微积分 I（第一层次）期中试题参考答案 2011.11.12

一、（12 分，每小题 6 分）用极限定义证明下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}=0$（$\varepsilon-N$ 语言）；　　（2） $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2+x}=2$（$\varepsilon-\delta$ 语言）.

证明：(1) 因为 $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n>1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}n=1+\sqrt{n}>\sqrt{n}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon^2}]+1$，

当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}-0\right|<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}=0$.

（2） $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-2|<\delta$，有 $|\sqrt{2+x}-2|=\dfrac{|x-2|}{\sqrt{2+x}+2}<|x-2|<\varepsilon$，

因此 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2+x}=2$.

二、（24 分，每小题 6 分）求下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)(a>0)$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0+}(\csc x)^{\frac{1}{\ln x}}$ ；　　　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解：

(1) 原式= $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\sqrt[n+1]{a}\left(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\sqrt[n+1]{a}\left(e^{\frac{\ln a}{n(n+1)}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\dfrac{1}{n(n+1)}\ln a=\ln a.$

(2) 原式= $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\cos x}{x\bullet\frac{x}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{0.5x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(3) 原式= $\exp(\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-\ln\sin x}{\ln x})=\exp(\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-\cos x/\sin x}{1/x})=1/e.$

(4) 原式= $\exp(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)})=\exp(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2})=\exp(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/(1+x)-1}{2x})=1/\sqrt{e}.$

三、（6 分）求 $x-\arctan x$ 关于基准无穷小 x 的无穷小主部.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-1/(1+x^2)}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{kx^{k-3}(1+x^2)}=\dfrac{1}{3},(k=3).$

所以 $x-\arctan x$ 关于基准无穷小 x 的无穷小主部为 $\dfrac{1}{3}x^3$.

四、（18 分，每小题 6 分）计算下列各题：

(1) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ；

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{1-1/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)}=\dfrac{t}{2},$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{1}{dx/dt}=\frac{d}{dt}(\frac{t}{2})\frac{1}{2t/(1+t^2)}=\frac{1+t^2}{4t}.$$

(2) 设 $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$，求 $y^{(n)}(n>1)$ ；

解：因为 $y=\dfrac{1}{3}[\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}]$，所以 $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{3}[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}]$.

(3) 设 $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，求 dy .

解：$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1/\sqrt{x})^2}}\bullet\dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}dx=-\dfrac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$.

五、（10 分）设 $x_1=10, x_{n+1}=-\sqrt{6+x_n}, n=1,2,\cdots,$ 求其极限，并论证极限的存在性.

解：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对 $x_{n+1}=-\sqrt{6+x_n}$ 两边关于 $n\to\infty$ 取极限，得 $A=-\sqrt{6+A}$，解得 $A=-2$或$A=3$(舍去)，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-2$. 下面对这个极限证明之.

因为 $0\le|x_n-(-2)|=|x_n+2|=|-\sqrt{6+x_{n-1}}+2|=\dfrac{|x_{n-1}+2|}{\sqrt{6+x_{n-1}}+2}<\dfrac{1}{2}|x_{n-1}+2|$

$<\cdots<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1+2|=12\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$，由夹逼定理知，

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-(-2)|=0$，所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-2$.

六、（12 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.

（1）欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值；

（2）在（1）的条件下，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}[g'(x)+e^{-x}]=g'(0)+1=0=f(0)=a$，所以 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\dfrac{g''(0)-1}{2}$,

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)+xe^{-x}-g(x)+e^{-x}}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0.\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xg''(x)-xe^{-x}}{2x}=\dfrac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$,

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

七、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导， $f(0)=f(1)=0, \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=1$.

(1) 证明存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)=c$;

(2) 证明存在 $\xi\in(0,1),(\xi\neq c)$ 使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.

证明： (1) 设 $F(x)=f(x)-x, x\in[0,1], \because \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=1. \therefore \exists x_1\in(0,1), s.t. f(x_1)=1.$

由于 $F(x)$在$[x_1,1]$上连续， $F(x_1)=f(x_1)-x_1=1-x_1>0, F(1)=f(1)-1=-1<0$，由闭区间上连续函数的零点定理，存在 $c\in(x_1,1)\subset(0,1)$, 使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$.

(2) 设 $G(x)=e^{-x}(f(x)-x), x\in[0,c], G(x)\in C_{[0,c]}, G(x)$ 在 $(0,c)$ 上可导，且 $G(0)=G(c)=0$，由洛尔定理，存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,1),(\xi\neq c)$，使得 $G'(\xi)=0.$

而 $G'(x)=-e^{-x}(f(x)-x)+e^{-x}(f'(x)-1)=e^{-x}(f'(x)-1-f(x)+x)$，将 ξ 代人 $G'(x)=0.$ 并整理可得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.

八、（8 分）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a,b的值.

解： 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b}{x}=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x(x+1)}-a-\dfrac{b}{x}\right)=1-a=0$，所以 $a=1$.

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{x+1}=-1$. 因此 $a=1, b=-1$.