

Линейная регрессия

Матричное представление линейной регрессии

Для всех n объектов:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

где:

- \mathbf{y} — вектор наблюдений размера $n \times 1$, где $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$
- \mathbf{X} — матрица признаков размера $n \times (p + 1)$
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор ошибок размера $n \times 1$, где $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]^T$

Для одного объекта i :

$$y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\omega} + \varepsilon_i$$

где:

- y_i — наблюдение для i -го объекта
- \mathbf{x}_i — вектор признаков для i -го объекта, где $\mathbf{x}_i = [1, x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ip}]$
- $\boldsymbol{\omega}$ — вектор коэффициентов, где $\boldsymbol{\omega} = [\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p]^T$
- ε_i — ошибка для i -го объекта

Решение методом наименьших квадратов (МНК)

Функция потерь (MSE):

$$J(\boldsymbol{\omega}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\omega}\|_2^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\omega})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\omega})$$

Оценка коэффициентов:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Предсказанные значения:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\omega}}$$

Теорема Гаусса-Маркова

При выполнении условий:

1. $\mathbb{E}[\varepsilon_i | \mathbf{X}] = 0$
2. $\text{Var}(\varepsilon_i | \mathbf{X}) = \sigma^2 < \infty$
3. $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j | \mathbf{X}) = 0$ при $i \neq j$

МНК-оценка $\hat{\omega}$ является наилучшей линейной несмещенной оценкой (BLUE).

Одни из возможных проблем МНК:

- Не работает при Мультиколлинеарности(высокая корреляция между признаками или коллинеарность)
- Вычислительная сложность $O(mn^2 + n^3)$, где (m — число наблюдений, n — число признаков).
- Отсутствие валидации и защиты от переобучения
- только одна функция потерь (MSE)

решение мультиколлинеарности:

- Исключение избыточных признаков
- Регуляризация (Ridge, Lasso)

Регуляризация

Ridge-регрессия (L2-регуляризация)

Минимизируемая функция потерь:

$$J(\boldsymbol{\omega}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\omega}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\omega}\|_2^2$$

где $\|\boldsymbol{\omega}\|_2^2 = \sum_{j=1}^p \omega_j^2$

Оценка коэффициентов:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ridge} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Особенности L2-регуляризации:

- Ограничивает веса (constraints weights)
- Обеспечивает более стабильное решение
- Дифференцируема

Lasso-регрессия (L1-регуляризация)

Минимизируемая функция потерь:

$$J(\boldsymbol{\omega}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\omega}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\omega}\|_1$$

где $\|\boldsymbol{\omega}\|_1 = \sum_{j=1}^p |\omega_j|$

уже нет аналитического решения, используется численная оптимизация (например, метод координатного спуска).

Особенности L1-регуляризации:

- Недифференцируема (но это не проблема)
- Выполняет отбор признаков (обнуляет некоторые коэффициенты)

основные метрики качества линейной регрессии:

- Среднеквадратичная ошибка (MSE):

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- Средняя абсолютная ошибка (MAE):

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$$

- Коэффициент детерминации (R^2):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

где $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ — среднее значение наблюдений.

и еще

- Средняя абсолютная процентная ошибка (MAPE):

$$\text{MAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$$

- Корень из среднеквадратичной ошибки (RMSE):

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

методы оптимизации для линейной регрессии:

- Градиентный спуск
- Стохастический градиентный спуск (SGD)

Метод градиентного спуска

Обновление коэффициентов:

$$\boldsymbol{\omega}^{(t+1)} = \boldsymbol{\omega}^{(t)} - \alpha \nabla J(\boldsymbol{\omega}^{(t)})$$

где α — скорость обучения, а градиент функции потерь:

для MSE:

$$\nabla J(\boldsymbol{\omega}) = -\frac{2}{n} \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\omega})$$

