2009-2010 学年第一学期第一层次期中考试试卷参考答案 2009.11.28

一、（5 分）用“$\varepsilon-\delta$”语言证明： $\lim\limits_{x\to 3} x^3 = 27$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，先限定 $|x-3|<1$,即$2<x<4$,

$\therefore |x^3-27|=|x-3||x^2+3x+9|<37|x-3|<\varepsilon$，取 $\delta=\min\{1,\varepsilon/37\}$，

当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $|x^3-27|=|x-3||x^2+3x+9|<37|x-3|<\varepsilon$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} x^3 = 27$.

二、计算下列极限：（每小题 5 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$ 其中 $0<a<b<c$.

解： 令 $x_n=\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$,而 $c\le x_n\le\sqrt[n]{3}\bullet c$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$,

所以由夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=c.$

2 . $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$.

解： 原式$=\exp\{\dfrac{1}{n}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{x}\}=\exp\{\dfrac{1}{n}[\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n]\}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{5}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{5}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{5}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{5}{x}}}+\dfrac{\sin x}{-x}\right)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{5}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\bullet\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$.

解： 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})\cdots(1+\dfrac{n-1}{n})}$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n-1}{n})}{n}\right)=\exp\left(\int_0^1\ln(1+x)dx\right)$$

$$=\exp[(x+1)\ln(x+1)|_0^1-\int_0^1 dx]=\exp(2\ln 2-1)=4/e.$$

三、计算下列各题：（每小题 5 分，共 30 分）

1. 设函数 $y=y(x)$ 由 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定，求 dy.

解： 对 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 两边求微分，得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}，所以\ \ dy=\frac{x+y}{x-y}dx.$$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由 $y=f(x+y)$ 所确定，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1，求 y''.

解： 对 $y=f(x+y)$ 两边关于 x 求导，得，$y'=f'(x+y)(1+y')$，$\therefore\ \ y'=f'/(1-f')$，

对 $y'=f'(x+y)(1+y')$ 两边关于 x 求导得，$y''=f''(x+y)(1+y')^2+f'(x+y)y''$，

将 y' 代人上式并整理得 $y''=f''/(1-f')^3$.

3. 设平面曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解： $$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{\csc^4\frac{t}{2}}{4a}.$$

4. 求定积分 $\int_1^e\cos(\ln x)dx$.

解： 令 $\ln x=t,x=e^t$，原式 $=\int_0^1 e^t\cos tdt=\frac{e^t}{2}(\cos t+\sin t)|_0^1=\frac{e}{2}(\cos1+\sin1)-\frac{1}{2}.$

5. 求不定积分 $\int\frac{1+x^4}{1+x^6}dx$.

解： 原式 $=\int\frac{1-x^2+x^4+x^2}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{x^2}{1+x^6}dx=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+c.$

6. 设 $f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$，求 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$.

解： $\because 0\le x<1,\because \sin x>0$ 令 $u=\sin^2 x$ 则 $x=\arcsin\sqrt{u}$，所以 $f(u)=\frac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=-2\int\arcsin\sqrt{x}d\sqrt{1-x}$$

所以

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c.$$

四、（9 分）设 $x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n},\cdots$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

解： $x_n\geq 2>0$，x_n 不具有单调性，故先求极限然后证明之.

假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ 两边关于 $n\to\infty$ 求极限，

得 $A=2+1/A,即A^2-2A-1=0,解得A=1+\sqrt{2},(1-\sqrt{2}舍去)$.

注意到 $0\leq\left|x_n-(1+\sqrt{2})\right|=\left|2+\dfrac{1}{x_{n-1}}-(1+\sqrt{2})\right|=\left|\dfrac{1}{x_{n-1}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right|=\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})\bullet x_{n-1}}\left|x_{n-1}-(1+\sqrt{2})\right|$

$$<\frac{1}{1+\sqrt{2}}\left|x_{n-1}-(1+\sqrt{2})\right|<\cdots<\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left|x_1-(1+\sqrt{2})\right|=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^n=0$，所以由夹逼定理得，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-(1+\sqrt{2})\right|=0,即\lim\limits_{n\to\infty}x_n=(1+\sqrt{2})$.

五、（9 分）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}-ax-b\right)=0$，求 a,b.

解： 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}-ax-b}{x}=0,$ 得 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$;

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}\bullet e^{\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{x^2})}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\bullet(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{x^2}))=1.$$

所以 $a=b=1.$

六、（9 分）设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，$f(0)=f(2a)$. 求证：存在 $\xi\in[0,a]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证明： 设 $F(x)=f(x)-f(x+a),x\in[0,a]$，$F(x)\in C_{[0,a]}$，$F(0)=f(0)-f(a)$，

$$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0),F(0)\bullet F(a)=-[f(a)-f(0)]^2\leq 0,$$

当 $f(0)=f(a)$ 时，取 $\xi=0或\xi=a,有F(0)=0或F(a)=0$；

当 $f(0)\neq f(a)$ 时，$F(0)F(a)<0$，由零点定理，$\exists\xi\in(0,a)$, 使得 $F(\xi)=0$，

综合上述得到 $\exists\xi\in[0,a]$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f(\xi+a)$，证毕.

七、（9 分）设 $y=\arcsin x$，求证：$(1-x^2)y''=xy'$，并据此求 $y^{(n)}(0)$.

证明：对 $y=\arcsin x$ 求导，得 $y'=1/\sqrt{1-x^2}$，且 $y'(0)=1$；对 $y'=1/\sqrt{1-x^2}$ 再求导，

得 $y''=-\dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 即 $(1-x^2)y''=xy'$, 且 $y''(0)=0$. 证毕.

对 $(1-x^2)y''=xy'$ 两边用莱布尼茨公式求 $(n-2)$ 阶导数，得

$$(1-x^2)y^{(n)}+(n-2)(-2x)y^{(n-1)}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}(-2)y^{(n-2)}=xy^{(n-1)}+(n-2)y^{(n-2)},$$

在上式中令 $x=0$，得 $y^{(n)}(0)=(n-2)^2y^{(n-2)}(0)$，注意到 $y'(0)=1, y''(0)=0$，

当 $n=2k$ 时，$y^{(2k)}=0, k=1,2,\cdots$；当 $n=2k+1$ 时，

$$y^{(2k+1)}(0)=(2k-1)^2y^{(2k-1)}(0)=\cdots=(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots1^2y'(0);$$

$$y^{(2k+1)}(0)=[(2k-1)!!]^2, k=1,2,\cdots;$$

所以 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\text{为偶数；}\\ [(n-2)!!]^2 & n\text{为奇数.}\end{cases}$

八、（9 分）设 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\sin(xt)}{t}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

解：对 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\sin(xt)}{t}dt$ 令 $xt=u$，得 $f(x)=\int_x^{x^2}\dfrac{\sin u}{u}du$,

且 $f'(x)=\dfrac{\sin x^2}{x^2}2x-\dfrac{\sin x}{x}$,

而 $$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1x^2f'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1x^2\left(\frac{\sin x^2}{x^2}2x-\frac{\sin x}{x}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\int_0^1\sin x^2dx^2-\int_0^1x\sin xdx\Big]=-\frac{1}{2}[-\cos x^2+x\cos x-\sin x]\Big|_0^1=\frac{1}{2}[\sin1-1].$$