Теоретическое решение задачи В (4-ое ДЗ)

В этой задаче нам дана прямоугольная матрица (N строк, M столбцов), а также Q запросов изменения элемента и поиска максимума в прямоугольной подматрице. (*1 ≤ N, M ≤ 1000*, *1 ≤ Q ≤ 105*)

Наивное решение задачи (храним массив и для каждого запроса проходим по всем элементам и находим ответ) дает нам асимптотику О(N\*M\*Q), что явно не проходит по времени, поскольку дает порядка 1011 операций в худшем случае.

Рассмотрим другие варианты, такие как дерево Фенвика(двумерное), sqrt декомпозиция, квадро дерево и дерево отрезков (двумерное).

Дерево Фенвика хорошо справляется с обратимыми ассоциативными операциями (как например сумма). Хоть оно и может быть модифицировано для подсчета максимума, однако это накладывает некоторые ограничения, как например невозможность оперативного уменьшения элементов массива (нужно будет пересчитывать весь блок).

Квадро дерево хорошо подходит для работ с плоскостями и точками на ней. Однако при работе с матрицами при некоторых запросах асимптотика может падать до О(N) в худшем случае, что все еще на много быстрее наивной реализации, однако с большой вероятностью не пройдет в ограничение по времени.

Корневая эвристика (sqrt декомпозиция) сможет хорошо справляться с поставленной задачей с асимптотикой О(sqrt(N\*M)), что может пройти, однако можно понять, что в худшем случае время выполнения составит приблизительно 9\*sqrt(n\*m), учитывая ограничения задачи, это даст нам порядка 109 операций, что уже скорее всего не пройдет по времени.

Последний из перечисленных вариантов – двумерное дерево отрезков. Его временная асимптотика составляет O(logN\*logM), что с запасом проходит в заданные ограничения по времени. Расходы по памяти асимптотически линейны от размера входящих данных О(N\*M), однако имеют довольно внушительную константу (вплоть до С=16). Если рассмотреть худший случай (матрицу размером 1000\*1000), то можно заметить, что в размеры матрицы довольно близки к степени двойки (ближайшая степень двойки сверху – 1024). Значит дереву отрезков понадобиться массив размеров 2048\*2048 (2\*ближайшая степень двойки сверху), что также с запасом проходит при заданных ограничениях.

Мы пришли к выводу, что лучшим выбором из предложенных структур является дерево отрезков. Учитывая асимптотику ДО на запросы и построение, получаем следующую асимптотику на решение задачи: О(Q\*logN\*logM + N\*M) по времени и O(N\*M) по памяти

Рябцев Денис