神经元和感知机

高　阳, 李文斌

http://cs.nju.edu.cn/rl, 2021.3.04

大纲

脑和神经元

感知机和感知机学习

线性可分性

大纲

脑和神经元

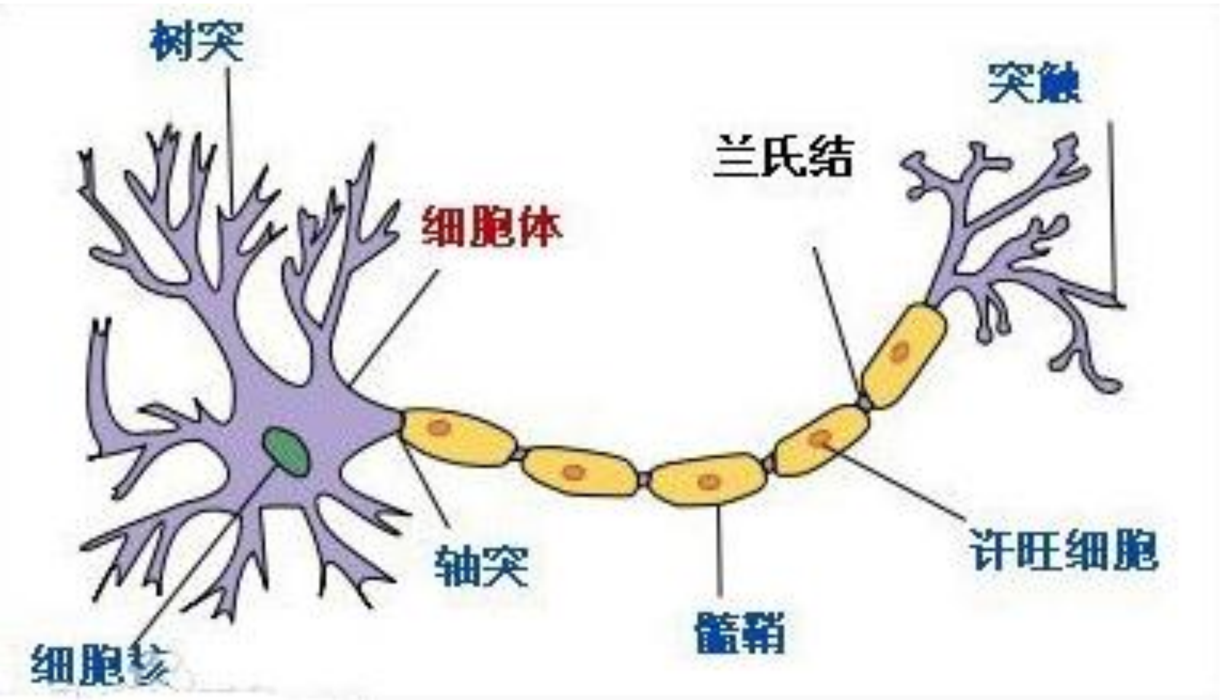
感知机和感知机学习

线性可分性

生物学基础

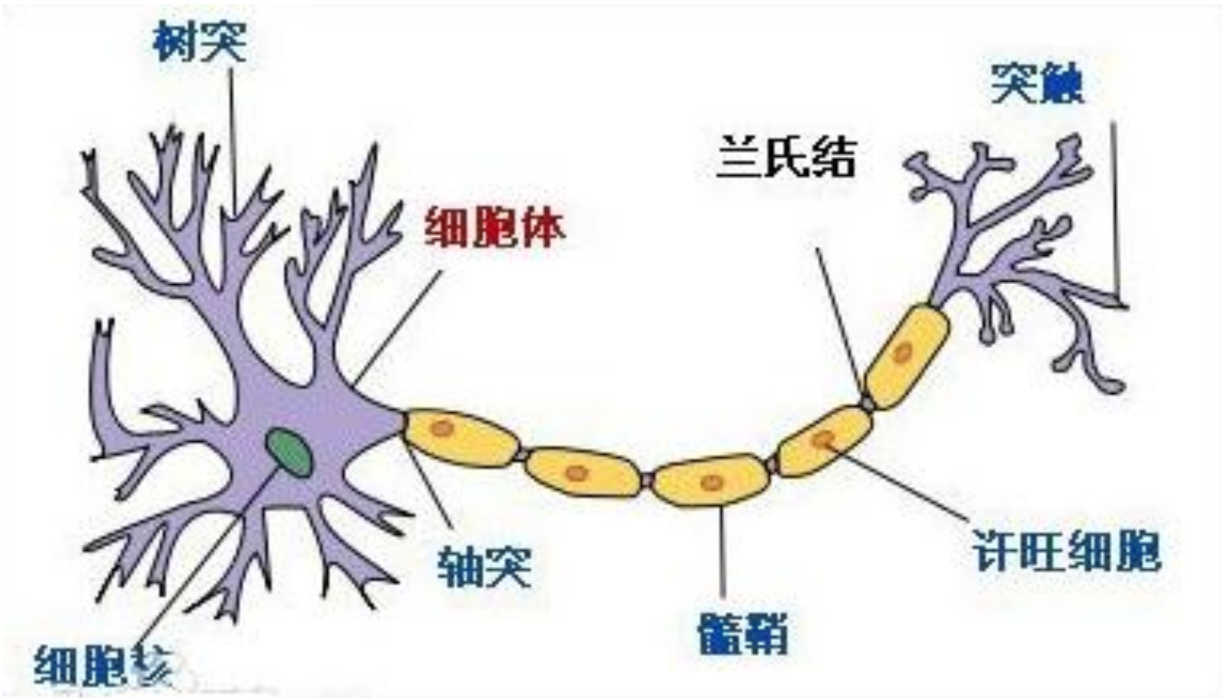
树突：输入

轴突：输出



- ✓ 神经元内化学物质调节内部电位
- ✓ 跨膜电位达到一个阈值时，则激活或放电
- ✓ (固定)时间和强度的脉冲传递给轴突
- ✓ 轴突像树枝状，连接到突触

生物学基础



- ✓ 分布/并行计算模型
- ✓ 调整节点间的连接关系

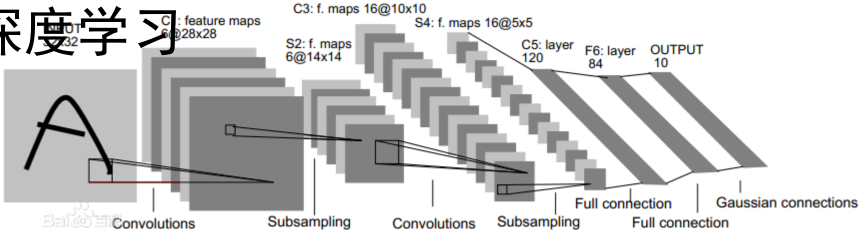
- 人脑
  - ✓ 10^{11}个神经元
  - ✓ 每个神经元处理速度为10^{-3}s
  - ✓ 识别人脸，需要约100个神经元计算

Hebb法则

- 唐纳德 赫布(1904-1985)
  - 加拿大生理心理学家
  - 连接强度调整量与输入输出的乘积成正比，显然经常出现的模式将增强神经元之间的连接
  - 与巴普洛夫的’条件反射’一致
  - 又称为”长程增强机制”(LTP, Long Term Potentiation)或”神经可塑”(Neural Plasticity)

