

学号：

姓名：

班级：

系别：

题 答 要 不 内 线 封 密

南京大学数学课程试卷

2011~2012 学年度第 一 学期 考试形式： 闭卷 课程名称： 微积分 I

考试时间： 2011 年 11 月 12 日 考试成绩：

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、（12 分，每小题 6 分）用极限定义证明下列极限：

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} = 0$ （ $\varepsilon - N$ 语言）；

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2+x} = 2$ （ $\varepsilon - \delta$ 语言）.

二、（24 分，每小题 6 分）求下列极限：

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a} \right) (a > 0)$ ；

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$ ；

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc x)^{\frac{1}{\ln x}}$ ；

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

三、（6 分）求 $x - \arctan x$ 关于基准无穷小 x 的无穷小主部.

四、（18 分，每小题 6 分）计算下列各题：

(1) 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ；

(2) 设 $y = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ ，求 $y^{(n)} (n > 1)$ ；

(3) 设 $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$ ，求 dy .

五、（10 分）设 $x_1=10, x_{n+1}=-\sqrt{6+x_n}, n=1,2,\cdots$, 求其极限，并论证极限的存在性.

六、（12 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0. \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.

- （1）欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值；
- （2）在（1）的条件下，求 $f'(x)$ ，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

七、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导， $f(0)=f(1)=0, \max_{x\in[0,1]} f(x)=1$.

- (1) 证明存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)=c$;
- (2) 证明存在 $\xi\in(0,1), (\xi\neq c)$ 使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.

八、（8 分）已知 $\lim_{x\rightarrow\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$ ，求常数 a, b 的值.