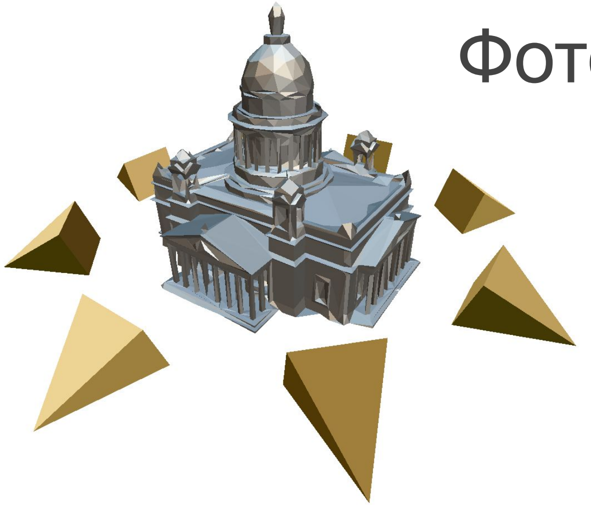
Введение в фотограмметрию
Построение панорам



Фотограмметрия. Лекция 4

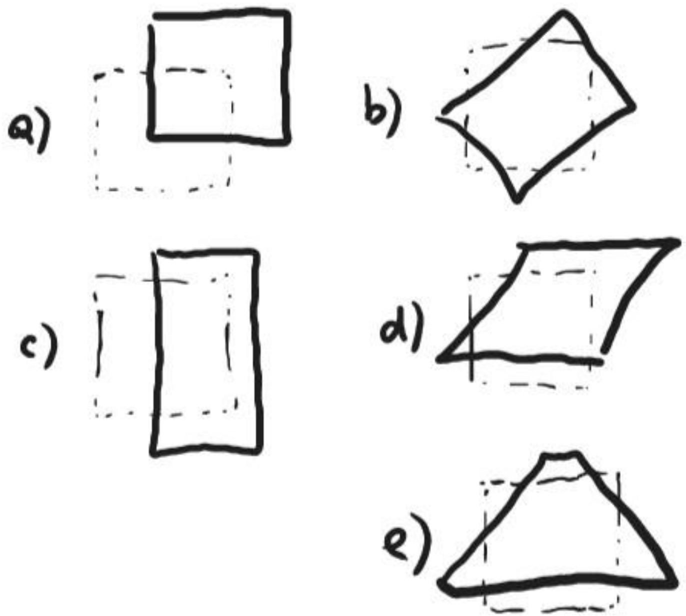
- Обобщенные координаты
- Построение гомографии
- Построение панорамы

Симиютин Борис

simiyutin.boris@yandex.ru

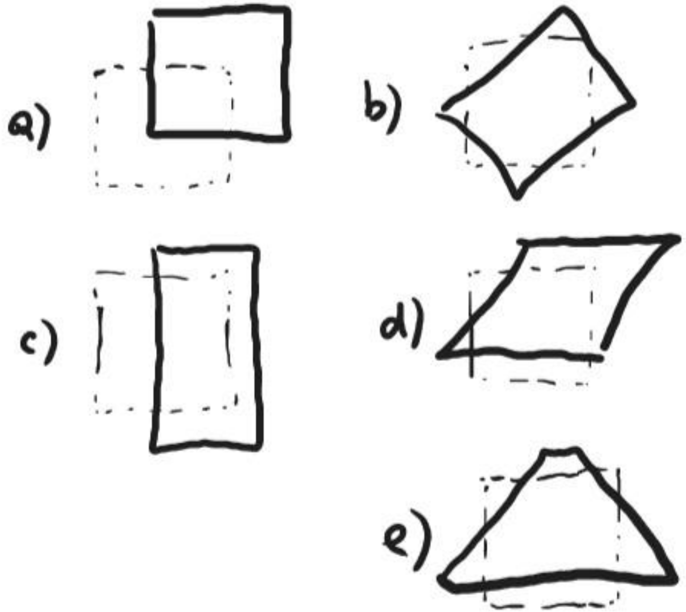
Однородные координаты

1) Хотим описывать двумерный сдвиг, поворот и растяжение с помощью какой-то матрицы



