1. Metoda Newtona

Arkusz 1 – ***szukamy niewymierności pierwiastka z dwóch (czyli tej części po przecinku)***

Jakie równanie ma jako rozwiązanie pierwiastek z 2?

x2 + 2x – 1 = 0

Δ = b2 – 4ac

x2 + 2x – 1 = 0 → x(x+2) = 1 → x = 1/(x+2)

stąd mamy ułamek łańcuchowy nieskończony: x = 1/(2+1/(2+1/…)),

czyli: xn+1 = 1/(2+xn)

* nie mamy x0, przyjmujemy różne liczby i sprawdzamy
* przestajemy szukać rozwiązania, kiedy różnica między kolejnymi wynikami bardzo mała (przyjęliśmy 10-6)
* w kolumnie A jest ułamek łańcuchowy, w B sprawdzenie różnicy między dwoma ostatnimi rozwiązaniami (i tak do końca arkusza)

Arkusz π – ***szukamy liczby π***

Musimy znaleźć funkcję, której pierwiastkiem jest π. Może być sinus, cosinus, tangens… Wybraliśmy sinus.

Algorytm poszukiwania liczby π metodą Newtona. Ogólny wzór szukania miejsca zerowego Newtonem:

**xn+1 = xn – f(xn)/f’(xn)**

sin(x) = 0

xn+1 = xn – sin(xn)/(sin(xn))’ = xn – sin(xn)/cos(xn) = xn – tg(xn)

tg(xn) jest błędem maksymalnym, szukamy takiego punktu, gdzie ten błąd ε < 10-6

* przyjmujemy różne liczby jako x0
* kolumna po prawej sprawdza, czy już możemy przestać liczyć (czy kolejne wyniki nie różnią się od siebie za bardzo)
* metoda Newtona wyszukuje pierwsze miejsce zerowe naszej funkcji – jeśli źle dobierzemy x0, to trafimy albo za daleko, albo za blisko punktu 0; potrzebne jakieś założenie

Arkusz zadanie domowe – treść:

***Znajdź pierwsze dodatnie rozwiązanie równania e-x = sin(x) metodą Newtona. Jest nieskończenie wiele rozwiązań, zadaniem jest znalezienie pierwszego.***

e-x – sin(x) = 0

f(x) = e-x – sin(x)

* kolumny A, B są źle – nie należy przyjmować jako wartości wyjściowej czegoś niewymiernego lub o nie do końca znanej wartości jak liczba π; powinna to być liczba typu 0, 1, 2
* korzystamy ze wzoru: xn+1 = xn – f(xn)/f’(xn)
* po prawej w arkuszu jest niedokończone obliczanie metodą regula falsi – tego nie będzie na sprawdzianie, bo nie było na wykładzie

1. Wielomiany interpolacyjne

Wielomian interpolacyjny Newtona korzysta ze wzoru Taylora. Potrzebne do obliczeń kiedy z jakichś powodów nie możemy dokonać pełnych pomiarów we wszystkich punktach. Zastępujemy lokalnie skomplikowaną funkcję wielomianem, funkcją kwadrtową.

Wielomian interpolacyjny Newtona:

xi = x0 + i\*h

Wn(x) = y0 + Δy0/(1!h) \* (x‑x0) + Δ2y0/(2!h2) \* (x‑x0) \* (x‑x1) + … + Δny0/(n!hn) \* (x‑x0) \* (x‑x1) \* … \* (x‑xn‑1)

n czynników wielomianu stopnia n

tworzymy macierz trójkątną: dla x kolejne liczby naturalne, do tego liczymy y0, Δy0, Δ2y0, Δ3y0

Arkusz wielomian Newtona – ***znamy kilka punktów funkcji sinus, próbujemy przybliżyć jej przebieg***

* nasze y to sinus
* mamy dane cztery punkty pomiarowe (czyli x)
* kolumny Δ to różnice w ostatnich wynikach
* wartości z macierzy potrzebne są do wzoru
* formuła to wzór na wielomian interpolacyjny Newtona, gdzie: x to nasz bieżący x z kolumny; y, Δy dobieramy z macierzy; xo, x1,x2 dobieramy z macierzy
* bieżące x dobieramy z zadanej kolumny – to jest baza do sprawdzenia, czy nasze przybliżenie funkcji jest prawidłowe

1. Całki oznaczone

Arkusz metoda trapezów – ***szukamy całki oznaczonej 0-1 z sin(x)***

Metoda trapezów jest lepsza niż metoda prostokątów (całka Riemanna). W budowaniu trapezów biorą udział wszystkie punkty x0-xn (w prostokątach pierwszy lub ostatni odrzucany).