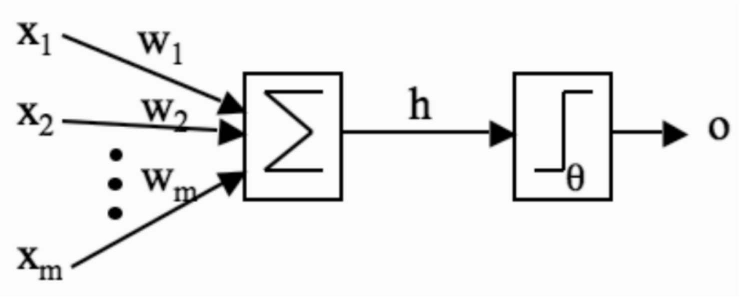
发展历史

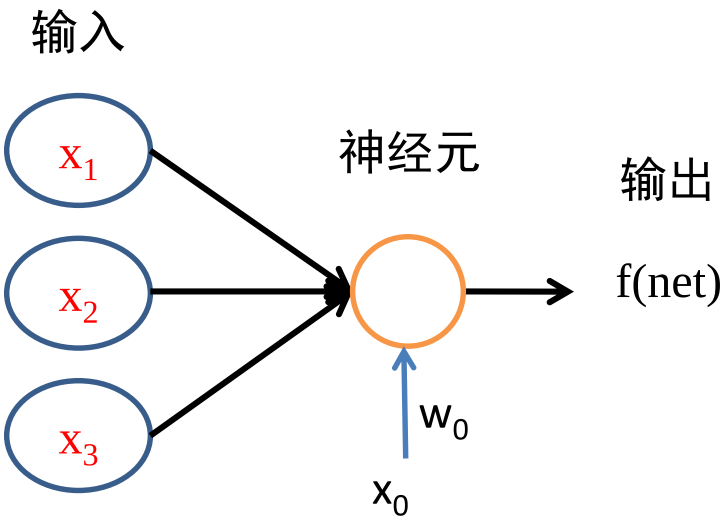
- 1943年，心理学家W. McCulloch和数理逻辑学家W. Pitts首次提出神经元的数学模型MP模型
- 1948年，冯.诺依曼提出相互再生自动机网络结构
- 1950s，F. Rosenblatt提出感知机模型
- 1960s，Widrow提出非线性多层自适应网络
- 1968年，Minsky的《感知机》一书
- 1982年和1984年，物理学家Hopfield在美国科学院院刊上发表ANN文章
- 2006年，Hinton发表深度信念网络→深度学习



MP神经元基本结构

- 输入$X=[x_1,x_2,x_3,\ldots]$
- 权值$W=[w_1,w_2,w_3,\ldots]$
- 激活函数$f(net) = f(\Sigma(w_i * x_i))$
- 偏置单元(bias unit) x_0,其对应权值为w_0

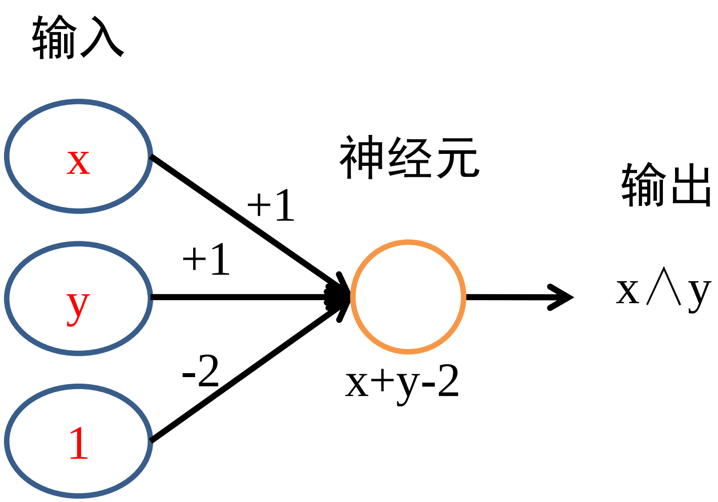




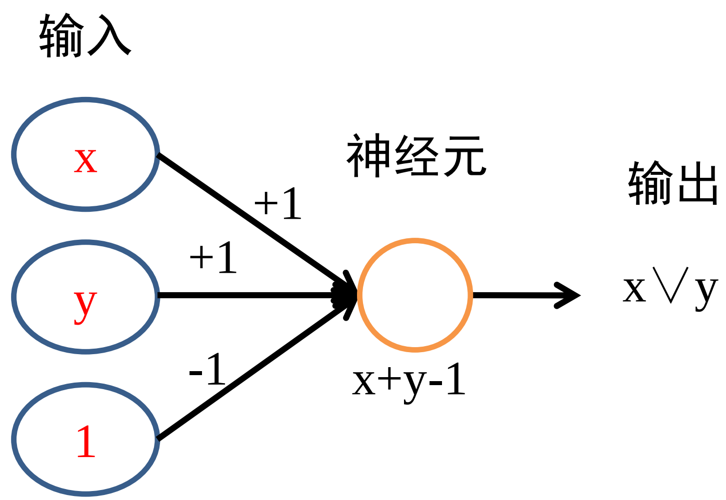
- ✓ 一组输入加权w_i相当于突触
- ✓ 一个加法器把输入信号相加(与收集电荷的细胞膜等价)
- ✓ 一个激活函数(最初是一个阈值函数)决定细胞对于当前的输入是否激活(“放电”)

MP神经元模型

$$h = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \qquad o = g(h) = \begin{cases} 1, & if\ h > 0 \\ 0, & if\ h \le 0 \end{cases}$$



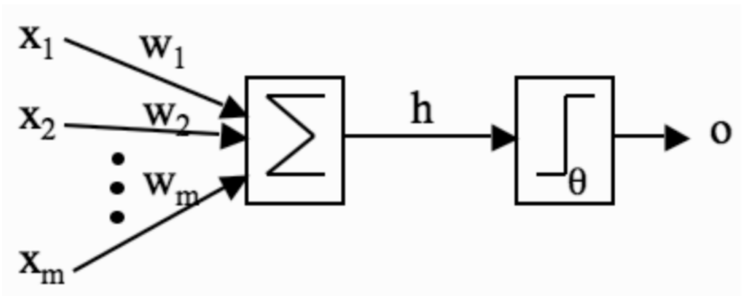
逻辑与的神经元模型
（阈值为≥0, 大于等于输出1）

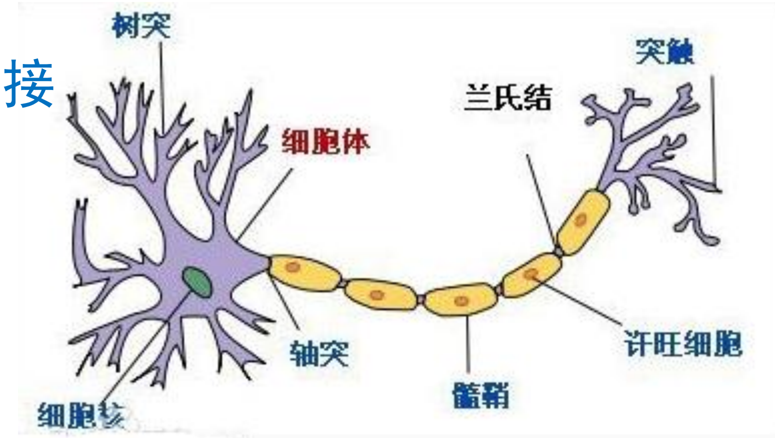


逻辑或的神经元模型
（阈值为≥0,小于等于输出0）

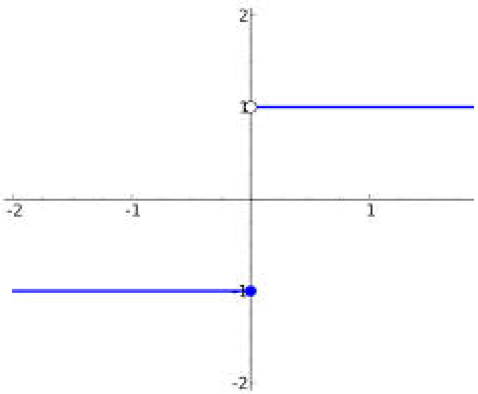
MP神经元的局限

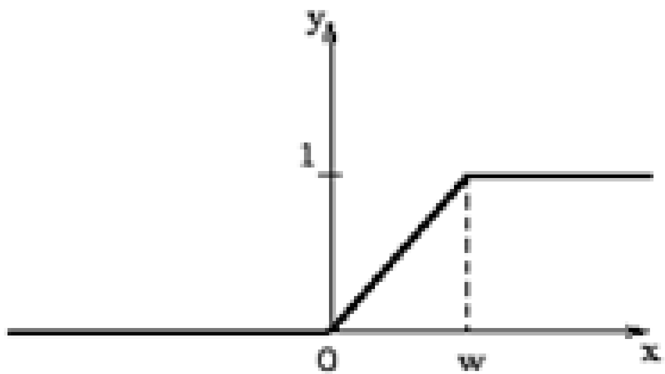
- 输入方面：线性求和 → 非线性求和
- 输出方面：单一输出值 → 脉冲序列
- 更新机制：时钟同步更新 → 随机异步更新
- 权值的物理(生理)意义
  - ✓ 两类神经元连接(兴奋性连接，权值为正；抑制性连接，权值为负)
  - ✓ 但不存在由正到负、或者由负到正的连接