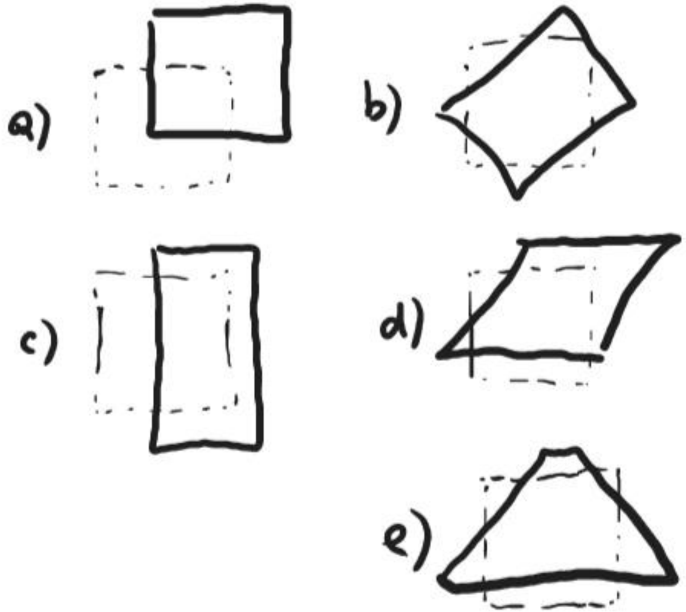
Однородные координаты

1) Хотим описывать двумерный сдвиг, поворот и растяжение с помощью какой-то матрицы
2) Пусть для начала хотим описывать только сдвиг и поворот



Однородные координаты

1) Хотим описывать двумерный сдвиг, поворот и растяжение с помощью какой-то матрицы
2) Пусть для начала хотим описывать только сдвиг и поворот
3) Можем ли сделать это с помощью матрицы 2x2?



Однородные координаты

1) Поворот:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Однородные координаты

1) Поворот:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

2) Сдвиг?:

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$$

Однородные координаты

1) Поворот:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

2) Сдвиг?:

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$$

невозможно……..

Однородные координаты

1) Поворот:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

2) Сдвиг?:

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$$

Однородные координаты

1) Нужна трехмерная матрица

2) Новый вектор

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$$

3) Переход к евклидовой точке

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix};\ w \neq 0$$

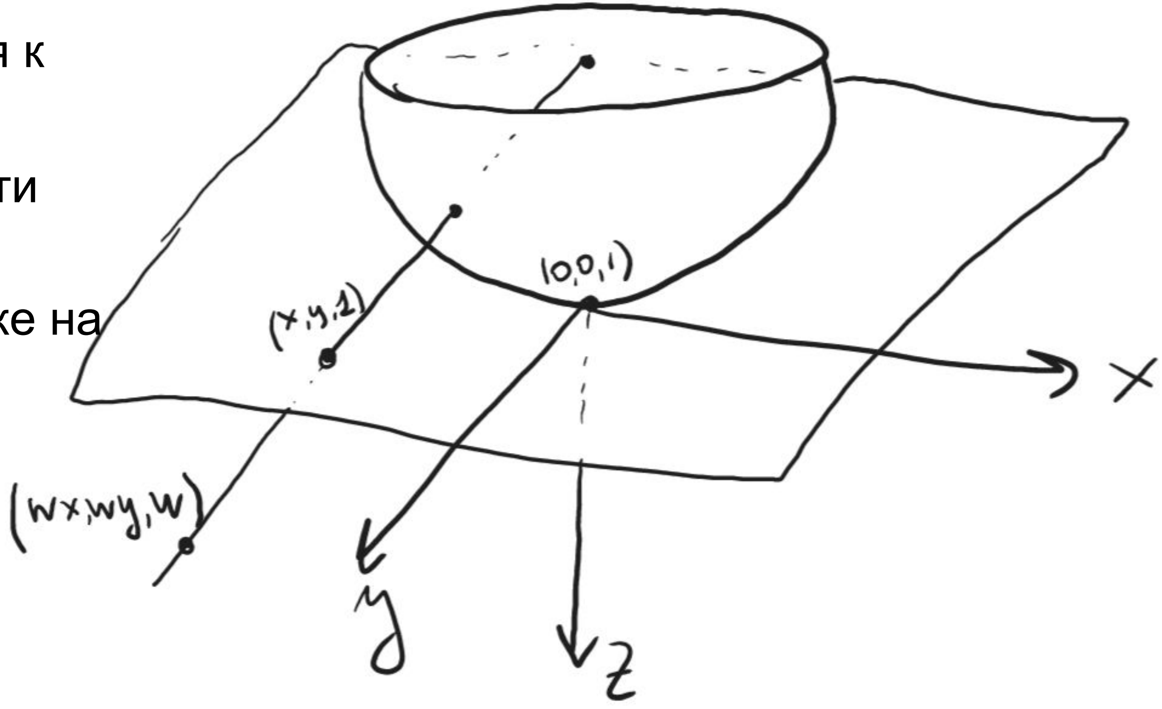
4) Прямые: ***w = 0***

5) Однородность

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}\ \forall \alpha \neq 0$$

Однородные координаты

1) $w \to 0$ ⇔ точка стремится к бесконечности
2) Каждая точка на плоскости (включая бесконечно удаленные) отвечает точке на полусфере
3) Неоднозначность за счет скольжения по лучу
4) Обобщаются на 3D пространство



