3. Demuestra o da un contraejemplo:

a) $p_{i,j}(n) \geq p_{i,j}(n)p_{j,j}(n-1)$

b) $p_{i,j}(n) = 1 - p_{j,i}(n)$.

a) $p_{i,j}(n) \geq p_{i,j}(n)\, p_{j,j}(n-1)$

Dem

$p_{ij}(n) \geq p_{ij}(n)\, p_{jj}(n-1) \iff p_{ij}(n)(1 - p_{jj}(n-1)) \geq 0$

Ahora bien como $p_{ij}(n)$ es una probabilidad $\Rightarrow p_{ij}(n) \geq 0$

Ademas al tratarse de Cadenas de Markov, las probabilidades de transicion estan entre 0 y 1

$\Rightarrow p_{j,j}(n-1) \in [0,1]$

$\Rightarrow 1 - p_{j,j}(n-1) \geq 0$

Al tener $1 - p_{j,j}(n-1) \geq 0$ y $p_{ij}(n) \geq 0$ $\Rightarrow$ Su producto es no negativo

$\Rightarrow p_{ij}(n)(1 - p_{jj}(n-1)) \geq 0$ siempre se cumple

Por lo tanto como es un si y solo si la desigualdad $p_{i,j}(n) \geq p_{i,j}(n)\, p_{j,j}(n-1)$ es siempre cierta

b) $p_{i,j}(n) = 1 - p_{j,i}(n)$

Esta igualadad nos dice que la probabilidad de ir de i a j en n pasos es el complemento de ir de j a i en n pasos. Lo podemos ver como que entre i y j solo hubiera dos alternativas contrapuestas.

Ahora bien esto no se cumple si existen mas de dos estados en la cadena o incluso si existe una transicion a otro estado de i y j.

Contraejemplo:

Sea la cadena con estados 1,2,3 y matriz de transicion P

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

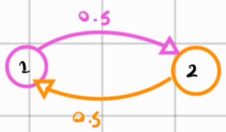
Veamos que si $n = 1$ osea un paso

$\Rightarrow p_{1,2}(1) = 0.3$ y $p_{2,1}(1) = 0.4$

De modo que si se cumpliera $p_{i,j}^{(n)} = 1 - p_{j,i}^{(n)}$ tendria que ser $p_{1,2}(1) = 1 - p_{2,1}(1)$

$\Rightarrow 0.3 = 1 - 0.4 = 0.6$

Lo cual no se cumple; por lo tanto es falso. A menos que tengamos una cadena de Markov que se vea asi:



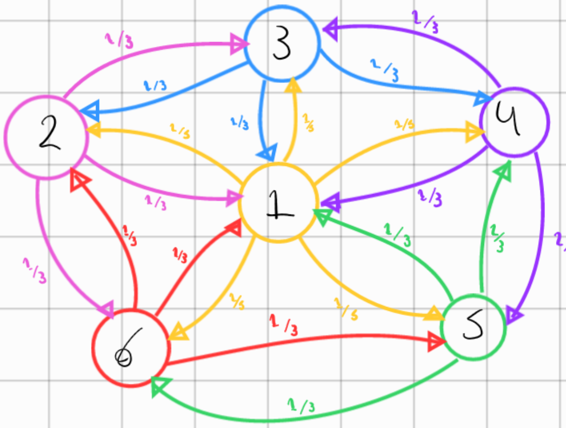
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Solo asi si se cumpliria la igualadad; en cualquier otro caso no se puede

4. Considera una cadena de Markov con espacio de estados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Dibuja su diagrama de transición (se recomienda poner el vértice del estado 1 en el centro). Suponiendo que la cadena inicia en el estado 1, ¿en promedio cuanto tiempo le toma a la cadena regresar a este estado? Hint: Teorema Ergódico.