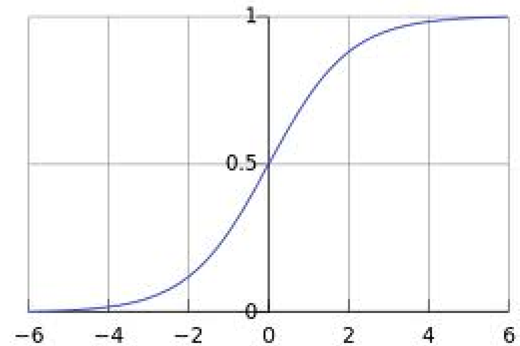




激励函数



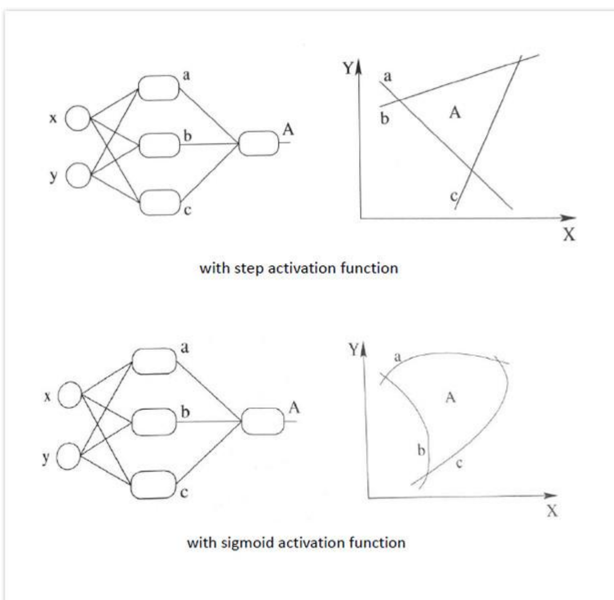


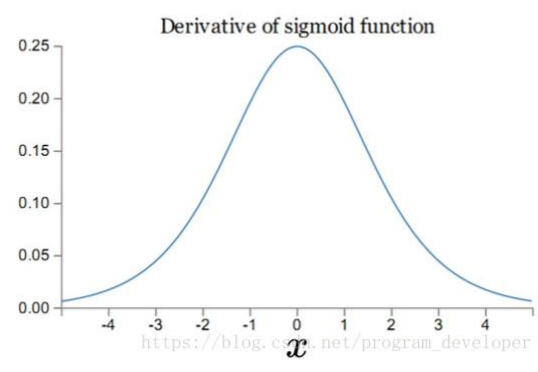


引入非线性激励函数，增强神经网络的表达能力

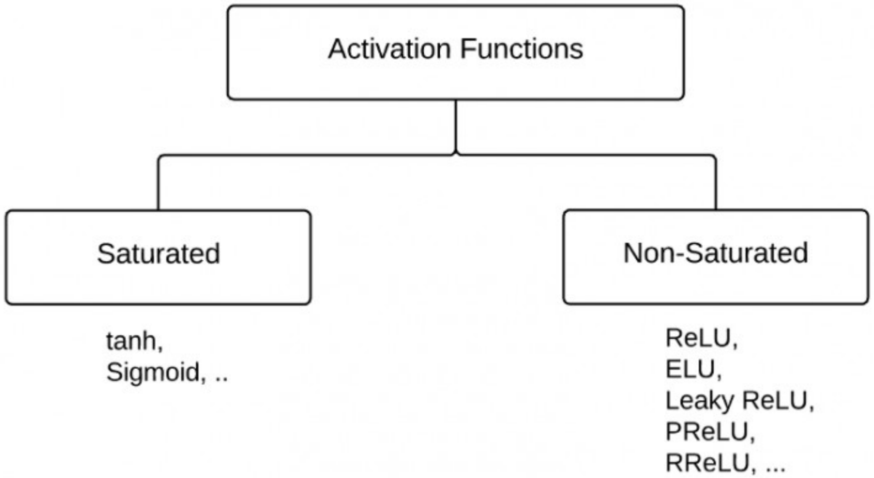
$$f(\text{net})=\frac{1}{1+e^{-\lambda^{*}net}}$$

