Quelques notions d'optimisation de fonctions

Franck Corset

R2.09 - Méthodes numériques pour la SAÉ 1256

Sommaire

- Rappels sur les fonctions réelles
- Fonctions à deux variables
- Optimisation de fonctions à 2 variables
- Cas particulier : Programmation linéaire
- Exemple pour la SAÉ
- Rendu du projet

Continuité

On suppose que f est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

Définition : Continuité en un point x_0

On dit que f est continue en x_0 ssi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Définition : Continuité sur $\mathbb{R}$

On dit que f est continue sur $\mathbb{R}$ ssi f est continue en tout point.

On note $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité

On suppose que f est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$.

Définition : Dérivabilité en un point x_0

On dit que f est dérivable en x_0 ssi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On note $f'(x_0)$ cette limite, qui est appelée nombre dérivée de f en x_0.

Définition : Dérivabilité sur $\mathbb{R}$

On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi f est dérivable en tout point.

On note $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est continue. Plus généralement, on note $\mathcal{C}^k$, l'ensemble des fonctions k fois dérivables et dont ses k dérivées successives sont continues.

Optimisation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

Théorème

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Si f admet un optimum en $x^\star$ alors $f'(x^\star) = 0$. $x^\star$ s'appelle un point critique.

Attention

La réciproque est fausse : Le fait que la dérivée s'annule n'est qu'une condition nécessaire et non suffisante pour que f admette un optimum local !

Exemple

La fonction $f(x) = x^3$ a sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ qui s'annule en $x = 0$ mais n'admet pas d'optimum en $x = 0$.

Optimisation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

Théorème

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Si $f'(x^\star) = 0$ et $f''(x^\star) \neq 0$ alors

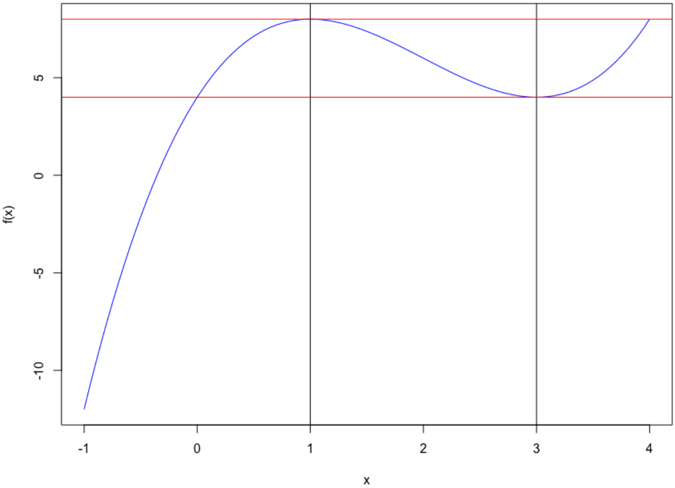
- Si $f''(x^\star) > 0$ alors f admet un minimum local en $x^\star$.
- Si $f''(x^\star) < 0$ alors f admet un maximum local en $x^\star$.

Exemple

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$. On a
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.
1 et 3 sont deux points critiques.
On calcule la dérivée seconde : $f''(x) = 6x - 12$.

- $f''(1) = -6 < 0$ et donc f admet un maximum local en $x = 1$ et $f(1) = 8$.
- $f''(3) = 6 > 0$ et donc f admet un minimum local en $x = 3$ et $f(3) = 4$.

Optimisation de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

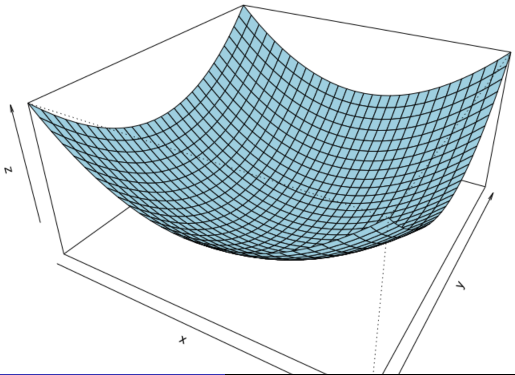


Fonctions à deux variables

On suppose que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Exemple

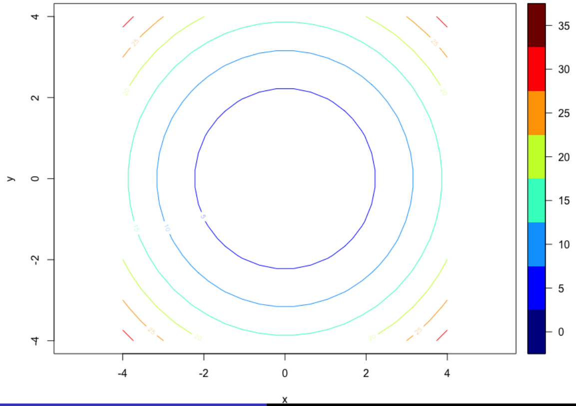
Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Courbes de niveau d'une fonction à deux variables

Exemple

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. La courbe de niveau k est la courbe telle que $f(x,y) = k$.