Однородные координаты

a) Поворот
b) Сдвиг
c) Масштаб
d) Shear

Однородные координаты. Афинная матрица

a) Поворот
b) Сдвиг
c) Масштаб
d) Shear

Сколько степеней свободы?
(нижняя строка фиксирована)

$$a)\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Однородные координаты. Афинная матрица

Сколько степеней свободы?
(нижняя строка фиксирована)

$$\measuredangle \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A \overset{SVD}{=} UDV^T = (UV^T)(VDV^T) =$$
$$= R(\theta)R(-\varphi)DR(\varphi)$$
$$; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Однородные координаты. Афинная матрица

Сколько степеней свободы?
(нижняя строка фиксирована)

Из разложения видно, что афинная матрица **A** параметризуется вращением и анизотропным растяжением (по оси под углом ***phi***) => 4 параметра на матрицу **A** + 2 параметра на сдвиг = 6 степеней свободы

$$\measuredangle \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ A \overset{SVD}{=} UDV^T = (UV^T)(VDV^T) =$$

$$= R(\theta)R(-\varphi)DR(\varphi)$$

$$;\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Однородные координаты

1) Не использовали еще два значения в нижней строчке

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & t_x \\ A_{21} & A_{22} & t_y \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{P \qquad Q}_{?}} & 1 \end{pmatrix}$$

Однородные координаты. Перспектива

1) Не использовали еще два значения в нижней строчке
2) Помимо афинных преобразований, матрица 3x3 позволяет описать еще и перспективное преобразование

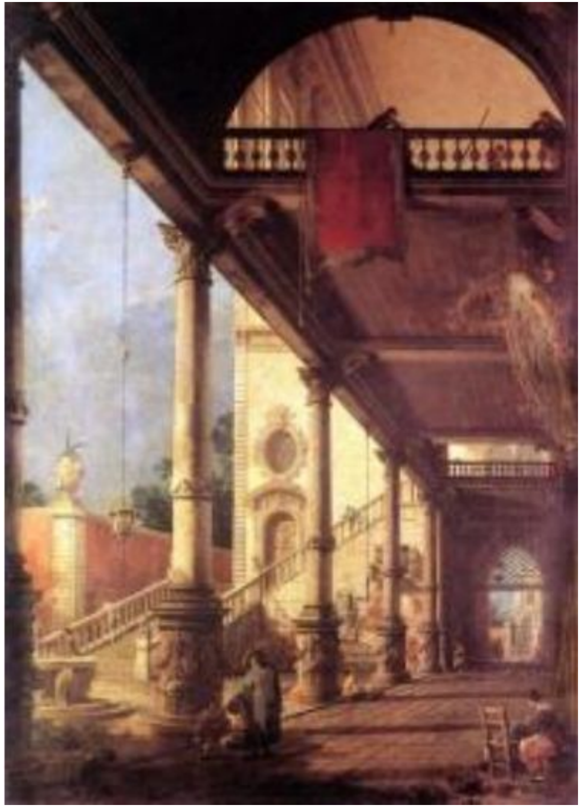
$$\left(\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & t_x \\ A_{21} & A_{22} & t_y \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{P \qquad\qquad Q}_{?}} & 1 \end{array}\right)$$

Однородные координаты. Перспектива

1) Не использовали еще два значения в нижней строчке
2) Помимо афинных преобразований, матрица 3x3 позволяет описать еще и перспективное преобразование

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & t_x \\ A_{21} & A_{22} & t_y \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{P \qquad\qquad Q}_{?}} & 1 \end{pmatrix}$$