λ是挤压参数，值越大，区间[0,1]上越接近直线。





激励函数的作用

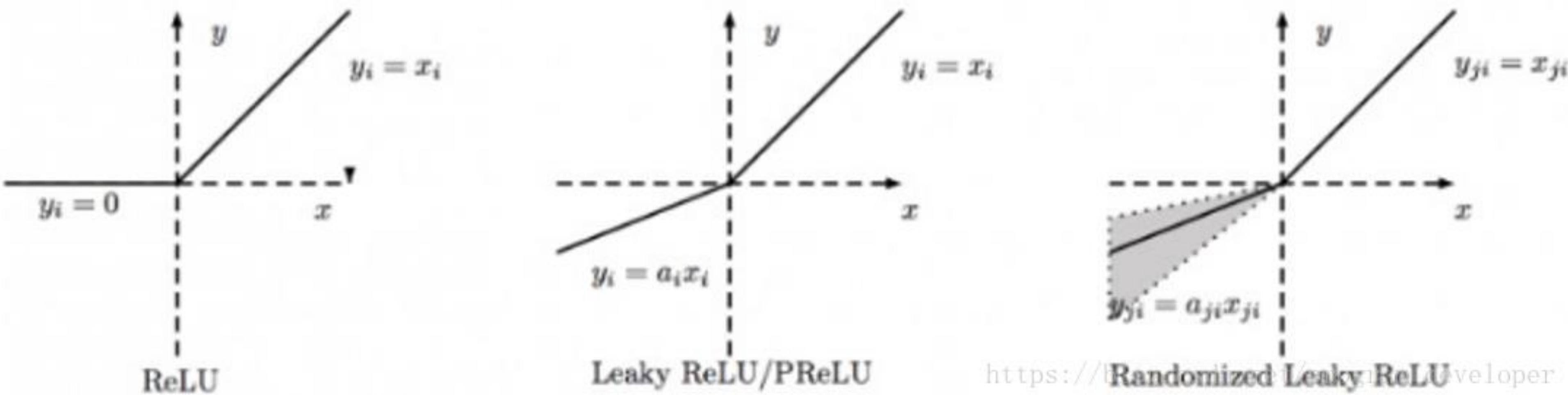


饱和型激励函数的缺点：

1、梯度消失

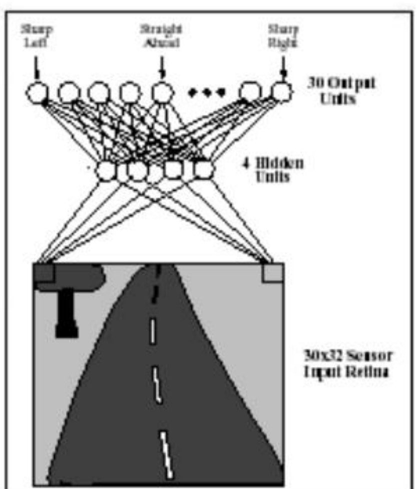
2、非以0为中心

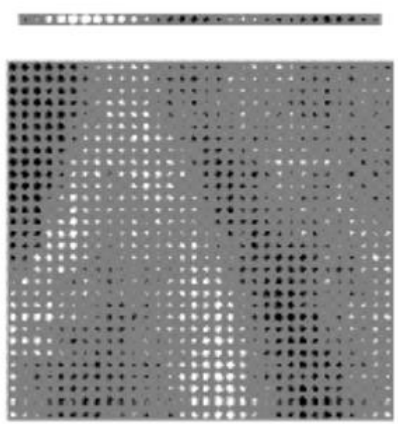
3、指数计算代价大



神经元→神经网络表示

- ALVINN : **A**utonomous **L**and **V**ehicle **I**n a **N**eural **N**etwork





- 1993年，CMU研发
- 输入：30*32的像素
- 4个隐藏节点
- 输出：30个驾驶动作(急剧左转、急剧右转，正前方行进……)

有向/无向？有环/无环？结构？

大纲

脑和神经元

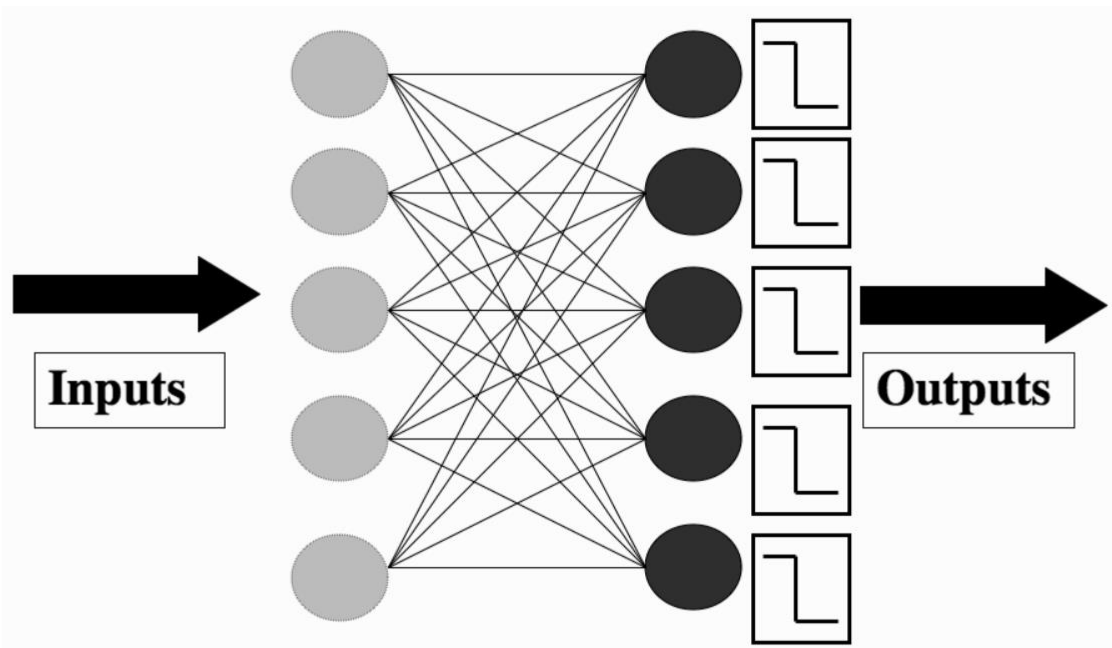
感知机和感知机学习

线性可分性

感知机和感知机学习

- Frank Rosenblatt，1957年，Cornell航空实验室(Cornell Aeronautical Laboratory)
- 最简单形式的前馈式人工神经网络
- 是一种二元线性分类器，使用特征向量作为输入，把矩阵上的输入x(实数值向量)映射到输出值f(x)上(一个二元的值)

感知器结构

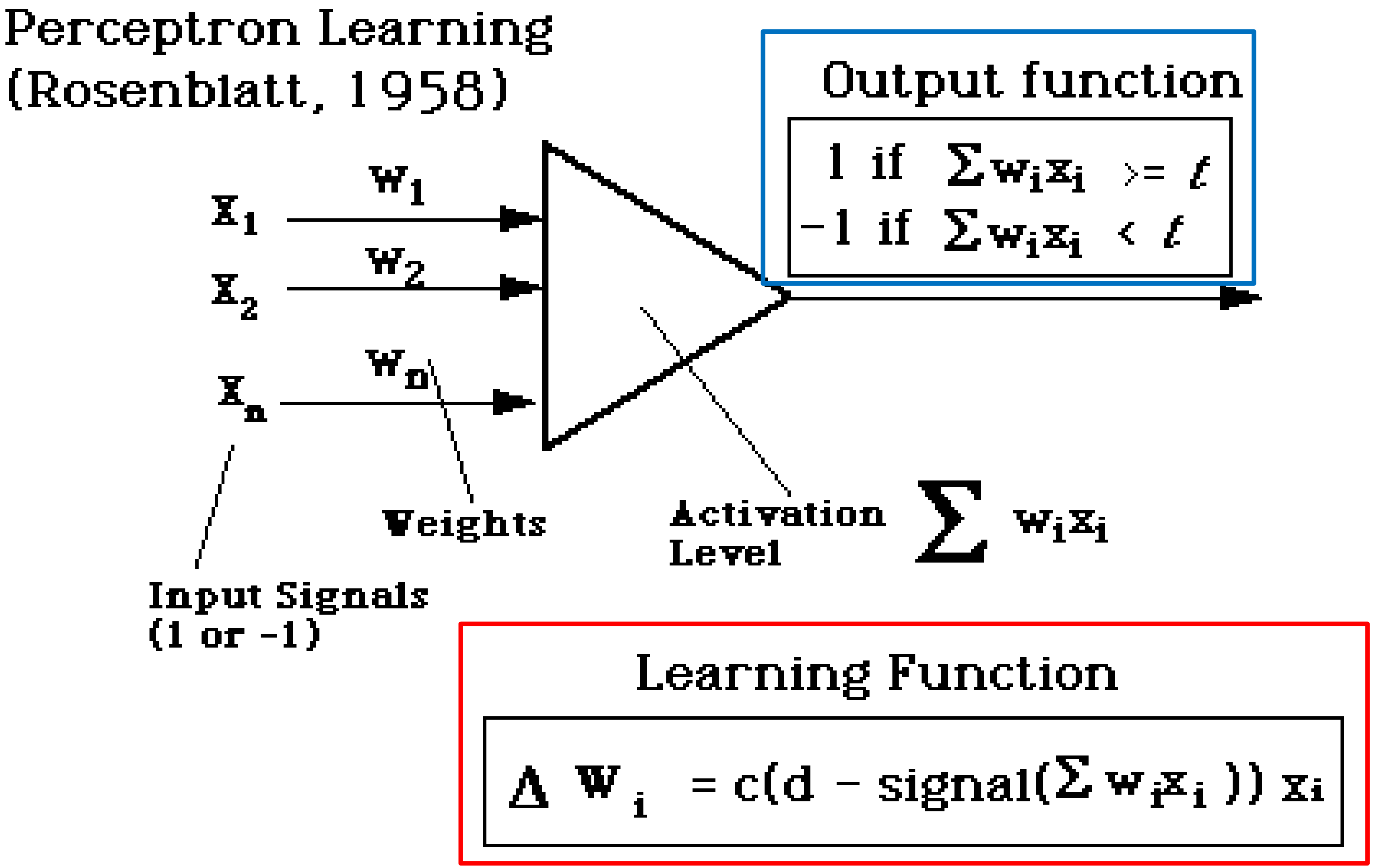


不是神经元，只是外部输入及其维度

相互间独立

- 非线性前馈网络
  - 同层内无互连
  - 不同层间无反馈
  - 由下层向上层传递
  - 输入输出均为离散值
  - 由阈值函数决定其输出

感知器结构



Perceptron Learning
(Rosenblatt, 1958)
Output function
1 if Σ wixi >= t
-1 if Σ wixi < t
x1
x2
xn
w1
w2
wn
Weights
Input Signals
(1 or -1)
Activation
Level
Σ wixi
Learning Function
Δ wi = c(d - signal(Σ wixi)) xi