Dérivées partielles

On suppose que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Définition

- On appelle dérivée partielle de f par rapport à x, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, la dérivée de la fonction $f_y(x)$, i.e. en considérant cette fonction que comme une fonction de x (y est donc considéré comme une constante).
- On appelle dérivée partielle de f par rapport à y, notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, la dérivée de la fonction $f_x(y)$, i.e. en considérant cette fonction que comme une fonction de y (x est donc considéré comme une constante).

Exemple

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. On a

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

Exemples de dérivées partielles

Exemple 2

Soit $f(x,y) = 2x^2y^3 + x^3y^2 + 3xy^2 + y$. On a

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy^3 + 3x^2y^2 + 3y^2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^2y^2 + 2x^3y + 6xy + 1$

Exemple 3

Soit $f(x,y) = \cos(x+2y) + xe^y$. On a

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x+2y) + e^y$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\sin(x+2y) + xe^y$

Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

Définition

On appelle gradient de f, notée $\nabla f(x, y)$, le vecteur de $\mathbb{R}^2$, défini comme suit:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

Exemple

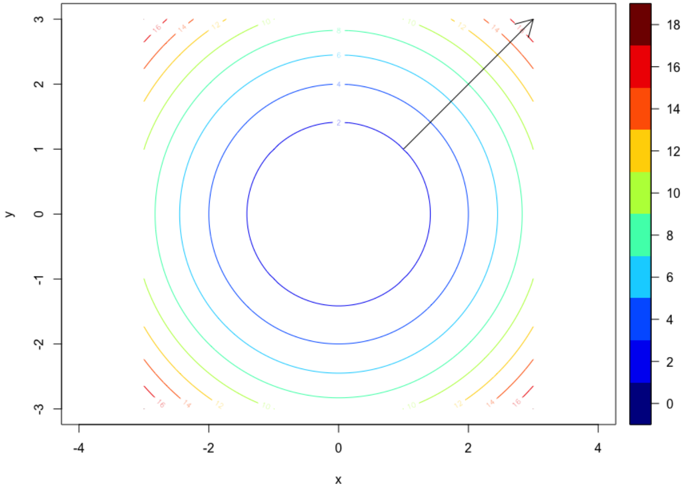
Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$, le gradient de f au point (x, y) est

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

À retenir

- Le vecteur gradient indique en chaque point la direction de plus grande pente.
- Le vecteur gradient est en tout point orthogonal aux lignes de niveau.

Gradient de $f(x,y) = x^2 + y^2$ au point $(1,1)$: $\nabla f(1,1) = (2x, 2y) = (2,2)$



Condition Nécessaire pour un optimum local

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème

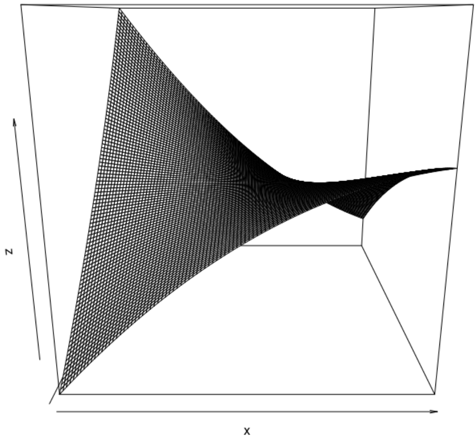
Si f admet un extremum local en $(x^\star, y^\star)$ alors le gradient de f en ce point est nul :

$$\nabla f(x^\star, y^\star) = 0$$

Attention

La réciproque est fausse : comme pour les fonctions à une variable, le fait que le gradient soit nul en un point n'est qu'une condition nécessaire et non suffisante pour que f admette un extremum local en ce point !

Étude de $f(x,y) = 2x^2y - xy^2 - 6xy$: $\nabla f(x,y) = (4xy - y^2 - 6y, 2x^2 - 2xy - 6x)$



Dérivées partielles d'ordre 2

Définition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit les dérivées partielles d'ordre 2 de f comme suit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Théorème

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Matrice hessienne

Définition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. La matrice hessienne au point (x, y) est

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

Remarque

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors la matrice hessienne est une matrice symétrique :

$$H = {}^tH$$

Exemple de matrice hessienne

Exemple 2

Soit $f(x,y) = 2x^2y^3 + x^3y^2 + 3xy^2 + y$. On a

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy^3 + 3x^2y^2 + 3y^2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^2y^2 + 2x^3y + 6xy + 1$

La matrice hessienne vaut

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^3 + 6xy^2 & 12xy^2 + 6x^2y + 6y \\ 12xy^2 + 6x^2y + 6y & 12x^2y + 2x^3 + 6x \end{pmatrix}$$

Condition Suffisante pour un optimum local

Théorème

Soit $(x^\star, y^\star)$, un point critique (i.e. $\nabla f(x^\star, y^\star) = 0$). En notant

$$H(x^\star, y^\star) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors la fonction f admet un maximum local en $(x^\star, y^\star)$.
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors la fonction f admet un minimum local en $(x^\star, y^\star)$.
- Si $rt - s^2 < 0$ alors f admet un point selle.
- Si $rt - s^2 = 0$ alors on ne peut rien conclure.