Usando el teorema ergodico para cadenas de Markov irreducibles y recurrentes

$$\mathbb{E}[T_i] = \frac{1}{\pi_i}$$

↳ Tiempo de retorno

Para usar esto debemos checar irreducibilidad y la existencia de distribucion estacionaria

Entonces veamos que la cadena es de espacios finitos $\{1,2,3,4,5,6\}$ y si nos fijamos en el diagrama podemos ver que es posible moverse de cualquier estado a otro en uno o mas pasos. Ademas como las probabilidades de transicion son positivas y la estructura vemos aperiocidad

Primero veamos la aperiocidad, es necesario demostrar que la clase de estados no representa periocidad

La cual se define como el conjunto de tiempos en los que es posible regresar al estado

$\Rightarrow d(i) = \gcd\{n \geq 1 : P^n(i,i) > 0\}$

↳ maximo comun divisor

Si la cadena es irreducible (en este caso si) todos los estados comparten el mismo periodo, por lo que basta con mostrar que existe un estado con periodo 1.

Como es irreducible por que de cualquier estado puedo llegar a cualquier otro con probabilidad positiva en una cantidad finita de pasos. Procedemos a buscar ciclos, de modo que si partimos de un estado y encontramos dos distintas longitudes de ciclos que no compartan un divisor mayor que 1, demostraremos que su periodo es 1 (aperiodicidad)

→ Ciclo de 2 pasos desde 1: La secuencia de $1 \to 2 \to 1$. La proba de ir de 1 a 2 es $1/5$ de 2 a 1 es $1/3$

$\Rightarrow P^2(1,1) > 0$. Podemos volver a 1 en 3 pasos

→ Ciclo de 3 pasos desde 1: De $\underset{1/5}{1 \to} \underset{1/3}{2 \to} \underset{1/3}{3 \to} 1$ $\Rightarrow P^3(1,1) > 0$ Podemos volver a 1 en 3 pasos

Ahora bien como tenemos dos tiempos de retorno (2 y 3) su maximo comun divisor es 1 $\Rightarrow$ Es aperiodico

Como las probabilidades de transicion son positivas y es aperiodico

$\Rightarrow$ Existe una unica distribucion estacionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$

La distribucion estacionaria satisface que

$$\pi P = \pi \quad y \quad \sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1$$

El vector π cumple para cada estado j

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{6} \pi_i \, p(i,j)$$

Veamos las columnas (estados)

$$\pi_1 = \pi_2 \tfrac{1}{3} + \pi_3 \tfrac{1}{3} + \pi_4 \tfrac{1}{3} + \pi_5 \tfrac{1}{3} + \pi_6 \tfrac{1}{3}$$

$$\pi_2 = \pi_1 \tfrac{1}{5} + \pi_3 \tfrac{1}{3} + \pi_6 \tfrac{1}{3}$$

$$\pi_3 = \pi_1 \tfrac{1}{5} + \pi_2 \tfrac{1}{3} + \pi_4 \tfrac{1}{3}$$

$$\pi_4 = \pi_1 \tfrac{1}{5} + \pi_3 \tfrac{1}{3} + \pi_5 \tfrac{1}{3}$$

$$\pi_5 = \pi_1 \tfrac{1}{5} + \pi_4 \tfrac{1}{3} + \pi_6 \tfrac{1}{3}$$

$$\pi_6 = \pi_1 \tfrac{1}{5} + \pi_2 \tfrac{1}{3} + \pi_5 \tfrac{1}{3}$$

Veamos los estados (2, 3, 4, 5, 6) sus patrones de transicion son simetricos, es decir, cada uno de ellos tiene la misma estructura (se pueden ir a el estado 1 con proba 1/3 y a otros dos estados con 1/3 de proba en cada uno)

Esto nos dice que la distribucion estacionaria $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6$

Sea $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = x$

$\Rightarrow \pi_1 + 5x = 1$

Sustituyendo en la ecuacion de π_1

$$\pi_1 = \tfrac{1}{3}(\pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6) = \tfrac{1}{3}(5x) = \frac{5x}{3}$$

Usando $\pi_1 + 5x = 1$ con $\pi_1 = \frac{5x}{3}$

$$\frac{5x}{3} + 5x = 1 \Rightarrow \frac{5x}{3} + \frac{15x}{3} = \frac{20x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{5x}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{4} \; ; \; \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = \frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$\therefore$ El tiempo promedio de retorno es 4