UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN MATEMÁTICAS
FINANZAS MATEMÁTICAS Y DERIVADOS EN TIEMPO DISCRETO
SESIÓN 1
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 2009/08/15.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

INTRODUCCIÓN

Tomar decisiones bajo condiciones de incertidumbre acerca del posible resultado es cosa común en los mercados financieros. Es por esta razón que el área de matemáticas que más encuentra aplicaciones en la teoría financiera es la probabilidad y los procesos estocásticos.
Pensemos en la siguiente situación: Existe una carrera entre dos caballos donde se puede apostar. Al inicio de la carrera se entra con un peso. Si el caballo A gana entonces se reciben dos pesos (el peso original mas uno extra). Si el caballo B gana entonces no se recibe nada (se pierde el peso original). Se realiza un estudio serio sobre los caballos, su alimentación, su estructura, sus carreras, su entrenamiento, la elección de jockey etc. Eventualmente se calcula de manera correcta que la probabilidad que tiene A de ganar es de 70 % y la de B es de 30 %. Aún cuando el resultado de la carrera es esencialmente aleatorio, este no es inconsistente con una estructura (no aleatoria) mas profunda. Podemos decir que hay una medida de probabilidad fija asociada a la carrera, una probabilidad de 0.70 de que gane A y una de 0.30 de que gane B. Junto con estas probabilidades viene la idea de esperanza o valor esperado. El pago esperado del juego es:

$$(0.70) * (2) + (0.30) * (0) = 1.40$$

Esta esperanza puede ser ligada a un "precio"para el juego vía el siguiente resultado:

Resultado 1 ***Ley fuerte de los grandes números (Kolmogorov)***
Supongamos que tenemos una muestra aleatoria x_1, x_2,...x_n... de una distribución con media μ. Denotemos por y_n al promedio aritmético de la sucesión hasta el n-ésimo término, $y_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. Entonces, con probabilidad 1, $y_n \longrightarrow \mu$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Si el promedio aritmético de resultados tiende a la esperanza matemática, entonces la ganancia/pérdida (profit/loss = P&L) promedio por juego tiende a la esperanza matemática menos el precio pagado por entrar en el juego. Si esta diferencia es positiva, entonces a largo plazo se terminará con una ganancia. Si esta diferencia es negativa, se obtendrá (con probabilidad 1, i.e. c.s.) una pérdida. Por supuesto, nada puede garantizarse en el corto plazo!

El precio obtenido con esta idea es un precio sostenible?

Para contestar esta pregunta, aprovecharemos la situación para complicar el ejemplo e introducir conceptos muy importantes de la teoría de las finanzas.
Pensemos que además de la carrera de caballos ya mencionada existen boletos de lotería que le pagan al poseedor 100 pesos si A gana la carrera y 0 pesos si B gana (primer ejemplo de un instrumento derivado!, su valor depende a su vez del valor de otra variable).
Si utilizaramos la ley de los grandes números como referencia para asignar un precio al billete de lotería, cuál sería este precio?
El pago esperado que otorga el boleto de lotería es de:

$$100 * (0.70) + 0 * (0.30) = 70 \quad \text{pesos}$$

En promedio, a largo plazo debería de terminarse "tablas"si se compra el boleto a 70 pesos. Si esta idea es correcta, alguien estaría feliz de poder comprar un boleto a 60 pesos! A largo plazo en promedio obtendría una ganacia de 10 pesos:

$$\begin{aligned} &= 100 * (0.70) + 0 * (0.30) - 60 \\ &= 40 * (0.70) - 60 * (0.30) \\ &= 10 \end{aligned}$$

Pero solo en promedio! Yo preferiría vender el boleto a 60 pesos que comprarlo...

Estrategia:

- Vendo el boleto en 60 pesos.
- Entro con 50 pesos a la carrera de caballos.

Esta estrategia me deja 10 pesos en el bolsillo.

Cada vez que la carrera de caballos es llevada a cabo se tiene una de dos posibilidades: Si A gana recibo 100 pesos en la carrera de caballos, mismos que yo tengo que pagar al poseedor del billete de lotería. Si B gana, no recibo nada por la carrera de caballos, pero tampoco debo de pagar al poseedor del billete de lotería.

Conclusión: **Siempre** me quedo con 10 pesos!

Definición 1 *Entendemos por **Arbitraje** el asegurar una ganancia sin riesgo al realizar transacciones simultáneas en dos o mas mercados.*

Es sostenible este precio? No, cualquier ente *racional* escogería vender el boleto, forzando el precio del boleto a bajar. Podemos concluir dos cosas: (1) De manera práctica no es posible tener oportunidades de arbitraje ya que la racionalidad de los participantes induciría un intento inmediato por tomar ventaja de ella, provocando el ajuste en su precio[1]. (2) El uso de la ley de los grandes números no provee directamente una solución al problema de asignar precio. De hecho, el hecho de que cada participante sea capaz de asignar una probabilidad de ocurrencia no permite obtener un precio sostenible o implicado por el mercado.

Un momento, observemos que el suponer que no existen (para fines prácticos) oportunidades de arbitraje nos permite llegar a un precio sostenible. De hecho, al revisar la estrategia propuesta arriba nos damos cuenta que si el boleto de lotería es vendido a 50 pesos y dicha estrategia es seguida, entonces siempre se termina tablas! Este precio es sostenible por el mercado.
Esta estrategia se conoce como una cobertura y permite implicar o sostener un precio debido a una característica muy importante:

- Replica (iguala) **bajo cualquier escenario** (léase: posibles resultados del experimento) el valor del **pago** (*payoff*) que otorga el boleto de lotería.

Al ser este el caso, el precio del boleto **debe** ser el precio de la cobertura. Como vimos, si no fuera el caso un arbitraje sería posible. Aún más, tenemos la siguiente extensión en un sentido temporal:
Si no hay oportunidades de arbitraje y dos cosas tienen el mismo valor en una fecha futura, necesariamente sus valores el día de hoy deben ser iguales[2].
Esto que acabamos de ver es es el principio básico de valuación de productos derivados. Todo se basa en un concepto de equilibrio económico, en la obtención de un precio sostenible.

Definición 2 *Un producto financiero **derivado** es un instrumento cuyo valor depende, a su vez, del valor de una o más variables o parámetros (**subyacente(s)**). De manera genérica, depende del valor de otro activo.*

Definición 3 *Un **contrato forward** es un acuerdo para comprar o vender un activo (el subyacente) a un precio pactado (precio de entrega, el cual se escoge de tal manera que el valor del forward sea cero al celebrar el contrato. Es decir, no cuesta nada ya sea tomar una posición larga o una corta) en una fecha futura pactada (fecha de maduración). El poseedor del forward está obligado a comprar el subyacente (posición larga). Por supuesto, la correspondiente posición corta (el emisor del forward) acuerda vender el subyacente. El **precio forward** de un contrato a un determinado tiempo se define como el precio de entrega que haría al contrato tener valor cero.*

Usualmente este tipo de contratos se realiza entre dos instituciones financieras ó entre una institución financiera y uno de sus clientes corporativos (no en un

[1] Por supuesto, descansamos en la idea de un mercado de participantes racionales (maximizadores de utilidad) donde todos tienen información simétrica y perfecta, así como libre acceso a operar los instrumentos involucrados.

[2] El argumento de prueba es simple (por contrapositiva). Suponer que el día de hoy tienen valores diferentes y vender el caro simultaneamente que comprar el barato lleva a un arbitraje al tener valores iguales en la fecha futura.

mercado establecido de valores). Cuando se elabora el contrato ya mencionamos que el valor de éste es cero, pero tendrá un valor positivo o negativo en tiempos futuros. Si el precio del activo aumenta, el valor de una posición larga en el contrato se tornará positivo mientras que el valor de una posición corta se volverá negativo. Es importante notar que el precio forward y el precio de entrega son iguales al momento de elaborar el contrato. Con el tiempo el precio forward cambiará.

Para fijar ideas nos concentraremos por el momento en subyacentes que no estén relacionados a tasas de interés (acciones, índices, monedas extranjeras, *commodities*, etc.).

Denotemos el precio del subyacente al tiempo t como S_t, el precio de entraga (strike) como K y la fecha de maduración como T. El valor a la fecha de maduración (payoff) de la posición larga es claramente

$$S_T - K$$

y el de la posición corta

$$K - S_T.$$

Notamos que lo que uno pierde es exactamente lo que el otro gana[3] y, en consecuencia, basta con analizar una de las dos posiciones. Para K arbitrario, será posible encontrar un precio sostenible para este contrato? Cuál es el valor de la posición larga en t (el cual denotaremos por f_t), $0 \leq t \leq T$?
Para poder contestar esta pregunta, trabajemos en un esquema mínimo donde existen el activo riesgoso[4] (subyacente) cuyo precio en t es denotado por S_t y un proceso que denota el valor del dinero en el tiempo[5]

$$B(t,T) = \text{valor al tiempo } t \text{ de un peso que se paga en } T.$$

La línea de razonamiento es la siguiente. Construir dos portafolios cuyo valor en T sea el mismo, independientemente del estado de la naturaleza, para poder concluir (por no-arbitraje) que sus valores hoy son iguales. Por supuesto el contrato forward estará en uno de estos portafolios.

Pensemos en un portafolio A que contiene, al tiempo t, una posición larga en el contrato forward y consideremos el caso de un subyacente que no paga dividendos[6]. Qué implica estar largo en el contrato forward? Implica que en T se tiene la obligación de comprar una unidad del activo subyacente por K pesos. Entonces, para poder honrar el contrato podemos añadir al portafolio efectivo por la cantidad $B(t,T)K$ (que crecerá a K para el tiempo T!).
Notamos que en T madura el contrato forward y, en consecuencia, se compra

[3] Juego de suma cero
[4] los valores que tomará en fechas futuras no son conocidos con certeza el día de hoy
[5] Cuenta bancaria sin riesgo de incumplimiento
[6] Una unidad del subyacente hoy seguirá siendo una unidad del subyacente en una fecha futura.

una unidad de subyacente con los K pesos que se tienen. De manera neta se tiene una unidad de subyacente. Por lo tanto, el valor en T de A es

$$S_T.$$

Cómo pudiésemos construir un portafolio B tal que su valor en T es exactamente igual que el de A en T? Muy fácil, basta con tener en B una unidad de subyacente. En T, el portafolio B seguirá teniendo una unidad del subyacente y por lo tanto su valor en T también será

$$S_T.$$

Por no arbitraje, podemos concluir que A y B deben de valer lo mismo en t:

$$f_t + B(t,T)K = S_t$$

de donde

$$f_t = S_t - B(t,T)K.$$

Recordemos que definimos el precio forward al tiempo t, el cual denotaremos por F_t, como el valor del precio de entrega que haría el valor del contrato en t (f_t) igual a cero; en otras palabras, el valor del precio de entrega que haría indiferente el tomar una posición ya sea larga o corta en el contrato. Igualando la expresión obtenida para f_t a cero obtenemos

$$F_t = B^{-1}(t,T)S_t.$$

Un punto extremadamente importante de notar es que el forward no solo tiene un precio de no-arbitraje (sostenible), si no que la obtención de este es independiente de la dinámica estocástica del precio del subyacente. Dicho de otra forma, el forward es un instrumento **libre de modelo** o **independiente de modelo**.

Definición 4 *Una opción call (put) Europea con fecha de maduración T y precio de ejercicio K es un contrato que le da a su poseedor el derecho mas no la obligación de comprar (vender) el subyacente al tiempo T al precio K. La correspondiente opción Americana se distingue de la Europea en que puede ser ejercida en cualquier momento t, donde $0 \leq t \leq T$.*

Dado el caracter de opcionalidad y no de obligación observamos que el payoff para la posición larga en una opción es:

- call Europea: $(S_T - K)_+ := \max\{S_T - K, 0\}$
- put Europea: $(K - S_T)_+$

Afortunadamente, las opciones tienen un precio de no arbitraje; desafortunadamente, estos instrumentos no son libre de modelo. Tendremos que asumir un comportamiento estocástico para laevolución temporal del precio del subyacente para la obtención del precio de una opción.

Aún cuando no sabemos en este momento cuál el precio de una opción put o call debiése ser, si que podemos saber como se relacionan entre si.
Notación:

$p(S_0, T, K)$ = precio de opción put Europea cuando el precio spot es S_0, el precio de ejercicio es K y la fecha de maduración es T.

$c(S_0, T, K)$ = precio de opción call Europea cuando el precio spot es S_0, el precio de ejercicio es K y la fecha de maduración es T.

Paridad put-call 1 *Si el activo subyacente no paga dividendos, la siguiente relación entre el precio de una call y de una put se debe cumplir*

$$c(S_0, T, K) - p(S_0, T, K) = S_0 - B(t, T)K.$$

En otras palabras, call largo mas put corto iguala un forward largo con los mismos parámetros (misma maduración y strike que las opciones).

Prueba.
Consideremos los siguientes dos portafolios:
A: largo en una call Europea y corto en una put Europea.
B: largo en un forward.
Cual es el payoff de estos portafolios?
$A(T)$: $(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K$
$B(T)$: $S_T - K$
Por lo tanto, sus valores hoy deben coincidir

$$c(S_0, T, K) - p(S_0, T, K) = S_0 - B(t, T)K$$

EJERCICIOS:

1.-Se valuó un contrato forward en un activo que no paga dividendos mediante la construcción de 2 portafolios y usando el concepto de no arbitraje.
a) Supón que el subyacente paga un ingreso fijo en algun momento durante la vida del contrato forward y denota C el valor presente de éste ingreso fijo. Modifica adecuadamente uno de los portafolios y valúa el forward.
b) Supón que el subyacente paga dividendos. El valor en el tiempo del dividendo está dado por el proceso $B_E(t, T)$. Concretamente, si al tiempo t se tienen A unidades del subyacente, entonces al tiempo T se tendrán

$$B_E^{-1}(t, T)A$$

unidades de subyacente. Modificando uno de los portafolios muestra que un contrato forward con precio de entrega K y fecha de maduración T tiene valor presente

$$S_0 B_E(0, T) - KB(0, T)$$

con S_0 el precio spot. Cuál es el precio forward?.
c) Podemos usar b) para valuar forwards en tipo de cambio. Específicamente, S_0 es la tasa de cambio peso/dólar actual, K la tasa pactada, $B(t,T)$ el valor en el tiempo de los pesos (proceso valor de la cuenta en efectivo en pesos) y $B_E(t,T)$ el correspondiente para dólares. En este caso el valor de K para el cual el contrato tiene valor presente 0, se conoce como tasa de cambio forward. Supón que la tasa actual es 12.2 pesos por dólar. El precio de un bono 180 días con valor de carátula 100 pesos es de 99.48 pesos. El precio del instrumento equivalente con valor de carátula 100 dólares es de 99.46 dólares. Cual es la tasa de cambio forward de 180 días que nuestra teoría predice? Si la tasa de cambio forward de 180 días en el mercado es de 12.1 pesos por dólar, tenemos una oportunidad de arbitraje (está por debajo de la teórica!). Construye una estrategia libre de riesgo que tome ventaja de esta situación.

2.-El precio hoy de un activo es de 50 pesos. El valor en el mercado de una call Europea con precio de ejercicio 47.5 y madurez 180 días es de 4.375. También tenemos que $B(0, \frac{180}{360}) = 0.9948$
a) Supón que la put Europea con las mismas características tiene un precio de 1.450. Muestra que esto no es consistente con la paridad put-call.
b) Describe una combinación sin riesgo de compras y ventas que de una ganancia inmediata (sin ninguna obligación dentro de 180 días).

3.- Usando ausencia de arbitraje muestra que

$$c[S_0, K_2, T] < c[S_0, K_1, T] \quad \text{donde} \quad K_1 < K_2$$

i.e., el precio de una call es una función decreciente del precio de ejercicio.

4.- Supón que el subyacente paga dividendos (proceso valor $B_E(t,T)$). Plantea la paridad put call en este contexto y demuestrala.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN MATEMÁTICAS
FINANZAS MATEMÁTICAS Y DERIVADOS EN TIEMPO DISCRETO
SESIÓN 2
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 2009/08/16.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

VALUACIÓN EN TIEMPO DISCRETO

Después de la breve introducción dada en la sesión 1, nos concentraremos el resto del curso principalmente en un contexto de tiempo discreto. Tendremos fechas o períodos específicos donde los participantes de mercado podrán hacer transacciones con los distintos instrumentos disponibles.
Comenzaremos por calentar motores pensando en una economía muy simple donde se tiene un solo período temporal. Para fijar ideas podemos pensar en que las transacciones se llevan a cabo el día de hoy y que los instrumentos maduran en una fecha posterior T. Bien podemos pensar en este intervalo de tiempo como pequeño. Al igual que antes existen dos instrumentos básicos: el activo riesgoso y una cuenta en efectivo que determina el valor del dinero en el tiempo.

Modelo Binomial de un solo período

En este modelo el activo riesgoso tiene precio inicial S_0 y al tiempo T puede tomar uno de dos posibles valores: S_u o S_d. En este contexto, cualquier instrumento derivado puede ser representado mediante un vector bidimensional que representa sus dos posibles valores al tiempo T

$$(X_u, X_d)$$

donde X_u es el valor que toma en el caso de que el precio en T del subyacente resulte ser S_u y X_d el correspondiente a que el subyacente tome el precio S_d. Por comodidad consideraremos posiciones largas en los instrumentos.

Ejemplos:
Forward

$$X_u = S_u - K \quad X_d = S_d - K.$$

Put europeo

$$X_u = (K - S_u)_+ \quad X_d = (K - S_d)_+$$

Comencemos por el caso más simple donde el subyacente no paga dividendos.

La idea para valuar instrumentos derivados es encontrar una estrategia de cobertura, un portafolio que replique los valores del derivado a maduración en cualquier escenario (en este caso solo hay dos escenarios en T) y el cual se construya el día de hoy. En otras palabras,

construir de manera *sintética* el derivado.

La pregunta es: que mapeos $X : \{u, d\} \longmapsto \{X_u, X_d\}$ pueden ser explícitamente construidos de manera sintética mediante una estrategia adecuada?

Cómo construir la estrategia? Sería posible replicar el derivado utilizando unicamente la cuenta en efectivo? Si comenzamos el día de hoy con una cantidad β de pesos, esta cantidad crecerá (de manera cierta) a

$$B^{-1}(0,T)\beta$$

lo cual no da flexibilidad para obtener distintos valores, específicamente X_u y X_d. Por supuesto, para poder replicar en T algo que es aleatorio el día de hoy, necesitamos ayuda del activo subyacente. Finalmente, de manera básica lo único de lo que disponemos es del activo subyacente y de la cuenta en efectivo[1].

Consideremos un portafolio que inicia con α unidades de activo subyacente y con β unidades de efectivo. Su valor (costo) el día de hoy es

$$V_0 = \alpha S_0 + \beta.$$

Al tiempo T puede tomar uno de dos posibles valores

$$\begin{array}{l} \alpha S_u + B^{-1}(0,T)\beta \\ \alpha S_d + B^{-1}(0,T)\beta \end{array}$$

Tenemos dos expresiones y, hasta el momento, dos incognitas (α y β). Pero también tenemos dos valores, X_u y X_d que queremos duplicar! Entonces, la estrategia se obtiene de resolver las siguientes ecuaciones simultáneas para α y β:

$$\begin{array}{rcl} \alpha S_u + B^{-1}(0,T)\beta & = & X_u \\ \alpha S_d + B^{-1}(0,T)\beta & = & X_d \end{array}$$

Observamos que, a menos que $S_u = S_d$ lo cual significaría que el subyacente no es realmente un activo riesgoso, este sistema tiene una solución única:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \dfrac{X_u - X_d}{S_u - S_d} \\ \beta & = & B(0,T)\left(X_u - \dfrac{(X_u - X_d)S_u}{S_u - S_d} \right) \end{array}$$

Hemos podido construir el derivado de forma sintética: no importa el valor que tome el subyacente (y, en consecuencia, el derivado), nuestro portafolio

[1] El payoff del dervado es una función de los posibles valores que toma el subyacente. En consecuencia, es la correlación que guardan los dos activos la que permite pensar en una estrategia que contenga el activo y que trate de dar un seguimiento preciso a los valores del derivado.

igualará el valor del derivado en T!

Qué podemos concluir aquí? El valor del portafolio (α, β),

$$V_0 = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d} S_0 + B(0,T)\left(X_u - \frac{(X_u - X_d)S_u}{S_u - S_d}\right),$$

debe ser el valor del derivado. Es decir,

$$X_0 = V_0.$$

Para cualquier otro precio P diferente de V_0 sería posible construir una oportunidad de arbitraje. En consecuencia, P no sería un precio racional y el mercado se movería rápidamente para tomar ventaja de esta oportunidad. Tenemos que V_0 es un precio sostenible.
Otra conclusión sumamente importante es que el sistema tiene una única solución para cualquier mapeo X! Es decir, cualquier instrumento derivado en esta economía tiene asociado un único portafolio que replica sus valores a maduración. Dos cosas importantes se derivan de aquí:

- Tenemos la estrategia de cobertura que debiése seguir el emisor para honrrar su obligación. Es decir, la estrategia de cobertura.
- Cualquier derivado tiene un precio de no-arbitraje. Un mercado con esta característica se conoce como un ***Mercado Completo***.

Definamos

$$q := \frac{S_0 B^{-1}(0,T) - S_d}{S_u - S_d},$$

entonces

$$V_0 \quad = \quad B(0,T)\left[qX_u + (1-q)X_d\right]. \tag{1}$$

Es fácil probar que:

$$0 < q < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ausencia de arbitraje} \tag{2}$$

Por lo tanto, el precio del portafolio de cobertura (y, en consecuencia, del derivado) es el valor presente de la esperanza bajo $\mathbf{Q} = \{q, 1-q\}$ de los valores a maduración del derivado.

El precio justo V_0 para X es determinado de manera única, independientemente de cualquier probabilidad asignada inicialmente[2]. Una observación trivial en el contexto de un período, pero que será relevante en el modelo binomial multiperíodo es que no fue necesario añadir fondos al tiempo T (tampoco sobraron); es decir, la estrategia es *auto-financiada*.

[2]No depende en la actitud del inversionista ante el riesgo.

Es muy importante notar que q es independiente del derivado. Su cálculo depende exclusivamente del activo subyacente y de la cuenta en efectivo. Por lo tanto, es esta única q la que sirve para valuar **cualquier** instrumento derivado X.

Veamos lo siguiente. Como $X_0 = V_0$, tenemos

$$X_0 = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[B(0,T)X\right]$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1}(0,T) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[\frac{X}{X_0}\right].$$

Interpretación: En el caso de que $B(0,T) = \frac{1}{1+r}$, entonces[3]

$$r = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[\frac{X - X_0}{X_0}\right];$$

i.e., el *retorno en exceso medio* es cero. Esto justifica la terminología utilizada para $\mathbf{Q}$: ***Probabilidad de Riesgo Neutral***.

EJERCICIOS:

1.- Prueba (2) de la siguiente forma: Construye una estrategia de arbitraje que se cumpla si y solo si $q \leq 0$. Construye otra estrategia de arbitraje que se cumpla si y solo si $q \geq 1$.

2.- Usando 1, concluye que:

$$\text{Ausencia de arbitraje} \quad \Leftrightarrow \quad S_d < S_0 B^{-1}(0,T) < S_u.$$

Interpreta este resultado.

3.- En el contexto binomial de un solo período, usa la fórmula de valuación obtenida para probar que el precio forward, F_0, está dado por

$$S_0 B^{-1}(0,T).$$

4.- El día de hoy el precio de un stock que no paga dividendos es de 40 pesos. Se sabe que dentro de un mes este precio será ya sea 42 o 38 pesos. La tasa de interés libre de riesgo es de 8 por ciento por año (esta es la información acerca de $B(0,T)$).
(i) Cúal es el valor de una opción call europea con madurez de un mes y precio de ejercicio de 39 pesos?
(ii) Cómo cubres la opción el día de hoy mediante un portafolio que consta de stock e inversión libre de riesgo?

[3] Por supuesto, $\frac{X-X_0}{X_0}$ es el retorno en el derivado.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN MATEMÁTICAS
FINANZAS MATEMÁTICAS Y DERIVADOS EN TIEMPO DISCRETO
SESIÓN 3
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 2009/08/23.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

MODELO BINOMIAL MULTIPERÍODO

Un modelo donde el activo riesgoso solo puede tomar dos posibles valores es poco realista. La estructura binomial es muy conveniente e ilustrativa y una forma de preservar el modelo básico estudiado es considerar mas de un período, pero conservando la estructura binomial de árbol. De manera precisa, tendremos un árbol general donde a partir de cada nodo no terminal (nodos en fechas distintas a T) se desprenden dos nodos hacia la fecha siguiente.
Consideraremos un modelo donde tenemos dos instrumentos básicos: el activo riesgoso[1] (subyacente) y la cuenta en efectivo. Continuaremos utilizando la siguiente notación:

$$B(t,T) = \text{valor en } t \text{ de un peso pagado en } T.$$

Es importante dejar en claro que todas las variables temporales utilizadas son y serán consideradas en años. Consideraremos las siguientes fechas específicas donde pueden operar los participantes los diferentes instrumentos:

$$0, 1\delta, 2\delta, 3\delta, ..., N\delta = T.$$

En otras palabras, el espaciado temporal es constante e igual a δ.

Es común encontar el supuesto de que la cuenta de banco es tal que existe una tasa r constante, compuesta continuamente, que aplica para el período de tamaño δ. Aún mas, es común el supuesto de que es la misma para todos los períodos:

$$B(i\delta, (i+1)\delta) = e^{-r\delta} \quad \forall i.$$

Esto ayuda a fijar ideas, pero en la medida de lo posible intentaremos dar el tratamiento mas general en términos de $B(t,T)$ a nuestro análisis.

Es muy importante en tiempo discreto tener clara la notación respecto a las variables. Es fácil y conveniente cuando se trabaja con un árbol el asociar los nodos con un número. De manera precisa tendremos la convención siguiente para numerar los nodos de los árboles: Al tiempo cero, identificaremos al nodo

[1] Recordemos que este activo es riesgoso en el sentido de que no sabemos hoy cuales serán los valores que tome en fechas futuras. Supondremos una dinámica estocástica para la evolución temporal de su precio. Sabremos que posibles valores puede tomar, mas no sabemos cual de estos tomará de manera precisa en una fecha futura.

único que hay con el número 1. Al tiempo 1 (mas precisamente 1δ) identificaremos al nodo de abajo con el 2 y al de arriba con el 3. Continuaremos numerando los nodos del árbol de abajo hacia arriba para los tiempos subsecuentes. Como ejemplo, tendremos que al tiempo 3 se encuentran los nodos 4 (hasta abajo), 5, 6 y 7 (hasta arriba).
Con la convención adoptada, entonces entenderemos que S_j es el precio del subyacente en el nodo j. Si consideramos el tiempo $t = n\delta$ (para alguna $n \in \{0, ..., N\}$), $S(t)$ será el precio del subyacente al tiempo t. Por supuesto, si estamos en un tiempo anterior a t, $S(t)$ será una variable aleatoria que puede tomar diferentes valores.

Otro supuesto que se considera es que pueden comprarse y venderse cantidades ilimitadas de los instrumentos sin enfrentar costos de transacción, riesgos de incumplimiento o *spreads bid-offer*[2].

Una observación trivial en el árbol mas general es que para cualquier nodo no terminal j, los dos nodos al tiempo siguiente que se desprenden de esta rama son el $2j$ y el $2j+1$. En este caso, observemos que al tiempo $T = N\delta$ tenemos 2^N nodos. El crecimiento de nodos finales con N hace el proceso de valuar instrumentos muy costoso. Una posible forma de simplificar el árbol y seguir conservando la estructura binomial es considerando un árbol que recombine valores. Para explicar de manera clara este concepto, también utilizaremos la siguiente notación alternativa: si al tiempo 0 el precio inicial del subyacente es $S(0)$, entonces al tiempo 1 tenemos los dos posibles precios[3]

$$S_d \quad \text{y} \quad S_u.$$

Al tiempo 2 tendremos los posibles precios

$$S_{dd}, S_{du}, S_{ud} \quad \text{y} \quad S_{uu}.$$

Es clara la forma de continuar con este proceso.