Condition Suffisante pour un optimum local

Exemple

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Le gradient est $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ et s'annule en $(0, 0)$ (un seul point critique). La matrice hessienne vaut :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $rt - s^2 = 4 > 0$ et $r = 2 > 0$ et donc f admet un minimum local en $(0, 0)$.

Étude de $f(x,y) = 2x^2y - xy^2 - 6xy$: $\nabla f(x,y) = (4xy - y^2 - 6y, 2x^2 - 2xy - 6x)$

La matrice hessienne est

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x - 2y - 6 \\ 4x - 2y - 6 & -2x \end{pmatrix}$$

et donc en $(0,0)$, on a

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $rt - s^2 = -36 < 0$ et donc $(0,0)$ est un point selle.

Optimisation sous contrainte

- En théorie, on utilise le lagrangien...
- En pratique, on peut utiliser la fonction optim du logiciel R.

Cas particulier : Fonction linéaire sous contraintes linéaires

Un producteur produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de fraise, de lait et de sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières :

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre.
La vente de 1 Kg de yaourts A et B rapporte respectivement 4€ et 5€.
L'objectif est d'optimiser le profit.

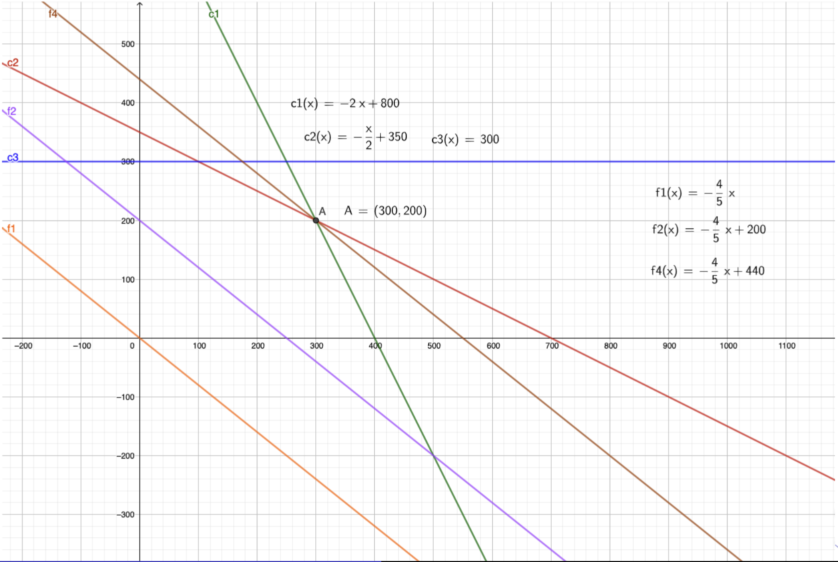
Programmation linéaire : Modélisation

- On note x_A et x_B les quantités de yaourts.
- On veut maximiser la fonction objective $4x_A + 5x_B$.
- Les contraintes sont
  - $2x_A + x_B \leq 800$
  - $x_A + 2x_B \leq 700$
  - $x_B \leq 300$
  - $x_A \geq 0$ et $x_B \geq 0$

Programmation linéaire : Résolution

- Résolution graphique : On représente le domaine des contraintes dans $\mathbb{R}^2$ puis on représente la fonction objective en la déplacant pour la maximiser.
- Algorithme du simplex (vu en BUT3) : Ajout de variables d'écarts

Programmation linéaire : Résolution graphique



Pour votre SAÉ

- Partie modélisation : Définir la fonction à optimiser ainsi que les variables (au moins 2)
- Partie modélisation : Définir les contraintes sur les variables
- Partie Résolution : résolution de votre problème (partie mathématiques + implémentation informatique)
- Utiliser des libraries R selon votre problème par exemple : ompr, boot, ...

Rendu du projet

- Rendre deux fichiers (un pdf à partir de Rmarkdown + le .Rmd) sous le format SAE1256_numeroGroupe.pdf
- Mettre les noms des étudiants du groupe dans le rapport.
- Il faudra présenter votre problème ainsi que la modélisation de celui-ci.
- Un peu de maths dans votre rapport et donc un peu de LaTeX.
- Utiliser le logiciel R pour résoudre votre problème.
- Interpréter les résultats, critiquer votre méthode, donner des perspectives à votre travail.
- A déposer sur chamilo (SAE1256), travaux (Méthodes numériques) et à rendre avant le vendredi 31 mai 2024.