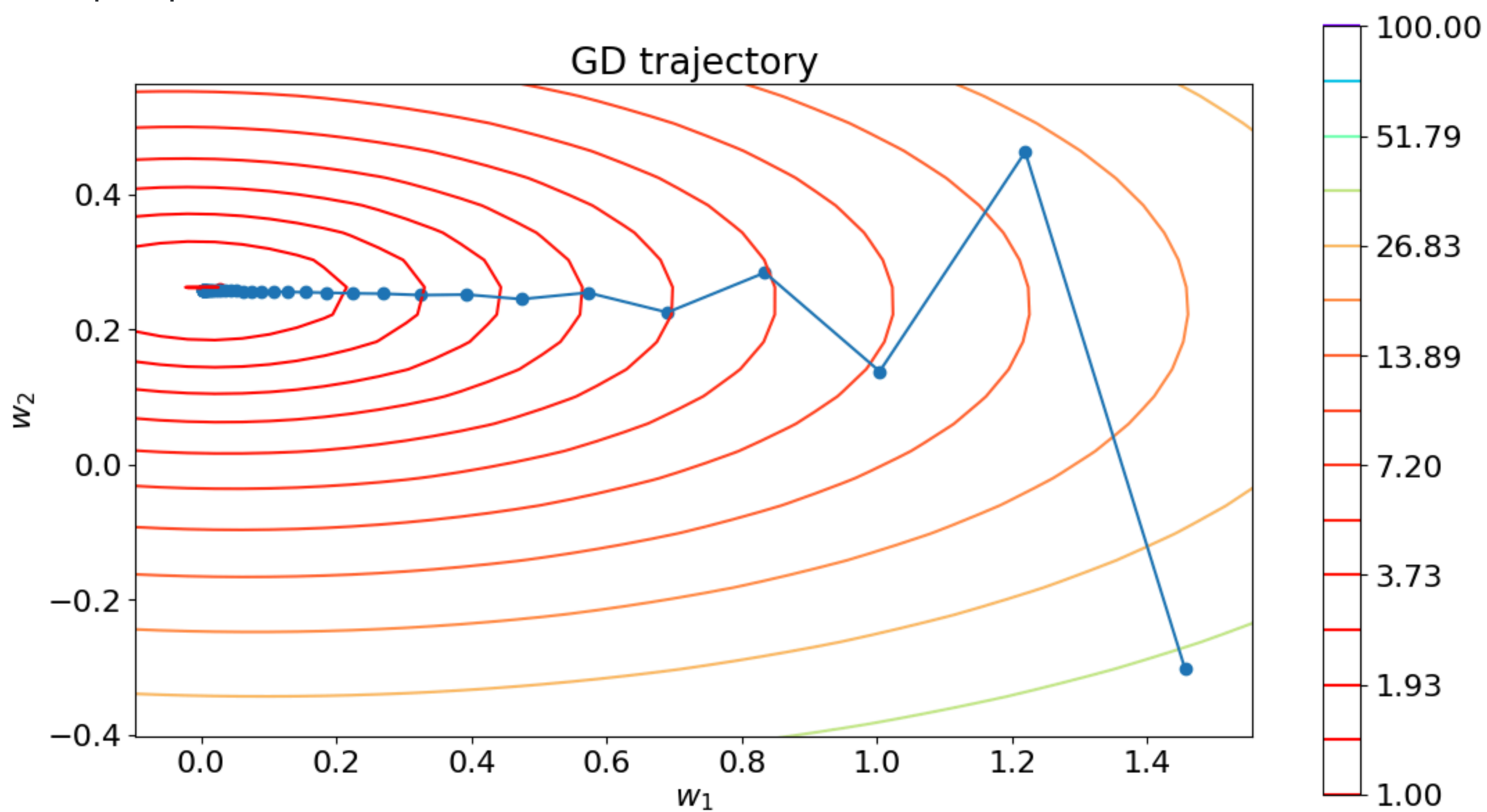
для Ridge-регрессии:

$$\nabla J(\boldsymbol{\omega}) = -\frac{2}{n} \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\omega}) + 2\lambda \boldsymbol{\omega}$$

