南京大学大学数学试卷

考试时间 2016.12.28 任课教师________ 考试成绩________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算矩阵 $D=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&x_1&x_2&x_3&x_4\\0&x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{pmatrix}$ 的行列式值 $|D|$.

2. 设二次型 $f(x,y,z)=x^2+4y^2+4z^2+2txy-2xz+4yz$ 为正定二次型，求参数 t 的取值范围.

3. 解矩阵方程 $XB=C$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$.

4. 已知 A,B 都是 n 阶正交矩阵，且 $|A|+|B|=0$，证明 $|A+B|=0$.

二、 (本题12分) 设 A 为3阶实对称矩阵，A 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$，且满足条件 $A^3+2A^2=O$，
(1) 求 A 的全部特征值；
(2) 当 k 为何值时，$A+kE$ 为正定矩阵？

三. (本题12分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2 是两个线性无关的向量组，且两组向量的内积 $(\alpha_i,\beta_j)=0$，$(i=1,2,3,j=1,2)$. 证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 线性无关.

四. (本题12分) 设3阶实对称矩阵 A 的特征值为 -1,1,1，对应于特征值 -1 的向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^T$，求 A.

五. (本题12分) 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，a_{ki} 的代数余子式 $A_{ki}\neq 0$，求 $Ax=0$ 的通解.

六. (本题12分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&-2&2&0\end{pmatrix}$，证明与 A 的行向量正交的向量集合 V 对于向量的加法与数量乘法构成一个线性空间，并求 V 的维数和一个基.

七. (本题12分) 在某国每年有比例为 p 的农村居民移居城镇，有比例为 q 的城镇居民移居农村. 假设该国总人口数不变，且上述人口迁移的规律也不变，把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 y_n $(x_n+y_n=1)$.
(1)求关系式 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 中的矩阵A；(2)设目前农村人口与城镇人口相等，即 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$，求 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.