Математический анализ

Модуль 4

2021 год

«Кратные интегралы»

Иванов Сергей, Иванов Алексей, Титов Даниил

M3104

Июнь 2021

ИТМО

Содержание

Код отчёта на Overleaf (Latex)

1 Потенциал векторного поля

1.1 Убедитесь, что поле потенциально. Найдите уравнения векторных линий. Изобразите Векторные линии на рисунке. Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла. Изобразите линии уровня потенциала (эквипотенциальные линии). Проиллюстрируйте ортогональность линий уровня и векторных линий. Зафиксируйте точки A и B на какой-либо векторной линии. Вычислите работу поля вдоль этой линии.

С формально-математической точки зрения, векторные поля задают векторными функциями:
Для "плоского"случая - это векторная функция $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, которая различным точкам $M(x,y)$ плоскости XOY* ставит в соответствие несвободные векторы.
*Далее по умолчанию считаем, что все дела происходят в декартовой системе координат

С трёхмерным пространством аналогично
$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ - здесь каждой допустимой точке $M(x,y,z)$ пространства ставится в соответствие вектор $\vec{F}(x,y,z)$ с началом в данной точке.
"Допустимость"определяется областями определения функций $P(x,y,z)\vec{i}$, $Q(x,y,z)\vec{j}$, $R(x,y,z)\vec{k}$, и если каждая из них определена на всех x, y и z, то векторное поле будет задано во всём пространстве.

Интегральной кривой для поля $F(r)$ называется кривая $r = r(t)$, касательная к которой во всех точках кривой совпадает со значением поля:
$\frac{dr}{dt} = F(r(t))$

Примем:
$P(x;y) = 1$
$Q(x;y) = -\frac{1}{y^2}$
$R(x;y) = 0 \Rightarrow$ можем рассматривать плоское поле
Конечное уравнение поля
$\vec{F}(x;y) = \vec{i} - \frac{1}{y^2}\vec{j}$
$\vec{F} = (1; -\frac{1}{y^2}; 0)$

1.1.1 Проверка потенциальности поля

$]\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \Rightarrow$ поле потенциально ; $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$
$\frac{d(1)}{dy} = 0$, $\frac{d(-\frac{1}{y^2})}{dx} = 0$
$0 = 0 \Rightarrow$ поле потенциально

1.1.2 Уравнение силовых (векторных) линий

Для нахождения силовых линий решим уравнение: $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$
$$\begin{cases} dz = 0 \Rightarrow z = c_2 \text{ - семейство плоскостей } \parallel XOY \\ \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\frac{1}{y^2}} \end{cases}$$
$dx = -y^2 dx$
$\int dx = -\int y^2 dy$
C^* - const
$x = -\frac{y^3}{3} + C^* | * 3$; $3*\text{const} = \text{const}$
$3x = -y^3 + 3C^*$; $3C^* = \text{const} = C_1$
$3x + y^3 = C_1$
$y = \sqrt[3]{C_1 - 3x}$, $y \neq 0$
Уравнение векторных линий:

