微积分 I（第一层次）期中试题 2015.11.14

一、（8 分×2=16 分）用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{3n^2+1}=\dfrac{1}{3}$ ；　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

二、（8 分）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$，讨论函数 $f(x)$ 的连续性，并指明间断点的类型.

三、（8 分）设 x 为基准无穷小，试求出无穷小 $\arcsin x-x$ 关于 x 的阶和无穷小主部.

四、（8 分×5=40 分）计算下列各题：

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=-1$，求

$$\lim_{n\to\infty}\left[n(e^{1/n}-1)\right]^{\frac{1}{1-f(1/n)}};$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{-3x})-\cos(xe^{3x})}{x^3}$ ；

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$ ；

4. 设 $y=x\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^5}{x^3+8}}+(5+\sin x)^{\cos x}$，求 y' 以及 dy ；

5. 设 $y=\cos^4 x-\sin^4 x$，求 $y^{(n)}$.

五、（8 分）设 a_1,a_2,a_3 为正数，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为实数，满足 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 证明：方程

$\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$ 在区间 $(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_2,\lambda_3)$ 内各有一个根.

六、（10 分）设 $x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性，并求之.

七、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1, f(1)=0$. 设常数 $a>0, b>0$，证明：（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$；

（2）存在 $\eta,\mu\in(0,1),\eta\neq\mu$，使得 $a\left(\dfrac{1}{f'(\eta)}+1\right)+b\left(\dfrac{1}{f'(\mu)}+1\right)=0$.

微积分 I（第一层次）期中试题 2016.11.12

一、（6 分×2=12 分）用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+1}=0$ ；　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}=2$.

二、（8 分）讨论函数 $y=|x(x^2-1)|\sin x$ 的可导性 .

三、（8 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导， $f(0)=f'(0)=1$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

四、（8 分×5=40 分）计算下列各题：

1. 已知函数 $y=y(x)$ 由 $e^y-e^{-x}+xy=0$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 点处的切线方程 .

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

4.设函数 $y=\ln(\sin x)+x^{x^a}+\dfrac{5^{3x}}{2^x}(a\in R)$ ，求 y' 以及 dy .

5. 设 $f(x)=\ln(e^{\sin 2x}(x-1))$ ，求 $f^{(n)}(x)$.

五、（12 分）已知 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ ，

1. 证明： $\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$, 其中$k$为正整数.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

六、（12 分）设 $f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$ ，并设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^5}$ 存在且不为零，求常数 a,b 及此极限值.

七、（8 分） $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数， a 是一个实数，试证明存在 $\xi\in[0,1]$ 内，使得 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

微积分 I（第一层次）期中试题 2017.11.18

一、（本题共有两小题，每小题 6 分，共 12 分）用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}=0$，　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

二、（本题共有三小题，每小题 6 分，共 18 分）计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$；　2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)$；　3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

三、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}e^{\sin ax}-1, & x\ge 0,\\ b\ln(1+x), & x<0\end{cases}$，其中参数 $a,b\ne 0$，如果 $f''(0)$ 存在，求 a,b.

四、（10 分）当 $x\to 0$ 时，以 x 为基准无穷小，求 $(\cos x-1)\ln(1+x)$ 的无穷小主部.

五、（10 分）求方程 $x^3+y^3-3axy=0\,(a>0)$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 y''.

六、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=1,$ 证明：存在 $\eta\in(0,1),$ 使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

七、（10 分）求参数方程 $\begin{cases}x=4\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta\end{cases}(0\le\theta<\pi)$ 所确定的曲线在 $x=2$ 处的切线方程和法线方程.

八、（10 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f'(x)=-xf(x), f(0)=1,$ 证明：对任意的正整数 $k,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^kf(x)=0$.

九、（10 分）设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a,b,c,d 为常数且 $a\ne 0$，证明 $f(x)$=0 有三个不相等的实根的必要条件为 $b^2-3ac>0$.

2015 级参考答案：

一、略　二、$f(x)=\begin{cases}x^2,x<-1;\\-x,0<|x|<1;\\0,x=1;\\x^2,x>1\end{cases}$ $f(x)$ 的间断点为 $0,\pm1$，$0,-1$ 为可去间断点，1 为跳跃间断点. 三、3 阶，无穷小主部为：$\frac{1}{6}x^3$. 四、1. $\sqrt{e}$；2. 6；3. 2/3；

4. $y'=\dfrac{12}{7}x^{\frac{5}{7}}(x^3+8)^{-\frac{1}{7}}-\dfrac{3}{7}x^{\frac{26}{7}}(x^3+8)^{-\frac{8}{7}}+(5+\sin x)^{\cos x}(-\sin x\ln(5+\sin x)+\dfrac{\cos^2 x}{5+\sin x})$.

5. $2^n\cos(2x+n\pi/2)$.　五、构造函：$g(x)=f(x)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ 在 $[\lambda_1,\lambda_2],[\lambda_2,\lambda_3]$ 上使用介值定理.

六、先求出极限为 $(\sqrt{5}-1)/2$，然后用极限的定义或其他极限存在准则注明之.

七、（1）令 $g(x)=f(x)-\dfrac{a}{a+b}$ 在 $[0,1]$ 上使用零点定理

（2）在 $[0,\xi],[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别使用 Lagrange 中值定理，再作必要的处理得证.

2016 级参考答案：一、（略）. 二、函数 y 在 0 处可导，在 1，－1 处不可导. 三、1.

四、1. $y+x=0.$ 2. $\sqrt{2}/2.$ 3. 1/2；4. $y'=\cot x+x^{x^\alpha}x^{\alpha-1}(\alpha\ln x+1)+(\frac{5^3}{2})^x\ln(\frac{5^3}{2}),$

$dy=y'dx$. 5. $f^{(n)}(x)=2^n\sin(2x+n\cdot\dfrac{\pi}{2})+\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}(n>1)$. 五、（略）

六、$a=4,b=-3.$ $\dfrac{7}{30}.$ 七、取 $[0,1]$ 中两点 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x),$ $f(x_2)=\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)$，令 $F(x)=f(x+a)-f(x),x\in[0,1]$，在 $[x_1,x_2]$ 上使用零点定理.

2017 级参考答案：一、略　二、 1、e； 2、2；3、2. 三、 $a=b=-1.$

四、$-x^3/2.$ 五、$y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax},y''=\dfrac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3}.$ 六、令 $F(x)=\begin{cases}f(x)/x,0<x\le 1,\\1,\qquad x=0.\end{cases}$ 对 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上使用洛尔定理.

七、切线：$y-1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}(x-2)$；法线：$y-1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}(x-2)$.

八、 提示：先求出 $f(x)=\exp(-x^2/2)$. 九、略.