南京大学大学数学试卷

考试时间____2019.1.2____ 任课教师____________ 考试成绩____________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设方阵A满足 $aA^2+bA+cE=0(c\neq 0)$，判断 A 是否可逆？若A可逆，求 A^{-1}.

2. 设实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 是正定二次型，试判断 $g(x)=x^{\mathrm{T}}A^kx$（k 为正整数）是否为正定二次型？

3. 设矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$，求 x,y 的值，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&-3&x\\0&1&2&6&3\\5&4&3&-1&y\end{pmatrix}$.

4. 设 A 是正交矩阵，证明 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=\pm a_{ij}$.

二、 (本题12分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

三. (本题12分) 设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵，证明：存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=B$ 的充分必要条件是 A 与 B 有相同的特征值.

四. (本题12分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，且对应于特征值 1 和 2 的特征向量分别为 $\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量；(2) 求矩阵 A.

五. (本题12分) 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使得 $A^k=O$，(1) 求 $|A+E|$ 的值；(2) 求 A 相似于对角矩阵的充要条件.

六. (本题12分) 已知 R^3 的一组基 $\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，(1) 由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 β_1,β_2,β_3；(2) α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，求 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

七. (本题12分) 设n阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$，已知矩阵的迹 $\mathrm{tr}(A)=a\neq 0$，试问：矩阵 A 是否能相似于对角矩阵？