Matemáticas Discretas 2024-1
Unidad 3: Lista de problemas a entregar

Indicaciones

Esta es una actividad de trabajo individual. Lo que se entrega es una **única libreta de Jupyter** con tu nombre y número de cuenta, separada en una sección por cada problema. En celdas Markdown hay que escribir las respuestas teóricas. En celdas de código hay que hacer las implementaciones. Para cada uno de los problemas:

- Explica de qué tipo(s) es (optimización, decisión, enlistar, contar).
- Plantea un espacio de estados en el que puedas hacer fuerza bruta y calcula asintóticamente el tamaño de este espacio de estados y cuánto tiempo tomaría un algoritmo que resuelva el problema explorando este espacio de estados.
- Plantea un mejor algoritmo usando alguna o algunas de las heurísticas vistas en el curso. Estúdialo en correctitud y tiempo.
- Implementa la solución en Python.
- Da la respuesta a la instancia que se te da. **Ojo.** El problema debes resolverlo en **general** y con ello responder todo lo de arriba. Y hasta el final, **también** hay que aplicar el algoritmo a la instancia particular indicada.

Problemas

1. Una palabra es monovocálica si tiene solamente una vocal (quizás repetida varias veces), por ejemplo, "casa" sólo tiene la 'a'. Se tiene una lista L de n palabras. Para cada vocal, se quiere encontrar su palabra monovocálica más grande en L.

   Nota. A todas las variantes de una vocal (mayúscula, minúscula, acentos, etc.) las consideramos la misma.

   Instancia. Encontrar las palabras monovocálicas más grandes para cada vocal de la lista en el archivo `espanol.txt`.

2. En un cuadrado de $n \times n$ dividido en cuadraditos de 1×1 se ha colocado un punto rojo en algunos de sus cuadraditos. ¿Se podrá elegir uno de los subcuadrados de 4×4 que no tenga ningún punto rojo?

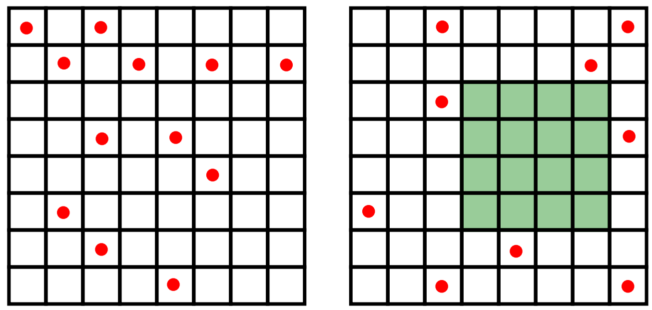

Figura 1: Ejemplo del Problema 4.

Por ejemplo, en la Figura 1, del lado izquierdo hay un acomodo de puntos rojos en el que no se puede poner ningún cuadrado de 4×4 sin puntos rojos, pero en el de la derecha sí se puede poner al cuadrado sombreado en verde.

Instancia. Considera el tablero de 100×100 en donde el cuadradito (i, j) es el que está en la fila i y columna j. Pondremos un punto rojo en (i, j) si $i + j$ es un número primo. Resuelve el problema para este caso. Interpreta tu respuesta.

3. Una *subpalabra* de una palabra P consiste de tomar algunas letras de P de izquierda a derecha, no necesariamente de manera consecutiva. Por ejemplo. la palabra *casa* tiene las 13 subpalabras a *c*, *a*, *s*, *ca*, *cs*, *as*, *aa*, *sa*, *cas*, *caa*, *csa*, *asa*, *casa*. No tiene como subpalabra a *sc*, pues estas letras no aparecen en ese orden en *casa*. La palabra vacía nunca cuenta. Dada una palabra con n letras, ¿cuántas subpalabras tiene?

   Instancia. ¿Cuántas subpalabras tiene la siguiente palabra?

   `tabagatabaagatabagbataab`

4. Se tienen n números enteros alrededor de un círculo, quizás algunos de ellos negativos. Diseña un algoritmo que encuentre cuál es el arco consecutivo de números consecutivos cuya suma sea mayor.

   Instancia. Resuelve el problema para la Figura 2. Por ejemplo,

   $$9, -9, 30, -31, -14, 7, -5$$

   son números que están en un arco consecutivo de números.

5. Nos dan una lista L en donde cada elemento es una pareja `(persona, número entero)`. En total hay n parejas. Las personas, números e incluso parejas se pueden repetir. Queremos de aquí extraer otra lista M que sólo aparezcan para cada persona, las 3 parejas con el mayor número entero (si hay menos de 3 queremos todas). La lista M debe respetar el orden de

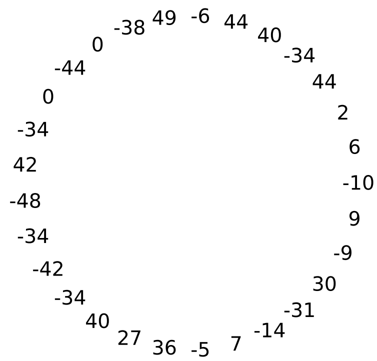

Figura 2: Instancia a resolver de Problema 4.

