1. 某种商品共有三种型号，价格分别为4元，4.5元，5元。出售哪一种型号是随机的，售出三种型号的概率分别为0.3，0.2，0.5。已知某天共售出200个商品，试用中心极限定理求这天收入在910元至930元之间的概率。

Q1

设X为商品单价，记$X_i(i=1,2,\ldots,200)$为售出的第i个商品的单价．则

总体期望　$E(X)=4\times0.3+4.5\times0.2+5\times0.5=4.6$

总体方差　$Var(X)=(4-4.6)^2\times0.3+(4.5-4.6)^2\times0.2+(5-4.6)^2\times0.5=0.108+0.002+0.08=0.19$

$$P(\sum_{i=1}^{200}X_i\le930)=P(\frac{\sum_{i=1}^{200}X_i-200\times4.6}{\sqrt{200\times0.19}}\le\frac{930-920}{\sqrt{38}})=\Phi(\frac{10}{\sqrt{38}})$$

$$P(\sum_{i=1}^{200}X_i\le910)=P(\frac{\sum_{i=1}^{200}X_i-200\times4.6}{\sqrt{200\times0.19}}\le\frac{910-920}{\sqrt{38}})=\Phi(-\frac{10}{\sqrt{38}})$$

所以，$P(910\le\sum_{i=1}^{200}X_i\le930)=\Phi(\frac{10}{\sqrt{38}})-[1-\Phi(\frac{10}{\sqrt{38}})]=2\times\Phi(\frac{10}{\sqrt{38}})-1\approx2\times\Phi(1.62)-1=0.8948$

故答案为0.8948

2. $X_1,\cdots,X_6\sim\mathcal{N}(0,1)$, $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_1+X_2+X_3)^2$, 试确定$C$使得$CY$服从卡方分布。

Q2

因为$X_1+X_2+X_3\sim N(0,3)$, 故 $\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$,

同理可得，$\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$

所以，$(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}})^2+(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}})^2=\frac{1}{3}Y\sim\chi(2)$

故，$C=\frac{1}{3}$

3. $f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}$, $0<x<1, 0<\theta<\infty$ (1)**求参数θ的极大似然估计量；**(2)**验证其是否为无偏估计。**

(1) 构造似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}}$

$\ln(L(\theta))=-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{\theta}-1)\ln x_i=-n\ln\theta+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

由 $\frac{d}{d\theta}\ln(L(\theta))=-\frac{n}{\theta}-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=\frac{-n\theta-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{\theta^2}=0,$ 得到 $\hat{\theta}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i, (0<x<1$，故该解大于$0)$

(2) 由 $E(\ln x)=\int_0^1 \ln x\times\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1}dx=\int_0^1\ln x\, d(x^{\frac{1}{\theta}})=(x^{\frac{1}{\theta}}\ln x)\mid_0^1-\int_0^1\frac{1}{x}x^{\frac{1}{\theta}}dx$

$=(x^{\frac{1}{\theta}}\ln x)\mid_0^1-\theta x^{\frac{1}{\theta}}\mid_0^1=-\theta$

因此 $E(\hat{\theta})=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=-\frac{1}{n}\times n\times(-\theta)=\theta$

故是无偏估计