# 南京大学大学数学试卷

考试时间____2019.6.17____ 任课教师__________ 考试成绩__________

**一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)**

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-4&2&0&0\\2&0&0&0\\0&0&-7&3\\0&0&5&-1\end{pmatrix}$，且 $BA=A+B$，求矩阵 $B$.

2. 已知二次型 $f(x)=x_1^2+2tx_1x_2+x_2^2+tx_3^2$ 为正定二次型，求 $t$ 的取值范围.

3. 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B$ 是 $n\times m$ 矩阵，且 $m>n$，求 $|AB|$.

4. 判断 $R^{2\times 2}$ 的下列子集是否构成子空间？问什么？
   (1) $W_1=\{\ A\mid |A|=0, A\in R^{2\times 2}\ \}$； (2) $W_2=\{\ A\mid A^2=A, A\in R^{2\times 2}\ \}$.

**二、 (本题12分)** 设3阶非零矩阵 $B$ 的每一个列向量都是方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3&=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3&=0\\3x_1+x_2-x_3&=0\end{cases}$ 的解，
   (1) 求 $\lambda$ 的值； (2) 求证 $|B|=0$.

**三. (本题12分)** 设 $A$ 为 $n$ 阶正定矩阵，$B$ 为 $n$ 阶反对称矩阵，证明：$A-B^2$ 为正定矩阵.

**四. (本题12分)** 设 $A$ 是 $n$ 阶实对称矩阵，且满足 $A^2+2A=O, r(A)=k$，试求 $|A+3E|$.

**五. (本题12分)** 设 3 阶实对称矩阵 $A$ 的特征值为 -1,1,1，对应于特征值 -1 的向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^T$，求 $A$.

**六. (本题12分)** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $R^n$ 的一个基，
   (1) 证明：$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 也是 $R^n$ 的一个基；
   (2) 求从旧基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到新基 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 的过渡矩阵；
   (3) 求向量 $\alpha$ 的旧坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和新坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 间的变换公式.

**七. (本题12分)** 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，试求
   (1) $a$ 的值； (2) 正交矩阵 $Q$，使得 $Q^TAQ$ 为对角矩阵.