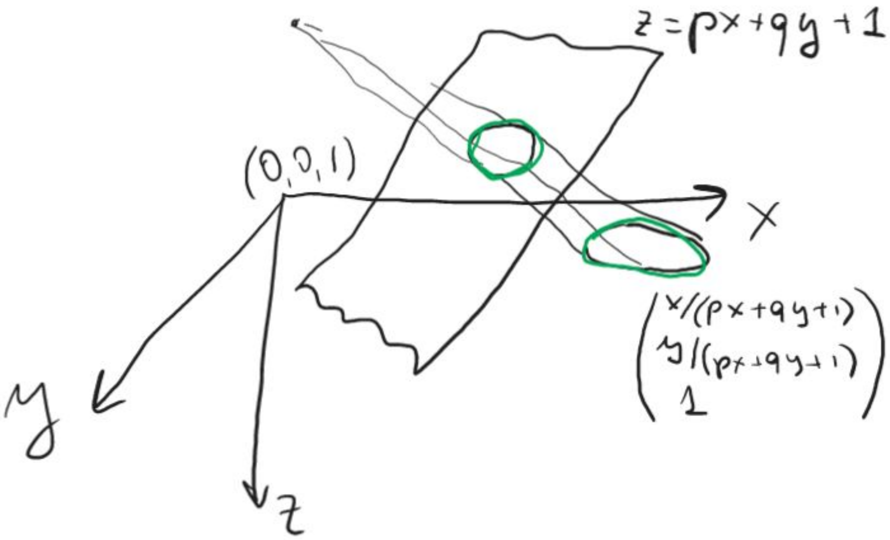
Однородные координаты. Перспектива



Однородные координаты. Перспектива

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy+1 \end{pmatrix}$$

1) Проецирование: как действуют **p** и **q**?
2) Пусть рисуем кружочек
3) Домножением на такую матрицу получается что рисуем его на плоскости z = px+qy+1
4) Делением на (px+qy+1) переводим на плоскость z=1 и получаем проекцию



Однородные координаты. Прямые

$ax + by + c = 0$

1) Уравнение прямой

Однородные координаты. Прямые

1) Уравнение прямой

$$ax + by + c = 0$$

$$ax/z + by/z + c = 0$$

$$ax + by + cz = 0$$

Однородные координаты. Прямые

1) Уравнение прямой

$$ax + by + c = 0$$

$$a x/_z + b y/_z + c = 0$$

$$ax + by + cz = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Однородные координаты. Прямые

1) Уравнение прямой

$$ax + by + c = 0$$

$$ax/z + by/z + c = 0$$

$$ax + by + cz = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$\forall$ точка на прямой это $\perp$ вектор

Однородные координаты. Прямые

1) Уравнение прямой
2) Прямая через две точки

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - ?$$

Однородные координаты. Прямые

1) Уравнение прямой
2) Прямая через две точки

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - ?$$

Хотим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 ; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Однородные координаты. Прямые

1) Уравнение прямой
2) Прямая через две точки

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - ?$$

Хотим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \,; \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Однородные координаты. Прямые

1) Уравнение прямой
2) Прямая через две точки
3) Пересечение прямых

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - ?$$

Однородные координаты. Прямые

1) Уравнение прямой
2) Прямая через две точки
3) Пересечение прямых

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - ?$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Матрица гомографии

Матрица гомографии

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & t_x \\ A_{21} & A_{22} & t_y \\ P & Q & 1 \end{pmatrix}$$

