题意A,B,C相互独立 (2 分)

(1) 事件“恰有 2 位同学不及格” 为: $D=\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}$，所以

$P\left(D\right)=P\left(\bar{A}BC\right)+P\left(A\bar{B}C\right)P\left(AB\bar{C}\right)$

$=P\left(\bar{A}\right)P\left(B\right)P\left(C\right)+P\left(A\right)P\left(\bar{B}\right)P\left(C\right)+P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(\bar{C}\right)$=0.188 (6 分)

(2) $P\left(B\mid D\right)=\dfrac{P\left(BD\right)}{P(D)}=\dfrac{P\left(\bar{A}BC\right)+P\left(AB\bar{C}\right)}{P(D)}$=33/47　(10 分)

2．解: (1)　由 $F(x)$ 右连续性得 $F(0^+)=F(0)$，即 $A+B=0$，又由 $F(+\infty)=1$ 得，$A=1$，

解得 $A=1,B=-1$　(5 分)　(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0, \\ 0, & 其它 \end{cases}$　(8 分)

(3) $P\left(\sqrt{2}<X<2\right)=F(2)-F\left(\sqrt{2}\right)=e^{-1}-e^{-2}$　(10 分)

3．解: 由于随机变量 X 与 Y 相互独立,所以 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$　(2 分)

$$=\begin{cases} \int_0^z e^{-x}dy, & 0<z<1 \\ \int_z^{z-1} e^{-x}dy, & z\geq 1 \\ 0, & z\leq 0 \end{cases} =\begin{cases} 1-e^{-z}, & 0<z<1 \\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\geq 1 \\ 0, & z\leq 0 \end{cases}\quad (10\text{ 分})$$

4．解: （1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=1$，得 $A=1/4$ (2 分)

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_{-x}^{x} 1/4dy, & 0\leq x\leq 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}=\begin{cases} x/2, & 0\leq x\leq 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ (5 分)

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_{-y}^{2} 1/4dx, & -2\leq y<0 \\ \int_{y}^{2} 1/4dx, & 0\leq y<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}=\begin{cases} (2+y)/4, & -2\leq y<0 \\ (2-y)/4, & 0\leq y<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$　(9 分)

(3) $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，不独立(10 分)

5 .解: $E(X)=3/8$,(2 分) $E(Y)=3/4$,(4 分) $E(XY)=3/10$ (6 分)，所以
$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(X)$ =3/160, (10 分)

6 .解：(1)由 $E(X)=\dfrac{1+\theta}{2+\theta}=\bar{X}$，得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$　(5 分)

(2)似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}$，$\ln(L(\theta))=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

由 $\dfrac{d(\ln(L(\theta)))}{d\theta}=0$，得极大似然估计量 $\hat{\theta}=-1-n^2/\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$　(5 分)

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 4 分，共 4 分）

1. 证明： 因为 $P(AB)+P(BC)=P(AB\cup BC)+P(ABC)$,又由于 $AB\cup BC\subset B$

, $ABC\subset AC$，所以 $P(AB\cup BC)\leq P(B)$，$P(ABC)\leq P(B)$,所以

$P(AB)+P(BC)\leq P(B)+P(AC)$,即 $P(AB)+P(BC)-P(B)\leq P(AC)$ (4 分)