有监督的学习机制

- c是常数，表示学习率
- d是期望的输出，取值为1或-1
- sign是感知机的输出，取值为1或-1

教材上符号表达

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \eta\left(y_j - t_j\right) \cdot x_i$$

注意权值的标记

$$\Delta W_i = c(\mathrm{d} - \mathrm{sign}(\sum \mathrm{w}_i * \mathrm{x}_i))\,\mathrm{X}_i$$

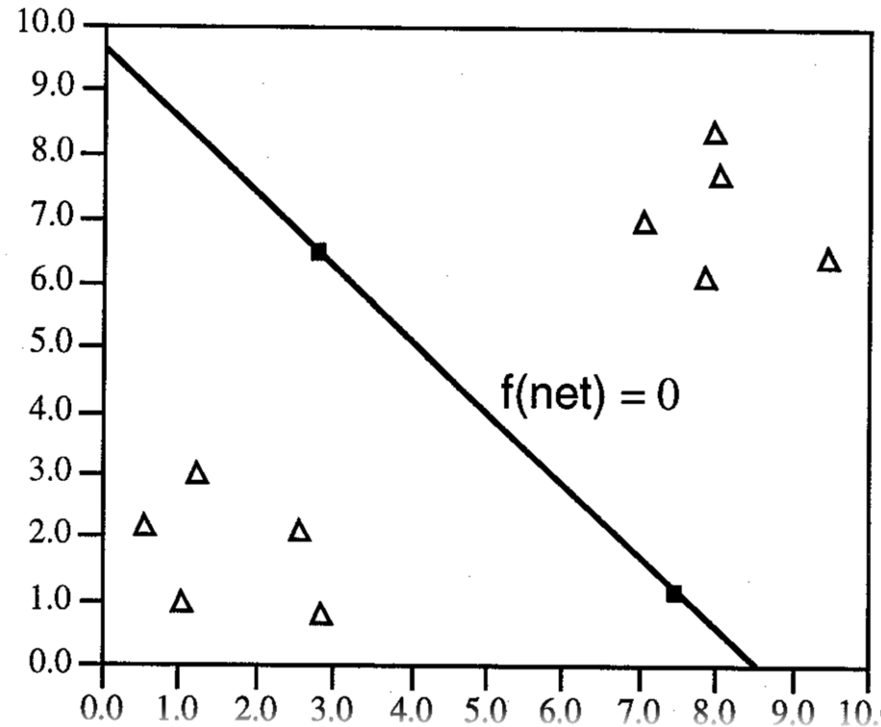
- 期望输出和实际输出相同，不改变权值
- 实际输出为-1，期望输出为+1，则增加$2cX_i$
- 实际输出为+1，期望输出为-1，则减少$2cX_i$

感知机的学习算法

1. 权值初始化
2. 输入样本对
3. 计算输出
4. 根据感知机学习规则调整权重
5. 返回到步骤2输入到下一对样本，直至对所有样本的实际输出与期望输出相等

例子

x_1	x_2	Output
1.0	1.0	1
9.4	6.4	–1
2.5	2.1	1
8.0	7.7	–1
0.5	2.2	1
7.9	8.4	–1
7.0	7.0	–1
2.8	0.8	1
1.2	3.0	1
7.8	6.1	–1



x_1	x_2	Output
1.0	1.0	1
9.4	6.4	–1
2.5	2.1	1
8.0	7.7	–1
0.5	2.2	1
7.9	8.4	–1
7.0	7.0	–1
2.8	0.8	1
1.2	3.0	1
7.8	6.1	–1

$f(net)=f(w_0*x_0+w_1*x_1+w_2*x_2)$

x_0是偏置单元，通常取1

假设初始权值为[-0.6,0.75,0.5]
对第一行数据来说
$f_1=f(-0.6*1+0.75*1+0.5*1)=f(0.65)=1$
与期望值一样，所以W向量不变，$W_1=W_0$

x_1	x_2	Output
1.0	1.0	1
9.4	6.4	–1
2.5	2.1	1
8.0	7.7	–1
0.5	2.2	1
7.9	8.4	–1
7.0	7.0	–1
2.8	0.8	1
1.2	3.0	1
7.8	6.1	–1

$f(net)=f(w_0*x_0+w_1*x_1+w_2*x_2)$

x_0是偏置单元，通常取1

假设初始权值为[-0.6,0.75,0.5]
对第一行数据来说
$f_1=f(-0.6*1+0.75*1+0.5*1)=f(0.65)=1$
与期望值一样，所以W向量不变，$W_1=W_0$

$f_2=f(-0.6*1+0.75*9.4+0.5*6.4)=f(9.65)=1$
期望为-1，所以$W_2=W_1+0.2*(-2)X_2$
$W_2=[-0.6,0.75,0.5]-0.4*[1,9.4,6.4]=[-1.00,-3.01,-2.06]$

x_1	x_2	Output
1.0	1.0	1
9.4	6.4	−1
2.5	2.1	1
8.0	7.7	−1
0.5	2.2	1
7.9	8.4	−1
7.0	7.0	−1
2.8	0.8	1
1.2	3.0	1
7.8	6.1	−1

$f(net)=f(w_0*x_0+w_1*x_1+w_2*x_2)$

x_0是偏置单元，通常取1

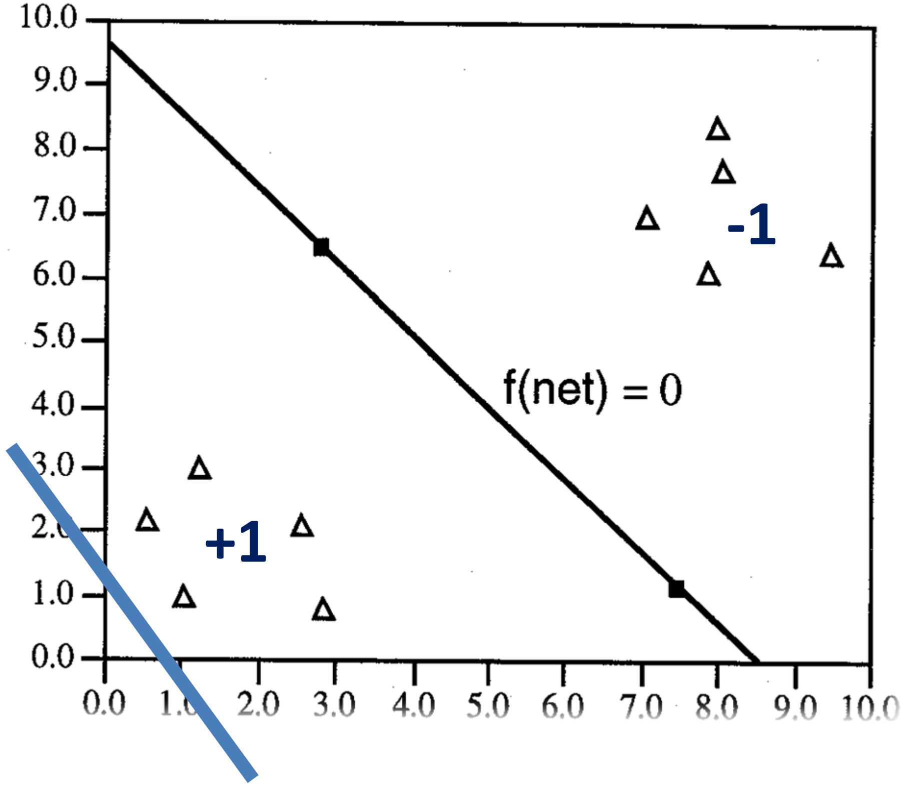
假设初始权值为[-0.6,0.75,0.5]
对第一行数据来说
$f_1=f(-0.6*1+0.75*1+0.5*1)=f(0.65)=1$
与期望值一样，所以W向量不变，$W_1=W_0$