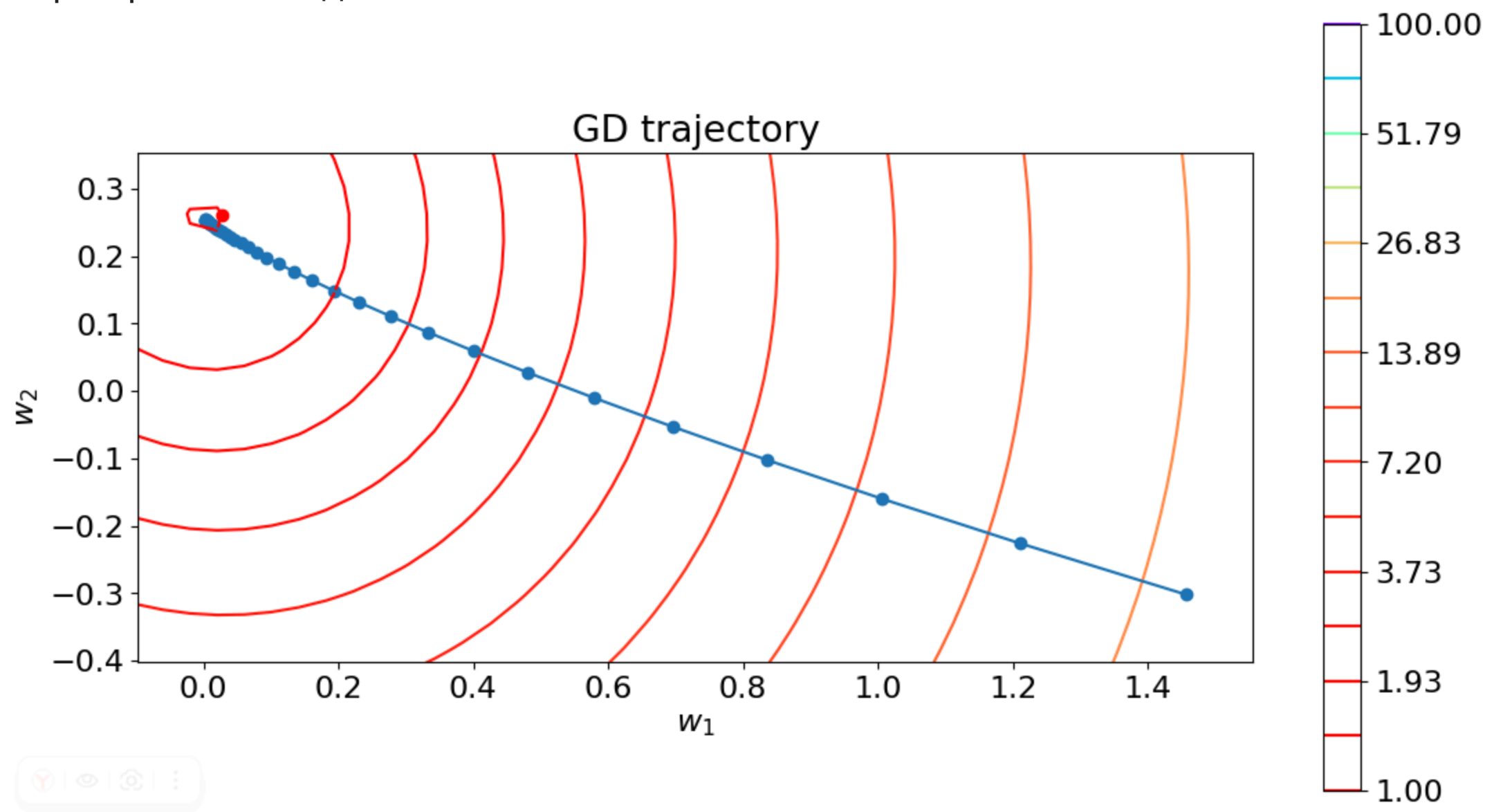
для Lasso-регрессии:

$$\nabla J(\boldsymbol{\omega}) = -\frac{2}{n} \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\omega}) + \lambda \cdot \text{sign}(\boldsymbol{\omega})$$

Ненормированные данные



Нормированные данные



Для MAE градиент не определен в точках, где ошибка равна нулю, поэтому используют субградиент:

$$\nabla J(\boldsymbol{\omega}) = -\frac{1}{n} \mathbf{X}^T \text{sign}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\omega})$$

где $\text{sign}(z)$ — функция знака, определяемая как:

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0 \\ 0, & \text{если } z = 0 \\ -1, & \text{если } z < 0 \end{cases}$$

Стохастический градиентный спуск (SGD)

В отличие от обычного градиентного спуска, который использует все данные для вычисления градиента, **SGD обновляет веса на основе градиента для одного случайного объекта** (или мини-батча объектов).