$$\begin{cases} 3x + y^3 = C_1 \\ z = C_2 \end{cases}$$

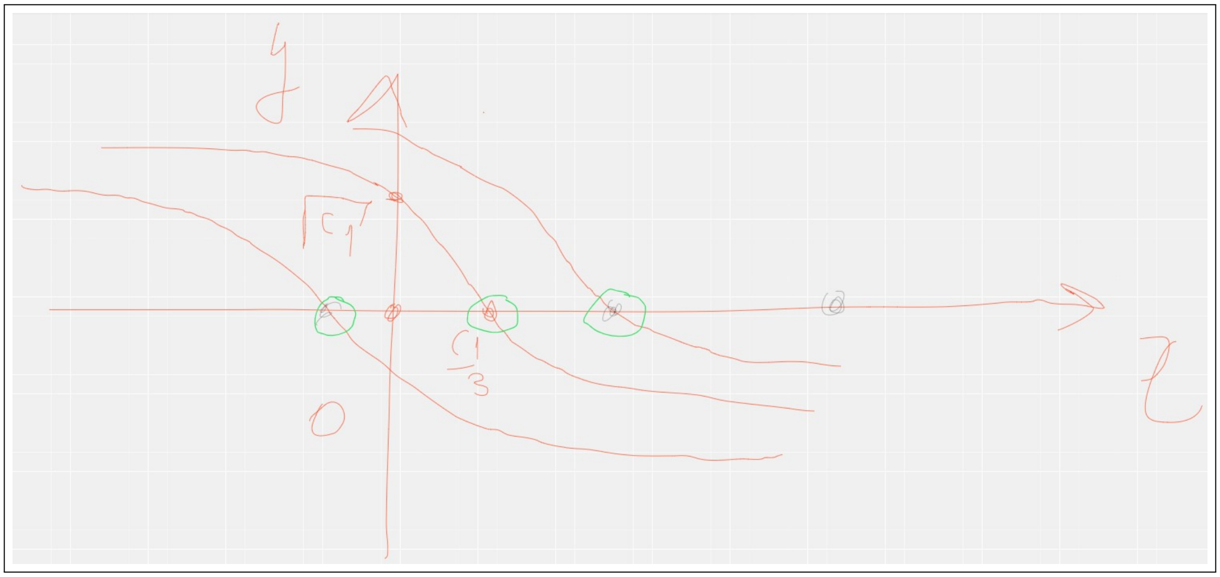
1.1.3 Изображение векторных линий

Начнем с изображения линий на одной выбранной плоскости ($z = 0$)
$y = \sqrt[3]{C_1 - 3x}$
Исследуем этот график:

1. Поиск точек пересечения с осями
$y \neq 0$; $\sqrt[3]{C_1 - 3x} \neq 0$; $x \neq \frac{C_1}{3}$
$x = 0$; $y = \sqrt[3]{C_1}$

2. $y > 0$, $x > \frac{C_1}{3}$
$y < 0$, $x < \frac{C_1}{3}$
$D(y) \in R$ - исключая такие иксы, при которых $y = 0$
$E(y) \in R$
3. Исследование производной
$y' = (\sqrt[3]{C_1 - 3x})' = ((C_1 - 3x)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(C_1 - 3x)^{-\frac{2}{3}} * (-3) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(C_1 - 3x)^2}}$
$y' = 0$; $x \in \emptyset$
y' не существует - $C_1 - 3x \neq 0$; $x = \frac{C_1}{3}$

Получаем, что граф сильно зависит от $x = \frac{C_1}{3}$ - точка перегиба куба, получаем семейство движущихся корней с выколотым множеством точек, при которых $y = 0$



Если рисовать в 3-й форме:

1.1.4 Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла

Поиск потенциала

$U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} F_x(x,y_0,z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x,y,z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x,y,z)dz + C$

Функции F_x и F_z непрерывны во всех точках пространства поля $\Rightarrow$ можем взять начальную точку $(0; y_0; 0)$

$U(x,y,z) = \int\limits_{0}^{x} 1da + \int\limits_{y_0}^{y} -\frac{1}{b^2}db + C = a|_0^x - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{db}{b^2} + C = x - 0 - (-\frac{1}{b}|_{y_0}^{y}) + C = x + \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} + C = x + \frac{1}{y} + C \leftarrow$ возьмём координату начальной точки $y_0 \to \infty \Rightarrow \frac{1}{y_0} \to 0 \Rightarrow$ можем пренебречь значением $\frac{1}{y_0}$

1.1.5 Изобразите линии уровня потенциала. Проиллюстрируйте ортогональность линий уровня и векторных линий

Чтобы линия была эквипотенциальной необходимо, чтобы вдоль этой линии (то есть для каждой ее точки) значение потенциала было постоянным