$f_2=f(-0.6*1+0.75*9.4+0.5*6.4)=f(9.65)=1$
期望为-1，所以$W_2=W_1+0.2*(-2)X_2$
$W_2=[-0.6,0.75,0.5]-0.4*[1,9.4,6.4]=[-1.00,-3.01,-2.06]$

X_0固定为1
a固定为0.2

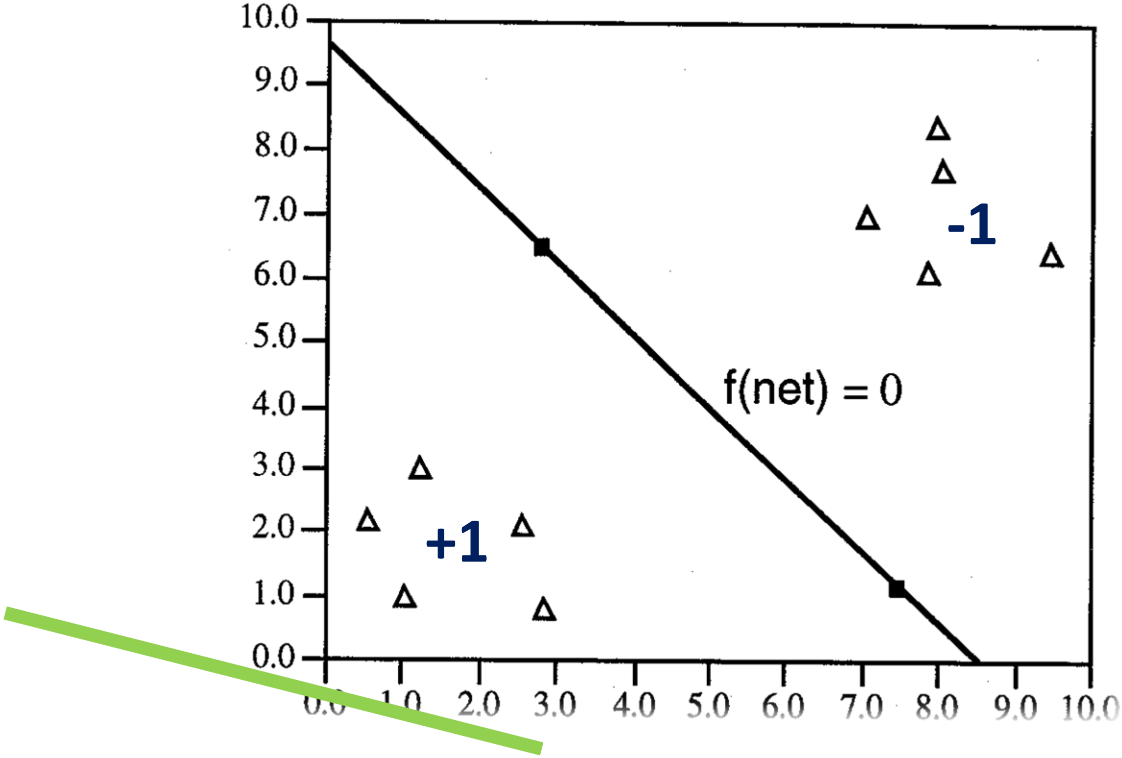
$f_3=f(-1*1-3.01*2.5-2.06*2.1)=f(-12.84)=-1$
$W_3=W_2+0.2*2*X_3=[-0.60,-2.01,-1.22]$
…..
最终结果为W=[10.9，-1.3，-1.1]

图示



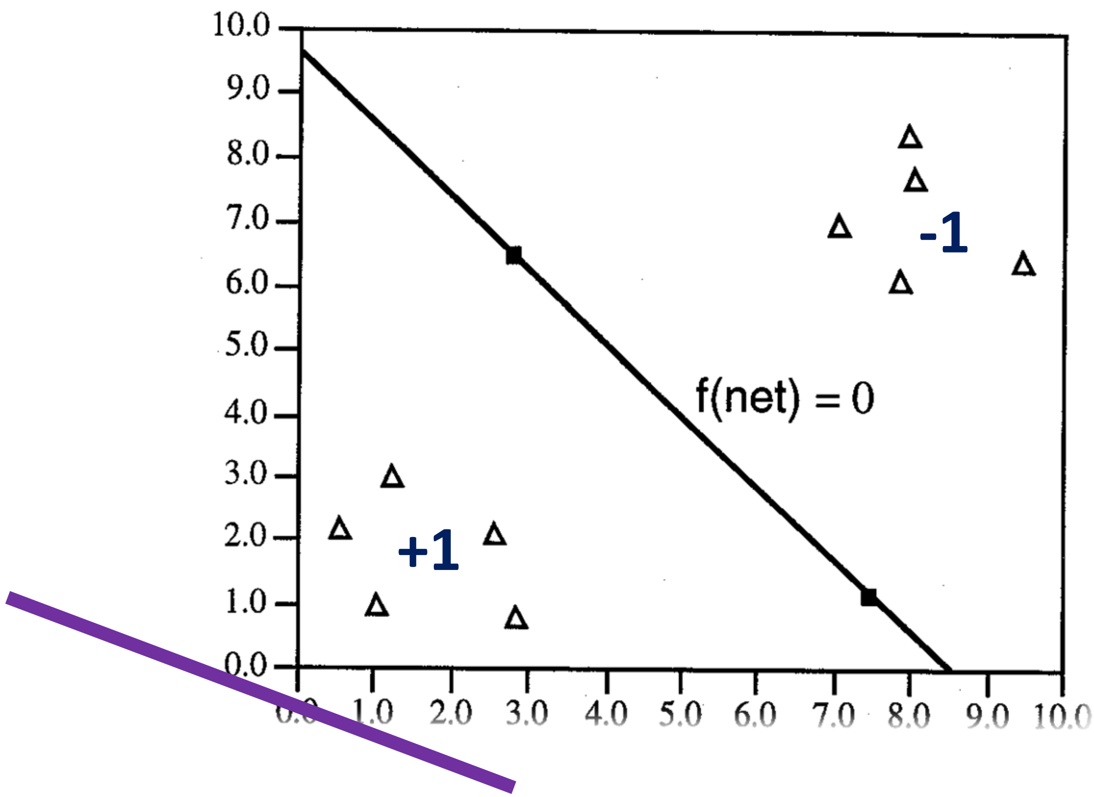
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0
-1
f(net) = 0
+1