Decimos que el árbol recombina valores si los nodos centrales en una fecha específica se comparten; es decir, un nodo central proviene de dos diferentes nodos de una fecha previa. En el tiempo 2 lo que tendríamos es lo siguiente:

$$S_{du} = S_{ud}.$$

El número de nodos finales claramente se reduce a $N + 1$. Bastante menos nodos pero con la misma estructura de árbol binomial y suficientes para nuestra modelación estocástica de la evolución temporal de precios.

[2]El spread bid-offer es la diferencia que se observa en un mercado entre el precio de compra (bid) y el de venta (offer o ask).
[3]El subíndice u hará referencia a un movimiento hacia arriba, mientras que d genericamente representará un movimiento hacia abajo.

Una simplificación extra en nuestro modelo es suponer que el árbol es multiplicativo. De manera genérica, si el contexto permite que no haya confusión podemos pensar en un tiempo cualesquiera y ubicarnos en un nodo específico en ese tiempo. El precio del subyacente en este nodo puede ser representado por S_n y los dos precios al tiempo siguiente que se desprenden de este nodo pueden ser representados de manera genérica con S_d (nodo hacia abajo) y S_u (nodo hacia arriba). Diremos que el árbol es multiplicativo si

$$\exists u, d \in \mathbf{R} \quad \text{únicas, tales que} \quad S_d = dS_n \quad \text{y} \quad S_u = uS_n$$

para todo S_n precio no final.
De manera particular, al tiempo 2 tendremos que:

$$S_4 = S_{dd} = d^2 S_1 = d^2 S(0),$$

$$S_5 = duS_1 = udS_1 = S_{du} = S_{ud} \quad \text{y}$$
$$S_6 = S_{uu} = u^2 S_1.$$

Consideremos este tipo de árboles multiplicativos. Por el momento solo consideraremos instrumentos derivados europeos (solo pueden ser ejercidos en la fecha de maduración T). De manera natural quisieramos utilizar las ideas y resultados desarrolllados en el modelo binomial de un solo período. A final de cuentas, un derivado X está caracterizado a priori por su pago a maduración. El payoff del call largo es $(S(T)-K)_+$, el del put largo $(K-S(T))_+$, el del forward largo $S(T)-K$, etc. En el contexto de un árbol esto equivale a saber los valores del derivado en los nodos finales de su correspondiente árbol. Si utilizamos la fórmula obtenida en el modelo de un solo período podemos obtener los valores del derivado en el tiempo $(N-1)\delta$. Flexibilizando la notación lo que proponemos es lo siguiente:

$$X_n = B((N-1)\delta, N\delta)\left[qX_u + (1-q)X_d\right], \tag{1}$$

donde tenemos que calcular la q apropiada: $q = \frac{B^{-1}((N-1)\delta, N\delta)S_n - S_d}{S_u - S_d}$. Aquí X_n y S_n corresponden a un nodo que se encuentra en el período de tiempo inmediatamente anterior al de maduración, X_u y S_u son los correspondientes valores en la fecha de maduración que parten hacia arriba y X_d y S_d los correspondientes valores en T que parten hacia abajo.

Recordemos que fuimos capaces de obtener esta fórmula de valuación al ser capaces de replicar los valores del instrumento derivado. Fuimos capaces de construir el derivado de forma sintética mediante un portafolio que contiene activo subyacente e inversión en la cuenta en efectivo.

La idea es la siguiente: valuaremos el derivado en el modelo de varios períodos simplemente *trabajando el árbol hacia atrás*. Es decir, aplicaremos de manera recursiva la fórmula obtenida para una rama (un período).

EJEMPLO
Para mantener las cosas simples e ilustrativas, supondremos[4] que

$$B(n\delta, (n+1)\delta) = 1 \quad \forall n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Consideremos un árbol con $N = 3$ y el siguiente proceso de precios:

$$S_1 = 100, S_d = 80, S_u = 120, S_{dd} = 60, S_{du} = S_{ud} = 100, S_{uu} = 140$$

$$S_{ddd} = 40, S_{ddu} = S_{dud} = S_{udd} = 80, S_{duu} = S_{udu} = S_{uud} = 120, S_{uuu} = 160.$$

Lo primero que nos preguntamos en un árbol que recombina valores es si también es multiplicativo. En este caso vemos claramente que no lo es ya que no existe u tal que $S_u = uS_1$ y $S_{uu} = uS_u$.

Ahora debemos calcular las q's:

$$q_n = \frac{S_n B^{-1}(,) - S_d}{S_u - S_d}$$

Como $B^{-1}(,) = 1$ y debido a la estructura particular de este árbol, resulta que[5]

$$q_n = \frac{1}{2} \quad \forall n.$$

Consideremos una opción call europea con precio de ejercicio $K = 100$. Construiremos un árbol de valores para esta opción. Recordemos que el payoff de esta opción está dado por

$$(S(T) - K)_+$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} X_{ddd} &= (S_{ddd} - 100)_+ = 0 \\ X_{ddu} &= (S_{ddu} - 100)_+ = 0 \\ X_{duu} &= (S_{duu} - 100)_+ = 20 \\ X_{uuu} &= (S_{uuu} - 100)_+ = 60. \end{aligned}$$

Aplicando de manera recursiva (1), obtenemos en 2δ los siguientes valores

$$\begin{aligned} X_{dd} &= 0 \\ X_{du} &= 10 \\ X_{uu} &= 40 \end{aligned}$$

y en 1δ los siguientes

$$\begin{aligned} X_d &= 5 \\ X_u &= 25. \end{aligned}$$

[4]El supuesto no es realista. El único propósito es mantener los cálculos simples y entender de forma clara el proceso iterativo.

[5]Esto es una casualidad y no una característica que se encuentre siempre.

Finalmente, el precio al tiempo 0 es

$$X(0) = 15.$$

Hemos concluido que el precio de la opción call es de 15 pesos; la pregunta es si realmente este precio es un precio de no-arbitraje. Cómo podemos convencernos de que la aplicación recursiva de la fórmula obtenida en el caso de un solo período realmente nos proporciona el precio correcto? Finalmente, nuestro análisis en un período se basó en la construcción de un portafolio que replica los valores del derivado. Ahora tenemos varios períodos y, en consecuencia, varias posibles trayectorias. El proceso de precios del activo subyacente es un proceso estocástico

$$\{S(\omega, n\delta)\} \quad \omega = 0\omega_1\omega_2\cdots\omega_N$$

con

$$\omega_j \in \{u, d\} \quad \text{y} \quad n \in \{0, \ldots, N\}.$$

Obtenemos una trayectoria del proceso estocástico al fijar $\overline{\omega}$. Es decir, la trayectoria asociada a $\overline{\omega}$ es la función:

$$n \longrightarrow S(\overline{\omega}, n\delta).$$

Para cada subperíodo de tamaño δ, una vez que sabemos en que nodo nos encontramos al principio del período, podemos calcular la cantidad de subyacente y de dinero en la cuenta mediante la aplicación de las fórmulas obtenidas en el caso de un período

$$\alpha_n = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d} \quad \beta_n = B(,)\left(X_u - \frac{(X_u - X_d)S_u}{S_u - S_d}\right).$$

La estrategia de replicado en este caso es más compleja. Debemos de ajustar nuestro portafolio en cada período de tiempo de acuerdo a los nuevos valores de α y de β. La estrategia de replicado ahora es dinámica. Nuestra esperanza es que al seguir la estrategia obtenida del cálculo de estos portafolios **en cualquier trayectoria**, seamos capaces de replicar a maduración los valores del derivado. Aún mas, el precio del derivado será el correcto si no es necesario utilizar recursos adicionales (o que sobren) a lo largo del tiempo. Por supuesto, si estas condiciones son satisfechas, será el caso que el precio del derivado es el valor del portafolio compuesto por $(\alpha(0), \beta(0))$.

Verifiquemos una de tantas trayectorias e ilustremos todos los conceptos descritos. Consideremos

$$\omega = 0uud.$$

- 0. Al tiempo 0 tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d} = \frac{25 - 5}{120 - 80} = \frac{1}{2} \\
\beta_1 &= B(0, 1\delta)\left(X_u - \frac{(X_u - X_d)S_u}{S_u - S_d}\right) = 1\left(25 - \frac{(25 - 5)120}{120 - 80}\right) = -35.
\end{aligned}$$

Nuestro portafolio de replicado se compone al inicio de $\frac{1}{2}$ unidad de subyacente y deuda por 35 pesos. Su valor es:

$$\alpha_1 S_1 + \beta_1 = \frac{1}{2}100 + (-35) = 15.$$

Demos una interpretación económica de estas cantidades. La estrategia de replicado nos indica tener $\frac{1}{2}$ unidad de subyacente, la cual nos cuesta $\frac{1}{2}100 = 50$ pesos. Por la venta del derivado recibimos una prima de 15 pesos (valor del portafolio al inicio!). Por lo tanto, para comprar la cantidad indicada de subyacente necesitamos 35 pesos extra, los cuales pedimos prestado.

- $0u$. Al tiempo 1δ, de acuerdo a nuestra trayectoria, el precio del subyacente sube a 120 y tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_u &= \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d} = \frac{40-10}{140-100} = \frac{3}{4} \\ \beta_u &= B(1\delta, 2\delta)\left(X_u - \frac{(X_u - X_d)S_u}{S_u - S_d}\right) = 1\left(40 - \frac{(40-10)140}{140-100}\right) = -65. \end{aligned}$$

Nuestro portafolio de replicado se compone ahora de $\frac{3}{4}$ de unidad de subyacente y deuda por 65 pesos. Su valor es:

$$\alpha_u S_u + \beta_u = \frac{3}{4}120 + (-65) = 25.$$

La interpretación económica es la siguiente: la estrategia de replicado nos indica tener $\frac{3}{4}$ de subyacente, pero ya teníamos $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, necesitamos $\frac{1}{4}$ extra que nos cuesta $\frac{1}{4}120 = 30$ pesos y que lleva nuestra deuda a 65 pesos (OJO: los 35 pesos de deuda original siguen siendo 35 en este momento ya que $B(,) = 1$!). También observemos que el valor del portafolio (25 pesos) es igual a X_u.

- $0uu$. Al tiempo 2δ, de acuerdo a nuestra trayectoria, el precio del subyacente sube a 140 y tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_{uu} &= \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d} = \frac{60-20}{160-120} = 1 \\ \beta_{uu} &= B(2\delta, 3\delta)\left(X_u - \frac{(X_u - X_d)S_u}{S_u - S_d}\right) = 1\left(60 - \frac{(60-20)160}{160-120}\right) = -100. \end{aligned}$$

Nuestro portafolio de replicado se compone ahora de 1 unidad de subyacente y deuda por 100 pesos. Su valor es:

$$\alpha_{uu} S_{uu} + \beta_{uu} = 1 * 140 + (-100) = 40.$$

La interpretación económica es la siguiente: la estrategia de replicado nos indica tener 1 unidad de subyacente, pero ya teníamos $\frac{3}{4}$. Por lo tanto, necesitamos $\frac{1}{4}$ extra que nos cuesta $\frac{1}{4}140 = 35$ pesos y que lleva nuestra deuda a 100 pesos (OJO: los 65 pesos de deuda que teníamos siguen siendo 65 en este momento ya que $B(,) = 1!$). También observemos que el valor del portafolio (40 pesos) es igual a X_{uu}.

- $0uud$. Al tiempo $3\delta = T$, de acuerdo a nuestra trayectoria, el precio del subyacente baja a 120 y la opción madura! Ya no hay mas tiempo para rebalancear el portafolio; este consta de 1 unidad de subyacente y deuda por 100 pesos (la deuda no creció ya que $B(,) = 1$). El valor del portafolio a maduración es:
$$1 * 120 + (-100) = 20.$$
El valor del portafolio replica el valor del derivado:
$$X_{uud} = 20.$$

Observando de manera cuidadosa nos damos cuenta de que no fueron necesarios recursos adicionales (ni tampoco sobraron). El único portafolio que realmente se adquirió fue (α_1, β_1) el cual costó 15 pesos. Para todos los posteriores, la estrategia se ***auto-financió***. Veamos de manera precisa este concepto en la trayectoria dada.

Al tiempo 0, el portafolio $(\alpha_1, \beta_1) = (\frac{1}{2}, -35)$ cuesta
$$\alpha_1 S_1 + \beta_1 = \frac{1}{2}100 + (-35) = 15.$$
Estos 15 pesos se obtienen de la prima cobrada a la posición larga en la opción.

Al tiempo 1δ, dos cosas ocurren: tenemos (α_1, β_1) pero su valor ya es diferente (debido al cambio en precios de los activos) y además la estrategia nos dicta tener (α_u, β_u). El nuevo valor de (α_1, β_1) es
$$\alpha_1 S_u + \beta_1 B^{-1}(0, 1\delta) = \frac{1}{2}120 + (-35)1 = 25.$$
Pero el valor de (α_u, β_u) es
$$\alpha_u S_u + \beta_u = \frac{3}{4}120 + (-65) = 25.$$
Por lo tanto, la estrategia se auto-financió.

Al tiempo 2δ, dos cosas ocurren: tenemos (α_u, β_u) pero su valor ya es diferente (debido al cambio en precios de los activos) y además la estrategia nos dicta tener $(\alpha_{uu}, \beta_{uu})$. El nuevo valor de (α_u, β_u) es
$$\alpha_u S_{uu} + \beta_u B^{-1}(1\delta, 2\delta) = \frac{3}{4}140 + (-65)1 = 40.$$

Pero el valor de $(\alpha_{uu}, \beta_{uu})$ es

$$\alpha_{uu} S_{uu} + \beta_{uu} = 1 * 140 + (-100) = 40.$$

Una vez mas, la estrategia se auto-financió.

Finalmente, al tiempo $3\delta = T$, dos cosas ocurren: tenemos $(\alpha_{uu}, \beta_{uu})$ pero su valor ya es diferente (debido al cambio en precios de los activos) y además la opción llega a maduración. El nuevo valor de $(\alpha_u u, \beta_u u)$ es

$$\alpha_{uu} S_{uud} + \beta_{uu} B^{-1}(2\delta, 3\delta) = 1 * 120 + (-100)1 = 20,$$

el cual coincide con el payoff del derivado:

$$X_{uud} = 20.$$

La estrategia replica el valor del derivado a maduración y además se auto-financia. Debe ser el caso que el precio del derivado debe de coincidir con el precio de la estrategia.

Por supuesto, este par de cualidades debe de cumplirse para **todas** las posibles trayectorias para poder concluir que el precio del derivado (obtenido mediante la aplicación recursiva *backwards* de nuestra fórmula de un período) es el correcto (precio de no-arbitraje).

Más adelante pondremos el contexto teórico adecuado para justificar matemáticamente el resultado obtenido.

EJERCICIOS:

1.- Elige otra trayectoria en el ejemplo visto y verifica que el payoff de la opción se replica. También verifica que la estrategia es auto-financiada.

2.- Utiliza el mismo árbol de precios para el subyacente del ejemplo visto y valua una opción digital que paga a maduración 100 pesos si el precio del subyacente termina mayor que como empezó y nada en otro caso.

3.- Considera un activo que no paga dividendos y cuyo proceso de precios está restringido al árbol dado por: $S_1 = 60$, $S_u = 70$, $S_d = 50$, $S_{uu} = 80$, $S_{ud} = 60$ y $S_{dd} = 40$. Supón que la tasa libre de riesgo, r, es 0 (ésta es la información acerca de $B(,)$). Considera una call con precio de ejercicio 60 y que madura al final del segundo período.
(i) Encuentra el valor de la call trabajando el árbol hacia atrás.
(ii) Cual es el portafolio que replica al tiempo $t = 0$.
(iii) Supón que en el primer período de tiempo el subyacente sube a 70. Como debiése ser cambiado el portafolio que replica? Verifica que este cambio es auto-financiado.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN MATEMÁTICAS
FINANZAS MATEMÁTICAS Y DERIVADOS EN TIEMPO DISCRETO
SESIÓN 4
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 2009/08/30.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

MODELO BINOMIAL MULTIPERÍODO (segunda parte)

Volvamos al caso general de un árbol binomial que no recombina valores. La forma de trabajar backwards es suficientemente clara y basta con analizar el caso de 2 períodos.

Las probabilidades de riesgo neutral, $\{q_j, 1-q_j\}$, se calculan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{S_1 B^{-1}(0,1\delta) - S_2}{S_3 - S_2} \\ q_2 &= \frac{S_2 B^{-1}(1\delta,2\delta) - S_4}{S_5 - S_4} \\ q_3 &= \frac{S_3 B^{-1}(1\delta,2\delta) - S_6}{S_7 - S_6}. \end{aligned}$$

El payoff del derivado está dado por los valores

$$X_4, \quad X_5, \quad X_6, \quad \text{y} \quad X_7.$$

De aquí, obtenemos los valores del derivado en los diferentes nodos anteriores:

$$\begin{aligned} X_2 &= B(1\delta,2\delta)\left[q_2 X_5 + (1-q_2)X_4\right] \\ X_3 &= B(1\delta,2\delta)\left[q_3 X_7 + (1-q_3)X_6\right], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} X_1 &= B(0,1\delta)\left[q_1 X_3 + (1-q_1)X_2\right] \\ &= B(0,1\delta)B(1\delta,2\delta)\left[q_1 q_3 X_7 + q_1(1-q_3)X_6 + (1-q_1)q_2 X_5 + (1-q_1)(1-q_2)X_4\right]. \end{aligned}$$

Podemos calcular el precio del derivado como la esperanza bajo la medida de riesgo neutral de su payoff (nodos finales), descontada el número de períodos necesarios.

En el caso de N períodos tendremos:

$$X_1 = B(0,1\delta)B(1\delta,2\delta)\cdots B((N-1)\delta,N\delta)\sum(\text{probabilidad de la trayectoria})\,(\text{nodo final}).$$

Donde la suma es tomada sobre los nodos finales.

Consideremos ahora el caso del árbol multiplicativo de dos períodos. Para empezar, los nodos finales ahora son:

$$X_4, \quad X_5, \quad \text{y} \quad X_6.$$

También, debido a la definición de árbol multiplicativo tenemos

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{S_1 B^{-1}(0,1\delta) - S_2}{S_3 - S_2} \\ &= \frac{S_1 B^{-1}(0,1\delta) - S_1 d}{S_1 u - S_1 d} \\ &= \frac{B^{-1}(0,1\delta) - d}{u - d}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{S_2 B^{-1}(1\delta,2\delta) - S_4}{S_5 - S_4} \\ &= \frac{S_2 B^{-1}(1\delta,2\delta) - S_2 d}{S_2 u - S_2 d} \\ &= \frac{B^{-1}(1\delta,2\delta) - d}{u - d} \\ q_3 &= \frac{S_3 B^{-1}(1\delta,2\delta) - S_6}{S_7 - S_6} \\ &= \frac{S_3 B^{-1}(1\delta,2\delta) - S_3 d}{S_3 u - S_3 d} \\ &= \frac{B^{-1}(1\delta,2\delta) - d}{u - d}. \end{aligned}$$

Observamos que todas las q's correspondientes a **un mismo tiempo** son iguales.

Si aún más, la estructura temporal del proceso valor de la cuenta bancaria fuera constante[1]:

$$B(n\delta,(n+1)\delta) = c =: B(,) \quad \text{para alguna } c \text{ constante} \quad n \in \{0,1\},$$

entonces

$$q_j = q = \frac{B^{-1}(,) - d}{u - d} \quad \forall j.$$

En este caso particular la fórmula de valuación es:

$$X_1 = (B(,))^2 \left[q^2 X_6 + 2q(1-q)X_5 + (1-q)^2 X_4\right].$$

En el caso de N períodos con un derivado europeo cuyo payoff depende exclusivamente del valor final del subyacente, $X = X(S(T))$, y donde se cumple que

$$B(n\delta,(n+1)\delta) = c =: B(,) \quad \text{para alguna } c \text{ constante} \quad n \in \{0,\ldots,N-1\},$$

[1] Tasas de interés iguales para los diferentes períodos de tiempo.

la generalización es

$$
\begin{aligned}
X(0) &= (B(,))^N \sum_{j=0}^{N} \left[\left(\begin{array}{c} N \\ j \end{array} \right) q^j (1-q)^{N-j} X(S(0)u^j d^{N-j}) \right] &(1)\\
&= (B(,))^N \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[X\right]. &(2)
\end{aligned}
$$

Claramente esto es simplemente el descuento de la esperanza de una variable aleatoria binomial con parámetros (N, q). Las combinaciones de N en j es el número de diferentes maneras que hay de subir j veces en N pasos.

Como ejemplo, en el caso particular de un put europeo con precio de ejercicio K, la fórmula es:

$$X_1 = (B(,))^N \sum_{j=0}^{N} \left[\left(\begin{array}{c} N \\ j \end{array} \right) q^j (1-q)^{N-j} (K - S_1 u^j d^{N-j})_+ \right].$$

Hasta el momento todo parece estar muy bien. El modelo es bastante intuitivo y lo suficientemente sofisticado para valuar instrumentos en un contexto de tiempo discreto. Sin embargo, no hemos demostrado formalmente que nuestro proceso iterativo sobre el árbol garantize un precio de no-arbitraje. Antes de involucrarnos en la formalización matemática, si que podemos poner a prueba nuestro resultado sobre instrumentos derivados *libres de modelo*[2].

Conocemos algunos instrumentos contingentes que nos permitirán verificar la consistencia de nuestra fórmula de valuación (1):

- $X(S(T)) = S(T)$.
  Consideremos el instrumento derivado más simple, el cual a maduración, T, le otorga a su poseedor una unidad de subyacente. Es muy importante recordar que continuamos con nuestro supuesto de que el activo riesgoso no paga dividendos. Es claro que la estrategia de cobertura para el emisor es el adquirir una unidad de subyacente al tiempo cero y no volver a rebalancear este portafolio. En consecuencia, por el principio de no-arbitraje, tenemos que
  $$X(0) = S(0).$$
  Nuestra fórmula (1) otorga el mismo resultado?

  De la fórmula de q tenemos que
  $$qu + (1-q)d = B^{-1}(,).$$

[2]Recordemos que un instrumento libre o independiente de modelo es aquel que puede ser valuado sin necesidad de un modelo estocástico particular para la dinámica temporal del precio del subyacente. En la Sesión 1 se vió el forward.

Elevando a la N esta igualdad da

$$\begin{aligned}
(qu+(1-q)d)^N &= (B^{-1}(,))^N \\
\sum_{j=0}^{N}\left[\begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{N-j}u^jd^{N-j}\right] &= (B^{-1}(,))^N \\
\sum_{j=0}^{N}\left[\begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{N-j}S(0)u^jd^{N-j}\right] &= (B^{-1}(,))^N S(0) \\
(B(,))^N\sum_{j=0}^{N}\left[\begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{N-j}S(0)u^jd^{N-j}\right] &= S(0) \\
(B(,))^N\sum_{j=0}^{N}\left[\begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{N-j}X(S(0)u^jd^{N-j})\right] &= S(0)
\end{aligned}$$

como esperabamos.
De la penúltima linea también observamos que

$$(B(,))^N\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[S(T)\right] \quad = \quad S(0). \tag{3}$$

- $X(S(T)) = S(T) - K$.
  Consideremos ahora un contrato forward con precio de entrega K. Sabemos que su valor al tiempo 0 es:

  $$S(0) - B(0,T)K.$$

  Qué obtenemos con nuestra fórmula? Utilizemos la notación en (2).

  $$\begin{aligned}
  X(0) &= (B(,))^N\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[X\right] \\
  &= (B(,))^N\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[S(T)-K\right] \\
  &= (B(,))^N\Big(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[S(T)\right]-\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[K\right]\Big) \\
  &= (B(,))^N\Big(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[S(T)\right]\Big)-(B(,))^N\Big(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[K\right]\Big) \\
  &= S(0)-(B(,))^NK \quad \text{por (3)} \\
  &= S(0)-B(0,T)K
  \end{aligned}$$

  como esperabamos. Aquí utilizamos el hecho de que

  $$(B(,))^N = B(0,T),$$

  el cual se pide ser demostrado (en una versión ligeramente más general) en la tarea.

EJERCICIOS:

1.-Prueba mediante un argumento de no-arbitraje que si la estructura temporal del proceso valor de la cuenta en efectivo es determinística[3], entonces

$$B(0,1\delta)B(1\delta,2\delta)\cdots B((N-1)\delta,N\delta)=B(0,N\delta).$$

2.- Una opción call europea con strike $K=115$ pesos madura dentro de tres períodos de un año cada uno. Considera $S_1=120$, $B(n\delta,(n{+}1)\delta)=e^{-0.06\delta} \quad n\in\{0,1,2\}$, $u=1.7$ y $d=0.8$.
(i) Calcula el precio del call trabajando el árbol hacia atrás.
(ii) Calcula de nuevo el precio pero ahora utilizando la fórmula (1).

3.- Implementa numericamente el árbol binomial multiplicativo. Inputs: S_1, u, d, T, N (de aquí deducimos δ). Outputs: Todas las posibles α y β y el árbol de precios del derivado para el caso de call y put europeas *plain vanilla* y call y put europeas digitales (para cualquier strike).

[3]Todos los $B(n\delta,(n+1)\delta)$ son conocidos al tiempo 0.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN MATEMÁTICAS
FINANZAS MATEMÁTICAS Y DERIVADOS EN TIEMPO DISCRETO
SESIÓN 5
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 2009/09/06.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

EL TEOREMA DE LA REPRESENTACIÓN BINOMIAL (MARTINGALA)

Consideremos como contexto de trabajo el árbol binomial más general. Tomaremos como dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, donde Ω es el espacio de posibles resultados en nuestra economía, $\mathbf{F}$ es una σ-álgebra y $\mathbf{P}$ la medida de probabilidad de ocurrencia *real*. Por supuesto, tenemos que $\mathbf{P}$ en el árbol está dada por $\{(p_i, 1-p_i)\}$ con p_i la probabilidad de subir a partir del nodo i.

Una filtración $\{\mathbf{F}(n)\}$ es una familia creciente de σ-álgebras:

$$\mathbf{F}(n) \subset \mathbf{F}(n+1) \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

La σ-álgebra $\mathbf{F}(n)$ describe la historia del precio en el árbol hasta el tiempo $n\delta$. La filtración es una forma matemática de describir la acumulación de la información en el mercado. En el contexto de finanzas siempre consideraremos $\mathbf{F}(0)$ como la σ-álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$. Sabemos que una σ-álgebra, $\mathbf{F}$, es caracterizada por las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in \mathbf{F}$
- Si $A \in \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathbf{F}$
- $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathbf{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbf{F}$.

En un contexto tan fácil como lo es el del árbol binomial tenemos una forma muy sencilla de representar convenientemente la filtración. Existe una biyección natural entre las σ-álgebras y los nodos del árbol (de manera precisa, con las trayectorias que se van formando). En el caso de $N = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(0) &= \{\{1\}\} \\
\mathbf{F}(1) &= \{\{1,2\}, \{1,3\}\} \\
\mathbf{F}(2) &= \{\{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,6\}, \{1,3,7\}\},
\end{aligned}$$

o de manera alternativa

nodo	1	2	3	4	5	6	7
filtración	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,2,4}	{1,2,5}	{1,3,6}	{1,3,7}

Por supuesto, estamos siendo laxos y apelando a una identificación clara y sencilla de conceptos matemáticos con un contexto binomial simple.

Consideraremos el proceso de precios del activo subyacente, $\{S(n\delta)\}$, como un proceso estocástico adaptado al espacio filtrado $(\Omega, \mathbf{F}, \{\mathbf{F}(n)\}, \mathbf{P})$; i.e.,

$$S(n\delta) \quad \text{es} \quad \mathbf{F}(n) - \text{medible.}$$

Con respecto al derivado, este se encuentra caracterizado a priori por su payoff. Un payoff en el árbol es simplemente una variable aletoria al tiempo T; i.e., una función definida en los nodos finales del árbol. De manera equivalente, es una función de $\mathbf{F}(N)$.
Considerando una variable aleatoria X en los nodos finales, bien podemos preguntarnos por su esperanza o valor esperado al tiempo cero respecto a una medida de probabilidad en el árbol. Aún más, podemos preguntarnos por su valor esperado en cierto momento dado que tenemos información hasta ese punto. Es aquí donde nos auxiliamos de la filtración y la información que contiene. Podemos calcular la esperanza de X dada la información hasta el tiempo n

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[X|\mathbf{F}(n)\right].$$

Esta es la esperanza de X a lo largo de trayectorias cuyo segmento inicial es $\mathbf{F}(n)$. Tomamos el nodo alcanzado al tiempo $n\delta$ como la nueva raíz del árbol y calculamos la esperanza. Por supuesto, esta esperanza condicional tiene una dependencia en $\mathbf{F}(n)$ y se puede demostrar que esta función es $\mathbf{F}(n)$-medible.