Преимущества:

- Быстрее для больших датасетов
- Может избежать локальных минимумов
- Меньше требований к памяти

Обновление коэффициентов в SGD

Обновление коэффициентов для каждого объекта i :

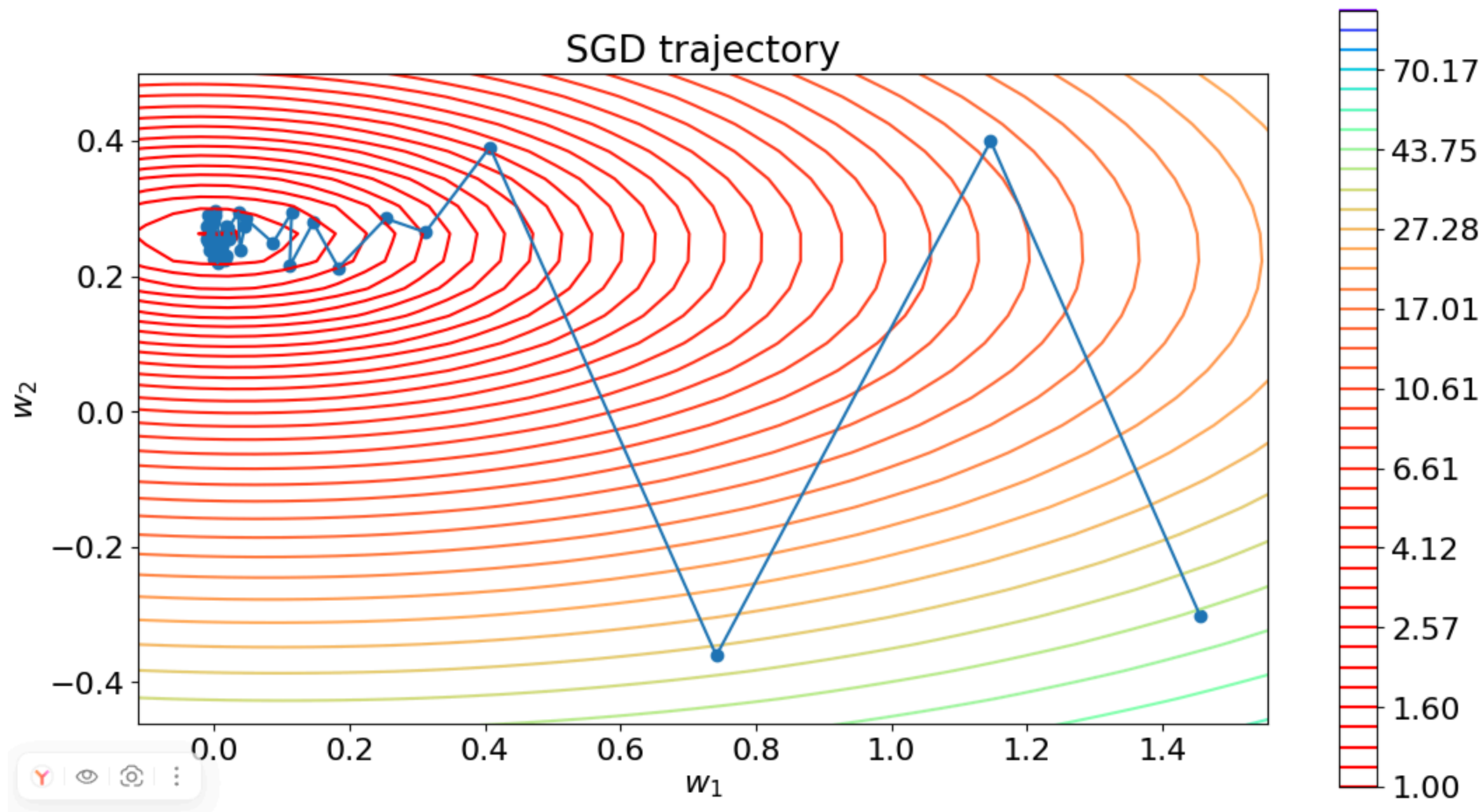
$$\boldsymbol{\omega}^{(t+1)} = \boldsymbol{\omega}^{(t)} - \alpha \nabla J_i(\boldsymbol{\omega}^{(t)})$$