图示



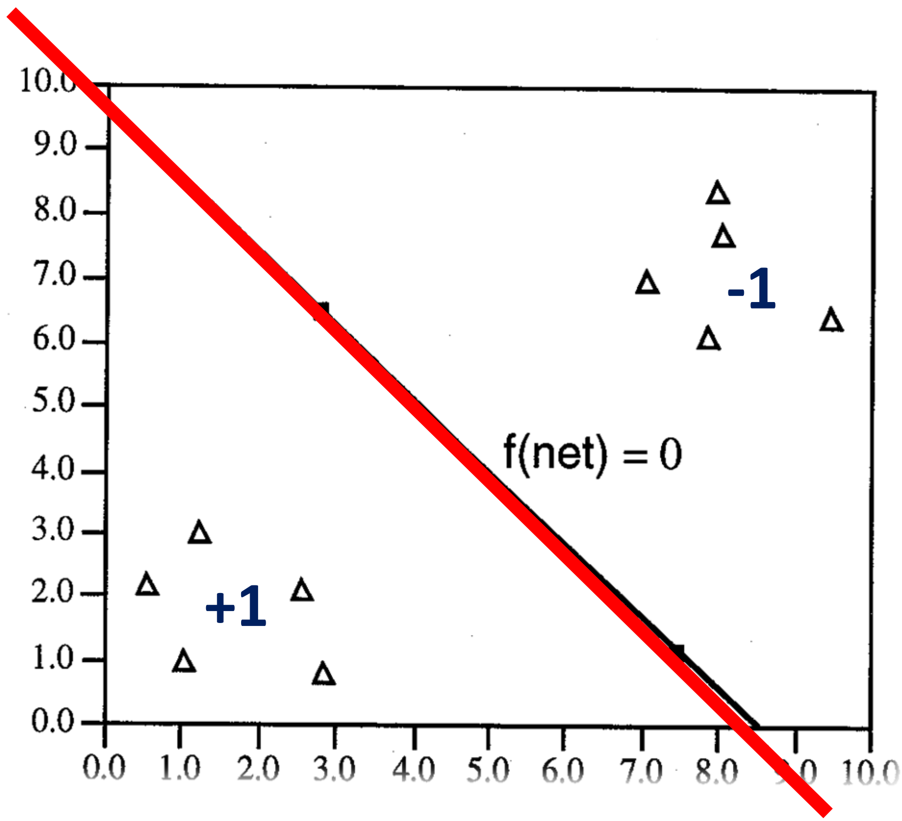
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
0.0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0
-1
+1
f(net) = 0

图示



10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0
f(net) = 0
-1
+1

图示



-1
+1
f(net) = 0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
0.0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0

大纲

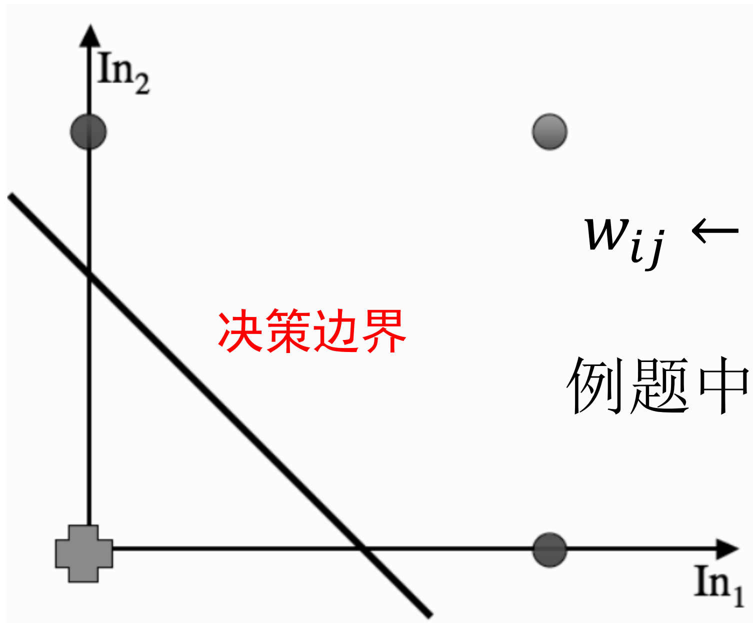
脑和神经元

感知机和感知机学习

线性可分性

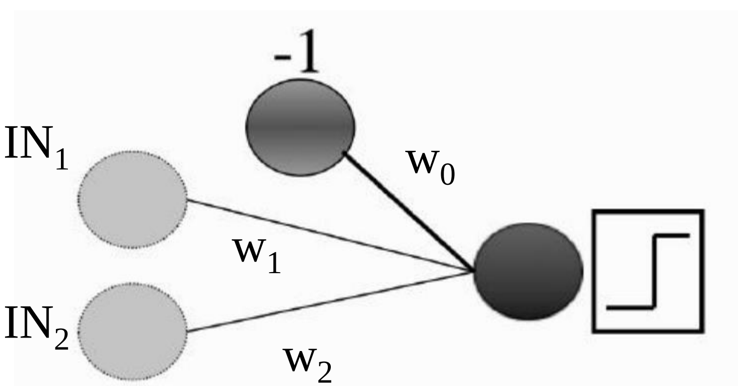
OR函数

In_1	In_2	t
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \eta(y_j - t_j) \cdot x_i$$

例题中，令 $\eta = 0.25$



$w_0 = -0.05$，

$w_1 = -0.02$，

$w_2 = 0.27$，

课堂练习

$w_0 =$?

$w_1 =$?

$w_2 =$?

决策边界

- 决策边界 Decision boundary

以矩阵表达

✓ 鉴别函数 discriminant function

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \geq 0$$

✓ 神经元激活（假设激活函数是阈值为0的阶跃函数）

✓ 等价于向量内积

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|a\|\|b\|\cos\theta$$

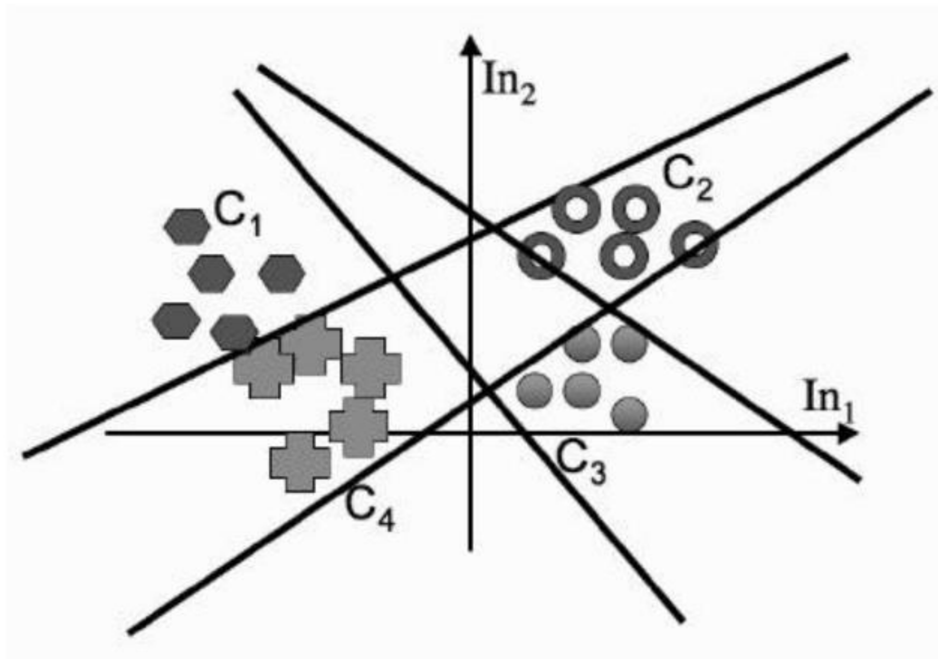
✓ 假设有两个输入点

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \cdot \boldsymbol{w}^T &= 1 \\ \mathbf{x}_2 \cdot \boldsymbol{w}^T &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \boldsymbol{w}^T = 0$$

物理解释：

$\boldsymbol{w}^T$就是找与$\mathbf{x}_1$ $\mathbf{x}_2$连线的垂直线

多分类的决策边界



- 每一个输出神经元定义一条决策边界
- 多个神经元就决定了多分类的决策边界

感知机收敛理论

- [Rosenblatt, 1962] 给定一个线性可分数据集，感知机将在有限次迭代中收敛到一个决策边界。
- 定义γ是分离超平面与最接近的数据点之间的距离，则迭代次数的界是$1/\gamma^2$。

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w}^{(\mathbf{t})} &= \mathbf{w}^* \cdot \left(\mathbf{w}^{(\mathbf{t}-1)} + y\mathbf{x}\right) \\ &= \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w}^{(\mathbf{t}-1)} + y\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x} \\ &\geq \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w}^{(\mathbf{t}-1)} + \gamma \geq t\gamma\end{aligned}$$

证明思路：
考察权重向量的迭代过程，
假设第t轮输出有误差，需要更改t-1轮的权值

结论1：每次权值更新至少比上一轮增加γ

感知机收敛理论

- 柯西不等式(Cauchy–Schwartz inequality)

$$t\gamma \leq \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w}^{(\mathbf{t})} \leq \|\mathbf{w}^*\| \left\|\mathbf{w}^{(\mathbf{t})}\right\|$$

$$t\gamma \leq \left\|\mathbf{w}^{(\mathbf{t})}\right\|$$

假设上一轮输出不正确，此项为0.