Otro concepto importante en el contexto de valuación de instrumentos derivados es aquél de *proceso previsible.* En el contexto discreto, diremos que un proceso estocástico $\{\alpha(n\delta)\}$ es previsible, si sus valores al tiempo $n\delta$ están completamente determinados por la información hasta el tiempo $(n-1)\delta$. Un ejemplo muy simple está dado por $\alpha(n\delta) = S((n-1)\delta)$.

Definición 1 *Diremos que el proceso estocástico $\{Y(n\delta)\}$ es una martingala con respecto a la medida $\boldsymbol{P}$ y la filtración $\{\boldsymbol{F}(n)\}$ si*

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[Y(i\delta)|\boldsymbol{F}(j)] \quad = \quad Y(j\delta) \quad i \geq j. \tag{1}$$

Esto significa que el valor esperado futuro del proceso al tiempo $i\delta$ bajo $\mathbf{P}$ y condicional en la historia hasta el tiempo $j\delta$ es meramente el valor del proceso al tiempo $j\delta$. De nuevo, esto significa que el proceso no tiene tendencia bajo $\mathbf{P}$, no tiene sesgo hacia arriba o hacia abajo en su valor bajo el operador $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[\cdot|\mathbf{F}\right]$. Si el proceso tiene valor 100 en algún punto, entonces su valor esperado condicional bajo $\mathbf{P}$ y bajo $\{\mathbf{F}(n)\}$ es 100 a partir de ahí.

Ejemplifiquemos los diferentes conceptos con un árbol de precios. Consideremos el siguiente árbol de dos períodos:

$$S_1 = 80, \quad S_d = 60, \quad S_u = 120,$$

$$S_{dd} = 36, \quad S_{du} = 72, \quad S_{ud} = 80, \quad S_{uu} = 180.$$

Tomemos $X = X(S(T)) = S(T)$ donde por supuesto $T = 2\delta$ y $p_i = \frac{1}{2} \quad \forall i$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[S(2\delta)|\mathbf{F}(0)\right] &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[S(2\delta)\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(36 + 72 + 80 + 180) \\
&= 92.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[S(2\delta)|\mathbf{F}(1)\right] = \begin{cases} \frac{1}{2}(36+72) = 54 & \text{si} \quad \{1,2\} \\ \frac{1}{2}(80+180) = 130 & \text{si} \quad \{1,3\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[S(2\delta)|\mathbf{F}(2)\right] &= \begin{cases} 36 & \text{si} \quad \{1,2,4\} \\ 72 & \text{si} \quad \{1,2,5\} \\ 80 & \text{si} \quad \{1,3,6\} \\ 180 & \text{si} \quad \{1,3,7\} \end{cases} \\
&= S(2\delta).
\end{aligned}$$

Definiendo

$$Y(n\delta) := \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[X|\mathbf{F}(n)\right] \tag{2}$$

creamos todo un nuevo proceso estocástico $\{Y(n\delta)\}$ en el árbol:

$$Y_1 = 92, \quad Y_d = 54, \quad Y_u = 130,$$

$$Y_{dd} = 36, \quad Y_{du} = 72, \quad Y_{ud} = 80, \quad Y_{uu} = 180.$$

Ahora bien, el ejemplo más simple de martingala es el proceso estocástico constante (respecto a cualquier medida y cualquier filtración). Pensemos ahora en la medida $\mathbf{Q}$ en el árbol dada por:

$$q_1 = \frac{1}{3}, \quad q_2 = \frac{2}{3}, \quad q_3 = \frac{2}{5}.$$

Verifiquemos que el proceso $\{S(n\delta)\}$ es $\mathbf{Q}$-martingala:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[S(1\delta)|\mathbf{F}(0)\right] &= \frac{1}{3}120 + \frac{2}{3}60 \\
&= 80 \\
&= S(0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[S(2\delta)|\mathbf{F}(0)\right] &= \frac{1}{3}\frac{2}{5}180 + \frac{1}{3}\frac{3}{5}80 + \frac{2}{3}\frac{2}{3}72 + \frac{2}{3}\frac{1}{3}36 \\
&= 80 \\
&= S(0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[S(2\delta)|\mathbf{F}(1)\right] &= \begin{cases} \frac{2}{3}72 + \frac{1}{3}36 = 60 & \text{si} \quad \{1,2\} \\ \frac{2}{5}180 + \frac{3}{5}80 = 120 & \text{si} \quad \{1,3\} \end{cases} \\ &= S(1\delta). \end{aligned}$$

El resto de casos son fáciles de verificar. Tenemos que $\mathbf{Q}$ es una *medida martingala* para $\{S(n\delta)\}$.

Un último ejemplo, el cual es de suma importancia, está dado por el proceso definido anteriormente

$$Y(n\delta) \quad := \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[S(2\delta)|\mathbf{F}(n)\right].$$

Se pide en los ejercicios verificar que el proceso $Y(n\delta)$ es una $\mathbf{P}$-martingala.

Este último ejemplo mencionado es simplemente un caso particular de un resultado más general:

Teorema 1 *Para X, un instrumento contingente, el proceso $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[X|\boldsymbol{F}(n)]$ es siempre una $\boldsymbol{P}$-martingala.*

Observemos que este teorema es una consecuencia inmediata del hecho de que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[X|\mathbf{F}(j)\right]|\mathbf{F}(i)\right] \quad = \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[X|\mathbf{F}(i)\right] \quad i \leq j. \tag{3}$$

Una manera fácil de verificar cuando un proceso es una $\mathbf{P}$-martingala o no, es comparar el proceso mismo $S(n\delta)$ con el proceso de esperanza condicional de su valor terminal $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[S(N\delta)|\mathbf{F}(n)\right]$. Solo si estos son identicos, el proceso es una $\mathbf{P}$-martingala.

Teorema 2 ***Teorema de la Representación Binomial (Martingala)***
Supongamos que la medida $\boldsymbol{Q}$ es tal que el proceso binomial $Z = \{Z(n\delta)\}$ es una $\boldsymbol{Q}$-martingala. Si $Y = \{Y(n\delta)\}$ es cualquier otra $\boldsymbol{Q}$-martingala, entonces existe un proceso previsible $\alpha = \{\alpha(n\delta)\}$ tal que

$$Y(n\delta) \quad = \quad Y(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha(k\delta)\Delta Z(k\delta) \tag{4}$$

donde $\Delta Z(i\delta) := Z(i\delta) - Z((i-1)\delta)$.

Prueba.
Consideremos una rama de un nodo al tiempo $(i-1)\delta$ a los dos nodos correspondientes al tiempo $i\delta$. Dada la estructura del árbol, $\mathbf{F}(i)$ tiene dos opciones pasando $\mathbf{F}(i-1)$, la correspondiente a un salto hacia arriba y la correspondiente a un salto hacia abajo. Los incrementos de los dos procesos en la rama son

$$\Delta Z(i\delta) := Z(i\delta) - Z((i-1)\delta) \quad \text{y} \quad \Delta Y(i\delta) := Y(i\delta) - Y((i-1)\delta).$$

Cualquier variable aleatoria en una rama con dos posibilidades está completamente determinada por el tamaño de la diferencia entre sus valores en el

estado de arriba y el de abajo y una compensación constante que depende solo en $\mathbf{F}(i-1)$. En consecuencia, construir un proceso aleatorio a partir del otro consistirá, en general, en un escalamiento (para igualar las diferencias entre los valores arriba y abajo) y en una traslación (para igualar las compensaciones).
Los tamaños de las diferencias entre los correspondientes dos valores son

$$\delta Z(i\delta) := Z_u - Z_d \quad \text{y} \quad \delta Y(i\delta) := Y_u - Y_d,$$

ambos dependientes solamente en $\mathbf{F}(i-1)$. Definimos $\alpha(i\delta)$ como

$$\alpha(i\delta) \quad := \quad \frac{\delta Y(i\delta)}{\delta Z(i\delta)},$$

obteniendo en consecuencia que el proceso α es previsible.
Ahora, el incremento $\Delta Y(i\delta)$ debe estar dado por el incremento escalado $\alpha(i\delta)\Delta Z(i\delta)$ mas una compensación k, la cual está solamente determinada por $\mathbf{F}(i-1)$:

$$\Delta Y(i\delta) \quad = \quad \alpha(i\delta)\Delta Z(i\delta) + k. \tag{5}$$

Como Z y Y son $\mathbf{Q}$-martingalas tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E_Q}\left[\Delta Y(i\delta)|\mathbf{F}(i-1)\right] &= \mathbf{E_Q}\left[Y(i\delta)|\mathbf{F}(i-1)\right] - \mathbf{E_Q}\left[Y((i-1)\delta)|\mathbf{F}(i-1)\right] \\
&= Y((i-1)\delta) - Y((i-1)\delta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y (analogamente)

$$\mathbf{E_Q}\left[\Delta Z(i\delta)|\mathbf{F}(i-1)\right] \quad = \quad 0.$$

El factor $\alpha(i\delta)$ es previsible; i.e., conocido al tiempo $(i-1)\delta$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E_Q}\left[\alpha(i\delta)\Delta Z(i\delta)|\mathbf{F}(i-1)\right] &= \alpha(i\delta)\mathbf{E_Q}\left[\Delta Z(i\delta)|\mathbf{F}(i-1)\right] \\
&= \alpha(i\delta)(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces, tomando en (5) la esperanza condicional en $\mathbf{F}(i-1)$ obtenemos que

$$k = 0$$

y por lo tanto,

$$\Delta Y(i\delta) \quad = \quad \alpha(i\delta)\Delta Z(i\delta).$$

Finalmente, con un paso inductivo ponemos juntos estos incrementos para obtener el resultado del teorema.□

EJERCICIOS:

1.-Demuestra en un contexto más general que si $\mathbf{F}(0) = \{\emptyset, \Omega\}$, entonces

$$\mathbf{E_P}\left[X|\mathbf{F}(0)\right] = \mathbf{E_P}\left[X\right].$$

2.-Demuestra en un contexto más general que si X es $\mathbf{F}(T)$-medible, entonces

$$\mathbf{E_P}\left[X|\mathbf{F}(T)\right] = X.$$

3.-Verifica que en el ejemplo dado $\{S(n\delta)\}$ no es $\mathbf{P}$-martingala.

4.-Verifica que en el ejemplo dado $\{Y(n\delta)\}$ definido como el proceso esperanza condicional si es $\mathbf{P}$-martingala.

5.-Demuestra (3).

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN MATEMÁTICAS
FINANZAS MATEMÁTICAS Y DERIVADOS EN TIEMPO DISCRETO
SESIÓN 6
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 2009/09/14.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

NUESTRO RESULTADO ES CORRECTO. LA DERIVADA DE RADON-NIKODYM Y CAMBIO DE MEDIDA

El Teorema de la Representación Binomial garantiza la existencia de un proceso previsible que permite *obtener* cualquier martingala respecto a una medida en términos de cualquier otra martingala respecto a la misma medida. De manera precisa, si tenemos dos procesos, Z y Y, ambos $\mathbf{Q}$-martingalas, entonces el teorema garantiza la existencia de un proceso previsible α de tal manera que podemos dar seguimiento preciso a uno con el otro:

$$Y(n\delta) \quad = \quad Y(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha(k\delta)\Delta Z(k\delta).$$

De forma intuitiva, esto nos sugiere el tener el marco teórico que represente el como **replicar** un proceso en terminos de la acumulación de las diferencias ponderadas (con α) del otro proceso.
Tratando de atar conceptos, el proceso Z estaría relacionado con el precio del subyacente, α con la cantidad de subyacente en el portafolio de replicado y Y con el derivado. Dicho de otra forma, el proceso previsible, α, del teorema podría servir como una estrategia de construcción. En cada punto podríamos comprar la α apropiada de subyacente y seguir las ganancias y pérdidas de la martingala Y. Seríamos capaces de igualar la martingala en cada paso, empezando donde esta empieza y terminando donde esta termina. Si la martingala termina en un payoff, entonces ese payoff sería replicado de forma sintética.
Cuál es la identificación correcta? Hemos recorrido ya un buen tramo y *sabemos* que

$$B(0,0)X(0) \quad = \quad \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,T)X(T)|\mathbf{F}(0)], \tag{1}$$

ya que $B(0,0) = 1$. De manera particular, para $X = X(S(T)) = S(T)$ tenemos

$$B(0,0)S(0) \quad = \quad \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,T)S(T)|\mathbf{F}(0)]. \tag{2}$$

Esto sugiere que realmente estamos pensando en el *proceso descontado*

$$Z(n\delta) \quad := \quad B(0,n\delta)S(n\delta),$$

el cual resulta ser (de acuerdo a (1)) una $\mathbf{Q}$-martingala. Si fuésemos capaces de construir otra martingala, respecto a esta $\mathbf{Q}$, asociada al derivado, entonces el

teorema nos garantizaría la existencia de la estrategia de cobertura α.
Siguiendo la misma intuición, nos fijaremos en el *payoff descontado*

$$B(0,T)X = B(0,N\delta)X.$$

En el teorema necesitamos todo un proceso estocástico y, aún más, que sea una $\mathbf{Q}$-martingala. Nosotros solo contamos con una variable aleatoria, pero bien sabemos como obtener todo un proceso y que este sea una martingala respecto a la misma medida:

$$Y(n\delta) \quad := \quad \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,N\delta)X|\mathbf{F}(n)].$$

La gran ventaja de trabajar en tiempo discreto es la intuición que se gana. Realmente construimos todo el proceso de una forma intuitiva y ahora es tiempo de dar la justificación matemática correspondiente. La desventaja, sin embargo, es que todo es tan claro y tan explícito que se pierden los puntos finos desde el punto de vista teórico. Finalmente, la medida $\mathbf{Q}$ (de riesgo neutral) fue obtenida de forma explícita:

$$q_n = \frac{B^{-1}(,)S_n - S_d}{S_u - S_d}.$$

En tiempo continuo no será el caso y habrá que preocuparse por la cuestión de la existencia de esta medida (Teorema de Girsanov). Otro punto importante en tiempo continuo es que aún cuando garantizemos su existencia, finalmente necesitaremos calcular esperanzas condicionales respecto a ella, esto sin conocerla explícitamente. El modelo será basado en términos de la probabilidad original del mundo real, y en consecuencia, necesitaremos una forma de transitar de esperanzas bajo $\mathbf{P}$ a esperanzas bajo $\mathbf{Q}$ (derivada de Radon-Nikodym).

Basta de intuiciones y comencemos con nuestro desarrollo.

Una vez que tenemos $\mathbf{Q}$ tal que $\{Z(n\delta)\}$ es $\mathbf{Q}$-martingala, construimos el proceso $\{Y(n\delta)\}$:

$$Y(n\delta) \quad := \quad \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,N\delta)X|\mathbf{F}(n)].$$

Por el Teorema de la Representación Binomial existe α previsible[1] tal que

$$Y(n\delta) \quad = \quad Y(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha(k\delta)\Delta Z(k\delta).$$

Consideremos la siguiente estrategia: al tiempo $n\delta$ *adquirir* el portafolio $\pi(n)$ que consiste de

[1] La gran importancia de que el proceso α sea previsible en un contexto financiero es precisamente que representa la estrategia de cobertura. Necesitamos que los valores del proceso en cada tiempo estén completamente determinados por la información hasta un tiempo anterior. El proceso $\{B(n\delta,(n+1)\delta)\}$ es claramente previsible.

- $\alpha((n+1)\delta)$ unidades de subyacente (cuya existencia garantiza el teorema),
- $\beta((n+1)\delta) := Y(n\delta) - \alpha((n+1)\delta)Z(n\delta)$ en la cuenta en efectivo.

Al tiempo 0, $\pi(0)$ vale

$$\begin{aligned}
\pi(0,0) &= \alpha(1\delta)S(0) + \beta(1\delta)B^{-1}(0,0) \\
&= \alpha(1\delta)S(0) + (Y(0) - \alpha(1\delta)Z(0))B^{-1}(0,0) \\
&= Y(0)B^{-1}(0,0) \\
&= Y(0) \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,N\delta)X|\mathbf{F}(0)] \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,N\delta)X].
\end{aligned}$$

Esto es lo que cuesta crear el portafolio. No hay ninguna dificultad en determinar $\alpha(1\delta)$ y $\beta(1\delta)$ ya que α y β son previsibles.

Al tiempo 1δ dos cosas suceden: 1.- $\pi(0)$ cambia de valor debido a que los precios de los activos han cambiado (más no ha cambiado la composición de $\pi(0)$). Este nuevo valor es

$$\begin{aligned}
\pi(0,1) &= \alpha(1\delta)S(1\delta) + \beta(1\delta)B^{-1}(0,1\delta) \\
&= \alpha(1\delta)S(1\delta) + (Y(0) - \alpha(1\delta)Z(0))B^{-1}(0,1\delta) \\
&= B^{-1}(0,1\delta)(Y(0) + \alpha(1\delta)\Delta Z(1\delta)) \\
&= B^{-1}(0,1\delta)Y(1\delta).
\end{aligned}$$

Por supuesto aquí hemos utilizado el Teorema de la Representación Binomial.

2.- Al tiempo 1δ la estrategia requiere poseer $\pi(1)$. El valor de $\pi(1)$ al tiempo 1δ es

$$\begin{aligned}
\pi(1,1) &= \alpha(2\delta)S(1\delta) + \beta(2\delta)B^{-1}(0,1\delta) \\
&= \alpha(2\delta)S(1\delta) + (Y(1\delta) - \alpha(2\delta)Z(1\delta))B^{-1}(0,1\delta) \\
&= Y(1\delta)B^{-1}(0,1\delta).
\end{aligned}$$

Tenemos que el valor de *adquirir* $\pi(1)$ (al tiempo 1δ) es exactamente igual al valor al cual podríamos *vender* $\pi(0)$ (al tiempo 1δ) sin importar el valor que tome $S(1\delta)$. Los portafolios se *auto-financían*.

De manera general, al tiempo $n\delta$ formamos (o adquirimos) el portafolio $\pi(n)$. Este portafolio consta de $\alpha((n+1)\delta)$ unidades de activo subyacente (el cual, no olvidemos, no paga dividendos) y $\beta((n+1)\delta)$ unidades monetarias en la cuenta en efectivo. El valor de $\pi(n)$ en el tiempo $n\delta$ es

$$\begin{aligned}
\pi(n,n) &= \alpha((n+1)\delta)S(n\delta) + \beta((n+1)\delta)B^{-1}(0,n\delta) \\
&= \alpha((n+1)\delta)S(n\delta) + (Y(n\delta) - \alpha((n+1)\delta)Z(n\delta))B^{-1}(0,n\delta) \\
&= Y(n\delta)B^{-1}(0,n\delta).
\end{aligned}$$

Al tiempo $(n+1)\delta$ el portafolio $\pi(n)$ adquiere un nuevo valor, producto de los cambios en el valor (precio) de los activos mas no en la composición del portafolio. Este nuevo valor es

$$
\begin{aligned}
\pi(n,n+1) &= \alpha((n+1)\delta)S((n+1)\delta)+\beta((n+1)\delta)B^{-1}(0,(n+1)\delta) \\
&= \alpha((n+1)\delta)S((n+1)\delta)+(Y(n\delta)-\alpha((n+1)\delta)Z(n\delta))B^{-1}(0,(n+1)\delta) \\
&= B^{-1}(0,(n+1)\delta)(Y(n\delta)+\alpha((n+1)\delta)\Delta Z((n+1)\delta)) \\
&= B^{-1}(0,(n+1)\delta)(Y(0)+\sum_{k=1}^{n}\alpha(k\delta)\Delta Z(k\delta)+\alpha((n+1)\delta)\Delta Z((n+1)\delta)) \\
&= B^{-1}(0,(n+1)\delta)(Y(0)+\sum_{k=1}^{n+1}\alpha(k\delta)\Delta Z(k\delta)) \\
&= B^{-1}(0,(n+1)\delta)Y((n+1)\delta).
\end{aligned}
$$

También al tiempo $(n+1)\delta$ la estrategia nos requiere adquirir $\pi(n+1)$. Este portafolio consta de $\alpha((n+2)\delta)$ unidades de activo subyacente y $\beta((n+2)\delta)$ unidades monetarias en la cuenta en efectivo. El valor de $\pi(n+1)$ en el tiempo $(n+1)\delta$ es

$$
\begin{aligned}
\pi(n+1,n+1) &= \alpha((n+2)\delta)S((n+1)\delta)+\beta((n+2)\delta)B^{-1}(0,(n+1)\delta) \\
&= \alpha((n+2)\delta)S((n+1)\delta)+(Y((n+1)\delta)-\alpha((n+2)\delta)Z((n+1)\delta))B^{-1}(0,(n+1)\delta) \\
&= Y((n+1)\delta)B^{-1}(0,(n+1)\delta).
\end{aligned}
$$

La estrategia es auto-financiada. El portafolio adquirido al tiempo $n\delta$, $\pi(n)$, cambiará de valor al llegar el tiempo $(n+1)\delta$ y este nuevo valor, al cual puede ser *vendido*, será exactamente el precio al que podemos *adquirir* el portafolio $\pi(n+1)$.
El último portafolio que se adquiere es $\pi(N-1)$. Llega la maduración, $T=N\delta$, y el valor de $\pi(N-1)$ es

$$
\begin{aligned}
\pi(N-1,N) &= \alpha(N\delta)S(N\delta)+\beta(N\delta)B^{-1}(0,N\delta) \\
&= \alpha(N\delta)S(N\delta)+(Y((N-1)\delta)-\alpha(N\delta)Z((N-1)\delta))B^{-1}(0,N\delta) \\
&= B^{-1}(0,N\delta)(Y((N-1)\delta)+\alpha(N\delta)\Delta Z(N\delta)) \\
&= B^{-1}(0,N\delta)(Y(0)+\sum_{k=1}^{N-1}\alpha(k\delta)\Delta Z(k\delta)+\alpha(N\delta)\Delta Z(N\delta)) \\
&= B^{-1}(0,N\delta)(Y(0)+\sum_{k=1}^{N}\alpha(k\delta)\Delta Z(k\delta)) \\
&= B^{-1}(0,N\delta)Y(N\delta) \\
&= B^{-1}(0,N\delta)\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,N\delta)X|\mathbf{F}(N)] \\
&= B^{-1}(0,N\delta)B(0,N\delta)X \\
&= X.
\end{aligned}
$$

Nuestra estrategia es auto-financiada y replica el valor del derivado a maduración!

El precio del instrumento con payoff X es obvio ahora:

$$\begin{aligned}\pi(0,0) &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,N\delta)X|\mathbf{F}(0)] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,N\delta)X].\end{aligned}$$

El valor esperado es bajo $\mathbf{Q}$, la medida martingala para el activo descontado Z. Por supuesto este precio no permite arbitraje, ya que cualquier otro precio pudiese ser usado para obtener una ganancia segura sin riesgo al utilizar la estrategia $\{\alpha(n\delta), \beta(n\delta)\}$ de manera adecuada para duplicar el payoff.

OBSERVACIÓN:

El valor al tiempo $n\delta$ de un derivado X que madura en $T = N\delta$ es

$$B^{-1}(0,n\delta)\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,N\delta)X|\mathbf{F}(n)].$$

Esto es debido a que hay una estrategia auto-financiada, justificada con el Teorema de la Representación Binomial, la cual requiere este monto para ser empezada y que replica el valor del derivado en T sin riesgo.

Cambio de medida (la derivada de Radon-Nikodym)

Consideremos una caminata aleatoria simple de dos pasos. Al tiempo 0 la caminata tiene valor 0 y con probabilidad p_1 toma al tiempo 1δ el valor 1 y con probabilidad $1-p_1$ el valor -1. Si al tiempo 1δ vale 1, entonces con probabilidad p_3 toma al tiempo 2δ el valor 2 y con probabilidad $1-p_3$ el valor 0. Si al tiempo 1δ vale -1, entonces con probabilidad p_2 toma al tiempo 2δ el valor 0 y con probabilidad $1-p_2$ el valor -2.
Para ir del tiempo 0 al 2δ hay cuatro posibles trayectorias:

Trayectoria	Probabilidad
$\{0,1,2\}$	$p_1p_3 =: \tau(4)$
$\{0,1,0\}$	$p_1(1-p_3) =: \tau(3)$
$\{0,-1,0\}$	$(1-p_1)p_2 =: \tau(2)$
$\{0,-1,-2\}$	$(1-p_1)(1-p_2) =: \tau(1)$

Podemos ver este mapeo entre trayectorias y probabilidades de las trayectorias como tener la medida $\mathbf{P}$ en código. Si conociéramos $\tau(1)$, $\tau(2)$, $\tau(3)$ y $\tau(4)$ entonces, si todas estuvieran estrictamente entre 0 y 1, conoceríamos p_1, p_2 y p_3. Podemos representar nuestro proceso con un árbol que no recombina valores, donde usamos los nodos finales para etiquetar cada trayectoria con la información $\tau(i)$.

Supongamos que tuviéramos una medida diferente $\mathbf{Q}$. Una vez más podemos codificarla con probabilidades de trayectorias $\widehat{\tau}(1)$, $\widehat{\tau}(2)$, $\widehat{\tau}(3)$ y $\widehat{\tau}(4)$. Si cada $\widehat{\tau}(i)$ está estrictamente entre 0 y 1, $\widehat{\tau}(1)$, $\widehat{\tau}(2)$, $\widehat{\tau}(3)$ y $\widehat{\tau}(4)$ determinan de manera única $\mathbf{Q}$.

Dada esta codificación, hay una manera natural de codificar las diferencias entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ la cual da una idea de como *distorsionar* $\mathbf{P}$ para producir $\mathbf{Q}$. Si formamos los cocientes

$$\frac{\widehat{\tau}(i)}{\tau(i)}$$

para cada trayectoria i, escribimos el mapeo de trayectorias a cocientes como

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}.$$

Esta variable aleatoria es llamada la *derivada de Radon-Nikodym* de $\mathbf{Q}$ con respecto a $\mathbf{P}$ hasta el tiempo 2δ (variable aleatoria en los nodos finales de un árbol que no recombina valores). Con $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ podemos obtener $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{P}$.

Qué pasa si p_i o q_i son 0 o 1? Dos cosas pueden pasar:

- Puede ser imposible recuperar p_i de $\tau(i)$. Si por ejemplo p_1 es 0, entonces $\tau(3)$ y $\tau(4)$ son 0 y en consecuencia lainformación de p_3 ha sido perdida. Pero entonces, las trayectorias correspondientes a $\tau(3)$ y a $\tau(4)$ son ambas imposibles (probabilidad 0) y en consecuencia, en algún sentido p_3 no es realmente relevante. Si nos restringimos a solo dar $\tau(i)$ para trayectorias posibles, entonces *podemos* recuperar las correspondientes p's.

- Supongamos ahora que una de las p's es 0, pero ninguna de las q's es 0. Entonces, al menos una $\tau(i)$ será 0 y ninguna de las $\widehat{\tau}(i)$ lo será. En consecuencia, no todos los cocientes $\frac{\widehat{\tau}(i)}{\tau(i)}$ estarán bien definidos y $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ no puede existir. Podríamos suprimir aquellas trayectorias que tengan probabilidad 0, pero en esta ocasión si hemos perdido algo. Aquellas trayectorias habrían sido $\mathbf{P}$-imposibles pero son $\mathbf{Q}$-posibles. De alguna manera, no podemos definir $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ si $\mathbf{Q}$ permite algo que $\mathbf{P}$ no permite.

Definición 1 *Dos medidas $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ son **equivalentes** si operan en el mismo espacio de probabilidad y concuerdan en lo que es posible. De manera formal, si $A \in \boldsymbol{F}$*

$$\boldsymbol{P}(A) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}(A) > 0.$$

En otras palabras, si A es posible bajo $\boldsymbol{P}$ entonces es posible bajo $\boldsymbol{Q}$ y si A es imposible bajo $\boldsymbol{P}$ entonces es imposible bajo $\boldsymbol{Q}$ (y contrapositivas).