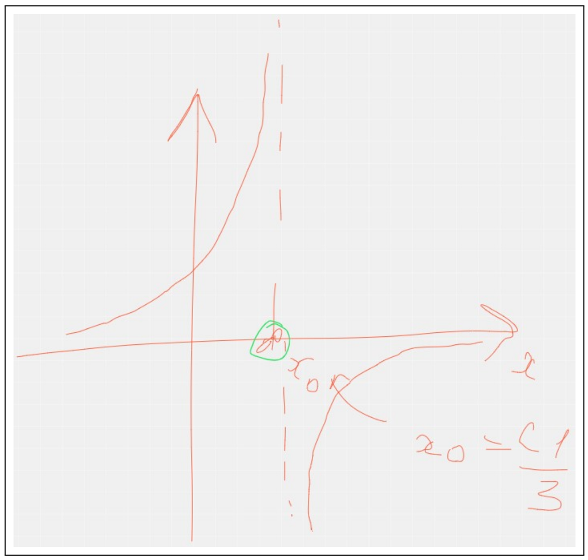
$x + \frac{1}{y} = const$

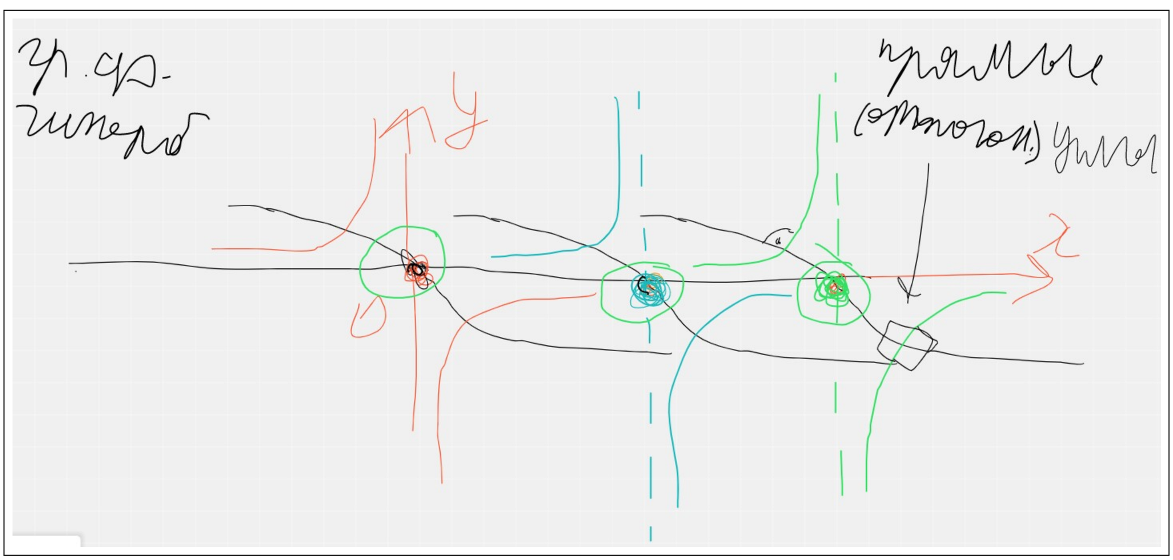
$\frac{1}{y} = \frac{const}{1} - x$

$y = \frac{1}{const - x_0}$

Из уравнения очевидно, что график функции - гипербола

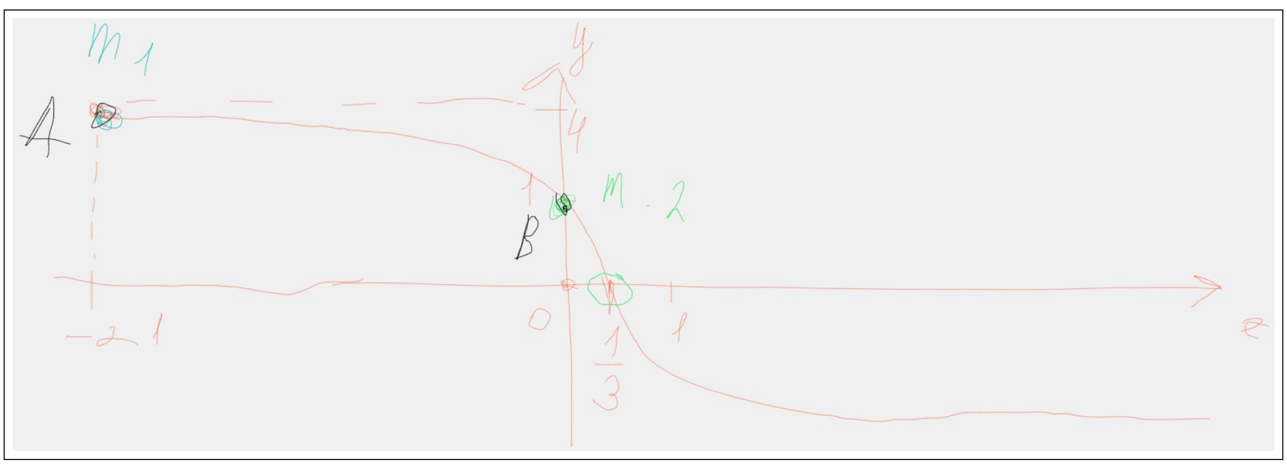
Аналогично построим эквипотенциальные линии при нескольких константных значениях правой части равенства, вместе с векторными для демонстрации их ортогональности





1.1.6 Зафиксируйте точки A и B на какой-либо векторной линии. Вычислите работу поля вдоль этой линии

Берём точку $B(0,1,0)$, а так как точка $B(0,1,0)$ или $(0,1) \in y \Rightarrow 1 = \sqrt[3]{C_1 - 0} \Rightarrow C_1 = 1$
$y = \sqrt[3]{C_1 - 3x}$
$y = \sqrt[3]{1 - 3x}$
$1 - 3x = t^3$
$x = \frac{1-t^3}{3} \in z$, где $t = 4$
$x_1 = \frac{1-64}{3} = -21$
$y_1(x) = \sqrt[3]{1+63} = \sqrt[3]{64} = 4$
Вторая точка $A(-21,4,0)$



$y = \sqrt[3]{1-3x}$
$dy = -\frac{1}{(1-3x)^{\frac{2}{3}}}dx$
Работа между двумя точкам $(-21,4,0)$ и $(0,1,0)$ по кривой $y = \sqrt[3]{1-3x}$
Будем интегрировать по $dx \Rightarrow$ пределы интегрирования $-21 \leq x \leq 0$
$A = \int\limits_L 1dx - \frac{1}{y^2}dy = \int\limits_{-21}^{0} dx - \frac{1}{(1-3x)^{\frac{2}{3}}} * (-\frac{1}{(1-3x)^{\frac{2}{3}}}dx) = \int\limits_{-21}^{0} 1 + \frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}dx} = x + \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}|_{-21}^{0} = 1 - (-21 + \frac{1}{4}) = 22 - \frac{1}{4} = \frac{87}{4}$
$U = x + \frac{1}{y}$
$U(B) = 0 + 1 = 1$
$U(A) = -21 + \frac{1}{4}$

$A = U(B) - U(A) = 1 - (-21 + \frac{1}{4}) = 22 - \frac{1}{4} = \frac{87}{4}$
Значения, полученные при вычислении работы вдоль выбранной векторной линии с помощью криволинейного интеграла и разности потенциалов одинаковы и численно равны $\frac{87}{4}$