где градиент функции потерь для объекта i :

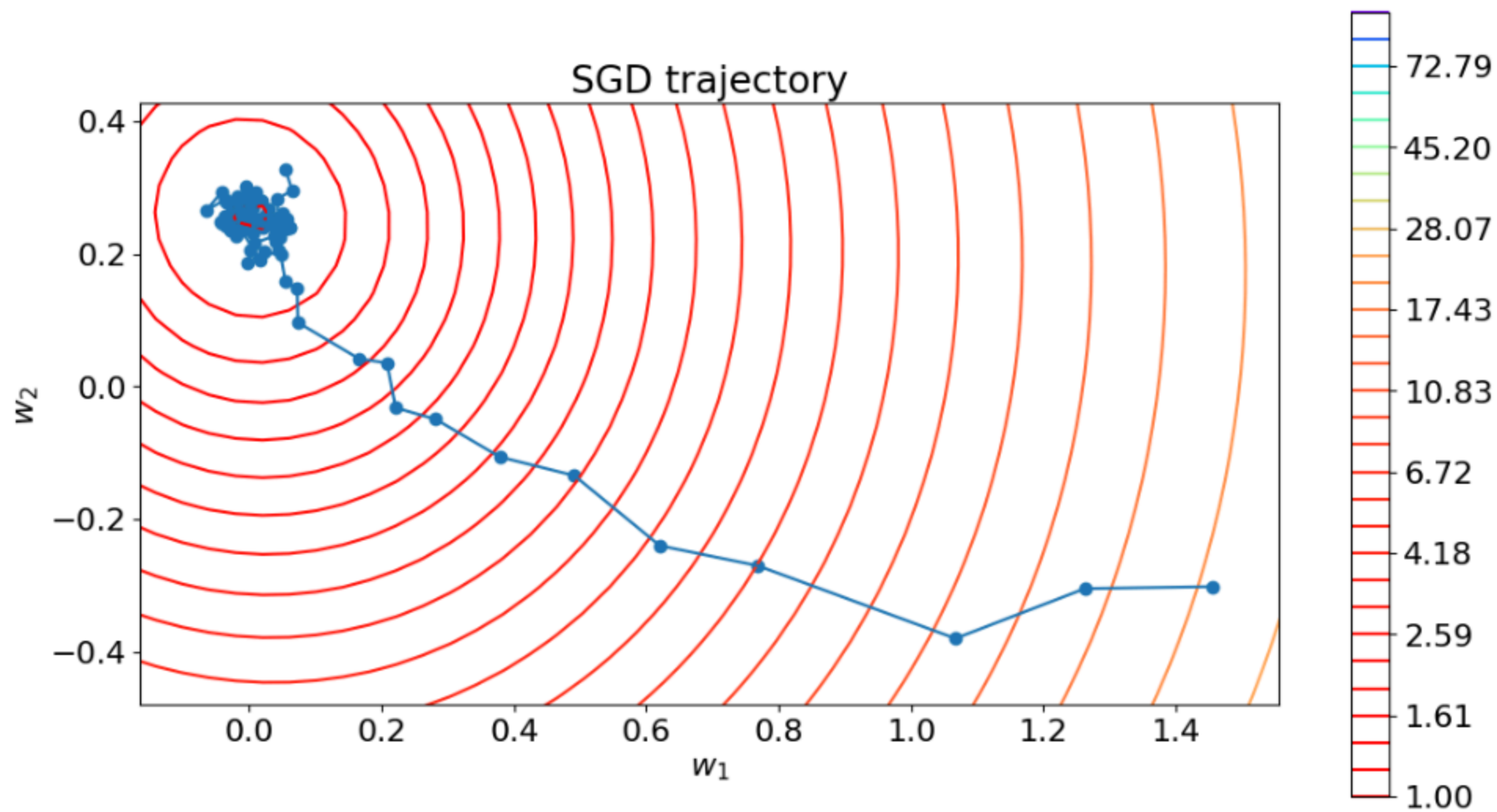
для MSE:

$$\nabla J_i(\boldsymbol{\omega}) = -2\mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\omega})$$