Ogólny wzór:

St = ½\*h \* (f0 + f1 + f1 + f2 + … + fn-1 + fn) = **½\*h \* (f0+fn) + h \* Σi=nn-1fi**

Wzór na całkę z członem błędu ε:

Sxixi+1 f(x) dx = Sii+1 (w1(x) + ε1(x)) dx = Sii+1 w1(x) dx + Sii+1 ε1(x) dx

Wzór na błąd metody:

|εt| = 1/12 \* (b-a)3/n2 \* f’’(c), c Є [a,b], |f’’(c)| = sup|f’’(x)|

Błąd metody to błąd interpolacji wielomianu 1. stopnia. Robimy interpolację – zastępujemy funkcję wielomianem stopnia pierwszego.

f(x) = sin(x), h = 0,1

|f’’(x)| = |-sin(x)| = sin(x)

S01 sin(x) dx = -cos(x)|01 = cos(0) – cos(1) = 1 – cos(1)

* h = długość przedziału, n = liczba przedziałów
* nasz przedział: b-a = 1-0 = n\*h = n\*0,1; n = 10
* w arkuszu całka metodą trapezów to It, Ia to całka ze wzoru
* do policzenia błędu potrzebujemy sup|sin(x)|, czyli tutaj komórka B12
* znamy wartość wyliczoną metodą trapezów +/- wyliczony błąd – wiemy, że między tymi dwiema wartościami jest poprawny wynik

Arkusz metoda Simpsona – ***szukamy całki oznaczonej 0-1 z sin(x)***

f(x) = sin(x)

Metoda Simpsona bazuje na parabolach. Wielomian stopnia drugiego. Potrzebne są trzy punkty nie współliniowe do wyznaczenia paraboli. Skrajne punkty przedziału wchodzą tylko do jednej paraboli.

Ogólny wzór:

**Ss = 1/3 \* h \* [f0 + fn + 2 \* (f2 + f4 + … + fn-2) + 4 \* (f1 + f3 + … + fn-1)]**

Wzór na całkę z członem błędu ε:

Sxixi+2 f(x) dx = Sii+2 n2(x) + ε2(x) dx = Sii+2 w2(x) dx + Sii+2 ε2(x) dx

Wzór na błąd metody ε:

|εs| = 1/180 \* (b-a)5/n4 \* |fIV(c)|

|fIV(c)| = sup|fIV(x)|, c Є [a,b]

Przyjmujemy h między dwoma punktami, więc musimy mieć parzystą liczbę przedziałów. Można też na całą parabolę (wtedy do obliczeń zamiast 1/3 jest 1/6).

* f(x) = sin(x), h = 0,1, n = 10
* fIV(x) = sin(x)
* w arkuszu Is oznacza całkę metodą Simpsona, Ia całkę ze wzoru
* w arkuszu xp to iksy parzyste, xnp to iksy nieparzyste; fxp to wartość funkcji dla iksów parzystych, a fnp dla iksów nieparzystych – to wszystko wstawiamy do wzoru Simpsona
* błąd metody liczony ze wzoru wyżej, gdzie supremum to sinus z 1 (nasz przedział kończy się na 1, w tym przedziale funkcja rosnąca)
* znamy wartość wyliczoną metodą Simpsona +/- błąd – wiemy, że między tymi wartościami jest poprawny wynik

Arkusz wyliczmy π z koła – ***wyznaczamy liczbę π przy pomocy całki***

Przypadek, gdy metoda trapezów nie zadziała (za duży błąd, by wynik był wiarygodny).

Co ma pole = π? Koło o promieniu = 1.

Z „reguły cyrkla” wyznaczymy funkcję koła.

x2 + y2 = 1 → y = pierw.(1-x2)

Są dwa rozwiązania:

+ nad osią x

- pod osią x

Wybieramy zakres na +, czyli całkujemy od 0 do 1 → to jest ¼ koła.

π = 4 \* S01 pierw(1-x2) dx

f(x) = pierw(1-x2)

f’(x) = 1/(pierw(1-x2)) \* (-2x) [pochodna funkcji pierwiastek \* pochodna wewnętrznej]

f’(x) = -x/( pierw(1-x2))

Wzór ogólny metody trapezów:

**St =** **½\*h \* (f0+fn) + h \* Σi=nn-1fi**

Supremum dla najmniejszej wartości mianownika, czyli dla x→1. W tym wypadku błąd (maksymalny, niekoniecznie rzeczywisty) jest nieskończony.

Błąd:

|εt| ⩽ +∞

problem przy punkcie 1

GEOMETRYZACJA: pochodna i tangens nachylenia stycznej to to samo.

tgα = f’

tg(π/2) = +∞

* w arkuszu w kolumnie A są kolejne iksy, dla których liczymy w kolumnie B funkcję koła wyznaczoną wyżej
* w kolumnie D jest całka wyznaczona metodą trapezów z wzoru wyżej
* widzimy, że wynik znacznie odbiega od faktycznej wartości π