Dos medidas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ deben ser equivalentes para que puedan tener derivadas de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ y $\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$.

Consideremos un payoff $X(= X(S(T)))$ en nuestro proceso discreto de dos pasos. Recordemos que X es una variable aleatoria y, entonces, denotemos por $X(i, T)$

el valor que toma si se sigue la trayectoria i. Entonces, la esperanza de X con respecto a $\mathbf{P}$ está dada por

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[X(T)|\mathbf{F}(0)] = \sum_{i=1}^{4} \tau(i) X(i,T).$$

La esperanza de X con respecto a $\mathbf{Q}$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X(T)|\mathbf{F}(0)] &= \sum_{i=1}^{4} \widehat{\tau}(i) X(i,T) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \tau(i)\left(\frac{\widehat{\tau}(i)}{\tau(i)} X(i,T)\right) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} X(T)|\mathbf{F}(0)\right].\end{aligned}$$

Este resultado solo representa un caso, $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ está definida sobre los nodos finales (T es elhorizonte temporal para $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$) y $X(T)$ es conocida al tiempo T.

Qué ocurre con $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X(i\delta)|\mathbf{F}(j)]$ para $i < N$ y $j > 0$? De alguna manera, necesitamos conocer $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ no solo para los nodos finales, también en todas las trayectorias en todos los tiempos.

Tenemos que $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ es una variable aleatoria, pero quisiéramos tener un proceso. Podemos obtenerlo si permitimos que el horizonte temporal varíe y ponemos que $\zeta(j\delta)$ sea la derivada de Radon-Nikodym tomada hasta el horizonte $j\delta$. Para el tiempo 1δ, las posibles trayectorias son $\{0,1\}$ y $\{0,-1\}$ y, entonces, la derivada $\zeta(1\delta)$ tiene los valores para estas trayectorias de $\frac{q_1}{p_1}$ y $\frac{(1-q_1)}{(1-p_1)}$ respectivamente. Al tiempo 0, $\zeta(0)$ vale 1 ya que la única trayectoria es $\{0\}$ que tiene probabilidad 1 bajo $\mathbf{P}$ y bajo $\mathbf{Q}$.

De hecho, hay otra forma de expresar $\zeta(j\delta)$ en términos de $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$. Por supuesto, esta forma es

$$\zeta(j\delta) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\middle|\mathbf{F}(j)\right].$$

para $j \leq N$.

La variable $\zeta(n\delta)$ representa una idea de la cantidad de cambio de medida hasta el tiempo $n\delta$ a lo largo de la trayectoria actual. Tenemos que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X(n\delta)] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\zeta(n\delta)X(n\delta)],$$

donde $X(n\delta)$ es conocida al tiempo $n\delta$.

Si queremos saber $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X(i\delta)|\mathbf{F}(j)]$, entonces necesitamos la cantidad de cambio de medida del tiempo $j\delta$ al tiempo $i\delta$, el cual es simplemente $\frac{\zeta(i\delta)}{\zeta(j\delta)}$; i.e., el cambio hasta el tiempo $i\delta$ con el cambio hasta el tiempo $j\delta$ removido:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X(i\delta)|\mathbf{F}(j)] = \zeta^{-1}(j\delta)\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\zeta(i\delta)X(i\delta)|\mathbf{F}(j)]. \tag{3}$$

EJERCICIOS:

1.- Obtén $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ para el ejemplo de la sesión 5.

2.- Utiliza $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ para calcular $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S(2\delta)]$ a partir de $\mathbf{P}$ (seguimos con la información del ejercicio de la sesión 5).

3.- Demuestra (3) en un árbol de 2 períodos.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN MATEMÁTICAS
FINANZAS MATEMÁTICAS Y DERIVADOS EN TIEMPO DISCRETO
SESIÓN 7
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 2009/09/27.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

MODELO CONTINUO COMO CASO LÍMITE DEL MODELO DISCRETO. FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES.

La inversión en la cuenta en efectivo puede ser facilmente escrita en términos de tasas de interés **determinísticas** equivalentes:

$$B^{-1}(0,(j+1)\delta) \quad = \quad B^{-1}(0,j\delta)\exp(r(j\delta)\delta),$$

donde $r(j\delta)$ es la tasa correspondiente al período que va de $j\delta$ a $(j+1)\delta$ compuesta continuamente.

El activo subyacente es riesgoso; su evolución es descrita de manera estocástica. Aún así, podemos tratar de describir su dinámica en términos de tasas equivalentes. Decimos que para $t \in (j\delta,(j+1)\delta)$ la tasa equivalente es $r(j\delta)$ si

$$S((j+1)\delta) \quad = \quad S(j\delta)\exp(r(j\delta)\delta).$$

Esto puede ser reescrito como

$$r(j\delta)\delta \quad = \quad \ln(S((j+1)\delta)) - \ln(S(j\delta))$$

vemos que $r(j\delta)\delta$ es el *retorno* en el activo para el período $(j\delta,(j+1)\delta)$ y también observamos que

$$S(k\delta) \quad = \quad S(j\delta)\exp\left(\sum_{i=j}^{k-1} r(i\delta)\delta\right).$$

En este caso, como el precio del subyacente es estocástico, también lo son $r(j\delta)$.

Uno de nuestros objetivos es valuar instrumentos derivados sobre el subyacente. Para lograr tal objetivo debemos suponer una dinámica que describa la evolución temporal aleatoria del precio del subyacente. Hemos discutido ya, en nuestro marco discreto, que si el horizonte temporal es dividido en intervalos de tamaño δ suficientemente pequeños, entonces podemos suponer que el precio del subyacente solo puede variar de un tiempo al siguiente en un salto hacia arriba o un salto hacia abajo. En otras palabras, hemos restringido la evolución de su precio a un árbol binomial. Aún más, supusimos que este árbol recombina valores y es multiplicativo.

Supongamos que los retornos en el activo $r(j\delta)\delta$ tienen una media común por período $\mu\delta$ (media proporcional al tamaño del período) y una varianza común por período $\sigma^2\delta$ (varianza proporcional al tamaño del período).

Comencemos considerando, por simplicidad y para ganar intuición, un mundo donde la probabilidad asociada a subir en cada paso es $\frac{1}{2}$. Es fácil ver que si deseamos un retorno esperado $\mu\delta$ y una varianza $\sigma^2\delta$, entonces el retorno debe tomar los valores:

$$\begin{cases} \mu\delta + \sigma\sqrt{\delta} & \text{con probabilidad} \quad \frac{1}{2} \\ \mu\delta - \sigma\sqrt{\delta} & \text{con probabilidad} \quad \frac{1}{2} \end{cases}$$

(la esperanza es $\mu\delta$ y la varianza $\sigma^2\delta$); i.e., estamos considerando el árbol multiplicativo

$$S_u = S_n \exp(\mu\delta + \sigma\sqrt{\delta}) \quad S_d = S_n \exp(\mu\delta - \sigma\sqrt{\delta})$$

donde cada rama tiene asignada la probabilidad $\frac{1}{2}$.

Consideremos un tiempo t de la forma $t = n\delta$. Si para llegar a t subimos j veces y bajamos $n - j$ veces, el precio del subyacente puede ser escrito como

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n\delta) \\ &= S(0)\exp(j\mu\delta + j\sigma\sqrt{\delta} + (n-j)\mu\delta - (n-j)\sigma\sqrt{\delta}) \\ &= S(0)\exp(n\mu\delta + (2j-n)\sigma\sqrt{\delta}) \\ &= S(0)\exp(\mu t + (2j-n)\sigma\sqrt{\delta}) \end{aligned}$$

Qué pasa cuando $n \to \infty$ ($\delta \to 0$ de tal manera que $t = n\delta$ es fijo)? En otras palabras, qué ocurre si la partición homogénea del horizonte temporal se vuelve densa en $[0, T]$? Primero que nada, hagamos más explícita la parte estocástica de $S(t)$: definamos

$$\begin{aligned} Y(n) &= \text{número de veces que sube en n pasos} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi(i), \end{aligned}$$

donde

$$\xi(i) = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad} \quad \frac{1}{2} \\ 1 & \text{con probabilidad} \quad \frac{1}{2} \end{cases}$$

y $\{\xi(i)\}$ son independientes.
Observemos que

$$\mathbf{E}[Y(n)] = \frac{n}{2} \quad Var(Y(n)) = \frac{n}{4}$$

y en consecuencia

$$\mathbf{E}\left[\frac{Y(n)}{n}\right] = \frac{1}{2} \quad Var\left(\frac{Y(n)}{n}\right) = \frac{1}{4n}.$$

Por lo tanto, una aplicación del Teorema del Límite Central da que

$$\frac{\frac{Y(n)}{n}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\frac{2Y(n)-n}{\sqrt{n}}\overset{\boldsymbol{D}}{\Longrightarrow} N(0,1)$$

Ahora bien, usando que $\sqrt{\delta}=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{n}}$ tenemos que

$$S(t)=S(0)\exp(\mu t+\sigma\sqrt{t}\frac{2Y(n)-n}{\sqrt{n}})$$

y en consecuencia, cuando $\delta\to 0$ y $n\to\infty$ con $t=n\delta$ fijo obtenemos que

$$S(t)=S(0)\exp(\mu t+\sigma\sqrt{t}Z) \quad Z\sim N(0,1);$$

en particular

$$\ln(S(t))-\ln(S(0))\sim N(\mu t,\sigma^2 t).$$

Por supuesto, no hay nada de especial en este análisis respecto al tiempo 0 y muy bien pudimos haber empezado en cualquier otro tiempo, obteniendo que

$$\ln(S(t_2))-\ln(S(t_1))\sim N(\mu(t_2-t_1),\sigma^2(t_2-t_1)).$$

No nada mas hemos obtenido un proceso límite continuo no trivial, hemos realmente justificado de alguna forma el uso en tiempo discreto del supuesto de la dinámica lognormal.

Suponer que el precio del subyacente sigue una **dinámica lognormal**, es suponer que:

$$\{r(j\delta)\delta\} \quad \text{son v.a.'s i.i.d.} \quad r(j\delta)\delta\sim N(\mu\delta,\sigma^2\delta) \quad \mu\in\mathbf{R},\sigma>0.$$

Se conoce a μ como el retorno esperado del subyacente y a σ como su volatilidad. Un primer supuesto es que estas dos cantidades son constantes independientemente del tamaño de δ.
De hecho, lo que queremos decir es la siguiente caracterización más fuerte: si $t_1=l\delta$ y $t_2=k\delta$

- Si $t_1<t_2$, $\ln(S(t_2))-\ln(S(t_1))\sim N(\mu(t_2-t_1),\sigma^2(t_2-t_1))$.
- Estos incrementos son independientes para intervalos de tiempo disjuntos.

NOTA: Aún cuando la unidad de σ es $\frac{1}{\sqrt{tiempo}}$, es común llamar a σ la volatilidad por año.

Tiene sentido suponer este tipo de dinámica para el precio del subyacente? Una posible justificación ha sido dada con la obtención de un proceso límite de tiempo continuo no trivial que, como será visto en el curso de tiempo continuo, refleja de manera muy cercana el comportamiento de ciertos activos (stocks, commodities) e índices (accionarios y de volatilidad). Otra justificación es, por supuesto, la comodidad de trabajar con la distribución gaussiana. También se ha observado que este modelo representa bien las series financieras de datos, aunque también es cierto que se ha encontrado que, en los mercados, las colas de la distribución son más pesadas que aquellas de la normal. Algunas publicaciones recientes realizan un análisis cualitativo utilizando un tipo de proceso con incrementos independientes más general, los llamados procesos de Lévy.

Como se habrá podido notar, este no es el análisis más formal matematicamente hablando para obtener el modelo en tiempo continuo. En el curso de tiempo continuo se desarrollará la teoría auxiliandose de técnicas más formales y poderosas. De hecho, se hará uso del equivalente del cálculo para un marco aleatorio: el cálculo estocástico.

En vía de mientras, nuestra forma de escoger el árbol:

$$S_u = S_n \exp(\mu\delta + \sigma\sqrt{\delta}) \quad S_d = S_n \exp(\mu\delta - \sigma\sqrt{\delta})$$

cada rama con probabilidad $\frac{1}{2}$ no es la única posible...

Implicaciones para valuar opciones

Si queremos valuar opciones, consideremos un árbol para una elección de δ pequeña. Qué tenemos?

- Estructura del árbol: permanece relevante (u, d).
- Las probabilidades $\frac{1}{2}$: son irrelevantes debido a que nuestra valuación se basa en argumentos de no-arbitraje.

Sabemos que el valor del derivado X al tiempo 0 está dado por

$$X(0) \quad = \quad \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(0,T)X(T)].$$

Además, tenemos que

$$B^{-1}(0,(j+1)\delta) \quad = \quad B^{-1}(0,j\delta)\exp(r(j\delta)\delta).$$

De esta expresión y el ejercicio 1 de la Sesión 4 concluimos que

$$B^{-1}(j\delta,(j+1)\delta) \quad = \quad \exp(r(j\delta)\delta).$$

Si $r(j\delta) = r$ con r constante entonces tenemos una única q:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\exp(r\delta) - d}{u - d} \\ &= \frac{\exp(r\delta) - \exp(\mu\delta - \sigma\sqrt{\delta})}{\exp(\mu\delta + \sigma\sqrt{\delta}) - \exp(\mu\delta - \sigma\sqrt{\delta})} \end{aligned}$$

Podemos facilmente verificar que para δ suficientemente pequeña

$$q = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\delta}\frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}) + \text{términos de orden} \quad \delta \tag{1}$$

y entonces q está, de hecho, cercana a $\frac{1}{2}$.

Qué hay que hacer? Encontrar la distribución de valores finales $S(T)$ cuando usamos q y calcular la esperanza (estadístico inconciente). Veamos, pues, que conservamos del análisis anterior:

$$S(t) = S(0)\exp(\mu t + \sigma\sqrt{t}\frac{2Y(n) - n}{\sqrt{n}})$$

pero ahora $Y(n) = \sum \eta(i)$ donde $\{\eta(i)\}$ i.i.d. $\eta(i)$ ~Bernoulli(q). En otras palabras, $Y(n)$ ~Bin(n,q). En consecuencia, usando (1) vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\frac{2Y(n) - n}{\sqrt{n}}\right] &= (2q - 1)\sqrt{n} \\
&\approx -\sqrt{t}(\frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}) \qquad (2) \\
Var\left(\frac{2Y(n) - n}{\sqrt{n}}\right) &\approx 1 \qquad (3)
\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema del Límite Central obtenemos

$$S(t) = S(0)\exp(\mu t + \sigma\sqrt{t}Z') \quad Z' \sim N(\sqrt{t}(\frac{r - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}), 1)$$

o bien,

$$S(t) = S(0)\exp[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z] \quad Z \sim N(0, 1).$$

OBSERVACIÓN: La distribución de $S(t)$, **en un mundo neutral al riesgo** (partimos de q), depende en σ y r, pero no en μ.
Entonces, para una opción $X(S(T))$ tenemos

$$X(0) = \exp(-rT)\mathbf{E}[X(S(0)\exp(Y))] \quad Y \sim N((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T) \qquad (4)$$

i.e.,

$$X(0) = \exp(-rT)\int_{-\infty}^{\infty} X(S(0)\exp(y))\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\left[-\frac{(y - [r - \frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right]dy \qquad (5)$$

Cuando especializamos este resultado al caso de la call y la put *plain vanilla*, se obtiene la famosa fórmula de **Black-Scholes**.

Por supuesto, el correspondiente valor del derivado al tiempo t está dado por

$$X(t) = \exp(-r(T - t))\int_{-\infty}^{\infty} X(S(t)\exp(y))\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T - t)}}\exp\left[-\frac{(y - [r - \frac{\sigma^2}{2}](T - t))^2}{2\sigma^2(T - t)}\right]dy \qquad (6)$$

Lema 1 *Supongamos que* $Y \sim N(m, s^2)$*. Entonces, para* a *y* b *cualesquiera números reales,*

$$\int_b^\infty e^{ay} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(\frac{-(y-m)^2}{2s^2}\right) dy \quad = \quad e^{am+\frac{1}{2}a^2s^2} N(d)$$

con $d = \frac{-b+m+as^2}{s}$ *y donde* $N(d)$ *es la probabilidad acumulada de una distribución* $N(0,1)$ *hasta el punto* d*.*

PRUEBA.
Juntando los exponentes de e y simple álgebra nos da

$$ay - \frac{(y-m)^2}{2s^2} = am + \frac{1}{2}a^2s^2 - \frac{[y-(m+as^2)]^2}{2s^2}.$$

Entonces,

$$\int_b^\infty e^{ay} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(\frac{-(y-m)^2}{2s^2}\right) dy \quad = \quad e^{am+\frac{1}{2}a^2s^2} \int_b^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{[y-(m+as^2)]^2}{2s^2}\right) dy.$$

Si hacemos $u = \frac{y-(m+as^2)}{s}$ y $c = \frac{b-(m+as^2)}{s}$ entonces esto se transforma en

$$\begin{aligned} e^{am+\frac{1}{2}a^2s^2} \int_c^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad &= \quad e^{am+\frac{1}{2}a^2s^2}[1-N(c)] \\ &= \quad e^{am+\frac{1}{2}a^2s^2} N(-c), \end{aligned}$$

donde $d = -c = \frac{-b+m+as^2}{s}$.$\square$

Este resultado se parece mucho a la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal salvo que la integración va desde el punto b en lugar de ir desde $-\infty$.

Resultado 1 ***(Fórmulas de Black-Scholes para call y put europeas)***
Tenemos que

$$\begin{aligned} c[S(0), T, K] \quad &= \quad S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \\ p[S(0), T, K] \quad &= \quad Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 \quad &= \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right] \\ d_2 \quad &= \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right] = d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

y $N(d)$ *es la probabilidad acumulada hasta* d *de una distribución normal estándar* $(N(0,1))$*.*

Prueba.
Vamos a aplicar el lema para la call europea. Queremos evaluar

$$e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(S(0)e^y-K)_+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\left[\frac{-(y-[r-\frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right]dy$$

El integrando es diferente de cero cuando $S(0)e^y > K$, i.e., cuando $y > \ln(\frac{K}{S(0)})$.
Separamos la integral en dos y aplicamos el lema a ambos términos.
Para el primer término aplicamos el lema con $a = 1$ y $b = \ln(\frac{K}{S(0)})$ obteniendo

$$e^{-rT}\int_{b}^{\infty}S(0)e^y\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\left[\frac{-(y-[r-\frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right]dy = S(0)N(d_1).$$

Aplicando el lema de nuevo pero con $a = 0$ para el segundo término obtenemos

$$e^{-rT}\int_{b}^{\infty}K\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\left[\frac{-(y-[r-\frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right]dy = Ke^{-rT}N(d_2).$$

Combinando estos dos resultados da la fórmula para $c[S(0),T,K]$.
Para obtener $p[S(0),T,K]$ podemos hacer un cálculo análogo o utilizar la paridad put-call:

$$\begin{aligned} p[S(0),T,K] &= c[S(0),T,K] + Ke^{-rT} - S(0) \\ &= Ke^{-rT}[1-N(d_2)] - S(0)[1-N(d_1)] \\ &= Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1). \end{aligned}$$

□

Qué hemos encontrado? Dado un proceso lognormal en el precio del activo con retorno μ y volatilidad σ y dada la elección de δ, el árbol debiése ser construido de tal manera que

$$S_u = uS_n \quad S_d = dS_n$$

con

$$u = \exp(\mu\delta + \sigma\sqrt{\delta}) \quad d = \exp(\mu\delta - \sigma\sqrt{\delta})$$

Estos valores determinan la probabilidad de riesgo neutral

$$q = \frac{\exp(r\delta) - d}{u - d}$$

Trabajar el árbol hacia atrás es equivalente a encontrar el valor esperado de $X(S(T))$ con respecto a la probabilidad de riesgo neutral y traerlo a valor presente con la tasa libre de riesgo.

Ahora bien, hicimos la observación de que las estadísticas de $S(t)$ relativas a la probabilidad de riesgo neutral dependen en σ, la volatilidad del subyacente, y en r, la tasa libre de riesgo, pero no en μ, el retorno esperado del subyacente.

Entonces, en el límite $\delta \to 0$, los modelos de precios lognormal con diferentes μ's pero la misma σ dan el mismo valor a las opciones. En consecuencia, podríamos escoger μ como quisiéramos.
Las dos elecciones más populares son:

- Escoger μ realmente como el retorno esperado del subyacente.
- Escoger μ tal que $\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$ i.e., $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$

la segunda elección es la que utilizaremos en este curso para la construcción de nuestros árboles multiplicativos.

Por qué la fórmula para valuar la opción no debiése depender en μ? Intuitivamente, podríamos decir que al estar usando consideraciones de no arbitraje, entonces no importa si el precio del activo tiende a crecer o decrecer, que es principalmente lo que μ dice. También podríamos dar la siguiente prueba de consistencia:
Consideremos el instrumento derivado cuyo payoff es $X(S(T)) = S(T)$. Por supuesto, el valor al tiempo 0 de este instrumento debe ser $S(0)$, debido a que la estrategia que replica su valor en T es simplemente mantener una unidad del subyacente y nunca rebalancear. En el anterior análisis, pasando al caso límite vía árboles binomiales, nos permite concluir que cuando $X(S(T)) = S(T)$, el valor del instrumento es

$$\exp(-rT)\mathbf{E}[S(0)\exp(Y)] \quad Y \sim N((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T).$$

Son consistentes estos dos cálculos? Solo si

$$\exp(-rT)\mathbf{E}[\exp(Y)] = 1 \tag{7}$$

Utilizaremos la función generadora de momentos para verificar la validez de (7):

Resultado 2 *Si $Y \sim N(m, s^2)$ entonces*

$$\boldsymbol{E}[\theta \exp(Y)] \quad = \quad \exp(\theta m + \frac{1}{2}\theta^2 s^2) \tag{8}$$

Aplicando este resultado a nuestro caso nos da

$$\begin{aligned} \exp(-rT)\mathbf{E}[\exp(Y)] &= \exp(-rT)\exp(rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \frac{1}{2}\sigma^2 T) \\ &= \exp(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

EJERCICIOS:

1.- Demuestra (1).

2.- Usa (1) para verificar (3).

3.- Para a y b números reales, obtén una expresión equivalente a la del Lema 1 para

$$\int_{\infty}^{b} e^{ay} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(\frac{-(y-m)^2}{2s^2}\right) dy.$$

4.- Obtén, utilizando el ejercicio anterior, el valor de $p[S(0), T, K]$ (i.e., directamente, sin usar la paridad put-call).

5.- Demuestra (8) (función generadora de momentos de una v.a. normal).

6.- Consideremos un instrumento derivado $X(S(T)) = S^n(T)$ en tiempo continuo. Muestra, usando (6), que su valor en t es

$$S^n(t) \exp([\frac{1}{2}\sigma^2 n(n-1) + r(n-1)](T-t))$$

donde r es la tasa libre de riesgo y σ es la volatilidad del subyacente.

7.- Utiliza (5) para dar el precio al tiempo 0 del derivado $X(S(T)) = (S(T)-K)_+^2$ (una call cuadrada).

8.- Utiliza (5) para dar el precio al tiempo 0 del derivado $X(S(T)) = (K-S(T))_+^2$ (una put cuadrada).

9.- Utiliza (5) para dar el precio al tiempo 0 del derivado $X(S(T)) = MI_{\{S(T)>K\}}$ donde M es una constante e $I_{\{S(T)>K\}}$ es la función indicadora del conjunto $\{S(T) > K\}$ (call digital europea con pago M pesos. También conocida como call europea *cash-or-nothing*).

10.- Utiliza (5) para dar el precio al tiempo 0 del derivado $X(S(T)) = MI_{\{S(T)<K\}}$ donde M es una constante e $I_{\{S(T)<K\}}$ es la función indicadora del conjunto $\{S(T) < K\}$ (put digital europea con pago M pesos. También conocida como put europea *cash-or-nothing*).

11.- Utiliza (5) para dar el precio al tiempo 0 del derivado $X(S(T)) = S(T)I_{\{S(T)>K\}}$ donde $I_{\{S(T)>K\}}$ es la función indicadora del conjunto $\{S(T) > K\}$ (call digital europea con pago 1 unidad de subyacente. También conocida como call europea *stock-or-nothing* o *asset-or-nothing*).

12.- Utiliza (5) para dar el precio al tiempo 0 del derivado $X(S(T)) = S(T)I_{\{S(T)<K\}}$ donde $I_{\{S(T)<K\}}$ es la función indicadora del conjunto $\{S(T) < K\}$ (put digital europea con pago 1 unidad de subyacente. También conocida como put europea *stock-or-nothing* o *asset-or-nothing*).

13.- Una opción put europea con precio de ejercicio de 45 pesos madura en un año. El subyacente tiene volatilidad (σ) de 20 por ciento por año y el precio spot actual es de 50 pesos. La tasa de interés libre de riesgo (r) es 5.60 por ciento por año. Divide el intervalo de 1 año en 2 intervalos de 6 meses cada uno y usa el árbol multiplicativo con u y d dados por:

$$u = \exp[(r - \frac{\sigma^2}{2})\delta + \sigma\sqrt{\delta}] \quad d = \exp[(r - \frac{\sigma^2}{2})\delta - \sigma\sqrt{\delta}].$$

(i) Muestra que $u = 1{,}172832$ y $d = 0{,}883891$. Calcula las probabilidades de riesgo neutral.
(ii) Determina el precio de la put al trabajar el árbol hacia atrás.
(iii) Determina el precio de la put usando la fórmula que lo da como un promedio sobre los valores del payoff, traído a valor presente.
(iv) Describe la estrategia de cobertura asociada; i.e., especifica cuantas unidades de subyacente y cuanta deuda debes mantener en cada nodo después de rebalancear el portafolio.

14.- El precio actual del subyacente es de 100 pesos y la volatilidad es de 30 por ciento por año. La tasa de interés libre de riesgo es 6 por ciento por año. Considera una opción call europea a un año en este subyacente con precio de ejercicio de 100 pesos.
(i) Divide el periodo de 1 año en 2 intervalos de 6 meses cada uno y usa el árbol multiplicativo con u y d como en la pregunta anterior. Calcula las probabilidades de riesgo neutral. Muestra que el valor de la opción es 13.718486.
(ii) Supón que la opción tiene un valor en el mercado de $14\frac{7}{8}$. Considerando que el mercado es realmente descrito por el árbol de la parte (i), debe existir una oportunidad de arbitraje. Explica en detalle (especificando todos los movimientos) como podrías tomar ventaja del precio de mercado *incorrecto* para obtener un beneficio sin riesgo.

15.- Un tipo especial de opción put a un año es emitida en cierto activo. El precio actual del activo es de 40 pesos y el precio actual de ejercicio es de 40 pesos. Al mes 6, si el precio del activo está por debajo de 35 pesos, el precio de ejercicio se reduce a 35 pesos; si no, permanece sin cambio. La tasa de interés libre de riesgo es de 5 por ciento por año; la volatilidad del activo es 35 por ciento por año.
(i) Usa un árbol binomial de 2 periodos con la selección usual de u y d para valuar la opción.
(ii) Ahora usa un árbol binomial de 4 periodos para valuar la opción.
(iii) Cual es la dificultad para valuar este tipo de opción?

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN MATEMÁTICAS
FINANZAS MATEMÁTICAS Y DERIVADOS EN TIEMPO DISCRETO
SESIÓN 8
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 2009/10/18.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

OPCIONES AMERICANAS 1a PARTE

Una opción americana, a diferencia de una europea, puede ser ejercida en cualquier tiempo, $k\delta$, desde su emisión hasta su maduración. Cuando estudiamos derivados europeos era precisamente la característica de solo poder ser ejercidos a maduración lo que nos permitía poder utilizar, sin confusión alguna, la notación $X(n\delta)$ para su valor en cualquier tiempo anterior $n\delta$. Ahora, en el caso americano, nos reservaremos la notación $X(n\delta)$ para denotar el valor intrínseco (valor de ejercer el derivado) al tiempo $n\delta$. El valor del derivado al tiempo $n\delta$ será denotado con $V(n\delta)$.