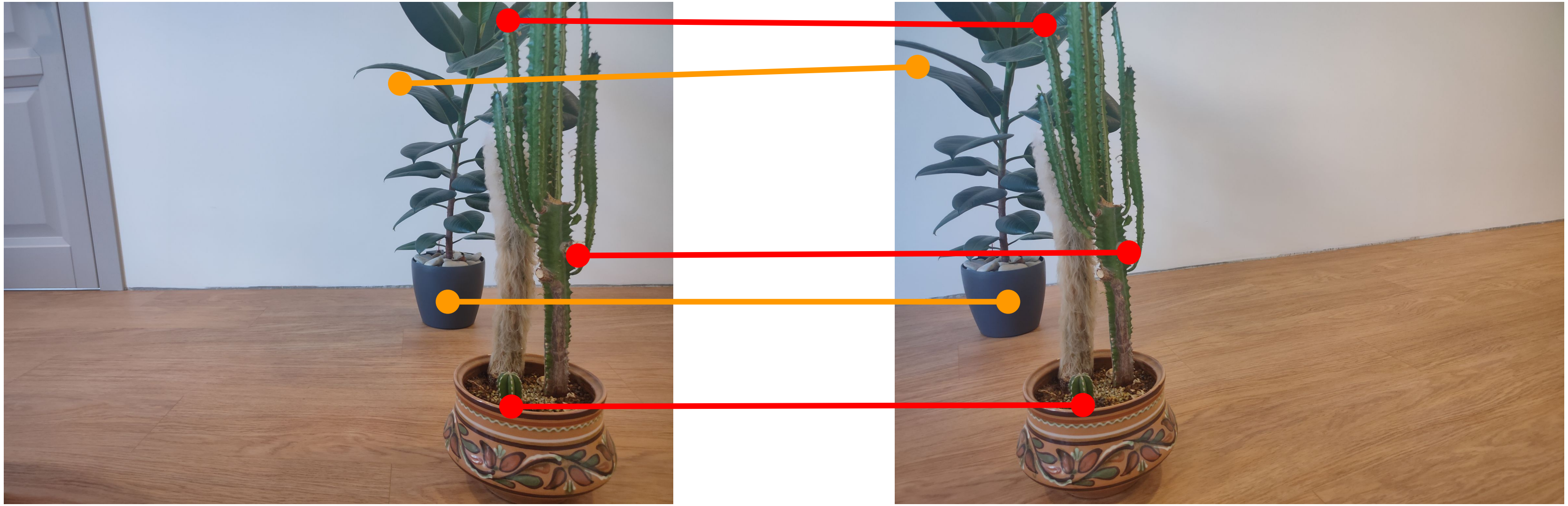
Матрица гомографии

Картинки можно склеить в панораму только при отсутствии параллакса:

- Либо снимали из одной точки
- Либо снимали плоскую поверхность

Поиск матрицы гомографии

$$x' = Hx$$



Поиск матрицы гомографии

1) Есть матчи - знаем как искомая матрица действует на точки
2) Каждая точка дает два уравнения

$$\mathbf{x}'_i = \mathtt{H}\mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{x}'_i \times \mathtt{H}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathtt{H}\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{h}^{1\mathsf{T}}\mathbf{x}_i \\ \mathbf{h}^{2\mathsf{T}}\mathbf{x}_i \\ \mathbf{h}^{3\mathsf{T}}\mathbf{x}_i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}'_i \times \mathtt{H}\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} y'_i\mathbf{h}^{3\mathsf{T}}\mathbf{x}_i - w'_i\mathbf{h}^{2\mathsf{T}}\mathbf{x}_i \\ w'_i\mathbf{h}^{1\mathsf{T}}\mathbf{x}_i - x'_i\mathbf{h}^{3\mathsf{T}}\mathbf{x}_i \\ x'_i\mathbf{h}^{2\mathsf{T}}\mathbf{x}_i - y'_i\mathbf{h}^{1\mathsf{T}}\mathbf{x}_i \end{pmatrix}$$

Поиск матрицы гомографии

1) Есть матчи - знаем как искомая матрица действует на точки
2) Каждая точка дает два уравнения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & -w_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} & y_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} \\ w_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & -x_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} \\ -y_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} & x_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & -w_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} & y_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} \\ w_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & -x_i'\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = 0$$

Поиск матрицы гомографии

1) Есть матчи - знаем как искомая матрица действует на точки
2) Каждая точка дает два уравнения
3) 4 матча дают 8 уравнений
4) Получаем систему вида **Ah=0**, где **A** размера 8x9

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^\mathsf{T} & -w'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & y'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} \\ w'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & \mathbf{0}^\mathsf{T} & -x'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} \\ -y'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & x'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & \mathbf{0}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^\mathsf{T} & -w'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & y'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} \\ w'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & \mathbf{0}^\mathsf{T} & -x'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = 0$$

Первые 2 строчки матрицы **A**

Поиск матрицы гомографии

1) Есть матчи - знаем как искомая матрица действует на точки
2) Каждая точка дает два уравнения
3) 4 матча дают 8 уравнений
4) Получаем систему вида **Ah=0**, где **A** размера 8x9
5) Получили однородную систему

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & -w_i'\mathbf{x}_i^\top & y_i'\mathbf{x}_i^\top \\ w_i'\mathbf{x}_i^\top & \mathbf{0}^\top & -x_i'\mathbf{x}_i^\top \\ -y_i'\mathbf{x}_i^\top & x_i'\mathbf{x}_i^\top & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & -w_i'\mathbf{x}_i^\top & y_i'\mathbf{x}_i^\top \\ w_i'\mathbf{x}_i^\top & \mathbf{0}^\top & -x_i'\mathbf{x}_i^\top \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = 0$$