L. En caso de que haya empate en una pareja, debe aparecer la que sale primero en L. Por ejemplo, si la lista es:

```
L=[(A,5),(B,2),(B,1),(A,5),(A,8),(C,0),(C,4),(D,1),(B,9),(B,0),(A,8)]
```

Los números de las A de mayor a menor son $8, 8, 5, 5, \ldots$, así que el top 3 es $8, 8, 5$. Aunque el $(A, 5)$ aparece dos veces, nos quedamos con su primera aparición. Como los C sólo tienen dos parejas, aparecen ambas, y algo similar para los D. El $(B, 0)$ no aparece porque para las B el top 3 es $2, 1, 9$. Ya elegidas las parejas que se quedan, debemos ponerlas en el orden que tenían en L.

Debemos dar como respuesta entonces

```
M=[(A,5),(B,2),(B,1),(A,8),(C,0),(C,4),(D,1),(B,9),(A,8)]
```

Instancia.

$$\begin{aligned} L = [&(A,5),(C,1),(E,8),(E,9),(E,2),(D,5),(B,4),(E,5),\\ &(E,8),(C,3),(B,9),(B,0),(C,9),(C,1),(E,5),(B,7),\\ &(A,7),(F,1),(B,7),(B,1),(E,8),(F,3),(E,6),(E,2),\\ &(C,8),(F,0),(F,1),(E,0),(D,3),(A,0),(B,3),(A,5),\\ &(D,3),(C,2),(B,3),(E,7),(F,1),(D,3),(B,8),(C,6),\\ &(D,1),(C,0),(F,4),(A,6),(F,7),(E,7),(D,8),(B,8)] \end{aligned}$$

6. Se quiere saber cuál es el mejor valor de k de 1 a n para maximizar las siguientes funciones, y para dicho valor que maximiza, la evaluación correspondiente.

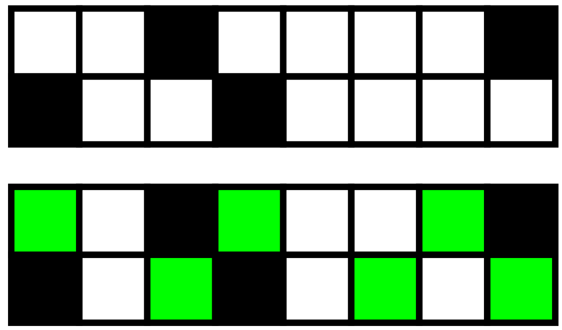

Figura 3: Ejemplo de salón de 2×8

- $f(k) = \sin(1) + 2\sin(2) + 3\sin(3) + \ldots + k\sin(k)$, donde sin se evalúa en radianes.
- $h(k) = \sin(1) + 2\sin(\frac{1}{2}) + 3\sin(\frac{1}{3}) + \ldots + k\sin(\frac{1}{k})$, donde sin se evalúa en radianes.

Nota. Las funciones sin se evalúan en radianes.

Instancia. Resuelve el problema para $n = 10^6$.

7. Una cuadrícula de $2 \times n$ representa un laboratorio de cómputo. Con un cuadrado negro indicamos que la computadora de ese lugar está descompuesta y no se puede usar. Con uno blanco que sí se puede usar. Queremos meter a 6 estudiantes en ese salón. Pero, además, como hay una pandemia suelta, dos estudiantes no pueden quedar en cuadrados que compartan arista. Dados los cuadrados de computadoras descompuestas, ¿de cuántas formas se puede colocar a los estudiantes?

   Por ejemplo, en la Figura 3, arriba tenemos un posible salón. En esa misma figura, abajo en verde se indica una manera de colocar a 6 estudiantes.

   Instancia. La de la Figura 4.

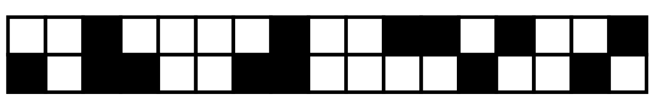

Figura 4: Instancia para resolver

8. Se tiene un **cubo**. Un acomodo **bueno** consiste en poner sobre sus vértices 8 números distintos del 1 al n. Un acomodo es **muy bueno** si la suma de los números en cada cara del cubo es la misma para todas las caras. Da todos los acomodos muy buenos.

   Instancia. Resolver el problema para $n = 15$.