Recordemos el caso de derivados europeos en el contexto de un modelo binomial multiplicativo de N períodos. Tenemos una función que da el payoff del derivado $X = X(S(N\delta))$. Definimos de manera recursiva

$$\begin{aligned} h_N(y) &= X(y) \\ h_k(y) &= B(k\delta, (k+1)\delta)[q(k\delta)h_{k+1}(uy) + (1 - q(k\delta))h_{k+1}(dy)]. \end{aligned}$$

Entonces, $h_k(S(k\delta))$ es el valor del derivado al tiempo $k\delta$ y el portafolio de cobertura está dado por

$$\begin{aligned} \alpha(k\delta) &:= \Delta(k\delta) \\ &= \frac{h_{k+1}(uS(k\delta)) - h_{k+1}(dS(k\delta))}{(u-d)S(k\delta)} \end{aligned}$$

para $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Es común utilizar Δ para denotar la cantidad de activo subyacente en la cobertura del derivado.

En el caso del derivado americano, de nuevo tenemos una función X especificada. En cualquier tiempo $k\delta$, el poseedor del derivado puede ejercerlo y recibir

$$X(S(k\delta)).$$

En consecuencia, el valor del portafolio de cobertura, $V(k\delta)$, debiése ser tal que

$$V(k\delta) \geq X(S(k\delta)) \quad \forall k \quad \text{(c.s.)}.$$

Esto debido a que el valor del derivado al tiempo $k\delta$ es al menos $X(S(k\delta))$ y el valor de la cobertura debe igualar en ese momento el valor del derivado.

En cada tiempo el poseedor tiene la elección de poder ejercer el derivado. En cada tiempo se pregunta que es más conveniente, ejercer o dejar vivir el instrumento. Esto sugiere el siguiente algoritmo para la valuación del derivado americano:

$$\begin{aligned} h_N(y) &= X(y) \\ h_k(y) &= \max\left\{B(k\delta,(k+1)\delta)[q(k\delta)h_{k+1}(uy)+(1-q(k\delta))h_{k+1}(dy)], X(y)\right\}. \end{aligned}$$

Entonces, $h_k(S(k\delta))$ es el valor del derivado americano al tiempo $k\delta$.

Es muy importante observar que en cada nodo se considera que es lo que vale más entre el correspondiente valor de dejarla vivir (como sería el caso del derivado europeo) y el valor de ejercer en ese momento. Al ser definido el precio de forma recursiva (backwards), en cada tiempo $k\delta$ el valor de h_{k+1} ya trae consideradas las *optimalidades futuras*. Esto garantiza (intuitivamente) que la estrategia óptima para el poseedor es ejercer al llegar a un nodo donde el máximo coincida con el valor intrínseco del derivado (coincida con el valor de ejercer). Al ser considerada la optimalidad de forma recursiva de T hacia atrás, no se tiene la posibilidad de: *tal vez convenga ejercer más adelante aún cuando el valor intrínseco hoy sea mayor que el dejar vivir la opción*. Por supuesto, toda esta intuición será formalizada matemáticamente.

Ejemplo.-

$$S(0)=4 \quad u=2 \quad d=\frac{1}{2} \quad N=2 \quad B(k\delta,(k+1)\delta)=\frac{4}{5} \quad \forall k.$$

El árbol de precios del subyacente es

$$S(0)=4 \quad S_u=8 \quad S_d=2 \quad S_{uu}=16 \quad S_{ud}=S_{du}=4 \quad S_{dd}=1.$$

Como la estructura temporal del proceso valor de la cuenta en efectivo es constante tenemos una q única para todo el árbol:

$$\begin{aligned} q &= \frac{B^{-1}(,)-d}{u-d} \\ &= \frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Consideremos una opción put americana con strike $K=5$. Es decir, el instrumento que le confiere a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de poder vender una unidad del bien subyacente al precio K en cualquier tiempo desde la emisión de la opción (tiempo 0) hasta la maduración (tiempo $T=2\delta$). Entonces,

$$X(y)=(5-y)_+$$

Los posibles valores de la opción a maduración son:

$$h_2(16)=(5-16)_+=0 \quad h_2(4)=(5-4)_+=1 \quad h_2(1)=(5-1)_+=4.$$

Aplicando el algoritmo descrito obtenemos

$$
\begin{aligned}
h_1(8) &= \text{máx}\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}1\right),(5-8)_+\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\frac{2}{5},0\right\} \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_1(2) &= \text{máx}\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}1+\frac{1}{2}4\right),(5-2)_+\right\} \\
&= \text{máx}\{2,3\} \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
h_0(4) &= \text{máx}\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\frac{2}{5}+\frac{1}{2}3\right),(5-4)_+\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\frac{34}{25},1\right\} \\
&= \frac{34}{25}.
\end{aligned}
$$

El precio de la put americana es de $\frac{34}{25}$ pesos. El emisor de la opción debe construir su portafolio de cobertura. Al tiempo 0 debe tener un portafolio que conste de $\Delta(0)$ unidades de subyacente y una cierta cantidad en la cuenta en efectivo de tal manera que este portafolio llegue a tener un valor al tiempo 1δ tal que replique (iguale) el valor del derivado (en cualquier escenario del mundo). Se comienza con $V(0)=\frac{34}{25}$ (riqueza inicial por concepto de prima del derivado) y debiése cumplirse que

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{5} &= h_1(S_u) \\
&= \Delta(0)S_u + B^{-1}(0,1\delta)[V(0)-\Delta(0)S(0)] \\
&= 8\Delta(0)+\frac{5}{4}\left(\frac{34}{25}-4\Delta(0)\right) \\
&= 3\Delta(0)+\frac{34}{20},
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\Delta(0) = -\frac{13}{30}.
$$

Al tiempo 0 se necesita $\Delta(0)$ de subyacente y como el valor del portafolio de cobertura iguala el valor del derivado se tiene que la cantidad al tiempo 0 en la cuenta en efectivo debe ser $V(0)-\Delta(0)S(0)$. El valor que tiene este portafolio

al tiempo 1δ en el evento de que el subyacente tome el precio S_u es $\Delta(0)S_u + B^{-1}(0,1\delta)[V(0) - \Delta(0)S(0)]$, el cual tiene que igualar el correspondiente valor del derivado $h_1(S_u) = \frac{2}{5}$.
De igual forma, debe cumplirse

$$\begin{aligned} 3 &= h_1(S_d) \\ &= \Delta(0)S_d + B^{-1}(0,1\delta)[V(0) - \Delta(0)S(0)] \\ &= 2\Delta(0) + \frac{5}{4}\left(\frac{34}{25} - 4\Delta(0)\right) \\ &= -3\Delta(0) + \frac{34}{20} \end{aligned}$$

y, en efecto, obtenemos que

$$\Delta(0) = -\frac{13}{30}.$$

Concluimos que usando $\Delta(0) = -\frac{13}{30}$ tenemos que

$$V_u = h_1(S_u) = \frac{2}{5} \quad V_d = h_1(S_d) = 3.$$

Al valuar el derivado americano, observamos que si al tiempo 1δ el precio del subyacente resulta ser $S_d = 2$, entonces el derivado debiése ser ejercido por su poseedor (el valor de ejercer es mayor que el valor de dejar vivir el instrumento). En ese caso, el poseedor ejerce y el contrato termina. Qué ocurre si, por alguna razón, el poseedor no ejerce? Si el poseedor del derivado no actua de forma óptima el instrumento sigue con vida y el emisor deberá continuar con su estrategia de cobertura.
Ahora se debería obtener el valor de Δ_d. Para esto, planteamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= h_2(4) \\ &= \Delta_d S_{du} + B^{-1}(1\delta,2\delta)[V_d - \Delta_d S_d] \\ &= 4\Delta_d + \frac{5}{4}(3 - 2\Delta_d) \\ &= \frac{3}{2}\Delta_d + \frac{15}{4}, \end{aligned}$$

de donde

$$\Delta_d = -\frac{11}{6}.$$

También se debería cumplir

$$\begin{aligned} 4 &= h_2(1) \\ &= \Delta_d S_{dd} + B^{-1}(1\delta,2\delta)[V_d - \Delta_d S_d] \\ &= \Delta_d + \frac{5}{4}(3 - 2\Delta_d) \\ &= -\frac{3}{2}\Delta_d + \frac{15}{4}, \end{aligned}$$

de donde
$$\Delta_d = -\frac{1}{6}.$$
Qué ocurrió? Por qué no fue posible determinar de forma única Δ_d? De dónde proviene el error?
Repasando, si al tiempo 1δ el precio del subyacente toma el valor S_d, entonces el derivado debió ser ejercido. A final de cuentas, $\Delta(0)$ fue construida para afrontar este hecho; $\Delta(0)$ es tal que el portafolio de cobertura toma el valor 3, el valor que se debe afrontar si el derivado se ejerce. Si por alguna razón el poseedor del derivado no actua de forma óptima, entonces el derivado que valía 3 pesos (el valor de ejercer) es *obligado* a tomar el valor 2, el valor de dejarlo vivir. Esta diferencia, $(3 - 2 = 1)$, puede ser *consumida* por el emisor en ese momento y debe calcular el valor delta, Δ_d, utilizando el valor 2 para el derivado en lugar de 3:
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{2}\Delta_d + \frac{5}{2} \\ 4 &= -\frac{3}{2}\Delta_d + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$
En este caso de ambas se obtiene
$$\Delta_d = -1.$$
Cuándo se consume? Se consume si
$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(k\delta,(k+1)\delta)h_{k+1}(S((k+1)\delta))|\mathbf{F}(k)] < h_k(S(k\delta))$$
y el poseedor del derivado americano **no** ejerce. Es decir, si el valor intrínseco de la opción en $k\delta$ (el valor de ejercer) es estrictamente mayor que el valor de dejar vivir la opción por otro período y el poseedor no ejerce la opción. En este caso, el emisor puede consumir para cerrar la brecha y asegurar que
$$V(k\delta) = h_k(S(k\delta)) \quad \forall k,$$
donde h_k es el valor definido en el algoritmo para derivados americanos.

En el ejemplo,
$$h_1(S_d) = 3 \quad h_2(S_{du}) = 1 \quad h_2(S_{dd}) = 4.$$
En consecuencia,
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[B(1\delta,2\delta)h_2(S(2\delta))|\mathbf{F}(1)](0d\omega_2) &= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}4\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$
y
$$\begin{aligned} h_1(S(1\delta))(0d\omega_2) &= h_1(S_d) \\ &= h_1(2) \\ &= 3, \end{aligned}$$

de tal manera que hay una brecha de tamaño 1.
Si el poseedor del derivado no ejerce al tiempo 1δ en el estado $\omega = 0d\omega_2$, entonces elemisor puede consumir 1 al tiempo 1δ. A partir de ahí, usa el portafolio de cobertura habitual

$$\Delta(k\delta) = \frac{h_{k+1}(uS(k\delta)) - h_{k+1}(dS(k\delta))}{(u-d)S(k\delta)}.$$

En el ejemplo tenemos $h_1(S_d) = X(S_d)$. Es óptimo para el poseedor del derivado americano ejercerlo en el momento en que su valor $h_k(S(k\delta))$ coincida con su valor intrínseco $X(S(k\delta))$.

Es tiempo de formalizar lo visto; para esto primero repasaremos una serie de conceptos y resultados que nos serán útiles.

Definición 1 *Sea* $(\Omega, \boldsymbol{F}, \{\boldsymbol{F}(k)\}_{k=0}^{N}, \boldsymbol{P})$ *un espacio filtrado. Un* ***tiempo de paro*** *es una variable aleatoria* $\tau : \Omega \to \{0, 1, \ldots, N\} \bigcup \{\infty\}$ *con la propiedad de que:*

$$\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) = k\} \in \boldsymbol{F}(k) \quad \forall k = 0, 1, \ldots, N, \infty.$$

Sigamos utilizando el mismo ejemplo de árbol de precios y la opción put americana de antes. En este contexto tenemos

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{0dd, 0du, 0ud, 0uu\} \\
\mathbf{F}(0) &= \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{(nada de información)} \\
\mathbf{F}(1) &= \{\emptyset, \Omega, \{0dd, 0du\}, \{0ud, 0uu\}\} \\
\mathbf{F}(2) &= 2^{\Omega} \\
&= \mathbf{F} \quad \text{(toda la información).}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.-

$$\tau = \text{mín}\,\{k; h_k(S(k\delta)) = (5 - S(k\delta))_+\}.$$

Tenemos que τ corresponde a *parar al primer tiempo donde el valor de la opción coincide con su valor intrínseco.* Notemos que

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in \{0dd, 0du\}, \\ 2 & \text{si} \quad \omega \in \{0ud, 0uu\}. \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\{\omega; \tau(\omega) = 0\} &= \emptyset \in \mathbf{F}(0), \\
\{\omega; \tau(\omega) = 1\} &= \{0dd, 0du\} \in \mathbf{F}(1), \\
\{\omega; \tau(\omega) = 2\} &= \{0ud, 0uu\} \in \mathbf{F}(2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, τ es un tiempo de paro.

Ejemplo 2.-

$$\rho = \text{mín}\,\{k; S(k\delta) = m_2\}\,,$$

donde

$$m_2 := \min_{0\le j\le 2} S(j\delta).$$

Tenemos que ρ corresponde a *parar al primer tiempo donde el precio del activo riesgoso alcanza su valor mínimo*. Notemos que

$$\rho(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \omega \in \{0ud, 0uu\}\,, \\ 1 & \text{si} \quad \omega = 0du, \\ 2 & \text{si} \quad \omega = 0dd. \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \{\omega; \rho(\omega) = 0\} &= \{0ud, 0uu\} \notin \mathbf{F}(0), \\ \{\omega; \rho(\omega) = 1\} &= \{0du\} \notin \mathbf{F}(1), \\ \{\omega; \rho(\omega) = 2\} &= \{0dd\} \in \mathbf{F}(2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ **no** es un tiempo de paro.

Definición 2 *Sea τ un tiempo de paro. Decimos que un conjunto $A \subset \Omega$ está* ***determinado por el tiempo*** τ *si*

$$A \bigcap \{\omega; \tau(\omega) = k\} \in \boldsymbol{F}(k) \quad \forall k.$$

La colección de conjuntos determinados por τ es una σ-álgebra, la cual denotamos por $\mathbf{F}(\tau)$.

Ejemplo 3.-
Utilicemos el mismo ejemplo del árbol de precios y de la opción put americana. También consideremos de nuevo

$$\tau = \text{mín}\,\{k; h_k(S(k\delta)) = (5 - S(k\delta))_+\}\,;$$

i.e.,

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in \{0dd, 0du\}\,, \\ 2 & \text{si} \quad \omega \in \{0ud, 0uu\}\,. \end{cases}$$

Consideremos el conjunto $\{0ud\}$. Observemos que

$$\begin{aligned} \{0ud\} \cap \{\omega; \tau(\omega) = 0\} &= \emptyset \in \mathbf{F}(0), \\ \{0ud\} \cap \{\omega; \tau(\omega) = 1\} &= \emptyset \in \mathbf{F}(1), \\ \{0ud\} \cap \{\omega; \tau(\omega) = 2\} &= \{0ud\} \in \mathbf{F}(2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{0ud\}$ está determinado por el tiempo τ.
Sin embargo,

$$\{0du\} \cap \{\omega; \tau(\omega) = 1\} = \{0du\} \notin \mathbf{F}(1).$$

En consecuencia, $\{0du\}$ **no** está determinado por el tiempo τ.
Los átomos de $\mathbf{F}(\tau)$ son

$$\{0ud\} \quad \{0uu\} \quad \{0du, 0dd\}\,.$$

Sea $(\Omega, \mathbf{F}, \{\mathbf{F}(k)\}_{k=0}^{N}, \mathbf{P})$ un espacio filtrado. Sea $\{V(k\delta)\}_{k=0}^{N}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración y τ un tiempo de paro respecto a esta misma filtración. Entonces, $V(\tau)$ es una variable aleatoria $\mathbf{F}(\tau)$-medible cuyo valor en ω está dado por

$$V(\tau)(\omega) = V(\tau(\omega))(\omega).$$

Teorema 1 ***(Muestreo Opcional)***
Supongamos que $\{Z(k\delta), \boldsymbol{F}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ (o $\{Z(k\delta), \boldsymbol{F}(k)\}_{k=0}^{N}$) es una submartingala. Sean τ y ρ tiempos de paro acotados; i.e., existe un número no aleatorio N tal que

$$\tau \leq N \quad \rho \leq N \quad c.s.$$

Si $\tau \leq \rho$ c.s., entonces

$$Z(\tau) \leq \boldsymbol{E}[Z(\rho)|\boldsymbol{F}(\tau)].$$

Tomando esperanzas obtenemos $\boldsymbol{E}[Z(\tau)] \leq \boldsymbol{E}[Z(\rho)]$ y, en particular, $Z(0) = \boldsymbol{E}[Z(0)] \leq \boldsymbol{E}[Z(\rho)]$.

Si $\{Z(k\delta), \boldsymbol{F}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ es una supermartingala, entonces $\tau \leq \rho$ implica

$$Z(\tau) \geq \boldsymbol{E}[Z(\rho)|\boldsymbol{F}(\tau)].$$

Si $\{Z(k\delta), \boldsymbol{F}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ es una martingala, entonces $\tau \leq \rho$ implica

$$Z(\tau) = \boldsymbol{E}[Z(\rho)|\boldsymbol{F}(\tau)].$$

EJERCICIOS:

1.- Considere un activo que no paga dividendos cuyo precio es restringido a un árbol binomial multiplicativo de dos períodos con $u = 3$ y $d = \frac{1}{2}$. Supón que $S(0) = 4$ y que $\exp(r\delta) = 2$. Considera una put europea con $K = 3$.
(i) Encuentra el valor de la opción trabajando el árbol hacia atrás.
(ii) Cual es el portafolio que replica al tiempo $t = 0$.
(iii) Supón que en el primer periodo de tiempo el subyacente sube a 12. Como debiese ser cambiado el portafolio que replica?
(iv) Ahora considera la put americana asociada. Su valor al tiempo 0 es diferente al de la europea? Explica.

2.- Consideremos una opción put americana con madurez de un año y precio de ejercicio 60 escrita en un subyacente que no paga dividendos. Supongamos que $S(0) = 60$, la volatilidad σ es 35 por ciento por año y la tasa libre de riesgo r es 6 por ciento por año. Usemos un árbol binomial de dos períodos.
(i) Verifica que con las elecciones usuales obtenemos u =1.28 y d =.7803. Tambien verifica que q =0.5007. (Puedes redondear a .5). Valua la opción trabajando

el árbol hacia atrás (no olvides checar la posibilidad de ejercer temprano!).
(ii) Describe en cada nodo la estrategia que replica. Verifica que esta estrategia es auto-financiada y que replica el payoff.

3.- Consideremos un árbol de tres periodos con $S(0) = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ y $\exp(r\delta) = \frac{5}{16}$ de tal manera que $q = \frac{1}{2}$. Para $m = 0, 1, 2, 3$, definamos $Y(m) = \sum_{k=0}^{m} S(k\delta)$. Consideremos una *opción call asiática* que expira en el periodo tres y con precio de ejercicio $K = 4$ (i.e., cuyo payoff es $(\frac{1}{4}Y(3) - 4)_+$).
(i) Desarrolla un algoritmo para calcular el valor de este instrumento al tiempo $m\delta$ en términos de su valor al tiempo $(m+1)\delta$ y aplicalo de manera recursiva para calcular el precio al tiempo 0.
(ii) Dá la fórmula para $\Delta(m\delta)$, la cantidad de subyacente al tiempo $m\delta$ que debe contener el portafolio de cobertura.

4.- Demuestra que $\mathbf{F}(\tau)$, la colección de conjuntos determinados por un tiempo de paro τ, es una σ-álgebra.

5.- Demuestra que en el ejemplo visto, los átomos de $\mathbf{F}(\tau)$ son

$$\{0ud\} \quad \{0uu\} \quad \{0du, 0dd\}\,.$$

6.- Considera el árbol de precios del subyacente así como la opción put americana del ejemplo visto en clase. Considera los tiempos de paro:

$$\tau = \text{mín}\,\{k; h_k(S(k\delta)) = (5 - S(k\delta))_+\}\,,$$

$$\rho = 2.$$

Bajo la medida de probabilidad de riesgo neutral, elproceso de precios descontado $Z(k\delta) := \left(\frac{4}{5}\right)^k S(k\delta)$ es una martingala. Utiliza los átomos de $\mathbf{F}(\tau)$ para ilustrar el teorema del muestreo opcional en este caso.

7.- Prueba el teorema del muestreo opcional (en este contexto discreto).

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 12
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 30/03/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

Procesos continuos

En la practica, un precio puede cambiar en cualquier instante. En realidad, debiésemos empezar de cero nuestro análisis del caso continuo. Ciertamente nuestro modelo discreto nos guiará intuitivamente, pero argumentos límite basados en hacer tender δ a cero no pueden ser usados rigurosamente.
En nuestro estudio encontraremos un teorema de representación que establecerá las bases de una construcción libre de riesgo y de nueva cuenta serán las medidas martingala las que permitirán utilizar *correctamente* el operador esperanza para valuar derivados. En este caso los procesos y medidas serán más difíciles de manejar a un nivel intuitivo y necesitaremos apoyarnos en un tipo de cálculo.
Ya no será posible trabajar de una manera completamente general y nos concentraremos en *movimiento browniano* y sus parientes cercanos. El principio rector del resto de nuestro curso será que el movimiento browniano es lo suficientemente sofisticado como para obtener modelos interesantes, y al mismo tiempo lo suficientemente sencillo para ser manejable.
Comencemos pues...

Nuestros subyacentes son riesgosos y en consecuencia necesitamos aleatoriedad. Al igual que en el caso discreto, necesitamos comenzar con algo simple y al mismo tiempo razonablemente realista. En qué sentido tenemos continuidad en un proceso?

- En cualquier tiempo el valor puede cambiar y de un momento a otro.
- Los valores tomados pueden ser expresados en fracciones arbitrariamente 'refinadas'. Cualquier número real puede ser tomado como valor.
- El proceso cambia continuamente. El valor no puede saltar instantaneamente. Si el valor cambia de 1 a 1,05, este debe haber pasado, inclusive muy rapidamente, por todos los valores intermedios.

Por abruptos que los cambios en precios pudiésen ser, como un punto de partida no es poco realista asegurar que exhiben un comportamiento continuo.

Desde 1900, con su *théorie de la spéculation*, Louis Bachelier comenzó a comparar los precios de activos, de la bolsa de valores parisina, con un proceso

continuo particular, aquél seguido por una particula que se mueve aleatoriamente en un medio líquido (o gaseoso), el *movimiento browniano.*
Realmente, el parecido entre los dos de manera local es impresionante. Ambos despliegan un comportamiento de tipo zig-zag muy marcado y abrupto y la misma similitud ante cambios de escala (el comportamiento de tipo zig-zag no se *suaviza* al incrementar la escala). Desafortunadamente, a un nivel global la similitud se desvanece en algunos aspectos; a nivel global el (precio del) activo se vuelve más *ruidoso* o *volatil* con el tiempo, y además nunca se vuelve negativo. Aún así, sólo necesitamos una base para comenzar. Veremos que el movimiento browniano es, en realidad, un componente muy efectivo para construir procesos continuos de mucha utilidad (debido a su gran similitud con el activo a un nivel local). Esto motiva a echar un ojo más de cerca (sin embargo, no muy rigurosamente debido al enfoque del curso) a este proceso.

Movimiento browniano

El primer paso a seguir es construir una familia especial de procesos discretos binomiales.

Definición 1 ***La caminata aleatoria*** $W_n(t)$
Para n natural, definimos el proceso binomial $W_n(t)$ como:
(i) $W_n(0) = 0$,
(ii) espaciado (temporal) de $\frac{1}{n}$,
(iii) saltos hacia arriba y hacia abajo iguales y de tamaño $\frac{1}{\sqrt{n}}$,
(iv) medida $\mathbf{P}$*, dada por las probabilidades de subir y bajar de* $\frac{1}{2}$ *en todos lados.*

En otras palabras, si $\{X_i\}$ es una sucesión de v.a.'s independientes que toman valores $+1$ o -1 con igual probabilidad, entonces el valor de W_n en el i-ésimo paso es definido como:

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = W_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{X_i}{\sqrt{n}} \quad \forall i \geq 1$$

Qué pasa cuando n se hace grande? Los movimientos de tamaño $\frac{1}{\sqrt{n}}$ parecen forzar algún tipo de convergencia. Consideremos por ejemplo la distribución de W_n al tiempo 1: para una W_n particular, hay $n+1$ posibles valores que puede tomar, con un rango que va desde $-\sqrt{n}$ hasta $\sqrt{n}$. Pero observemos que la distribución siempre tiene media cero y varianza 1 (los n sumandos son i.i.d. con media cero y varianza $\frac{1}{n}$). Utilizando el Teorema del Límite Central (TLC), cuando $n \to \infty$, la distribución de $W_n(1)$ tiende a la distribución normal $N(0,1)$. De hecho, el valor de $W_n(t)$ es

$$W_n(t) = \sqrt{(}t)\left(\frac{\sum_{i=1}^{nt} X_i}{\sqrt{nt}}\right)$$

La distribución del cociente en el paréntesis tiende, por el TLC, a una distribución $N(0,1)$ y en consecuencia, la distribución de $W_n(t)$ tiende a una distribución $N(0,t)$.

Hay una unidad subyacente a la familia. Todas las distribuciones marginales y, aún más, las distribuciones marginales condicionales, tienden hacia la misma estructura normal subyacente. Cada caminata aleatoria W_n tiene la propiedad de que sus movimientos futuros a partir de una posición particular son independientes de donde esta esa posición y de la historia de todos sus movimientos previos hasta ese tiempo. Además, tal desplazamiento futuro $W_n(s+t)-W_n(s)$ tiene distribución binomial con media cero y varianza t. Entonces, el TLC nos da una estructura límite constante y todas las marginales condicionales tienden a una distribución normal con los mismos parámetros.
Las marginales y las marginales condicionales convergen; de hecho, las distribuciones de los procesos también convergen. Aún cuando el alcance del curso no es el de un marco y una demostración formal de este hecho, la distribución de W_n converge, y esta converge a movimiento browniano:

Definición 2 ***Movimiento Browniano.***
El proceso estocástico $W = (W_t : t \geq 0)$ *es un* $\mathbf{P}$*-movimiento browniano si y solo si*
(i) W_t *es continua y* $W_0 = 0$*,*
(ii) $W_t \sim N(0,t)$ *bajo* $\mathbf{P}$*,*
(iii) El incremento $W_{s+t} - W_s \sim N(0,t)$ *bajo* $\mathbf{P}$ *y es independiente de* $\Im_s$*, la* σ*-álgebra generada por* $W_j \quad j \leq s$*.*

Vale la pena mencionar algunas características (que no vamos a probar!) del movimiento browniano.

- Aunque las trayectorias de W son continuas (c.s.), éstas no son diferenciables (c.s.).
- El movimiento browniano tomará, eventualmente, cualquier valor real (una vez más, c.s.).
- Una vez que el movimiento browniano tome un valor, inmediatamente lo volverá a tomar *infinitamente seguido*, y de nuevo de tiempo en tiempo en el futuro.
- Sin importar la escala utilizada, las trayectorias del movimiento browniano lucen igual. El movimiento browniano es un fractal.

El movimiento browniano (concebido en términos de su definición matemática) también es conocido como proceso de Wiener (gracias al que dió la caracterización matemática del fenómeno) y es un proceso gaussiano unidimensional.