Поиск матрицы гомографии

1) Если H_{33} != 0, то можем положить H_{33}= 1 и подставить в систему
2) Система превращается в неоднородную, можно решить Гауссом

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{19} \\ & & \\ a_{81} & & a_{89} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ \\ h_{33} \end{pmatrix} = 0$$

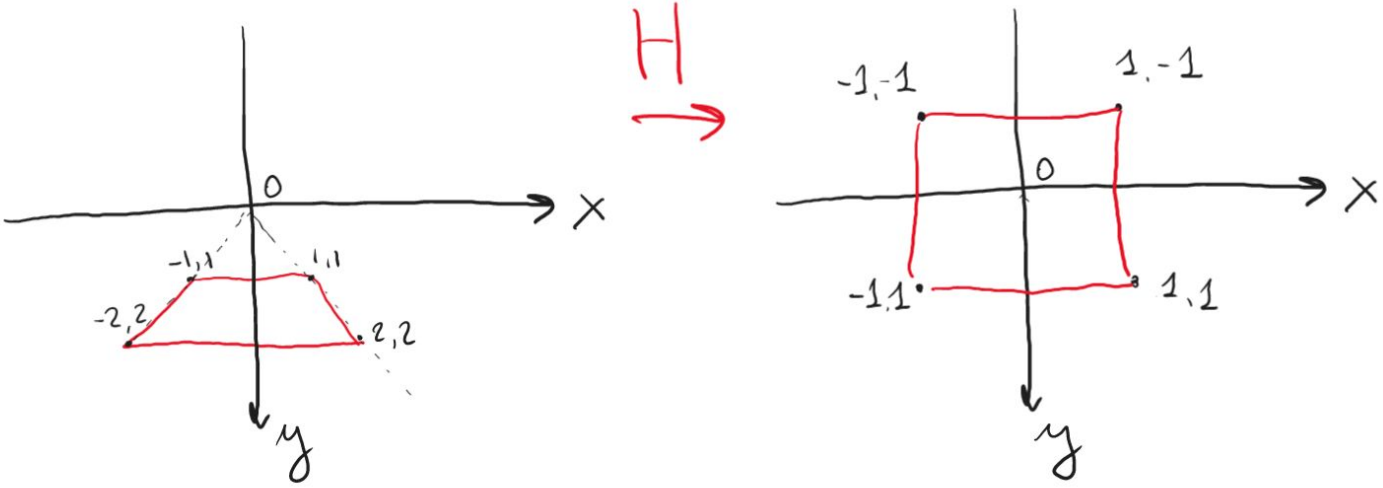
$$\exists h_{33} = 1$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{18} \\ \vdots & & \\ a_{81} & \cdots & a_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ \\ h_{32} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{19} \\ \vdots \\ a_{89} \end{pmatrix}$$