1.1.7 Выводы

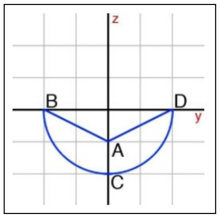
1. Доказали, что наше изначальное поле потенциально, поскольку ротор поля равен 0
2. Построили графики и нашли уравнение векторных линий. Уравнения:
$\begin{cases} 3x + y^3 = C_1 \\ z = C_2 \end{cases}$
Вид графика - множество кубических корней
3. При помощи криволинейного интеграла нашли функцию потенциала поля $U(x, y, z) = x + \frac{1}{y} + C$
4. Нашли уравнения и построили графики эквипотенциальных линий. Из уравнения графика получили, что график линии - гипербола. Соотнесли графики векторных линий и эквипотенциальных линий. По графикам и по свойствам функций продемонстрировали, что данные линии ортогональны
5. Произвольно выбрали 2 точки, принадлежащие произвольной векторной линии, посчитали работу поля между этими точками при помощи криволинейного интеграла и разности потенциалов. Получили одинаковые значения, это ещё раз доказывает потенциальность (консервативность) силы поля

2 Поток векторного поля

2.1 Дано тело , ограниченное следующими поверхностями:

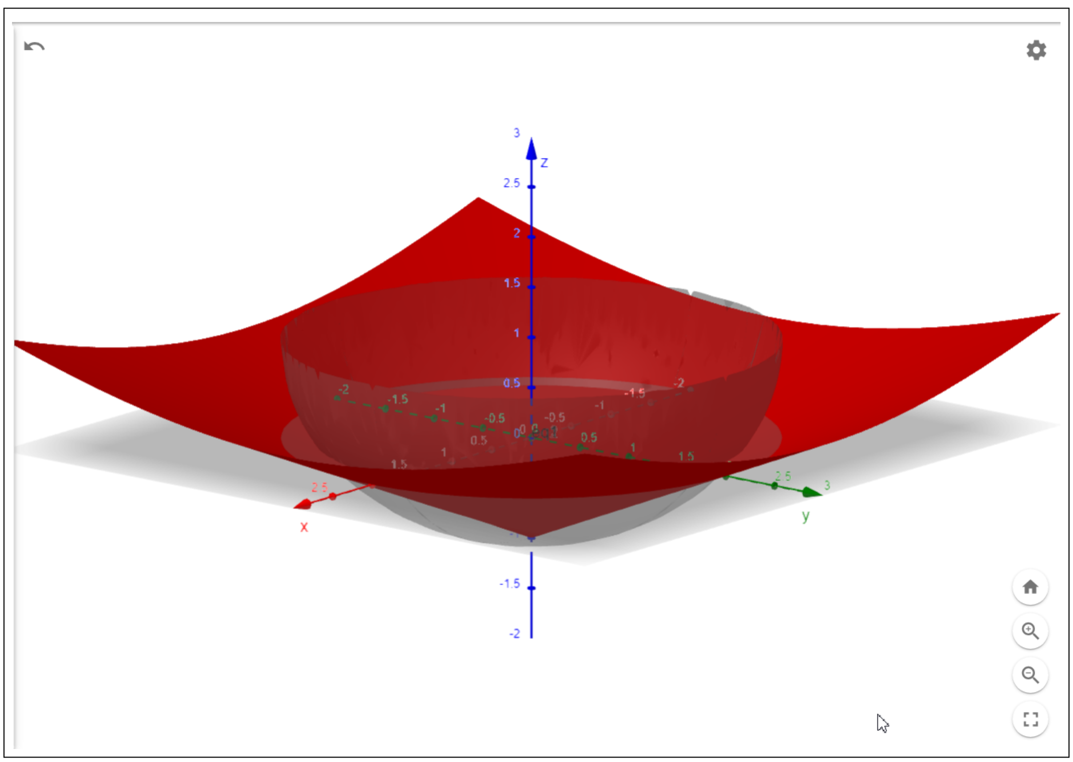
$z + \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0, 2(z+1) - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