Movimiento browniano como modelo para el precio de un activo

Recordemos que el movimiento browniano no era un buen modelo en el contexto global para el precio de un activo. Este tiene media cero, mientras que el precio de un activo normalmente crece a alguna tasa. Podemos añadir una tendencia (drift) de manera artificial. Por ejemplo,

$$S_t = W_t + \mu t$$

para alguna constante μ que refleja el crecimiento nominal, es llamado movimiento browniano con tendencia. Si este parece muy ruidoso, o no suficientemente ruidoso, podemos escalar nuestro proceso con otro factor. Por ejemplo,

$$S_t = \sigma W_t + \mu t$$

para alguna constante σ. Podríamos estimar los valores más adecuados para μ y σ y obtener algo muy similar a lo visto en los mercados con un crecimiento tendencial a largo plazo. Aún así, el problema que persiste es que el proceso puede volverse negativo al principio con probabilidad positiva. Por supuesto, no queremos que esto pase para el valor de un precio.
Nuestra siguiente modificación será tomar la exponencial de este proceso,

$$S_t = \exp(\sigma W_t + \mu t)$$

Una vez más, encontrando la mejor estimación para μ y σ vemos qué realmente el comportamiento del proceso es muy parecido al comportamiento observado en los precios de los activos en el mercado. Este proceso es usualmente llamado movimiento browniano exponencial con tendencia o algunas veces movimiento browniano geometrico con tendencia. Este no es el único modelo para precios de activos, pero es simple y no tan malo (veremos algunos otros más adelante).

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 13
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 03/04/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Cuando consideramos un marco determinístico y una función diferenciable, aprendimos que, por compleja que esta función pueda ser globalmente, si nosotros analizamos la función en una vecindad de un punto específico, basta con escoger una vecindad suficientemente pequeña alrededor del punto en el dominio, para tener que la gráfica de la función es, a una razonable aproximación, como una recta (amplificamos la imagen, cambiamos de escala). Por extraño que pueda ser su comportamiento global, las funciones diferenciables están, en un nivel básico local, construidas por segmentos de linea recta. El cálculo newtoniano confirma esta observación.
Considerando una construcción newtoniana, podríamos decidirnos a construir una familia de funciones, tan solo especificando como construirlas localmente a partir de nuestra estructura básica, la linea recta. Podríamos escribir el cambio en el valor de una *función newtoniana* f en un intervalo de tiempo en t de longitud infinitesimal dt como

$$df_t = \mu_t dt$$

donde μ_t es nuestra función de escala; i.e., la pendiente o tendencia de la linea recta amplificada en t.
Ejemplos muy sencillos de funciones newtonianas son:

(1) La ecuación $df_t = \mu dt$, con μ una constante. Qué es f y cómo se comporta globalmente? Si juntamos segmentos de linea recta de pendiente μ, entonces simplemente producimos una linea recta de pendiente μ. Si, por ejemplo, $f_0 = 0$, podríamos escribir f_t como $f_t = \mu t$.

(2) La ecuación $df_t = tdt$. Aquí la pendiente al tiempo t tiene valor t. En este caso nos es de utilidad una simple integración; si $f_0 = 0$, entonces $f_t = \frac{1}{2}t^2$. Podemos verificar diferenciando que, en efecto, $f'_t = t$.

UNICIDAD (diferenciales newtonianas):

- Si f_t y $\widehat{f_t}$ son dos funciones diferenciables que tienen el mismo valor en cero, $f_0 = \widehat{f_0}$, y que tienen tendencias idénticas, $df_t = d\widehat{f_t}$, entonces los procesos son iguales: $f_t = \widehat{f_t}$ para toda t. Es decir, f es única dada la tendencia μ_t (y f_0).

- Dada una función diferenciable f_t, solo hay una función μ_t que satisface $f_t = f_0 + \int_0^t \mu_s ds$ (para toda t). Es decir, μ es única dada f.

Pero qué pasa si $\mu_t = \mu(f_t, t)$, donde $\mu(x, t)$ es una función conocida? En este caso

$$df_t = \mu(f_t, t)dt$$

es llamada una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO). Si f es diferenciable y satisface esta ecuación (dado f_0), llamamos a f una *solución*. Muchas EDOs no tienen solución y muchas tienen solución pero no única. Algunos ejemplos son:

(1) La ecuación $df_t = f_t dt$. Ahora una integración directa no ayuda, pero de nuestro conocimiento previo podemos verificar (diferenciando) que una solución es $f_t = \exp(t)$, la cual es única para $f_0 = 1$.

(2) La ecuación $df_t = f_t t^{-2} dt$. Dado $f_0 = 0$, hay una infinidad de soluciones: $f_t = a \exp(-\frac{1}{t})$. Dado $f_0 \neq 0$, la ecuación no tiene solución.

Aún cuando las EDO sean herramientas muy útiles, hay muchas de ellas que presentan grandes problemas y son muy difíciles de analizar.

Diferenciales estocásticas

Si consideramos un proceso de construcción basado en el movimiento browniano, por cerca que nos encontremos de un punto, el aspecto que encontramos no es el de una linea recta sino nuevamente el de un movimiento browniano. Podríamos construir un movimiento browniano de forma global a partir de muchos movimientos brownianos locales. De igual manera, con un escalamiento adecuado, podríamos construir procesos aleatorios generales. Si también incluyésemos segmentos de linea recta, podríamos incluir funciones newtonianas.
El tipo de proceso estocástico, X, que estudiaremos tendrá ambas partes, un término newtoniano basado en dt y un término browniano basado en el incremento infinitesimal de W, el cual denotaremos por dW_t. El término browniano de X puede incluir un factor de ruido σ_t:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

La tendencia μ_t y el ruido σ_t pueden depender en t, pero también pueden depender en valores que X o W tomaron hasta t (i.e. son adaptados a $\Im_t = \sigma(W_r : r \leq t)$).

Definición 1 *Un proceso estocástico X de nuestro método de construcción es un proceso continuo $(X_t : t \geq 0)$ tal que X_t puede ser escrito como*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

donde μ y σ son procesos $\Im$-previsibles tales que $\int_0^t (\sigma_s^2 + |\mu_s|) ds < \infty$ para toda t (c.s.). La forma diferencial de esta ecuación es

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

UNICIDAD:

- Si dos procesos X_t y $\widehat{X}_t$ son tales que $X_0 = \widehat{X}_0$ y tienen tendencia y volatilidad idénticas μ_t y σ_t, entonces los procesos son iguales: $X_t = \widehat{X}_t$ para toda t. Es decir, X es único dados μ_t y σ_t (y X_0).
- Dado el proceso X, solo hay un par μ_t y σ_t que satisface $X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$ (para toda t). Es decir, μ_t y σ_t son únicos dado X.

En el caso de que tengamos

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

con $\mu(x,t)$ y $\sigma(x,t)$ funciones determinísticas, entonces esta ecuación se conoce como Ecuación Diferencial Estocástica (EDS). Una EDS no necesariamente tiene solución y en el caso de que la tenga, puede ser que esta no sea única.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 14
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 17/04/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

CÁLCULO DE ITÔ

Una vez que hemos partido de nuestra unidad básica (movimiento browniano) para nuestra construcción, tenemos una idea de lo que hemos creado? Solo parcialmente. En el caso más simple donde μ y σ son constantes, la EDE para X es

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

No es difícil adivinar que la solución es:

$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

(suponiendo que $X_0 = 0$). Nuestro poco conocimiento de W_t y dW_t nos da, por lo menos, cierta confianza de que la forma diferencial de σW_t es σdW_t.

Esta integración intuitiva que hemos utilizado no nos lleva demasiado lejos. Con el siguiente ejemplo, veremos la necesidad que tenemos de herramientas que nos permitan manipular las ecuaciones diferenciales estocásticas. Necesitamos obtener los equivalentes a la regla de la cadena, la regla del producto, la integración por partes, etc. que tenemos en el cálculo newtoniano.
Supongamos que tenemos una función del movimiento browniano como por ejemplo: $f(W_t) = W_t^2$. Podemos utilizar nuestra simple regla de la cadena para obtener la diferencial estocástica df_t? Bajo reglas newtonianas, $d(W_t^2)$ sería $2W_t dW_t$. Nosotros debiésemos verificar via integración, ya que

$$\text{si} \quad \int_0^t d(W_s^2) = 2\int_0^t W_s dW_s, \quad \text{entonces} \quad W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s$$

Cómo podemos atacar $\int_0^t W_s dW_s$? Consideremos la partición de $[0, t]$ dada por $\{0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, ..., \frac{(n-1)t}{n}, t\}$ para alguna n. Entonces, podríamos aproximar la integral con:

$$2\int_0^t W_s dW_s \approx 2\sum_{i=0}^{n-1} W\left(\frac{it}{n}\right)\left(W\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - W\left(\frac{it}{n}\right)\right)$$

Qué observaciones podemos hacer de ésta expresión? La propiedad (iii) del movimiento browniano nos dice que el incremento entre paréntesis es independiente del movimiento browniano hasta ese punto, y en particular del término $W\left(\frac{it}{n}\right)$. También sabemos que el incremento tiene media cero, lo cual implica

(usando la independencia) que también el producto del incremento y el término $W\left(\frac{it}{n}\right)$ tiene media cero. Dado que la suma consta de términos con media cero, tenemos que la suma misma tiene media cero.
Pero debido a la estructura de varianza del movimiento browniano, W_t^2 tiene media t. Entonces, $2W_t dW_t$ *no puede* ser la diferencial de W_t^2 ya que su integral no tiene ni siquiera la esperanza correcta.
Qué fue lo que paso aquí? Si consideramos la expansión de Taylor de $f(W_t)$ para f suficientemente suave, tenemos

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)(dW_t)^2 + \frac{1}{3!}f'''(W_t)(dW_t)^3 + \cdots$$

Con nuestra familiaridad con diferenciales newtonianas supusimos que $(dW_t)^2$ y términos de mayor orden eran cero. Pero tenemos que ser más cuidadosos con el movimiento browniano. Dada la misma partición considerada arriba, podemos modelar la integral de $(dW_t)^2$ con la (ojalá convergente cuando $n \to \infty$) aproximación

$$\int_0^t (dW_s)^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\left(W\left(\frac{ti}{n}\right) - W\left(\frac{t(i-1)}{n}\right)\right)^2$$

Pero si hacemos:

$$Z_{n,i} = \frac{W\left(\frac{ti}{n}\right) - W\left(\frac{t(i-1)}{n}\right)}{\sqrt{\frac{t}{n}}}$$

entonces, para cada n, $Z_{n,1}, Z_{n,2}, ...$ es una sucesión de v.a.'s i.i.d. $N(0,1)$. Esto es debido a que cada incremento $W\left(\frac{ti}{n}\right) - W\left(\frac{t(i-1)}{n}\right)$ es una v.a. $N(0, \frac{t}{n})$, independiente de los incrementos anteriores por la propiedad (iii) del movimiento browniano.
Podemos reescribir nuestra aproximación como

$$\int_0^t (dW_s)^2 \approx t\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_{n,i}^2}{n}$$

Por la Ley Débil de los Grandes Números, la distribución de la suma en la derecha converge a la esperanza constante de cada $Z_{n,i}^2$, que es 1. Entonces,

$$\int_0^t (dW_s)^2 = t$$

o en forma diferencial

$$(dW_t)^2 = dt$$

No podemos ignorar el término $(dW_t)^2$, éste parece de segundo orden solo por la notación. Qué pasa con $(dW_t)^3$ y los demás? Resulta que estos si son despreciables a primer orden. Entonces Taylor nos da que

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt + 0$$

Lema 1 *(Fórmula de Itô)*
Si X es un proceso estocástico que satisface $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ y f es una función C^2 (con derivada segunda continua), entonces $Y_t := f(X_t)$ es un proceso estocástico que satisface

$$dY_t = (\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t))dt + (\sigma_t f'(X_t))dW_t$$

Volviendo a W_t^2, podemos aplicar Itô con $X = W$ y $f(x) = x^2$ y obtenemos

$$d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t$$

o

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + t$$

lo cual tiene al menos la esperanza correcta.
De manera más general, si $X = W$ entonces $f(X)$ tiene diferencial

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 15
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 21/04/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

Obtención de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas a partir de procesos

El uso más inmediato que le podemos dar al lema de Itô es el de generar EDE's a partir de una expresión funcional para un proceso. Recordemos el movimiento browniano exponencial:

$$X_t = \exp(\mu t + \sigma W_t) \tag{1}$$

Cuál es la EDE que X satisface? Consideremos $Y_t = \mu t + \sigma W_t$; entonces, Y_t es suficientemente sencillo que podemos escribir la EDE que satisface:

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

Tomando $f(x) = \exp(x)$ podemos escribir $X_t = f(Y_t)$ y aplicando la fórmula de Itô obtenemos

$$\begin{aligned} dX_t &= (\mu f'(Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(Y_t))dt + \sigma f'(Y_t)dW_t & (2) \\ &= X_t((\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t) & (3) \end{aligned}$$

Obtención de procesos a partir de EDE's

Una tarea muy importante para nosotros es la de resolver EDE's. Desafortunadamente, la mayoría son simplemente muy difíciles de resolver. Solo en unos pocos ejemplos podemos obtener una solución y en general, esto es basado en una inspiración más que en una técnica. Una solución a una EDE es llamada una difusión.
Como un ejemplo, consideremos la EDE

$$dX_t = \sigma X_t dW_t \tag{4}$$

Si observamos cuidadosamente el ejemplo de arriba, notamos que si escogemos μ tal que $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$ en (3), entonces obtenemos (4). En consecuencia, al considerar (1) nuestra propuesta es

$$X_t = \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t) \tag{5}$$

Al utilizar la fórmula de Itô comprobamos que, en efecto, dX_t es $\sigma X_t dW_t$. Esta solución es única (salvo constantes multiplicativas). Esta EDE es suficientemente especial para tener un nombre: exponencial Doléans del movimiento browniano. Aprovechando una vez más el proceso dado por (1) y la EDE generada (3), consideremos de una vez la EDE siguiente:

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{6}$$

obteniendo claramente que su solución es:

$$X_t = \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t) \tag{7}$$

Resultados principales en integrales estocásticas y EDE

- **Lema de Itô**
  Además de la versión ya vista, también son muy usadas las dos generalizaciones siguientes:
  Primero, si $dX_t = h(X_t, t)dt + g(X_t, t)dW_t$ entonces $Y_t = f(X_t, t)$ satisface la EDE

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dX_t dX_t \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}g^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + g\frac{\partial f}{\partial x}dW_t \end{aligned}$$

  Segundo, si X_t y Y_t son adaptados al mismo movimiento browniano W,

$$dX_t = h_1 dt + g_1 dW_t$$
$$dY_t = h_2 dt + g_2 dW_t$$

  y f es una función suave de tres variables, entonces $Z_t = f(X_t, Y_t, t)$ satisface la EDE

$$dZ_t = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dX_t dX_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dX_t dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dY_t dY_t$$

  donde

$$\begin{aligned} dX_t dX_t &= g_1^2 dt \\ dY_t dY_t &= g_2^2 dt \\ dX_t dY_t &= g_1 g_2 dt \end{aligned}$$

  COROLARIO: regla del producto
  Recordemos que en el cálculo newtoniano tenemos la regla del producto siguiente

$$d(f_t g_t) = f_t dg_t + g_t df_t \tag{8}$$

  Consideremos ahora el caso estocástico con X_t y Y_t que satisfacen

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$
$$dY_t = \nu_t dt + \rho_t dW_t$$

  entonces

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t \rho_t dt$$

- $E\left[\int_a^b FdW\right] = 0.$
- $E\left[\left(\int_a^b F(X_s, s)dW_s\right)^2\right] = \int_a^b E[F^2(X_s, s)]ds.$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 16
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 24/04/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

CAMBIO DE MEDIDA

Cuando trabajamos en tiempo discreto, fuimos muy cuidadosos en separar los procesos y las medidas que utilizabamos. Sin embargo, no hemos mencionado medidas en nuestras diferenciales estocásticas. De hecho, aunque sea de forma implícita, no hemos ignorado la importancia de la medida que usamos. Al manipular diferenciales de movimiento browniano, de fondo tenemos involucrada una medida ya que, en realidad, W no es un movimiento browniano per se, sino más bien un movimiento browniano con respecto a una medida, un $\mathbf{P}$-movimiento browniano. El problema es que hasta este momento, no tenemos idea de como W_t permite que X_t cambie cuando la medida cambia.

La derivada de Radon-Nikodym

Regresemos por un tiempo a procesos discretos para ayudarnos a obtener la intuición detrás de los efectos que causa un cambio de medida. Consideremos una caminata aleatoria simple de dos pasos: al tiempo 0, la caminata tiene valor 0 y, con probabilidad p_1 toma al tiempo 1 el valor 1 y con probabilidad $1-p_1$ el valor -1. Si al tiempo 1 vale 1, entonces con probabilidad p_2 toma al tiempo 2 el valor 2 y con probabilidad $1-p_2$ el valor 0. Si al tiempo 1 vale -1, entonces con probabilidad p_3 toma al tiempo 2 el valor 0 y con probabilidad $1-p_3$ el valor -2.
Para ir del tiempo 0 al tiempo 2, podemos seguir cuatro posibles trayectorias:

Trayectoria	Probabilidad
$\{0,1,2\}$	$p_1p_2 =: \pi_1$
$\{0,1,0\}$	$p_1(1-p_2) =: \pi_2$
$\{0,-1,0\}$	$(1-p_1)p_3 =: \pi_3$
$\{0,-1,-2\}$	$(1-p_1)(1-p_3) =: \pi_4$

Podemos ver este mapeo entre trayectorias y probabilidades de las trayectorias como tener la medida $\mathbf{P}$ en codigo. Si conocieramos π_1, π_2, π_3 y π_4 entonces, si todas estuvieran estrictamente entre 0 y 1, conocemos p_1, p_2 y p_3. Podemos representar nuestro proceso con un árbol que no recombina valores, donde usamos los nodos finales para etiquetar cada trayectoria con la información π.
Supongamos que tuviéramos una medida diferente $\mathbf{Q}$. Una vez más podemos codificarla con probabilidades de trayectorias, π'_1, π'_2, π'_3 y π'_4. Si cada π' está estrictamente entre 0 y 1, π'_1, π'_2, π'_3 y π'_4 determinan de manera única $\mathbf{Q}$.
Dada esta codificación, hay una manera natural de codificar las diferencias entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, la cuál da una idea de como "distorcionar"$\mathbf{P}$ para producir $\mathbf{Q}$. Si

formamos los cocientes

$$\frac{\pi_i'}{\pi_i}$$

para cada trayectoria i, escribimos el mapeo de trayectorias a cocientes como

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$$

Esta variable aleatoria es llamada la *derivada de Radon-Nikodym* de $\mathbf{Q}$ con respecto a $\mathbf{P}$ hasta el tiempo 2 (variable aleatoria en los nodos finales de un árbol que no recombina valores). De $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ podemos obtener $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{P}$.
Qué pasa si p_i o q_i son cero o uno? Dos cosas pasan:

- Puede ser imposible recuperar p_i de π_i. Si p_1 es cero entonces π_1 y π_2 son cero y en consecuencia la información de p_2 ha sido perdida. Pero entonces, las trayectorias correspondientes a π_1 y π_2 son ambas imposibles (probabilidad cero) y entonces, en algún sentido p_2 no es realmente relevante. Si nos restringimos a solo dar π_i para trayectorias posibles, entonces *podemos* recuperar las correspondientes p's.

- Supongamos que una de las p's es cero, pero ninguna de las q's es cero. Entonces al menos una π_i será cero y ninguna de las π_i' lo será. En consecuencia, no todos los cocientes $\frac{\pi_i'}{\pi_i}$ estarán bien definidos y $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ no puede existir. Podríamos suprimir aquellas trayectorias que tuvieran probabilidad de trayectoria cero, pero en esta ocasión si hemos perdido algo. Aquellas trayectorias habrían sido $\mathbf{P}$-imposibles pero son $\mathbf{Q}$-posibles. De alguna manera, no podemos definir $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ si $\mathbf{Q}$ permite algo que $\mathbf{P}$ no permite y vice versa.

Definición 1 ***(Equivalencia)***
Dos medidad $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son equivalentes si operan en el mismo espacio muestral y concuerdan en lo que es posible. De manera formal, si A es cualquier evento en el espacio muestral,

$$\mathbf{P}(A) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q}(A) > 0$$

En otras palabras, si A es posible bajo $\mathbf{P}$ entonces es posible bajo $\mathbf{Q}$, y si A es imposible bajo $\mathbf{P}$ entonces es imposible bajo $\mathbf{Q}$. Y vice versa.

Dos medidas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ deben ser equivalentes para que puedan tener derivadas de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ y $\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$.

Esperanza y $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$

Consideremos un payoff $X(= f(S_T))$ en nuestro proceso discreto de dos pasos. Recordemos que el payoff X es una variable aleatoria y, entonces, denotemos por x_i el valor que toma si se sigue la trayectoria i. Entonces, la esperanza de X con respecto a $\mathbf{P}$ está dada por

$$E_{\mathbf{P}}(X) = \sum_i \pi_i x_i$$

donde i varía sobre las cuatro posibles trayectorias. La esperanza de X con respecto a $\mathbf{Q}$ es

$$E_{\mathbf{Q}}(X) = \sum_i \pi_i' x_i = \sum_i \pi_i \left(\frac{\pi_i'}{\pi_i} x_i \right) = E_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} X \right)$$

Este resultado solo representa un caso: $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ está definida sobre los nodos finales. De hecho, de manera más formal, el resultado que obtuvimos es

$$E_{\mathbf{Q}}(X_T|\Im_0) = E_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} X_T \middle| \Im_0 \right)$$

donde T es el horizonte temporal para $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ y X_T es conocida al tiempo T. Qué pasa con $E_{\mathbf{Q}}(X_t|\Im_s)$ para $t < T$ y $s > 0$? De alguna manera, necesitamos conocer $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ no solo para los nodos finales, sino en todas las trayectorias en todos los tiempos.

Proceso Radon-Nikodym

Tenemos que $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ es una variable aleatoria, pero quisiéramos tener un proceso. Podemos obtenerlo si permitimos que el horizonte temporal varíe y ponemos que ζ_t sea la derivada de Radon-Nikodym tomada hasta el horizonte t. Para el tiempo 1, las posibles trayectorias son $\{0, 1\}$ y $\{0, -1\}$ y, entonces, la derivada ζ_1 tiene los valores para estas trayectorias de $\frac{q_1}{p_1}$ y $\frac{(1-q_1)}{(1-p_1)}$ respectivamente. Al tiempo 0, ζ_0 vale 1 ya que la única "trayectoria.es $\{0\}$ que tiene probabilidad 1 bajo $\mathbf{P}$ y bajo $\mathbf{Q}$.
De hecho, hay otra forma de expresar ζ_t como la esperanza condicional de la derivada de Radon-Nikodym de horizonte T:

$$\zeta_t = E_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \middle| \Im_t \right)$$

para toda $t \leq T$.
El proceso ζ_t representa una idea de la cantidad de cambio de medida hasta el tiempo t a lo largo de la trayectoria actual. Tenemos que

$$E_{\mathbf{Q}}(X_t) = E_{\mathbf{P}}(\zeta_t X_t)$$

donde X_t es conocida al tiempo t. Si queremos saber $E_{\mathbf{Q}}(X_t|\Im_s)$, entonces necesitamos la cantidad de cambio de medida del tiempo s al tiempo t, el cual es simplemente $\frac{\zeta_t}{\zeta_s}$; i.e., el cambio hasta el tiempo t con el cambio hasta al tiempo s removido:

$$E_{\mathbf{Q}}(X_t|\Im_s) = \zeta_s^{-1} E_{\mathbf{P}}(\zeta_t X_t|\Im_s)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 17
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 30/04/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

La derivada de Radon-Nikodym continua

Recordemos que si $X \sim N(0,1)$, entonces la probabilidad de que X tome un valor en algun subconjunto A de los reales es

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx$$

Definición 1 ***(Función de verosimilitud conjunta para movimiento browniano)***
Si tomamos t_0 y x_0 iguales a cero, y escribimos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, entonces dada la tercera condición del movimiento browniano que los incrementos $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$ son mutuamente independientes, podemos escribir

$$f^n_{\mathbf{P}}(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_i}} \exp\left(-\frac{(\Delta x_i)^2}{2\Delta t_i}\right)$$

Entonces, podemos escribir una función de verosimilitud correspondiente a la medida $\mathbf{P}$ para un proceso en un conjunto finito de tiempos. En el límite continuo, tenemos como manejar $\mathbf{P}$ para un proceso continuo. Si A es algún subconjunto de $\mathbf{R}^n$, entonces la $\mathbf{P}$-probabilidad de que el vector aleatorio $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ está en A es la integral sobre A de la verosimilitud $f^n_{\mathbf{P}}$.

Resultado 1 ***(Derivada de Radon-Nikodym, versión continua.)***
Supongamos que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son medidas equivalentes. Dada una trayectoria ω, para cada partición $\{t_1, ..., t_n\}$ (con $t_n = T$), definimos como x_i como el valor de $W_{t_i}(\omega)$, y entonces la derivada $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ hasta el tiempo T es definida como el límite de los cocientes de verosimilitud

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n_{\mathbf{Q}}(x_1, ..., x_n)}{f^n_{\mathbf{P}}(x_1, ..., x_n)}$$

cuando la partición se vuelve densa en $[0, T]$.
Esta derivada de tiempo continuo $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ aún satisface

$$(i) \qquad E_{\mathbf{Q}}(X_T) = E_{\mathbf{P}}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} X_T\right)$$

$$(ii) \qquad E_{\mathbf{Q}}(X_t|\Im_s) = \zeta_s^{-1} E_{\mathbf{P}}(\zeta_t X_t|\Im_s) \quad s \leq t \leq T$$

donde ζ_t es el proceso $E_{\mathbf{P}}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\middle|\Im_t\right)$, y X_t es cualquier proceso adaptado a $\Im_t$.

Así como $\mathbf{P}$ puede ser aproximada mediante un proceso límite sobre la partición temporal, también podemos aproximar la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$. El evento $A = \{\omega' : W_{t_i}(\omega') = W_{t_i}(\omega), i = 1, ..., n\}$ (trayectorias que concuerdan en la partición con la trayectoria asociada a ω) se hace cada vez más pequeño hasta que sólo es el conjunto $\{\omega\}$. La derivada de Radon-Nikodym puede ser pensada como el límite

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) = \lim_{A \to \{\omega\}} \frac{\mathbf{Q}(A)}{\mathbf{P}(A)}$$

Un ejemplo simple de cambio de medida

Supongamos, por ejemplo, que tenemos un $\mathbf{P}$-movimiento browniano W_t. Cómo luce W_t bajo una medida equivalente $\mathbf{Q}$?
Definamos $\mathbf{Q}$ una medida equivalente a $\mathbf{P}$ via[1]

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T)$$

para algún horizonte temporal T. Qué hacemos a continuación? Cómo saber que pasa con W_t bajo $\mathbf{Q}$? Un truco muy útil en este caso es considerar funciones generadoras de momentos.

Resultado 2 ***(Identificando v.a.'s normales)***
Tenemos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ bajo $\mathbf{P}$ si y solo si

$$E_{\mathbf{P}}(\exp(\theta X)) = \exp(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2)$$

para toda θ real.

Prueba.
La mitad de la prueba (la ida) es una simple aplicación del Resultado 1 de la sesión 11. El regreso se te queda de tarea.

Ahora que sigue? Cómo calculamos $E_{\mathbf{Q}}(\exp(\theta W_T))$? Aquí es donde nos auxiliamos de las propiedades de la derivada de Radon-Nikodym. En consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Q}}(\exp(\theta W_T)) &= E_{\mathbf{P}}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\exp(\theta W_T)\right) \\ &= E_{\mathbf{P}}(\exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T + \theta W_T)) \\ &= \exp(-\frac{1}{2}\gamma^2 T + \frac{1}{2}(\theta - \gamma)^2 T) \end{aligned}$$

La última igualdad debido a que $W_T \sim N(0, T)$ con respecto a $\mathbf{P}$.
Simplificando tenemos que

$$E_{\mathbf{Q}}(\exp(\theta W_T)) = \exp(-\theta\gamma T + \frac{1}{2}\theta^2 T)$$

[1] A quién se le ocurre definir $\mathbf{Q}$ de esta manera? Realmente se construye así porque se sabe de antemano a donde se quiere llegar y las herramientas a utilizar. En la próxima sesión quedará claro.

que es la función generadora de momentos de una variable normal $N(-\gamma T, T)$. Entonces, la distribución marginal de W_T, bajo $\mathbf{Q}$, también es normal con varianza T pero con media $-\gamma T$. Esta distribución marginal de W_T es lo que esperaríamos si $\{W_t\}$ fuera, bajo $\mathbf{Q}$, un movimiento browniano más una tendencia constante $-\gamma$. Muchos otros procesos también tienen una distribución marginal $N(-\gamma T, T)$ al tiempo T, pero sería un gran resultado si el solo efecto de cambiar de $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ via $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T)$ fuera el añadir una tendencia $-\gamma$.
De hecho, este es el caso. El proceso $\{W_t\}$ es un movimiento browniano con respecto a $\mathbf{P}$ y movimiento browniano con una tendencia constante $-\gamma$ bajo $\mathbf{Q}$. Utilizando los dos resultados dados acerca de $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$, podemos probar las tres condiciones para que $\widetilde{W}_t = W_t + \gamma t$ sea $\mathbf{Q}$-movimiento browniano:

(i) $\widetilde{W}_t$ es continuo y $\widetilde{W}_0 = 0$;

(ii) $\widetilde{W}_t \sim N(0, t)$ bajo $\mathbf{Q}$;

(iii) $\widetilde{W}_{t+s} - \widetilde{W}_t \sim N(0, t)$ y es independiente de $\Im_s$.