Ненормированные данные



Нормированные данные

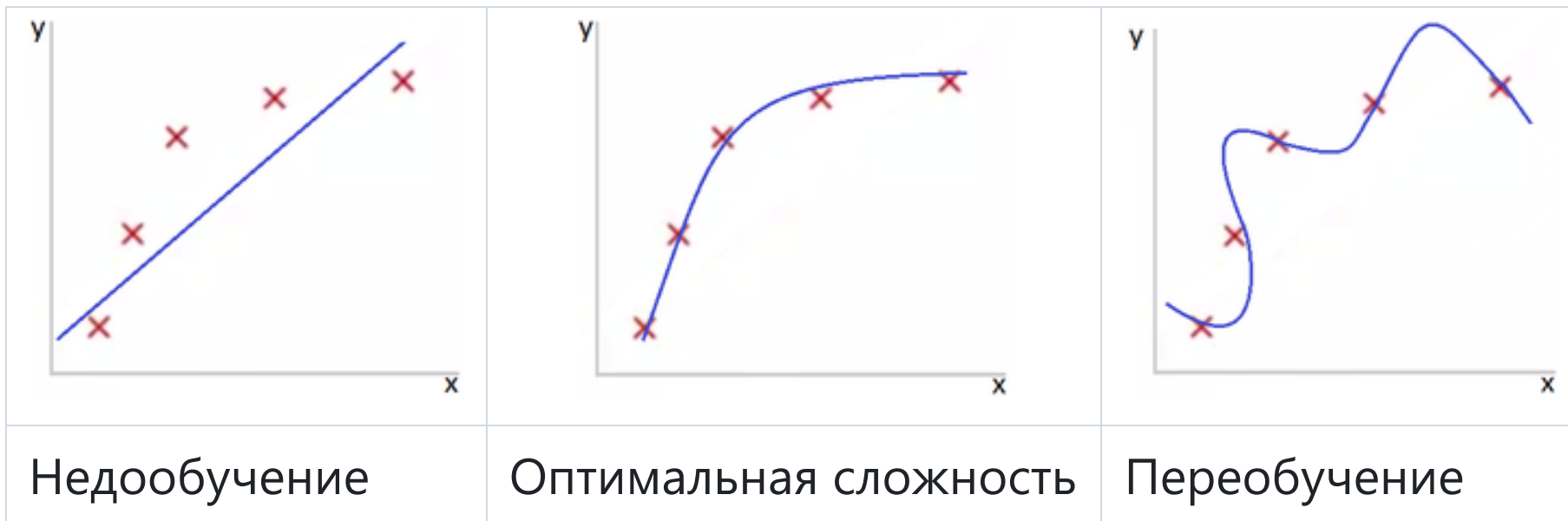


Обучение с учителем (Supervised Learning)

Обозначения:

- Обучающая выборка $\mathcal{L} = \{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i=1}^n$, где:
 - $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R})$ — для регрессии
 - $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p, y_i \in \{+1, -1\}$ — для бинарной классификации
- Модель $f(\mathbf{x})$ предсказывает значение для каждого объекта
- Функция потерь $Q(\mathbf{x}, y, f)$, которую нужно минимизировать

переобучение (overfitting) и недообучение (underfitting)



- **Недообучение (underfitting):** модель слишком простая, не может объяснить дисперсию данных
- **Переобучение (overfitting):** модель слишком сложная, хорошо работает на обучающей выборке, но плохо на новых данных
- **Оптимальная модель:** баланс между сложностью модели и её способностью обобщать

Контроль переобучения и недообучения

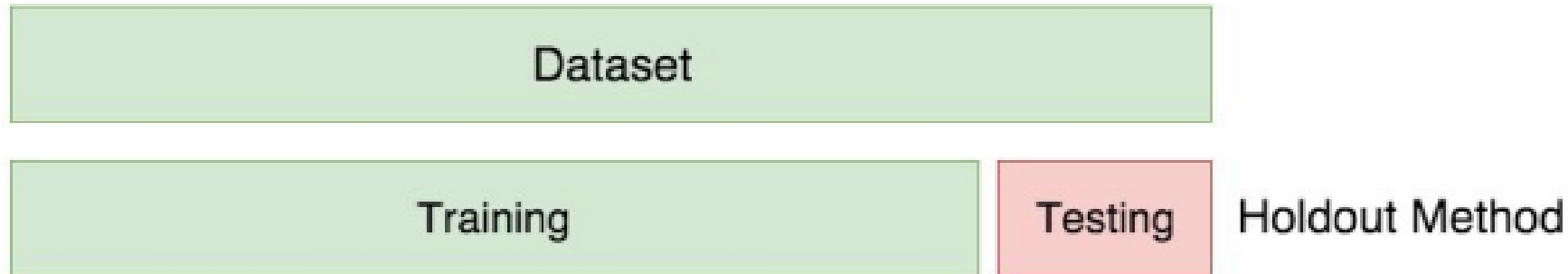
Можно контролировать переобучение / недообучение, изменяя **ёмкость модели** (способность аппроксимировать широкий спектр функций):