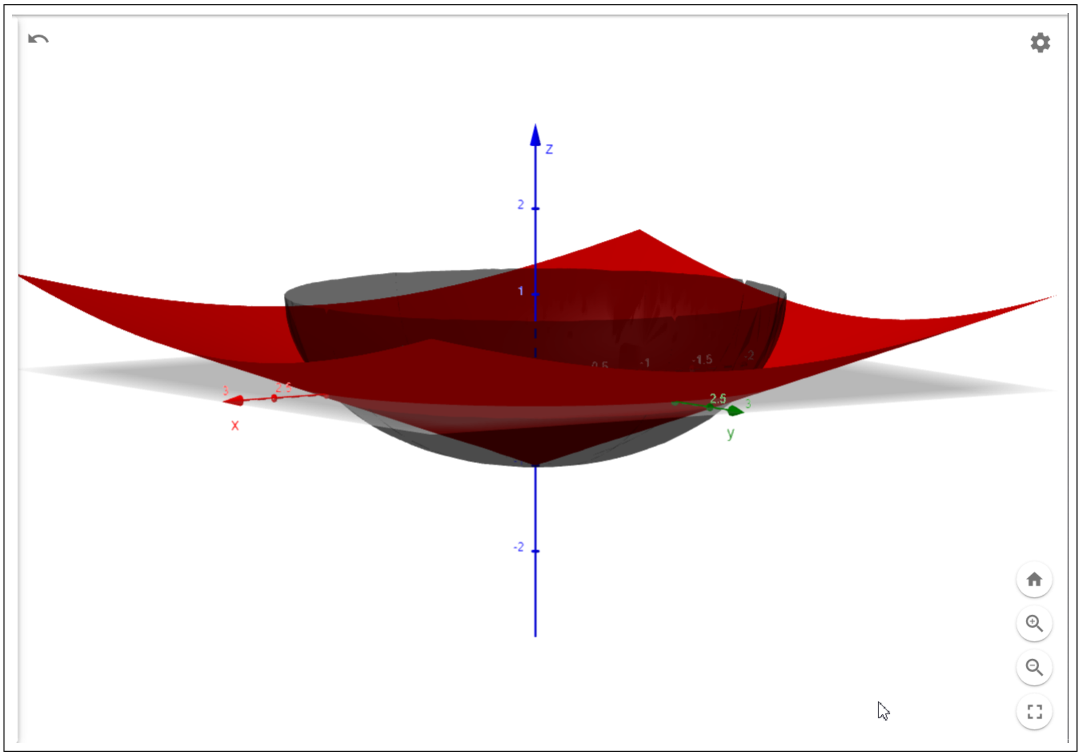
На рисунке представлено сечение тела координатной плоскостью Oyz.
Изобразите тело на графике в пространстве.
Вычислите поток поля $\vec{a} = (\sin yz)\vec{i} + (xe^{2x^2} + e^z)\vec{j} - z\vec{k}$ через боковую поверхность тела T, образованную вращением дуги BCD вокруг оси Oz, в направлении внешней нормали поверхности тела .



Ссылка на geogebra.org, где был построен график

а)





b)

$\Pi = \iiint\limits_{V} div\vec{a}dV$

$div\vec{a} = \frac{\partial(\sin yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xe^{2x^2}+e^z)}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z} = 0 + 0 - 1 = -1$

$x = \rho\cos\varphi\sin\Theta$

$y = \rho\sin\varphi\sin\Theta$

$z = \rho\cos\Theta$

$dxdydz = \rho^2\sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta$

$\Pi_1 = -1\iiint\limits_{V} dV = -\iiint\limits_{V} dxdydz = -\iiint\limits_{V} \rho^2\sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta = -\int\limits_{0}^{2}\rho^2 d\rho\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\Theta d\Theta\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi = -(\frac{\rho^3}{3}|_0^2 * (-\cos\Theta|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}) * (\varphi|_0^{2\pi})) = -(\frac{8}{3} * (-(-1-0) * (2\pi - 0))) = -\frac{16\pi}{3}$

Π_2 - через круг $x^2 + y^2 = 4$

$\vec{n} = (0, 0, 1)$

$\Pi_2 = \iint\limits_{S} (\vec{a}, \vec{n})dS = \iint\limits_{S} -zdS = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} -zdy = -2z\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx = -4\pi z$

Для $z = 0 : \Pi_2 = 0$

Ответ: $\Pi = \Pi_1 - \Pi_2 = -\frac{16\pi}{3}$