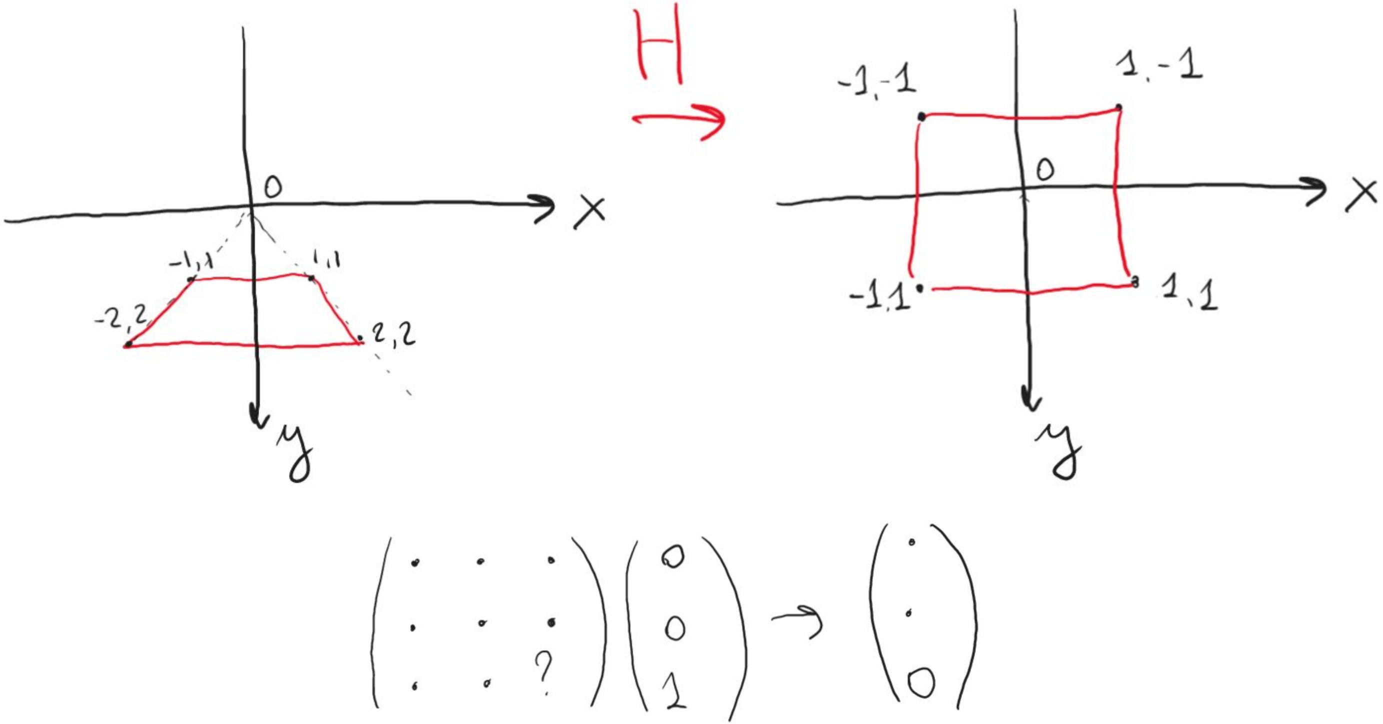
Поиск матрицы гомографии

trollface.jpg

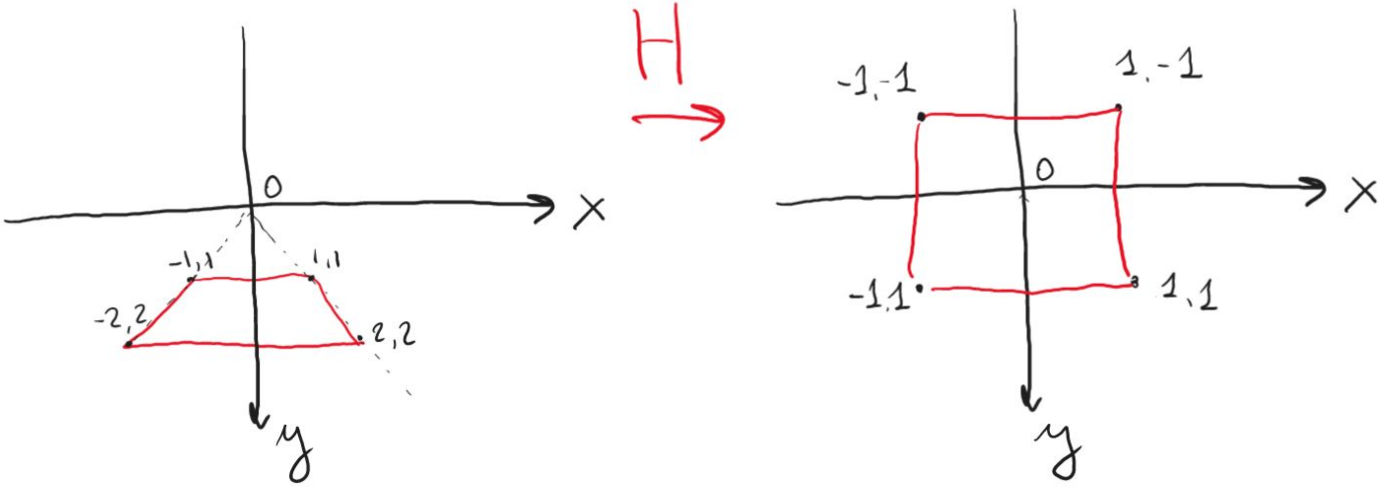
Поиск матрицы гомографии

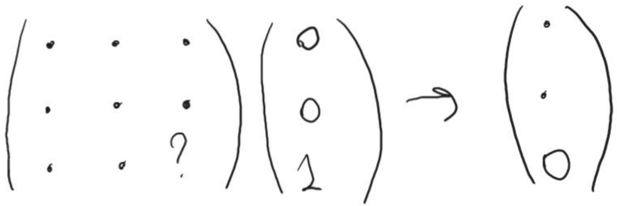


Поиск матрицы гомографии



Поиск матрицы гомографии





$H_{33} = 0$

Поиск матрицы гомографии

1) Бывают разумные случаи когда $H_{33} = 0$

Поиск матрицы гомографии

1) Бывают разумные случаи когда $H_{33} = 0$
2) Что произойдет с решением неоднородной системы, если все равно попытаться решить?