思考：神经网络的输入输出

$$\left\|\mathbf{w}^{(\mathbf{t})}\right\|^2 = \left\|\mathbf{w}^{(\mathrm{t-1})} + y\mathbf{x}\right\|^2$$

$$= \left\|\mathbf{w}^{(\mathrm{t-1})}\right\|^2 + \boxed{y^2\|\mathbf{x}\|^2} + \boxed{2y\mathbf{w}^{(\mathrm{t-1})} \cdot \mathbf{x}}$$

$$\leq \left\|\mathbf{w}^{(\mathrm{t-1})}\right\|^2 + 1 \leq t$$

根据假设

$$t\gamma \leq \left\|\mathbf{w}^{(\mathrm{t-1})}\right\| \leq \sqrt{t}$$

$$t \leq 1/\gamma^2$$

感知机学习缺点

- 感知机模型属于单层神经网络，它不能解决一类非线性可分的问题。
- 典型的例子就是异或

表 10-2　异或真值表

x_1	x_2	输出
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

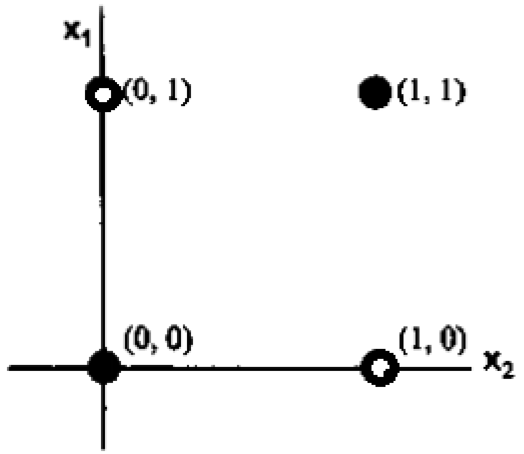
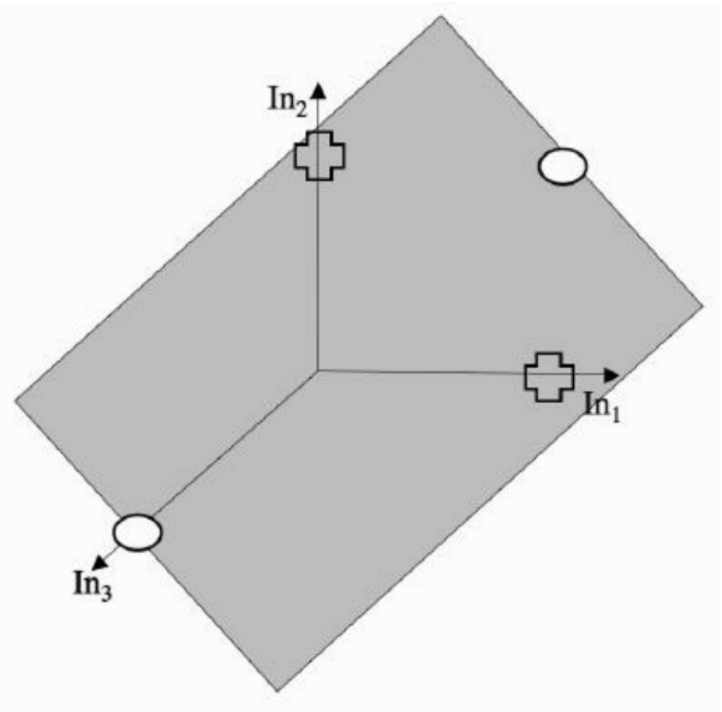


图 10-3　异或问题。在二维空间中没有可分离点集{(0,0),(1,1)}和{(0,1),(1,0)}的直线

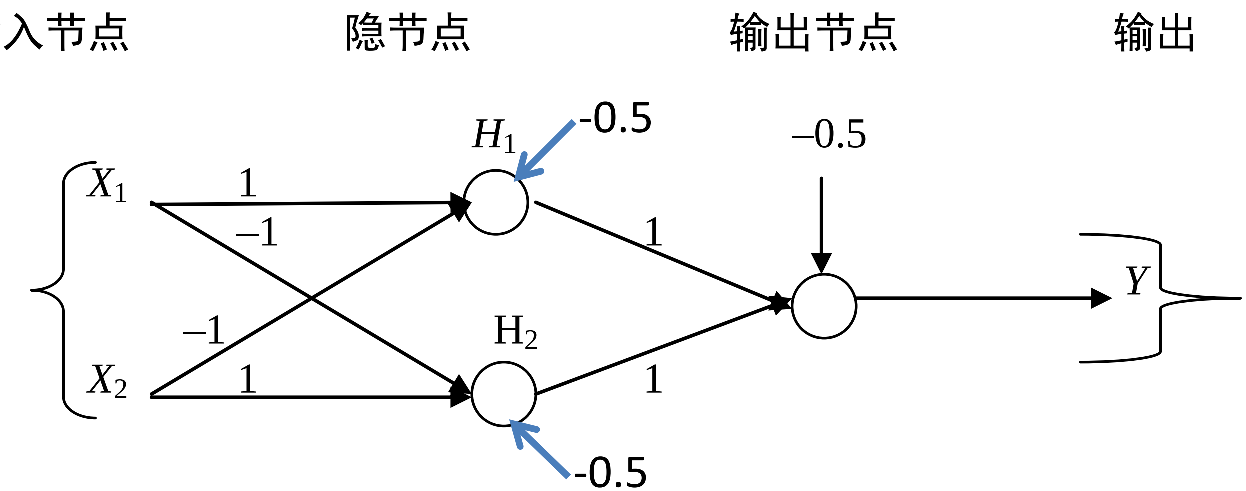
用线性分类器处理异或

In_1	In_2	In_3	Output
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1



利用核技巧(SVM一讲介绍)，将数据投影到合适的高维空间

用多层网络处理异或



- 权重向量(1,-1)、(-1,1)

输入		隐节点输出		输出节点	X_1 XOR X_2
X_1	X_2	H_1	H_2		
0	0	0	0	–0.5 → 0	0
0	1	–1 → 0	1	0.5 → 1	1
1	0	1	–1 → 0	0.5 → 1	1
1	1	0	0	–0.5 → 0	0

感知机的表达能力

- 感知机是n维实例空间的超平面决策
- 候选假设空间H(决策变量的集合)：所有可能实数集合

$$H = \left\{\overrightarrow{W} \middle| \overrightarrow{W} \in R^{(n+1)}\right\}$$

- 广义布尔函数 m-of-n：n个输入值至少有m个为真，则输出为真
- 二层神经网络可以表达所有的布尔函数
  - 与、或、与非、或非、异或……

感知机学习的不足

- 感知机学习一定可以收敛吗？
  - ✓ 前提是训练样例必须是线性可分的！！

↓

- 如果训练样例不是线性可分的，怎么办？
  - ✓ 只能去找一个学习方法，去收敛到目标概念的最佳近似

感知机学习方法只适用在单层网络！

思考和讨论

1. 感知机的表达能力。
2. 感知机学习法则。
3. 线性可分和非线性可分。
4. 感知机收敛定理。

谢 谢 ！