- Выбор подходящего пространства гипотез
- Эффективная ёмкость алгоритма обучения может быть меньше, чем репрезентативная ёмкость семейства моделей

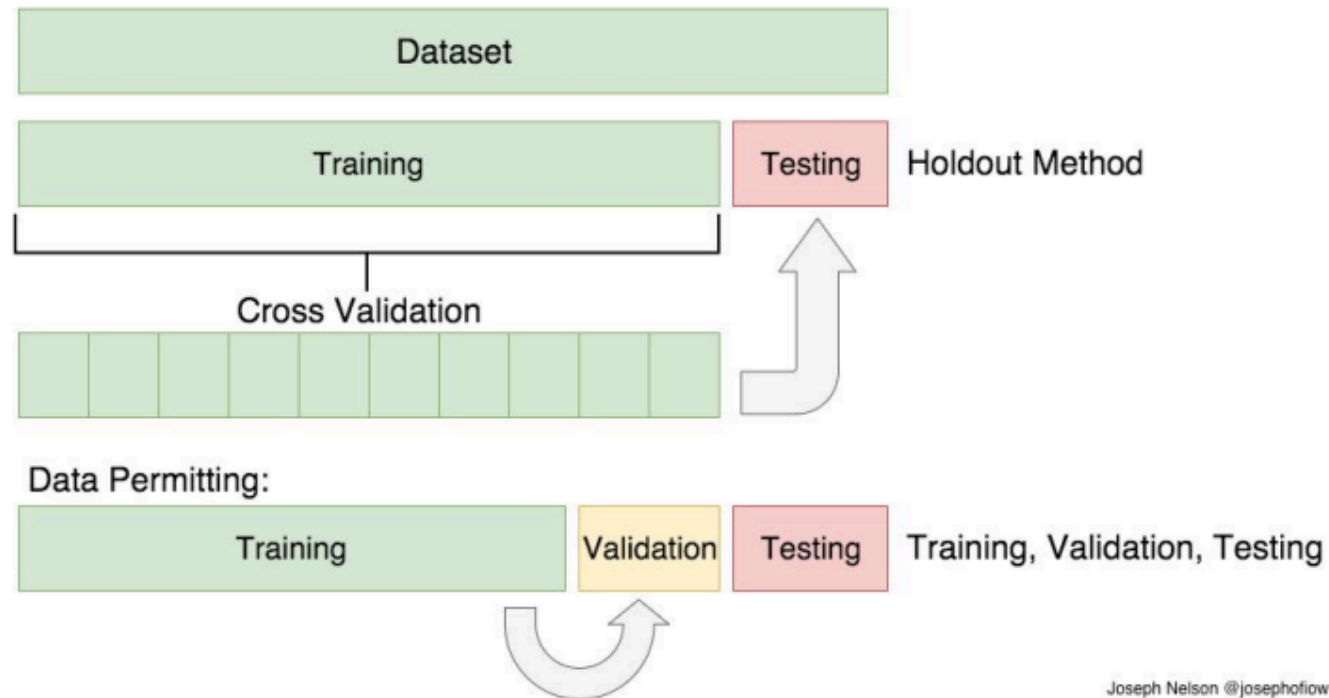
Holdout-метод

Разделение данных на две части:

