《数据科学基础》课堂练习-2019/3/10

1. $X \sim \mathbb{U}(2,4)$, 计算$E(2X+1)$.
2. $E(X)=3$，$D(X)=5$，计算$E[(X+4)^2]$.
3. $X \sim \mathbb{E}(X)$, 计算$E(X^k), k=1,2,\cdots$.
4. $X \sim \pi(\lambda)$, 且$P(X \le 1) = 4P(X=2)$, 求$P(X=3)$.
5. $X \sim \mathbb{N}(100, 15^2)$，计算$P(X \ge 90)$.
6. $X \sim \mathbb{N}(-3,1)$, $Y \sim \mathbb{N}(2,1)$, 且X和Y相互独立, 令$Z = X - 2Y + 7$, 计算$P(|Z| \le 3)$.
7. 考虑一元二次方程$x^2 + Bx + C = 0$, 其中B、C分别是将一枚骰子连掷两次先后出现的点数, 求该方程有实根的概率.
8. 将两信息分别编码为A和B发送出去, 接收站收到时, A被误收作B的概率为0.04. 而B被误收作A的概率为0.07, 信息A与信息B传送概率分别为0.6和0.4. 若已知接收到的信息是A, 求原发信息也是A的概率.
9. $X \sim \mathbb{B}(400, 0.02)$，计算$P(X \le 1)$，然后采用泊松分布和正态分布近似计算上述概率。
10. $X \sim \mathbb{N}(0,4)$, 计算$E(e^{tX})$.

参考答案：

Q1：

解 1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2} & 2 < x < 4 \\ 0 & other \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_2^4 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{4} x^2 \mid_2^4 = 3$$

所以, $E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 7$

解 2

$$E(2X+1) = 2EX + 1 = 2 \cdot \frac{2+4}{2} + 1 = 7$$

Q2：

解 1

$E(X+4)=E(X)+4=7$

$D(X+4)=D(X)=5=E[(X+4)^2]-[E(X+4)]^2=E[(X+4)^2]-49$

所以，$E[(X+4)^2]=54$

解 2

$$
\begin{aligned}
E(x+4)^2 &= D(X+4)+(E(x+4))^2 \\
&= DX+(EX+4) \\
&= 5+(3+4)^2=54
\end{aligned}
$$

Q3：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=-\int_{0}^{+\infty}xd(e^{-\frac{x}{\lambda}})$$

$$=-xe^{-\frac{x}{\lambda}}\mid_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=-xe^{-\frac{x}{\lambda}}\mid_0^{+\infty}+(-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}})\mid_0^{+\infty}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{\lambda}}}-0-0+\lambda=\lambda$$

利用数学归纳法证明$E(X^k)=k!\lambda^k$，如下：

1. $E(X)=\lambda$
2. 假设$E(X^k)=k!\lambda^k$，则

$$E(X^{k+1})=\int_0^{+\infty}x^{k+1}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=-\int_0^{+\infty}x^{k+1}d(e^{-\frac{x}{\lambda}})$$

$$=-x^{k+1}e^{-\frac{x}{\lambda}}\mid_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\lambda}}d(x^{k+1})=-x^{k+1}e^{-\frac{x}{\lambda}}\mid_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\lambda}}(k+1)x^k$$

$$=0+(k+1)\lambda\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}x^k=(k+1)!\lambda^{k+1}$$

得证. 故$E(X^k)=k!\lambda^k$.

Q4：

解 1

$$P(X \le 1) = P(X=1) + P(X=0) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} = 4 \cdot (\frac{\lambda^2}{2!})e^{-\lambda}$$
$$\Rightarrow \lambda = 1$$
$$P(X=3) = \frac{1}{3!}e^{-1} = \frac{1}{6e}$$

解 2

$$X \sim \pi(\lambda)$$
$$\because P(X \le 1) = P(X=1) + P(X=0) = 4P(X=2)$$
$$\therefore \frac{\lambda^1}{1}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = 4\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} \therefore \lambda = 1$$
$$\therefore P(X=3) = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \frac{1}{6e}$$

Q5：

$$X \sim \mathbb{N}(100, 15^2)$$
$$P(X \ge 90) = P(\frac{X-100}{15} \ge \frac{90-100}{15}) = P(Z \ge -\frac{10}{15})$$
$$\text{其中，} Z \sim \mathbb{N}(0,1)$$
$$\therefore P(Z \ge -\frac{10}{15}) = 1 - P(Z \le -\frac{10}{15}) \approx 0.74$$

86

Q6：

$$Z \sim N(0,5)$$
$$P(|Z| \le 3) = P\left(\frac{|Z|}{\sqrt{5}} \le \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 2\phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 0.8198$$

Q7：

该方程有实根等价于

$$B^2 - 4C \ge 0$$

而一枚骰子连掷两次的点数是无关的，所以B, C的取值范围均为$\{1,2,3,4,5,6\}$，通过枚举带入可得概率为

$$\frac{19}{6*6} = \frac{19}{36}$$

Q8：

设发送信息A为事件A，发送信息B为事件B，接受信息A为事件X，接受事件B为事件Y

已知：

$$
\begin{gathered}
P(Y|A) = 0.04 \\
P(X|B) = 0.07 \\
P(A) = 0.6 \\
P(B) = 0.4
\end{gathered}
$$

可以推出：

$$
\begin{gathered}
P(X|A) = 0.96 \\
P(Y|B) = 0.93
\end{gathered}
$$

所以

$$P(A|X) = \frac{P(AX)}{P(X)} = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B)} = \frac{0.576}{0.604} = 0.9536$$

Q9：

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1 - 0.02)^{400} + \binom{400}{1} 0.02^1 \times (1 - 0.02)^{399}$$

泊松逼近为 $X \sim \pi(400 \times 0.02)$, 即 $X \sim \pi(8)$, 那么有

$$P(X \leq 1) = e^{-8} + 8e^{-8} = 9e^{-8} \approx 0.003.$$

正态分布近似为 $X \sim \mathbb{N}(400 \times 0.02, 400 \times 0.02 \times (1 - 0.02))$, 即 $X \sim \mathbb{N}(8, 7.84)$, 那么有

$$P(X \leq 1) = \Phi(\frac{1-8}{\sqrt{7.84}}) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062.$$

Q10：

令$Y = \frac{X}{2}$，有$Y \sim \mathbb{N}(0,1)$，所以

$$E(e^{tX}) = E(e^{2tY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2tY} \cdot e^{-\frac{Y^2}{2}} dY = e^{2t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Y-2t)^2}{2}} dY = e^{2t^2}$$