La primera condición se satisface y (ii) y (iii) son equivalentes a:

(ii)' $E_{\mathbf{Q}}(\exp(\theta \widetilde{W}_t)) = \exp(\frac{1}{2}\theta^2 t)$;

(iii)' $E_{\mathbf{Q}}(\exp(\theta(\widetilde{W}_{t+s} - \widetilde{W}_s))|\Im_s) = \exp(\frac{1}{2}\theta^2 t)$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 18
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 03/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

Cameron-Martin-Girsanov

En la sesión pasada vimos que un cierto cambio de medida modificón un movimiento browniano estándar en uno con tendencia. De hecho, *todo* lo que cambios de medida pueden hacer en un movimiento browniano es cambiar la tendencia (drift). Recordemos que todos los procesos en los que estamos interesados pueden ser representados como diferenciales de cierta cantidad de movimiento browniano y cierta cantidad de tendencia. El mapeo de diferenciales estocásticas bajo $\mathbf{P}$ a diferenciales estocásticas bajo $\mathbf{Q}$ resulta ser natural y sencillo:

Teorema 1 ***(Cameron-Martin-Girsanov)***
Si W_t es un $\mathbf{P}$-movimiento browniano y γ_t es un proceso $\Im$-previsible que satisface $E_{\mathbf{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)\right] < \infty$, entonces existe una medida $\mathbf{Q}$ tal que

(i) *$\mathbf{Q}$ es equivalente a $\mathbf{P}$*

(ii) $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)$

(iii) *$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ es un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano*

En otras palabras, W_t es un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano con tendencia $-\gamma_t$ al tiempo t.

Existe un recíproco al teorema,

Teorema 2 ***(Recíproco a Cameron-Martin-Girsanov)***
Si W_t es un $\mathbf{P}$-movimiento browniano y $\mathbf{Q}$ una medida equivalente a $\mathbf{P}$, entonces existe un proceso $\Im$-previsible γ_t tal que

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$$

es un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano. Es decir, W_t más la tendencia γ_t es $\mathbf{Q}$-movimiento browniano. De manera adicional tenemos que la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbf{Q}$ con respecto a $\mathbf{P}$ (al tiempo T) es

$$\exp(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt)$$

C-M-G y diferenciales estocásticas

Aún cuando el teorema de C-M-G aplica a movimiento browniano, tenemos que todos nuestros procesos son familiares muy cercanos al movimiento browniano. C-M-G resulta ser una herramienta muy útil para controlar la tendencia de *cualquier* proceso.
Supongamos que X es un proceso estocástico que satisface

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

donde W es un $\mathbf{P}$-movimiento browniano. Supongamos que queremos encontrar una medida $\mathbf{Q}$ tal que la tendencia del proceso X bajo $\mathbf{Q}$ es $\nu_t dt$ en lugar de $\mu_t dt$. Primero notemos que podemos escribir

$$dX_t = \nu_t dt + \sigma_t \left(\left(\frac{\mu_t - \nu_t}{\sigma_t} \right) dt + dW_t \right)$$

Hagamos $\gamma_t = \left(\frac{\mu_t - \nu_t}{\sigma_t} \right)$ y entonces, si $E_{\mathbf{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty$, existe una nueva medida $\mathbf{Q}$ tal que

$$\widetilde{W}_t := W_t + \int_0^t \frac{\mu_s - \nu_s}{\sigma_s} ds$$

es un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano.
Pero esto significa que bajo $\mathbf{Q}$

$$dX_t = \nu_t dt + \sigma_t d\widetilde{W}_t$$

donde $\widetilde{W}$ es un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano, el cual le da a X la tendencia ν_t que queríamos.
Como un cambio de medida solo puede cambiar el movimiento browniano a un movimiento browniano más una tendencia, la volatilidad del proceso debe permanecer igual.

Ejemplos de cambios de medida

1 Sea $X_t = \mu t + \sigma W_t$ donde W es un $\mathbf{P}$-movimiento browniano y μ y σ son constantes. Entonces, utilizando C-M-G con $\gamma_t = \frac{\mu}{\sigma}$, existe una medida equivalente $\mathbf{Q}$ bajo la cual $\widetilde{W}_t = W_t + \left(\frac{\mu}{\sigma} \right) t$ es un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano hasta al tiempo T. Entonces

$$X_t = \sigma \widetilde{W}_t$$

que es un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano escalado.
Las medidas también dan diferentes valores esperados:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{P}}(X_t^2) &= \mu^2 t^2 + \sigma^2 t \\ E_{\mathbf{Q}}(X_t^2) &= \sigma^2 t \end{aligned}$$

2 Sea X_t el movimiento browniano exponencial con EDE

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

donde W es **P**-movimiento browniano. Podemos cambiar de medida de tal manera que X tenga la nueva EDE

$$dX_t = X_t(\nu dt + \sigma dW_t)$$

para alguna tendencia constante arbitraria ν?
Usando C-M-G con $\gamma_t = \frac{\mu-\nu}{\sigma}$, hay, de hecho, una medida **Q** bajo la cual

$$\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - \nu}{\sigma} t$$

es un **Q**-movimiento browniano. En consecuencia, X tiene la EDE

$$dX_t = X_t(\nu dt + \sigma d\widetilde{W}_t)$$

donde $\widetilde{W}$ es un **Q**-movimiento browniano.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 19
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 05/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

EL TEOREMA DE LA REPRESENTACIÓN MARTINGALA

Recordemos que para valuar instrumentos derivados en tiempo discreto, un concepto central era aquel de una medida con respecto a la cual se esperaba que el proceso permaneciera igual, la *medida martingala* para nuestros árboles discretos. El precio de los derivados resultó ser una esperanza bajo esta medida y aún más, la construcción de esta esperanza nos mostró la estrategia de cobertura requerida para justificar este precio. En el caso continuo pasa lo mismo.

Definición 1 ***(Martingala)***
*Un proceso estocástico $\{M_t\}$ es una **martingala** con respecto a una medida* $\mathbf{P}$ *si y solo si*

(i) $E_{\mathbf{P}}(|M_t|) < \infty$ *para todo* t

(ii) $E_{\mathbf{P}}(M_t|\Im_s) = M_s$ *para todo* $s \leq t$.

Una medida martingala es aquella que hace el valor futuro esperado condicional en su valor presente y la historia pasada simplemente su valor presente. No es *esperado* que tenga tendencia hacia arriba o hacia abajo.
EJEMPLOS

1 $S_t = c$ para todo t con c una constante es trivialmente una martingala con respecto a cualquier medida.

2 Un $\mathbf{P}$-movimiento browniano es una $\mathbf{P}$-martingala. Para verificarlo necesitamos $E_{\mathbf{P}}(W_t|\Im_s) = W_s$. Como $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ y es independiente de $\Im_s$, tenemos que

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{P}}(W_t|\Im_s) &= E_{\mathbf{P}}(W_s + (W_t - W_s)|\Im_s) \\ &= E_{\mathbf{P}}(W_s|\Im_s) + E_{\mathbf{P}}(W_t - W_s|\Im_s) \\ &= W_s + E_{\mathbf{P}}(W_t - W_s) \\ &= W_s + 0 \\ &= W_s \end{aligned}$$

3 Para cualquier payoff X que depende solo en eventos hasta el tiempo T, el proceso $N_t = E_{\mathbf{P}}(X|\Im_t)$ es una $\mathbf{P}$-martingala (si suponemos que se cumple la condición $E_{\mathbf{P}}(|X|) < \infty$). Esto es una simple consecuencia del hecho de que

$$E_{\mathbf{P}}(E_{\mathbf{P}}(X|\Im_t)|\Im_s) = E_{\mathbf{P}}(X|\Im_s)$$

Representación

En el caso continuo tenemos el equivalente al teorema de la representación binomial:

Teorema 1 ***(Teorema de la representación martingala)***
Supongamos que $\{M_t\}$ es una $\mathbf{Q}$*-martingala cuya volatilidad σ_t satisface la condición adicional de ser diferente de cero (c.s.). Entonces, si $\{N_t\}$ es cualquier otra* $\mathbf{Q}$*-martingala, existe un proceso $\Im$-previsible α tal que*

$$\int_0^T \alpha_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty \quad c.s.$$

y N puede ser escrita como

$$N_t = N_0 + \int_0^t \alpha_s dM_s.$$

Aún más, α es único.

Si hay una medida $\mathbf{Q}$ bajo la cual M_t es una $\mathbf{Q}$-martingala, entonces cualquier otra $\mathbf{Q}$-martingala puede ser representada en términos de M_t. El proceso α_t es simplemente el cociente de sus respectivas volatilidades.

Ausencia de tendencia

Cuando platicamos acerca de martingalas, tenemos la idea intuitiva de que una martingala no tiene tendencia a subir ni a bajar. Sin embargo, tenemos una definición técnica de tendencia a través de nuestra formulación de diferenciales estocásticas. Será cierto que los procesos estocásticos sin término de tendencia (sin drift) son siempre martingalas?, y qué tal vice versa? Pueden siempre las martingalas ser representadas como $\sigma_t dW_t$ para un proceso de volatilidad $\Im$-previsible σ_t? Casi:

Por un lado, podemos usar el teorema de la representación martingala para concluir que si X_t es una $\mathbf{P}$-martingala, entonces con W_t un $\mathbf{P}$-movimiento browniano, tenemos un proceso $\Im$-previsible α_t tal que

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s dW_s$$

que es simplemente la forma integral del incremento

$$dX_t = \alpha_t dW_t$$

el cual no tiene tendencia.
Para el regreso se necesita una restricción técnica. El resultado completo es:

Teorema 2 *Si X es un proceso estocástico con volatilidad σ_t (i.e., $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$), la cual satisface la condición técnica $E[(\int_0^T \sigma_s^2 ds)^{\frac{1}{2}}] < \infty$, entonces*

$$X \quad \textit{es una martingala} \quad \Leftrightarrow \quad X \quad \textit{no tiene tendencia} \quad (\mu_t \equiv 0).$$

Si la condición técnica no se cumple, un proceso sin tendencia puede no ser una martingala. Tales procesos son llamados *martingalas locales.*

Martingalas exponenciales

Consideremos la EDE sin tendencia para un proceso exponencial:

$$dX_t = \sigma_t X_t dW_t$$

La condición técnica

$$E[(\int_0^T \sigma_s^2 X_s^2 ds)^{\frac{1}{2}}] < \infty$$

es difícil de verificar, pero para estos ejemplos exponenciales específicos existe un mejor resultado:

Teorema 3 *Si $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$, para algún proceso $\Im$-previsible σ_t, entonces*

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2 ds\right)\right) < \infty \quad \Rightarrow \quad X \quad \textit{es una martingala.}$$

También notamos que la solución a la EDE es

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right).$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 20
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 06/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

ESTRATEGIAS DE CONSTRUCCIÓN

En los modelos financieros más simples tenemos un mercado que consiste de un activo aleatorio y un activo sin riesgo (bono).

Definición 1 *(**El portafolio** (α, b))*
*Un **portafolio** es un par de procesos $\{\alpha_t\}$ y $\{b_t\}$ los cuales describen, de manera respectiva, el número de unidades de activo y de bono que debemos mantener al tiempo t. Los procesos pueden tomar valores positivos o negativos (se puede vender en corto cualquier cantidad de activo o de bono). El componente de activo del portafolio α debiése ser $\Im$-**previsible**: dependiente solo en información hasta el tiempo t pero sin incluir t.*

Estrategias auto-financiadas

La descripción (α_t, b_t) es una estrategia dinámica que detalla el monto que debemos mantener a cada instante de cada componente.
Un portafolio es auto-financiado si y solo si el cambio en su valor solo depende en el cambio de los precios de sus componentes. Con un precio S_t del activo aleatorio y un precio B_t del bono, el valor, V_t, de un portafolio (α_t, b_t) al tiempo t está dado por

$$V_t = \alpha_t S_t + b_t B_t$$

Al siguiente instante de tiempo dos cosas suceden: el viejo portafolio cambia de valor debido a que S_t y B_t han cambiado de precio; y el viejo portafolio tiene que ser ajustado para dar un nuevo portafolio requerido por la estrategia (α, b). Si el costo del ajuste es igualado exactamente por las ganancias o pérdidas generadas por el portafolio entonces no se requiere ningún dinero extra de fuera. El portafolio es auto-financiado.
En nuestro caso discreto, teníamos la ecuación en diferencias

$$\Delta V_i = \alpha_i \Delta S_i + b_i \Delta B_i$$

Por supuesto en tiempo continuo tenemos una EDE:

Definición 2 *(**Propiedad de auto-financiamiento.**)*
Si (α_t, b_t) es un portafolio con precio del stock S_t y precio del bono B_t, entonces

$$(\alpha_t, b_t) \quad \textit{es auto-financiado} \quad \Leftrightarrow \quad dV_t = \alpha_t dS_t + b_t dB_t.$$

EJEMPLO:
Supongamos que $S_t = W_t$ para toda t y $B_t = 1$ para toda t. Qué tipo de portafolios son auto-financiados? Veamos, por ejemplo, los siguientes casos.

1 $\alpha_t = b_t = 1$ para toda t. El valor del portafolio es

$$V_t = W_t + 1$$

lo cual implica que

$$dV_t = dW_t$$

Pero como $dB_t = 0$, esto es igual a

$$\alpha_t dS_t + b_t dB_t$$

2 $\alpha_t = 2W_t$ y $b_t = -t - W_t^2$. Tenemos $\{\alpha_t\}$previsible y observamos que

$$\begin{aligned} V_t &= \alpha_t S_t + b_t B_t \\ &= 2W_t(W_t) + (-t - W_t^2)(1) \\ &= W_t^2 - t \end{aligned}$$

Utilizando el lema de Itô tenemos que

$$\begin{aligned} dV_t &= 2W_t dW_t \\ &= \alpha_t dS_t + b_t dB_t \end{aligned}$$

Definición 3 ***(Estrategia de replicado.)***
Supongamos un mercado que consta de un bono sin riesgo B y un activo riesgoso S con volatilidad σ_t, y un contingente dado por X (payoff) en eventos hasta el tiempo T.
*Una **estrategia de replicado** para X es un portafolio auto-financiado (α, b) tal que $\int_0^T \sigma_t^2 \alpha_t^2 dt < \infty$ y $V_T = \alpha_T S_T + b_T B_T = X$.*

Por qué es importante una estrategia de replicado? Bueno, porque X da el valor de un derivado que necesitamos pagar al tiempo T. Queremos un precio hoy (si existe) dado un modelo para S y B.
Si hay una estrategia de replicado (α_t, b_t), entonces el precio del contingente al tiempo t *debe ser*

$$V_t = \alpha_t S_t + b_t B_t.$$

Si este fuera menor, podríamos comprar una unidad del derivado al tiempo t y vender α_t unidades de S y b_t unidades de B, permaneciendo cortos (α, b) hasta el tiempo T. Como (α, b) es auto-financiado y su valor garantizado en T es X, el derivado que compramos y el portafolio que vendimos se cancelarían en T y ningún dinero extra es requerido entre t y T. La ganancia obtenida por el diferencial de valores al tiempo t puede meterse al banco en ese momento sin riesgo alguno.
Por supuesto, si el precio del derivado hubiése sido mayor que V_t, entonces

podríamos haber *vendido* el derivado y *comprado* el portafolio auto-financiado (α, b) para el mismo efecto. Si una estrategia de replicado existe, ésta da el precio del contingente en cualquier momento.
Nuestro plan es el siguiente: definimos un modelo de mercado con un proceso de precios para nuestro stock lo suficientemente complejo para que sea realista. Entonces, utilizando las herramientas que tengamos hallamos estrategias de replicado para nuestros contingentes (derivados). El resto del curso concierne a la complejidad de modelos y de derivados.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 21
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 08/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

MODELO BLACK-SCHOLES

Nuestra secuencia de trabajo será la siguiente:

- Tomaremos el modelo del movimiento browniano exponencial (o geometrico) con tendencia para el precio de nuestro stock.
- Usaremos el teorema de Cameron-Martin-Girsanov para cambiarlo a una martingala.
- Usaremos el teorema de la representación martingala para crear una estrategia de replicado para cada contingente.

Esta secuencia será posible con la ayuda del lema de Itô.

Modelo 1 ***(Modelo Black-Scholes básico)***
Proponemos la existencia de r, μ y σ determinísticas tales que el precio del bono y del stock son

$$\begin{aligned} B_t &= \exp(rt) \\ S_t &= S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t) \end{aligned}$$

*donde r es la **tasa de interés sin riesgo**, σ es la **volatilidad del stock** y μ es la **tendencia del stock**. No hay costos de transacción y ambos instrumentos se pueden comerciar en posición corta o larga libre e instantaneamente al precio listado.*

Tasas de interés cero

Simplificaremos temporalmente las cosas haciendo $r = 0$. Ahora bien, para un instrumento contingente arbitrario dado por X, conocido para un tiempo T, quisiéramos encontrar una estrategia de replicado (α_t, b_t).

Paso 1 Encontremos una medida $\mathbf{Q}$ bajo la cual $\{S_t\}$ es una martingala.
Tenemos que

$$S_t = \exp(\mu t + \sigma W_t)$$

y entonces si hacemos $Y_t = \ln(S_t)$ tenemos que

$$Y_t = \mu t + \sigma W_t$$

de donde

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

Utilizando Itô podemos obtener la EDE para $S_t = \exp(Y_t)$:

$$dS_t = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Para que S_t sea una martingala necesitamos eliminar la tendencia en esta EDE. Hagamos $\gamma_t = \frac{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$; entonces, usando C-M-G, existe $\mathbf{Q}$ tal que $\widetilde{W}_t = W_t + \gamma t$ es $\mathbf{Q}$-movimiento browniano[1]. Entonces tenemos ahora que

$$dS_t = \sigma S_t d\widetilde{W}_t$$

El criterio para martingalas exponenciales contiene una condición que se cumple debido a que σ es constante. En consecuencia, S_t es una $\mathbf{Q}$-martingala.

Paso 2 Dada $\mathbf{Q}$, construimos un proceso a partir de X:

$$N_t = E_{\mathbf{Q}}(X|\Im_t)$$

el cual, sabemos, es una $\mathbf{Q}$-martingala.

Paso 3 Utilizando el teorema de la representación martingala[2] tenemos que existe un proceso previsible $\{\alpha_t\}$ tal que

$$N_t = E_{\mathbf{Q}}(X|\Im_t) = E_{\mathbf{Q}}(X) + \int_0^t \alpha_s dS_s$$

Entonces, dada una $\mathbf{Q}$ que hace S_t una $\mathbf{Q}$-martingala con volatilidad positiva, tenemos que

$$dN_t = \alpha_t dS_t$$

para alguna α_t.

No hay demasiado que adivinar, nuestra estrategia es:

- Mantener α_t unidades de stock al tiempo t y
- mantener $b_t = N_t - \alpha_t S_t$ unidades del bono al tiempo t.

Verifiquemos que es una estrategia de replicado. El valor del portafolio al tiempo t es

$$\begin{aligned} V_t &= \alpha_t S_t + b_t B_t \\ &= \alpha_t S_t + N_t - \alpha_t S_t \\ &= N_t \end{aligned}$$

[1] Notemos que la condición técnica se satisface debido a que γ_t es constante.

[2] Para usar el teorema necesitamos que la volatilidad de S_t sea positiva. Esto es cierto ya que la volatilidad es simplemente σS_t.

debido a que $B_t = 1$ para toda t. Por lo tanto, usando el paso 3 y el hecho de que $dB_t = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} dV_t &= dN_t \\ &= \alpha_t dS_t \\ &= \alpha_t dS_t + b_t dB_t \end{aligned}$$

Aún más, usando el paso 2, el valor terminal de la estrategia es

$$\begin{aligned} V_T &= N_T \\ &= E_{\mathbf{Q}}(X|\Im_T) \\ &= X \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay un precio de no-arbitraje para X en cualquier tiempo. En particular tenemos que el precio al tiempo 0 es el valor de (α_0, b_0):

$$N_0 = E_{\mathbf{Q}}(X).$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 22
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 12/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

Tasas de interés diferentes de cero

Recordemos que el payoff de un forward está dado por $S_T - K$, donde K es el precio de entrega. Sabemos que el valor de K que hace que el contrato tenga valor cero al tiempo cero es $K = S_0 \exp(rT)$. Nuestra regla cuando r era cero era simplemente calcular el valor esperado del payoff bajo la medida martingala. Sirve en este caso?

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Q}}(S_T - S_0 \exp(rT)) &= S_0(1 - \exp(rT)) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Nuestra regla de encontrar una medida que hace que S_t sea una martingala solo sirve cuando r es cero. Cuando r es diferente de cero, debemos de tomar en cuenta el crecimiento del efectivo.
Si el crecimiento del efectivo nos molesta, removámoslo al descontar todo. Llamamos a B_t^{-1} el proceso de descuento, y formemos un stock descontado $Z_t = B_t^{-1} S_t$ y un payoff descontado $B_T^{-1} X$. No es difícil derivar la EDE que satisface Z_t:

$$dZ_t = Z_t((\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t)$$

Paso 1 Utilizando C-M-G, existe $\mathbf{Q}$ medida equivalente a la medida original $\mathbf{P}$ y un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano $\widetilde{W}_t$ tal que

$$dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t$$

Entonces Z_t es, bajo $\mathbf{Q}$, una martingala.

Paso 2 Necesitamos un proceso que al tiempo T coincida con el payoff descontado y que también sea una $\mathbf{Q}$-martingala y sabemos que la forma de obtenerlo es la siguiente:

$$N_t = E_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X | \Im_t)$$

Paso 3 El teorema de la representación martingala nos da un proceso previsible $\{\alpha_t\}$ tal que

$$dN_t = \alpha_t dZ_t$$

Queremos replicar el payoff con ciertas cantidades del stock real, pero en nuestro mundo descontado podemos replicar el payoff descontado al mantener α_t unidades del stock descontado. Entonces, podemos intentar usar α_t también en el mundo real.
Acerca de las tenencias del bono, este es en nuestro mundo descontado $b_t = N_t - \alpha_t Z_t$. De igual manera, podemos intentar esta cantidad en el mundo real.
Para empezar, parece ser que estas elecciones servirán ya que observemos que al tiempo T tenemos que el valor de nuestro portafolio es:

$$\begin{aligned} \alpha_T S_T + b_T B_T &= \alpha_T S_T + (N_T - \alpha_T Z_T) B_T \\ &= \alpha_T S_T + (B_T^{-1} X - \alpha_T B_T^{-1} S_T) B_T \\ &= X \end{aligned}$$

Entonces, nuestra estrategia de replicado es

- Mantener α_t unidades del stock al tiempo t, y
- mantener $b_t = N_t - \alpha_t Z_t$ unidades del bono.

El valor V_t del portafolio (α_t, b_t) está dado por

$$V_t = \alpha_t S_t + b_t B_t = B_t N_t$$

Resultado 1 *Si B_t es un proceso con volatilidad cero y X_t cualquier proceso estocástico, entonces*

$$d(B_t X_t) = B_t dX_t + X_t dB_t$$

Prueba.
Es una simple aplicación de la regla del producto (sesión 15).

Utilizando este resultado (dos veces), el Paso 3, la definición de b_t para despejar N_t y el hecho de que $S_t = B_t Z_t$ tenemos que

$$\begin{aligned} dV_t &= B_t dN_t + N_t dB_t \\ &= \alpha_t B_t dZ_t + N_t dB_t \\ &= \alpha_t B_t dZ_t + (\alpha_t Z_t + b_t) dB_t \\ &= \alpha_t (B_t dZ_t + Z_t dB_t) + b_t dB_t \\ &= \alpha_t d(B_t Z_t) + b_t dB_t \\ &= \alpha_t dS_t + b_t dB_t \end{aligned}$$

Por lo tanto, (α_t, b_t) es auto-financiado.

Propiedad 1 ***(Estrategias auto-financiadas)***
Una estrategia (α_t, b_t) de tenencias en un stock S_t y un bono (sin volatilidad, en efectivo) B_t tiene valor $V_t = \alpha_t S_t + b_t B_t$ y valor descontado $N_t = \alpha_t Z_t + b_t$, donde Z es el proceso descontado del stock $Z_t = B_t^{-1} S_t$. Entonces, la estrategia es auto-financiada si

$$dV_t = \alpha_t dS_t + b_t dB_t$$

o de manera equivalente

$$dN_t = \alpha_t dZ_t.$$

Una estrategia es auto-financiada si cambios en su valor se deben solo a cambios en los valores de los activos, o de manera equivalente si cambios en su valor descontado se deben solo a cambios en los valores descontados de los activos.

Resumen 1 *Supongamos que tenemos un modelo de Black-Scholes para un stock y un bono comerciables de manera continua; i.e., suponiendo la existencia de constantes r, μ y σ tales que los respectivos precios pueden ser representados como*

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t) \\ B_t &= \exp(rt). \end{aligned}$$

Entonces, todos los reclamos contingentes X, conocidos en algún horizonte temporal T, tienen estrategias de replicado asociadas (α_t, b_t). Aún más, el precio de no-arbitraje del contingente X al tiempo $t \leq T$ está dado por

$$V_t = B_t E_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X | \Im_t) = e^{-r(T-t)} E_{\mathbf{Q}}(X | \Im_t),$$

donde $\mathbf{Q}$ es la medida martingala para el stock descontado $B_t^{-1} S_t$.

Notemos que $\mathbf{Q}$ no es la medida que hace al stock una martingala, sino la medida que hace al stock *descontado* una martingala. También notemos que el precio de no-arbitraje del contingente es la esperanza bajo $\mathbf{Q}$ del payoff *descontado*.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 23
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 15/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

La fórmula de Black-Scholes para una call o put europea

Recordemos que el payoff de una call está dado por

$$\text{máx}\{S_T - K, 0\} := (S_T - K)_+$$

donde K es el precio de ejercicio de la opción y T es la fecha de ejercicio.
Debiésemos encontrar V_0, el valor de la estrategia de replicado (y en consecuencia de la opción) al tiempo cero. Vimos que este valor está dado por

$$e^{-rT} E_{\mathbf{Q}}[(S_T - K)_+]$$

donde $\mathbf{Q}$ es la medida martingala para $B_t^{-1} S_t$.
Cómo calculamos esto? Primero notemos que dado que el payoff solo depende en el precio del stock al tiempo T, es suficiente con que encontremos la distribución marginal de S_T bajo $\mathbf{Q}$.
Recordemos que $\mathbf{Q}$ es la medida bajo la cual

$$dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t \tag{1}$$

con $\widetilde{W}_t$ un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano. Usando la definición de Z_t y el hecho de que $B_t^{-1} = e^{-rt}$ es un proceso con volatilidad cero podemos trabajar ambos lados de (1) para obtener:

$$\begin{aligned} d(B_t^{-1} S_t) &= \sigma B_t^{-1} S_t d\widetilde{W}_t \\ B_t^{-1} dS_t + S_t dB_t^{-1} &= \sigma B_t^{-1} S_t d\widetilde{W}_t \\ e^{-rt} dS_t + S_t de^{-rt} &= \sigma e^{-rt} S_t d\widetilde{W}_t \\ e^{-rt} dS_t + S_t(-r) e^{-rt} dt &= \sigma e^{-rt} S_t d\widetilde{W}_t \\ dS_t - rS_t dt &= \sigma S_t d\widetilde{W}_t \end{aligned}$$

En consecuencia, la EDE que satisface el proceso de precios del stock en términos de $\widetilde{W}_t$ es

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t$$

Usando Itô obtenemos que

$$d(\ln(S_t)) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma d\widetilde{W}_t$$

de donde

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\widetilde{W}_t$$

En consecuencia

$$S_t = S_0 \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\widetilde{W}_t)$$

Por lo tanto

$$S_T = S_0 e^X \quad \text{donde} \quad X \sim N((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$$

Resultado 1 ***(Fórmulas de Black-Scholes para call y put europeas)*** *Tenemos que*

$$\begin{aligned} c[S_0, T, K] &= S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \\ p[S_0, T, K] &= Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right] \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right] = d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

y $N(d)$ es la probabilidad acumulada hasta d de una distribución normal estándar ($N(0,1)$).