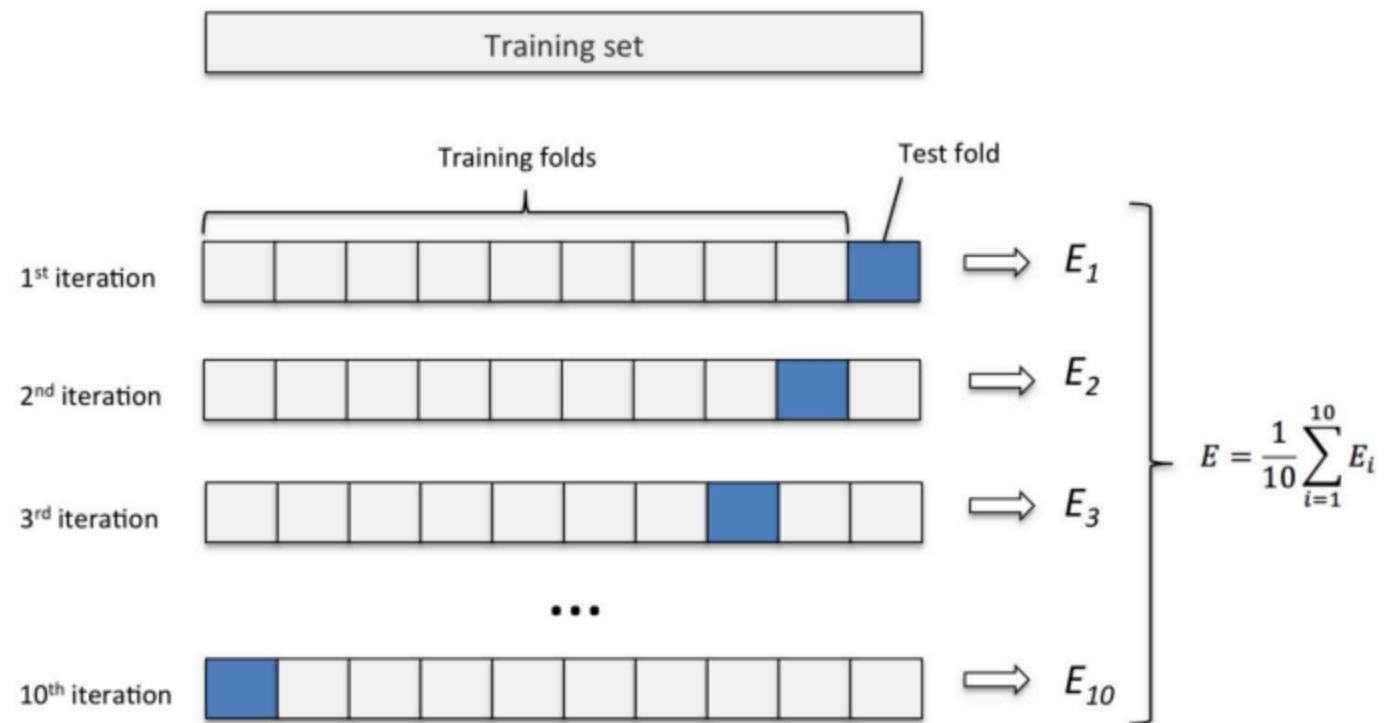
- Обучающая выборка (training set)
- Тестовая выборка (test set)



Кросс-валидация и разбиение данных

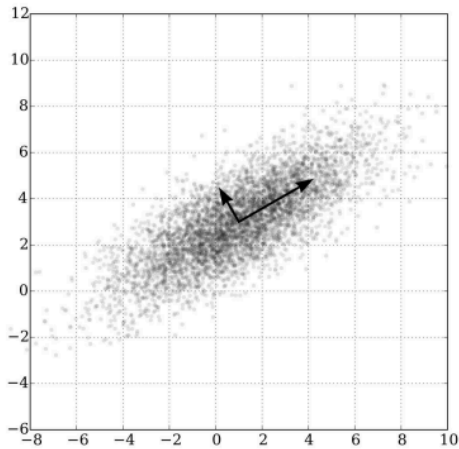


K-Fold Кросс-валидация



Метод главных компонент (РСА)

- Каждая главная компонента объясняет максимальную дисперсию данных
- Главные компоненты ортогональны друг другу
- Переход (проекция) в пространство ГК: $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{\Sigma}$
- Для ковариационной матрицы $\mathbf{\Sigma}$: диагональ Σ_{jj} — это дисперсии (variance) признаков



Данные надо Масштабировать перед применением РСА!