Поиск матрицы гомографии

1) Бывают разумные случаи когда $H_{33} = 0$
2) Что произойдет с решением неоднородной системы, если все равно попытаться решить?

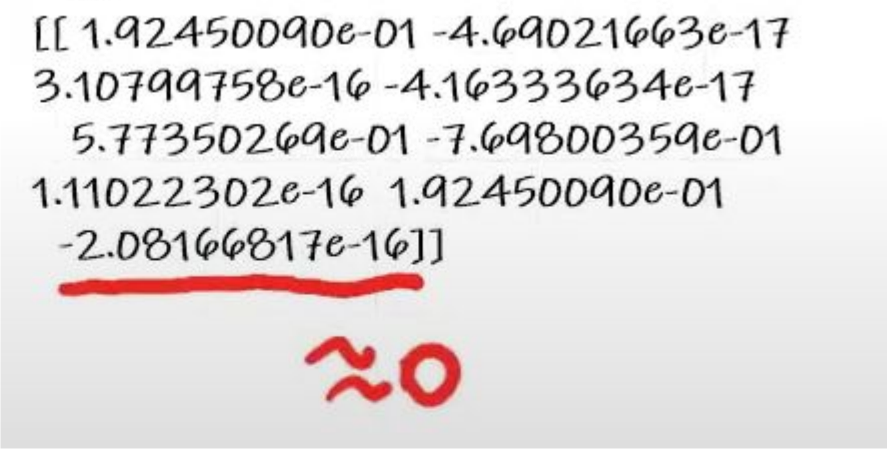
cv::findHomography:
[-1672594911637218,
-3.094922302950865, 4.503111950793508;
0.09284766908852596,
-5017784734911656, 6690379646548875;
-0.3421302712927362,
-1672594911637218, 1]

Поиск матрицы гомографии

1) Бывают разумные случаи когда $H_{33} = 0$
2) Что произойдет с решением неоднородной системы, если все равно попытаться решить?
3) Лучше решать через SVD

SVD:

....



SVD

1) **SVD** - разложение матрицы в произведение двух ортогональных и диагональной

$A = UDV^T$: U, V - ортог.

$A : m \times m$ $\quad$ D - диаг $\begin{pmatrix} \ddots & 0 \end{pmatrix}$

$D : m \times n$

$V : n \times n$

SVD

1) **SVD** - разложение матрицы в произведение двух ортогональных и диагональной
2) Можно использовать для решения систем (в т.ч. однородных)

$$A\vec{h} = \vec{0} \quad ; \quad \|h\| = 1$$

SVD

1) **SVD** - разложение матрицы в произведение двух ортогональных и диагональной
2) Можно использовать для решения систем (в т.ч. однородных)

$$A\vec{h} = \vec{0} \quad ; \quad \|h\| = 1$$

$$UDV^T h = 0 \; ; \; V^T = \begin{array}{l} v_1^T \\ \\ \\ v_n^T \end{array} \begin{pmatrix} \rule{4em}{1pt} \\ \rule{4em}{1pt} \\ \\ \rule{4em}{1pt} \end{pmatrix}$$

SVD

1) **SVD** - разложение матрицы в произведение двух ортогональных и диагональной
2) Можно использовать для решения систем (в т.ч. однородных)

$$A\vec{h} = \vec{0} \quad ; \quad \|h\| = 1$$

$$UDV^T h = 0 \; ; \; V^T = \begin{array}{c} v_1^T \\ \\ \\ v_n^T \end{array} \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \\ \text{———} \end{pmatrix}$$

$$V^T \cdot \vec{v}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_n = 0 \Rightarrow DV^T \vec{v}_n = \vec{0}$$

$\uparrow$

решение!

https://www.sensefly.com/education/datasets/

Домашнее задание: гомография, панорама

1) Реализовать алгоритм поиска матрицы гомографии с помощью DLT
2) Реализовать построение панорамы через цепочку гомографий
3) Теор часть

Ссылки

1) Хороший туториал на тему SVD
2) Hartley, Zisserman Multiple View Geometry in Computer Vision

Вопросы?

Симиютин Борис
simiyutin.boris@yandex.ru