Para obtener estas fórmulas, necesitamos un resultado extra:

Lema 1 *Supongamos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Entonces para a y b cualesquiera números reales,*

$$E[e^{aX}|X \geq b] = e^{a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2} N(d)$$

con $d = \frac{-b+\mu+a\sigma^2}{\sigma}$.

Prueba.
Tenemos que

$$E[e^{aX}|X \geq b] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty e^{ax} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Juntando los exponentes de e y simple álgebra nos da

$$ax - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 - \frac{[x - (\mu + a\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}$$

Entonces

$$E[e^{aX}|X \geq b] = e^{a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty \exp\left[\frac{-[x - (\mu + a\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

Si hacemos $u = \frac{x-(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}$ y $c = \frac{b-(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}$ entonces esto se transforma en

$$\begin{aligned} e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du &= e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2}[1-N(c)] \\ &= e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2} N(d) \end{aligned}$$

donde $d = -c = \frac{-b+\mu+a\sigma^2}{\sigma}$.$\square$

Prueba (Black-Scholes).
Vamos a aplicar el lema para la call europea. Queremos evaluar

$$e^{-rT} \int_{-\infty}^\infty (S_0 e^x - K)_+ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left[\frac{-(x-[r-\frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right] dx$$

El integrando es diferente de cero cuando $S_0 e^x > K$, i.e., cuando $x > \ln(\frac{K}{S_0})$.
Separamos la integral en dos y aplicamos el lema a ambos términos.
Para el primer término aplicamos el lema con $a = 1$ y $b = \ln(\frac{K}{S_0})$ obteniendo

$$e^{-rT} \int_b^\infty S_0 e^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left[\frac{-(x-[r-\frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right] dx = S_0 N(d_1).$$

Aplicando el lema de nuevo pero con $a = 0$ para el segundo término obtenemos

$$e^{-rT} \int_b^\infty K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left[\frac{-(x-[r-\frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right] dx = Ke^{-rT} N(d_2).$$

Combinando estos dos resultados da la fórmula para $c[S_0, T, K]$.
Para obtener $p[S_0, T, K]$ podemos hacer un cálculo análogo o utilizar la paridad put-call:

$$\begin{aligned} p[S_0, T, K] &= c[S_0, T, K] + Ke^{-rT} - S_0 \\ &= Ke^{-rT}[1-N(d_2)] - S_0[1-N(d_1)] \\ &= Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 24
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 16/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

Cobertura y la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes

Una vez que hemos valuado opciones call y put europeas, nos gustaría saber cual es la estrategia de replicado requerida para estos instrumentos derivados. En otras palabras, cuanto stock sería requerido en cualquier punto del tiempo para construir el derivado de manera sintética o artificial.
La cantidad de stock (subyacente), α_t, proviene del teorema de la representación martingala, pero desafortunadamente, este es solamente un teorema de existencia. Aún así, el teorema nos dice que debido a que el contingente descontado y el stock descontado son martingalas bajo la misma medida, entonces uno puede ser construido, localmente, como simplemente una versión escalada del otro.
Qué pasaba cuando trabajamos en tiempo discreto? Si que sabíamos como obtener la estrategia de cobertura: el payoff es replicado por un portafolio que consiste de $\alpha_{=}\alpha(0, S_0)$ unidades de stock y una posición corta o larga en el bono sin riesgo, de tal manera que este portafolio tiene el mismo valor que el derivado (esto se reducía a resolver un sistema de dos ecuaciones en dos incognitas para cada sub-árbol de un período). Al tiempo δ, el precio del stock cambia a $S(\delta)$ y el valor del portafolio de cobertura cambia en $\alpha(S(\delta) - S(0))$. Cambiemos en este momento a una notación más usual en la literatura: en lugar de α, utilizaremos Δ. El nuevo valor del portafolio de cobertura es también el nuevo valor del derivado y entonces

$$\Delta(0, S_0) = \frac{\text{cambio en el valor del derivado de 0 a } \delta}{\text{cambio en el valor del stock de 0 a } \delta}$$

Regresando al tiempo continuo, podemos hacer un análogo? Mencionamos que el proceso α_t es meramente el cociente de volatilidades. Entonces, si nos fijáramos en el cociente del cambio en el valor de la opción causado por un movimiento en el precio del stock y el cambio en el precio del stock en cuestión, este debiése ser algo parecido a α_t. En consecuencia, si tenemos un contingente para el cual la única información necesaria, proveniente de la información hasta el momento, para valuarlo es el precio del stock al momento y la forma funcional del payoff es diferenciable, entonces podríamos adivinar que

$$\Delta = \frac{\partial(\text{valor de la opción})}{\partial(\text{valor del stock})}.$$

De hecho esto es verdad. Para el caso (usual) donde el reclamo contingente depende solamente en el valor terminal, el valor de la opción es una función suave del precio del stock. Supongamos que el derivado X es una función del valor terminal del precio del stock, de tal manera que $X = f(S_T)$ para alguna función $f(s)$. Entonces tenemos el siguiente resultado:

Resultado 1 *Si el derivado X es igual a $f(S_T)$, para alguna f, entonces el valor del derivado al tiempo t es igual a $V_t = V(S_t, t)$, donde $V(s,t)$ está dada por la fórmula*

$$V(s,t) = \exp(-r(T-t))E_{\mathbf{Q}}(f(S_T)|S_t = s) \tag{1}$$

y entonces la estrategia de cobertura está dada por $\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}(S_t, t)$.

Prueba.
Sabíamos que el valor del derivado al tiempo t está dado por (1).
Ahora bien, recordemos que

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t. \tag{2}$$

Entonces, Itô da

$$dV_t = d(V(S_t,t)) = \left(rS_t\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt + \left(\sigma S_t\frac{\partial V}{\partial s}\right)d\widetilde{W}_t. \tag{3}$$

De la condición de auto-financiamiento, también sabemos que

$$dV_t = \alpha_t dS_t + b_t dB_t. \tag{4}$$

Utilizando el hecho de que $dB_t = rB_t dt$ y (2) para substituir en (4) obtenemos

$$dV_t = (rS_t\alpha_t + rb_tB_t)dt + (\sigma S_t\alpha_t)d\widetilde{W}_t. \tag{5}$$

Como las representaciones en EDE's son únicas, los términos de volatilidad deben coincidir en (3) y (5). Esto da $\alpha_t = \frac{\partial V}{\partial s}$. Usando nuestra nueva notación tenemos

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}, \tag{6}$$

el monto de stock en el portafolio de replicado en cualquier momento es la derivada del precio de la opción con respecto al precio del stock.
Utilizando $\alpha_t = \frac{\partial V}{\partial s}$ y el hecho de que $V_t = \alpha_t S_t + b_t B_t$, podemos también igualar los términos de tendencia de (3) y (5) obteniendo

$$rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t} = rV;$$

i.e.,

$$rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0. \tag{7}$$

Esta es la ecuación diferencial parcial (EDP) de Black-Scholes, la cual aunada a la condición $V(s,T) = f(s)$ da otra forma de resolver la ecuación de valuación.

Las griegas para opciones call y put europeas

Consideremos una opción call con precio de ejercicio K. Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial}{\partial S_0} e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^x - K)_+ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left[\frac{-(x-[r-\frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right] dx \\
&= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial (S_0 e^x - K)_+}{\partial S_0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left[\frac{-(x-[r-\frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right] dx \\
&= e^{-rT} \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{\infty} e^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left[\frac{-(x-[r-\frac{\sigma^2}{2}]T)^2}{2\sigma^2 T}\right] dx \\
&= N(d_1)
\end{aligned}$$

Así como Δ es la sensibilidad del instrumento a cambios en el precio del stock, tenemos otras medidas de sensibilidad respecto a otros parámetros. Daremos la definición y el correspondiente valor para el caso de una call y una put europeas.

Definición	call
Delta= $\frac{\partial}{\partial S_0}$	$N(d_1) > 0$
Gamma= $\frac{\partial^2}{\partial S_0^2}$	$\frac{1}{S_0\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp(-\frac{d_1^2}{2}) > 0$
Theta= $\frac{\partial}{\partial t}$	$-\frac{S_0\sigma}{2\sqrt{2\pi T}} \exp(-\frac{d_1^2}{2}) - rKe^{-rT}N(d_2) < 0$
Vega= $\frac{\partial}{\partial \sigma}$	$\frac{S_0\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{d_1^2}{2}) > 0$
Rho= $\frac{\partial}{\partial r}$	$TKe^{-rT}N(d_2) > 0$

Definición	put
Delta= $\frac{\partial}{\partial S_0}$	$-N(-d_1) < 0$
Gamma= $\frac{\partial^2}{\partial S_0^2}$	$\frac{1}{S_0\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp(-\frac{d_1^2}{2}) > 0$
Theta= $\frac{\partial}{\partial t}$	$-\frac{S_0\sigma}{2\sqrt{2\pi T}} \exp(-\frac{d_1^2}{2}) + rKe^{-rT}N(-d_2) >< 0$
Vega= $\frac{\partial}{\partial \sigma}$	$\frac{S_0\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{d_1^2}{2}) > 0$
Rho= $\frac{\partial}{\partial r}$	$-TKe^{-rT}N(-d_2) > 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 25
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 18/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

Más en cobertura

Encontramos la sesión pasada que en el caso de una call europea con precio de ejercicio K y fecha de ejercicio T, la cantidad de subyacente que debe mantenerse en la estrategia de replicado al tiempo t está dada por

$$\alpha_t = \frac{\partial V}{\partial s}(S_t, T-t) = N\left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

y, en consecuencia, el valor de la tenencia en bonos está dado por

$$b_t B_t = -Ke^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Observemos lo siguiente:

- Tenemos que $0 < \alpha_t < 1$. Entonces, siempre tendremos una posición larga acotada en el stock.
- Como $b_t B_t < 0$ siempre estaremos pidiendo prestado. Aún más, esta posición está acotada por el precio de ejercicio K.

También en la sesión pasada definimos diferentes medidas de sensibilidad respecto a los diferentes parámetros, las cuales pueden ser aplicadas a cualquier instrumento o portafolio.

EJEMPLO:
Consideremos el caso de una institución financiera que vende dos tipos de opciones en el mismo subyacente, con diferentes precios de ejercicio y fechas de maduración. La institución quiere protegerse ante cambios en el precio del subyacente; pero también quiere protegerse ante cambios en la volatilidad. Denotemos por n_1 y n_2 las cantidades que se mantienen de cada una de las opciones (negativas si la institución vende las opciones). Por supuesto, la institución también invierte en el subyacente y en el bono sin riesgo; denotemos por n_s y n_b las cantidades que se mantienen de cada uno. El valor inicial del portafolio de esta institución es

$$V = n_1 V_1 + n_2 V_2 + n_s S_0 + n_b.$$

Sabemos ya cuanto de subyacente y de bonos debiése de tenerse si la institución planea replicar (de manera dinámica) las opciones: estas cantidades deben satisfacer

$$V = 0$$

y

$$n_1\Delta_1 + n_2\Delta_2 + n_s = 0.$$

La segunda relación es $\frac{\partial V}{\partial S_0} = 0$; el valor de las tenencias de la institución son insensibles a primer orden a cambios en el precio del subyacente.

Si solo tuviéramos una opción, tendríamos dos ecuaciones homogeneas en tres variables n_1, n_s, n_b, restringiendo sus valores a una recta, de tal manera que n_1 determina n_s y n_b. Esa es la situación con la que estamos familiarizados. Pero si tenemos dos opciones (independientes), entonces tenemos la libertad de imponer una ecuación lineal adicional. Si pedimos que el portafolio sea insensible a primer orden a cambios en σ, impondremos la condición adicional

$$n_1\text{Vega}_1 + n_2\text{Vega}_2 = 0.$$

Una estrategia de replicado requiere rebalancear de manera dinámica. La institución debe cambiar sus tenencias en cada incremento de tiempo para hacer la nueva Δ igual a cero. Cuando teníamos una opción, esto era hecho ajustando las cantidades de subyacente y de bonos, manteniendo la cantidad de la opción fija. En el marco actual de dos opciones, manteniendo la condición adicional $\text{Vega}_\pi = 0$ requerirá que el cociente entre n_1 y n_2 sea también actualizado de manera dinámica; i.e., la institución tendrá que vender o comprar opciones adicionales a lo largo del tiempo.

EJEMPLO:

Observemos que una posición en el subyacente o una en un forward en el subyacente tienen una Gamma igual a cero y, en consecuencia, no pueden ser usadas para cambiar la Gamma de un portafolio. Entonces, para modificar la Gamma de un portafolio necesitamos una posición en un instrumento como una opción, que no tiene una dependencia lineal en el subyacente.

Supongamos que un portafolio Delta-neutral ($\Delta = 0$) tiene una Gamma igual a Γ, y una opción tiene una Gamma igual a Γ_T. Si el número de opciones añadidas al portafolio es w_T, la Gamma del portafolio es

$$w_T\Gamma_T + \Gamma$$

Entonces, la posición en la opción necesaria para hacer el portafolio Gamma-neutral es

$$-\frac{\Gamma}{\Gamma_T}.$$

Al incluir la opción en el portafolio seguramente estamos cambiando la Delta. Entonces, la posición en el subyacente tiene que ser cambiada para mantener la Delta-neutralidad.

Supongamos que un portafolio es Delta-neutral y tiene una Gamma de -3000. La Delta y Gamma de una opción call en particular son 0,62 y 1,50, respectivamente. Podemos hacer el portafolio Gamma-neutral si incluimos una posición larga de

$$\frac{3000}{1{,}5} = 2000$$

en la opción. Sin embargo, la Delta del portafolio cambiará de cero a $(2000)(0{,}62) = 1240$. Una cantidad 1240 del subyacente debe entonces venderse del portafolio para mantenerlo Delta-neutral.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 26
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 22/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

OPCIONES AMERICANAS

En algunas ocasiones, una opción tiene más opcionalidad que el simple caso de escoger entre dos alternativas a la fecha de maduración. Las opciones americanas son los ejemplos más conocidos de tales derivados. Una opción americana da el derecho (más no la obligación) de comprar (call) o vender (put) una unidad de subyacente a un precio pactado K en cualquier momento de la vida del contrato incluyendo la fecha de maduración T.

Resultado 1 *Una call americana escrita en un activo que no paga dividendos tiene el mismo valor que la correspondiente europea; ejercer prematuramente nunca es optimo.*

Prueba.
Consideremos el valor de la opción americana, con precio de ejercicio K, en un tiempo t con $t < T$. El ejercer la opción en t da un valor (en t) de

$$S_t - K$$

Mantener la opción hasta la fecha de maduración, da un valor al tiempo t igual a aquél de una call europea,

$$c[S_t, K, T - t]$$

Sin suponer dinámica alguna en el precio del subyacente, sabemos que el valor de una call europea es al menos el de un forward con el mismo precio de ejercicio K y madurez T. En consecuencia, mantener la opción hasta la fecha de maduración da un valor en t de al menos

$$S_t - \exp(-r(T - t))K$$

Por lo tanto, tenemos que si $r > 0$ entonces

$$\begin{aligned} c[S_t, K, T - t] &\geq S_t - \exp(-r(T - t))K \\ &> S_t - K \end{aligned}$$

y en consecuencia ejercer prematuramente es suboptimo.□

Resultado 2 *Una opción put americana escrita en un stock que no paga dividendos puede tener un valor mayor que el de la asociada put europea; ejercer prematuramente puede ser optimo.*

PRUEBA.
Consideremos el valor de la opción americana, con precio de ejercicio K, en un tiempo t con $t < T$. El ejercer la opción en t da un valor (en t) de

$$K - S_t$$

Mantener la opción hasta la fecha de maduración, da un valor al tiempo t igual a aquél de una put europea,

$$p[S_t, K, T - t]$$

Suponiendo una dinámica de precios lognormal, p está dado por la fórmula de Black-Scholes

$$p[S_t, K, T - t] = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right] \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right] \end{aligned}$$

y $N(d)$ es la probabilidad acumulada hasta d de una distribución normal estándar ($N(0,1)$).
Si $\frac{S_t}{K} \to 0$ ($S_t << K$) entonces $d_1, d_2 \to -\infty$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t N(-d_1) &\approx Ke^{-r(T-t)} - S_t \\ &< K - S_t \end{aligned}$$

En tal situación es mejor ejercer la opción al tiempo t que mantenerla hasta la expiración (esto no muestra que ejercer en t es optimo, pero si muestra que mantener la opción hasta la expiración no es optimo).$\square$

El comprador de una opción tiene que tomar decisiones de un momento a otro para decidir si debe ejercer y cuando debe hacerlo. Este comprador tiene la elección de cuando parar y esa elección solo puede usar información de los precios hasta el momento presente. Tal tiempo (aleatorio) es llamado un *tiempo de paro*. Consideremos el caso de una call. Si se sigue una estrategia que resultará en ejercer la opción al tiempo de paro τ, el correspondiente payoff es

$$(S_\tau - K)_+ \quad \text{al tiempo } \tau$$

Si el emisor de la opción supiera de antemano que tiempo de paro el inversionista usará, el costo al tiempo cero de cubrir ese payoff sería

$$E_{\mathbf{Q}}(e^{-r\tau}(S_\tau - K)_+).$$

Como no sabemos que τ será usada, tenemos que prepararnos para el peor caso posible y cobrar el valor máximo (maximizada sobre *todas* las estrategias de parado posibles),

$$V_0 = \sup_{\tau} E_{\mathbf{Q}}(e^{-r\tau}(S_\tau - K)_+).$$

En general tenemos el siguiente resultado:

Resultado 3 ***(Valuación de derivados con opcionalidad)***
En general, si el comprador de la opción tiene un conjunto de alternativas A y recibe un payoff X_a al tiempo T, después de escoger $a \in A$, entonces el emisor de la opción debiése cobrar

$$V_0 = \sup_{a \in A} E_{\mathbf{Q}}(e^{-rT} X_a)$$

por la opción. Si el comprador no ejerce la opción optimamente, entonces la cobertura del emisor habrá producido para el tiempo T un excedente.

Valuación utilizando una Ecuación Diferencial Parcial

Para una opción europea, el equivalente en el caso continuo de trabajar el árbol hacia atrás es resolver la EDP de Black-Scholes para $t < T$, con condición final $f(s)$ en $t = T$. Existe un análogo para una opción americana, sin embargo, la EDP es reemplazada por un *problema de frontera libre*:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\sigma^2 s^2 + rs\frac{\partial V}{\partial s} - rV \leq 0,$$

$$V(s,t) \geq f(s),$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\sigma^2 s^2 + rs\frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0 \quad \text{o} \quad V(s,t) = f(s).$$

Llamamos a este un problema de frontera libre porque el valor es aún gobernado por la EDP de Black-Scholes en *alguna* región del plano (s,t) (la región donde el ejercicio inmediato no es optimo), sin embargo, esta región no es dada como un dato del problema sino que tiene que ser encontrada como parte del problema.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 27
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 24/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]

MERCADO DE CAMBIO

Tener una posición en alguna moneda extranjera es riesgoso. El valor en pesos de una unidad de moneda extranjera varía de un momento a otro. En consecuencia, el mercado demanda instrumentos derivados con el fin de cubrirse de este riesgo: contingentes basados en el valor futuro de una unidad de cierta moneda en términos de otra.

Modelo 1 ***(Modelo Black-Scholes para mercado de cambio)***
Nuestro modelo consta de tres procesos:

$$\begin{array}{rrcl} \textit{Bono moneda local} & B_t & = & \exp(rt) \\ \textit{Bono moneda extranjera} & D_t & = & \exp(ut) \\ \textit{Tasa de cambio} & C_t & = & C_0\exp(\mu t + \sigma W_t) \end{array}$$

*para algún W_t $\mathbf{P}$-movimiento browniano y donde r es la **tasa de interés sin riesgo** para la moneda local, u es la **tasa de interés sin riesgo** para la moneda extranjera, σ es la **volatilidad** y μ es la **tendencia**.*

EL INVERSIONISTA EN MONEDA LOCAL

Hay una cuestión importante que debemos notar: para el inversionista en moneda local el bono es *comerciable* pero el proceso C_t no lo es. Este proceso representa el valor en moneda local de una unidad de la moneda extranjera, pero la moneda extranjera no es un instrumento comerciable en nuestro mercado. La existencia de un bono para la moneda extranjera (D_t) involucra una tasa de interés para efectivo en la moneda extranjera, y esta tasa es u no cero. Por otra parte, el proceso D_t tampoco es comerciable (es un precio en moneda extranjera).
Afortunadamente el producto $S_t = C_tD_t$ *es* comerciable en moneda local. El inversionista en moneda local puede mantener bonos en efectivo de la moneda extranjera, y el valor en moneda local de esta tenencia estará dada por la conversión del precio en moneda extranjera D_t a moneda local; i.e., al multiplicar por C_t.

Paso 1 Encontrar $\mathbf{Q}$ bajo la cual el bono en moneda extranjera descontado por el bono en moneda local $Z_t = B_t^{-1}S_t = B_t^{-1}C_tD_t$ es una martingala.
Observemos que podemos escribir Z_t como sigue

$$Z_t = C_0\exp((\mu + u - r)t + \sigma W_t)$$

de donde es fácil ver que

$$dZ_t = Z_t((\mu + u - r + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t)$$

Entonces, aplicando C-M-G, existe $\mathbf{Q}$ tal que

$$\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu + u - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}t$$

es un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano y

$$Z_t = C_0 \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \widetilde{W}_t)$$

En consecuencia

$$C_t = C_0 \exp((r - u - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \widetilde{W}_t)$$

Paso 2 Dada esta $\mathbf{Q}$ construimos el proceso

$$N_t = E_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X | \Im_t),$$

el cual sabemos es una $\mathbf{Q}$-martingala.

Paso 3 Por el teorema de la representación martingala sabemos que existe un proceso $\Im$-previsible α_t tal que

$$N_t = N_0 + \int_0^t \alpha_s dZ_s.$$

Estamos ahora en la posición de describir nuestra estrategia de replicado (α_t, b_t) la cual consiste de tenencias de nuestros dos activos comerciables en moneda local: S_t y B_t. Nuestra propuesta es:

- Mantener α_t unidades de bono en moneda extranjera, y
- mantener $b_t = N_t - \alpha_t Z_t$ unidades de bono en moneda local.

El valor en moneda local del portafolio al tiempo t es

$$\begin{aligned} V_t &= \alpha_t S_t + b_t B_t \\ &= B_t N_t. \end{aligned}$$

Recordemos que la condición de auto-financiamiento $dV_t = \alpha_t dS_t + b_t dB_t$ es equivalente a $dN_t = \alpha_t dZ_t$, pero esto es precisamente lo que garantiza el teorema de la representación martingala.
Por último veamos que

$$\begin{aligned} V_T &= B_T N_T \\ &= B_T E_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X | \Im_T) \\ &= B_T B_T^{-1} X \\ &= X. \end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestra estrategia es de replicado.

Resultado 1 ***(Fórmula de valuación en mercado de cambio)***
Cualquier contingente tiene precio de no-arbitraje y está dado por el valor del portafolio

$$V_t = B_t E_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X | \Im_t)$$

donde $\mathbf{Q}$ *es la medida bajo la cual el activo descontado* Z_t *es una martingala.*

EJEMPLO: Forward
Un contrato forward en dólares. A qué precio deberíamos acordar comerciar dólares en una fecha futura T? Si acordamos comprar un dólar por un monto K de pesos, nuestro payoff es

$$X = C_T - K.$$

El valor del contrato al tiempo t es

$$\begin{aligned} V_t &= B_t E_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X | \Im_t) \\ &= e^{-r(T-t)} E_{\mathbf{Q}}(C_T - K | \Im_t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio forward al tiempo cero para comprar dólares al tiempo T es $K = E_{\mathbf{Q}}(C_T)$; i.e.,

$$\begin{aligned} F &= E_{\mathbf{Q}}(C_0 \exp((r - u - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \widetilde{W}_t)) \\ &= e^{(r-u)T} C_0. \end{aligned}$$

Con este precio de entrega, el valor del contrato al tiempo t es

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} E_{\mathbf{Q}}(C_T - e^{(r-u)T} C_0 | \Im_t) \\ &= e^{-r(T-t)} E_{\mathbf{Q}}(C_T | \Im_t) - e^{rt-uT} C_0 \\ &= e^{-r(T-t)} E_{\mathbf{Q}}(B_T D_T^{-1} Z_T | \Im_t) - e^{rt-uT} C_0 \\ &= e^{rt-uT} E_{\mathbf{Q}}(Z_T | \Im_t) - e^{rt-uT} C_0 \\ &= e^{rt-uT} Z_t - e^{rt-uT} C_0 \\ &= e^{rt-uT} B_t^{-1} D_t C_t - e^{rt-uT} C_0 \\ &= e^{-u(T-t)} C_t - e^{rt-uT} C_0 \\ &= e^{-uT}(e^{ut} C_t - e^{rt} C_0). \end{aligned}$$

En consecuencia, el valor del portafolio descontado es

$$\begin{aligned} N_t &= B_t^{-1} V_t \\ &= e^{-uT} Z_t - e^{-uT} C_0 \end{aligned}$$

y entonces

$$dN_t = e^{-uT} dZ_t.$$

Por lo tanto, la cobertura requerida es la constante

$$\alpha_t = e^{-uT}$$

y la constante

$$b_t = -e^{-uT}C_0.$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
NOTAS DEL CURSO: VALUACIÓN DE OPCIONES
SESIÓN 28
ÚLTIMA MODIFICACIÓN: 26/05/2006.
Profesor: Jorge Humberto Del Castillo Spíndola.
[ ]
EJEMPLO: Opción call
Una call en dólares con precio de ejercicio K (al tiempo T tenemos la opción de comprar dólares a K pesos cada uno). El payoff en pesos es

$$X = (C_T - K)_+$$

Al tiempo t tenemos que

$$V_t = B_t E_{\mathbf{Q}}(B_T^{-1} X | \Im_t).$$

Ahora bien, para valuar nuestra opción recordemos de la sesión pasada que

$$C_T = C_0 e^{(r-u-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma \widetilde{W}_T}$$

Simplificando esta expresión y utilizando que el precio forward es $F = E_{\mathbf{Q}}(C_T) = e^{(r-u)T} C_0$ obtenemos

$$\begin{aligned} C_T &= C_0 e^{(r-u-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma \widetilde{W}_T} \\ &= C_0 e^{(r-u)T} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \widetilde{W}_T} \\ &= F e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \widetilde{W}_T} \end{aligned}$$

donde $\widetilde{W_T} \sim N(0, T)$ bajo $\mathbf{Q}$.
Entonces, el precio de la opción al tiempo cero es

$$V_0 = e^{-rT} E_{\mathbf{Q}}[(F e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \widetilde{W}_T} - K)_+]$$

Pero ahora si que tenemos ya la experiencia de como evaluar esta esperanza. Obtenemos

$$V_0 = e^{-rT} \left[F N\left(\frac{\ln(\frac{F}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - K N\left(\frac{\ln(\frac{F}{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right]$$

En este caso la cobertura es

$$\begin{aligned} \alpha_t &= e^{-uT} N\left(\frac{\ln(\frac{F_t}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ b_t &= -K e^{-rT} N\left(\frac{\ln(\frac{F_t}{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \end{aligned}$$

donde F_t es el precio forward para dólares al tiempo t, $F_t = e^{(r-u)(T-t)} C_t$.