@Название@

@k.idcr

2025 г.

Содержание

1. @Название главы 1@

1.1. @Название подглавы 1@

Это небольшая демонстрация настроенных окружений для теорем, доказательств и прочего.

Теорема 1.1: Линейная зависимость двух векторов

Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда:

$$\exists\lambda \in \mathbb{R} \colon \mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}.$$

Доказательство 1.1

Необходимость: Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно зависимы, то существуют коэффициенты $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, такие что:

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Без ограничения общности, пусть $\alpha \neq 0$. Тогда:

$$\mathbf{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \text{где } \lambda = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Достаточность: Если $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, то:

$$1 \cdot \mathbf{u} - \lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

что означает линейную зависимость $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ (коэффициенты 1 и $-\lambda$ не равны нулю одновременно).

Лемма 1.1: О линейной зависимости

Если в наборе векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ один из векторов является линейной комбинацией остальных, то этот набор линейно зависим.

Определение 1.1: Собственные вектор и значение

Пусть A - квадратная матрица размера $n \times n$.

- Ненулевой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ называется **собственным вектором** матрицы A, если существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

- Число λ в этом случае называется **собственным значением** матрицы A, соответствующим вектору $\mathbf{v}$.

Эквивалентно, λ является собственным значением, если:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

где I - единичная матрица соответствующего размера.