Математический анализ

Модуль 3

2021 год

«Интеграл функции одной переменной»

Иванов Сергей, Иванов Алексей, Титов Даниил

M3104

Май 2021

ИТМО

Содержание

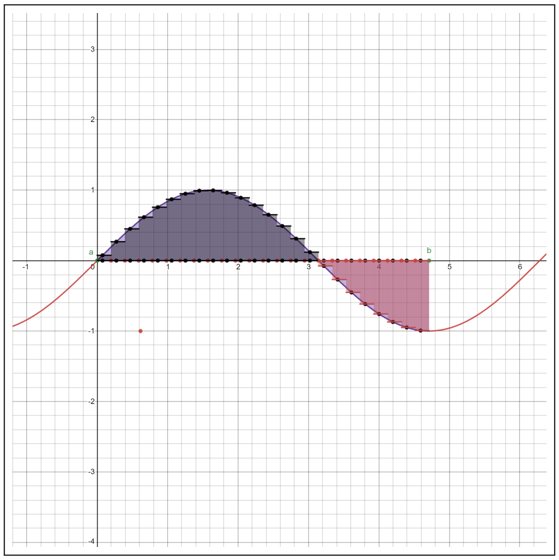
Код отчёта на Overleaf (Latex)

1 Интегральная сумма

1.1 Исследуйте интегральную сумму функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$

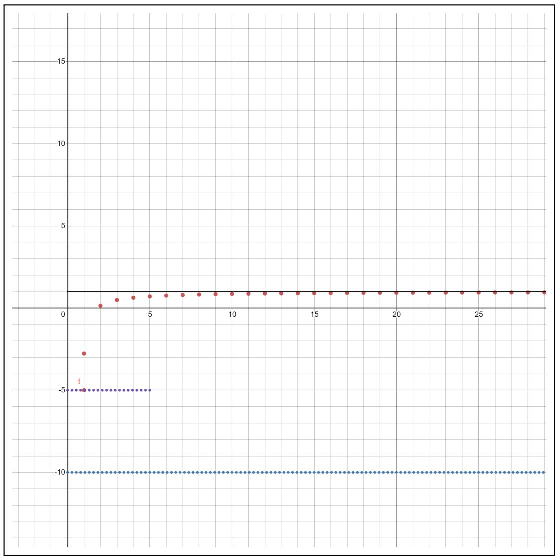
$f(x) = \sin x$
$[a, b] = [0; 3\pi/2]$

1.1.1 Интегральная сумма



https://clck.ru/UjTMB

1.1.2 Последовательность интегральных сумм



https://clck.ru/V6j8C

Примеры вычислений:

$h = \frac{b-a}{n}$

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(a + (k - t) * h) * h$

$t = 0$:

1. $n = 1$: $h = 4.71238898038$, $\sum\limits_{k=1}^{n} = 4.71238898038$
2. $n = 10$: $h = 0.471238898038$, $\sum\limits_{k=1}^{n} = 0.745806187809$
3. $n = 50$: $h = 0.0942477796077$, $\sum\limits_{k=1}^{n} = 0.952135780258$

$t = 0.5$:

1. $n = 1$: $h = 4.71238898038$, $\sum\limits_{k=1}^{n} = 3.33216220362$
2. $n = 10$: $h = 0.471238898038$, $\sum\limits_{k=1}^{n} = 1.00931303637$
3. $n = 50$: $h = 0.0942477796077$, $\sum\limits_{k=1}^{n} = 1.00037020607$

$t = 1$:

1. $n = 1$: $h = 4.71238898038$, $\sum\limits_{k=1}^{n} = 0$
2. $n = 10$: $h = 0.471238898038$, $\sum\limits_{k=1}^{n} = 1.21704508585$
3. $n = 50$: $h = 0.0942477796077$, $\sum\limits_{k=1}^{n} = 1.04638355987$

Все эти опыты можно повторить на нашем графике в desmos, и увидеть эти же результаты там.

Вывод:

С увеличением n увеличивается точность это можно заметить из примеров выше.

2 Несобственный интеграл

2.1 Исследуйте несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α

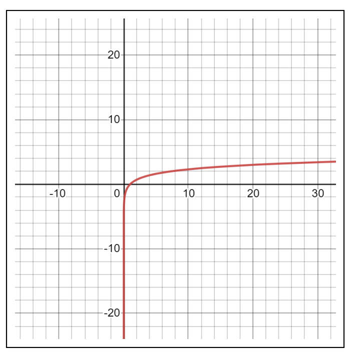
$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$

2.1.1 Определите особую точку несобственного интеграла. Есть ли другие особые точки? К какому типу относится данный несобственный интеграл? Является ли подынтегральная функция неотрицательной на промежутке интегрирования?

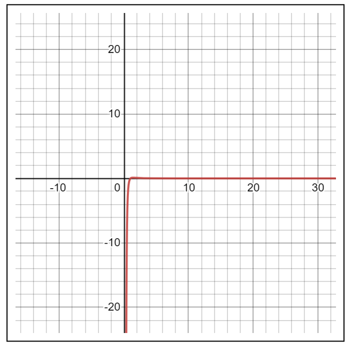
Подынтегральная функция является неотрицательной на промежутке интегрирования
Ещё особая точка: $x = 0$, но она не входит в предел интегрирования
$D : x > 0$
$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x^a} = \frac{0}{1} = 0$

Тип интеграла:
1) Первого рода, так как пределы интегрирования от до $+\infty$
2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{\ln x}{x^a} dx$
$a = 0$
$\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \ln x dx = \lim\limits_{A\to+\infty} (\ln xx - x|_1^A) = \lim\limits_{A\to+\infty} (A(\ln A - 1) + 1) = \lim\limits_{A\to+\infty} (A(\ln A - 1)) + \lim\limits_{A\to+\infty} (1) = \lim\limits_{A\to+\infty} (A) * \lim\limits_{A\to+\infty} (\ln A - 1) + 1 = +\infty$
Для некоторого a:
$\lim\limits_{A\to+\infty} (\frac{-\ln x}{(a-1)x^{(a-1)}} - \frac{1}{(a-1)^2 x^{a-1}}|_1^A) = \lim\limits_{A\to+\infty} (\frac{-\ln A}{(a-1)A^{a-1}} - \frac{1}{(a-1)^2 A^{a-1}} - (\frac{-\ln 1}{(a-1)^2 * 1} - \frac{1}{(a-1)^2 * 1})) = \frac{1}{(a-1)^2}$
В зависимости от a, может быть и сходящимся, и расходящимся

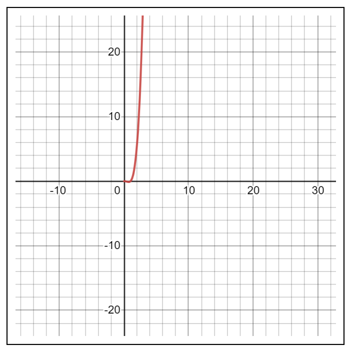
2.1.2 Постройте графики подынтегральной функции при нескольких значениях параметра



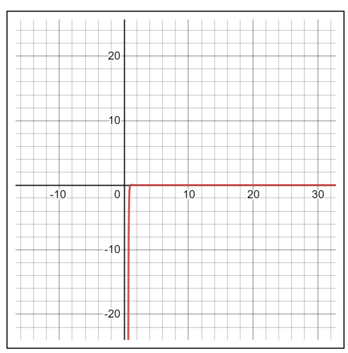
$\alpha = 0$



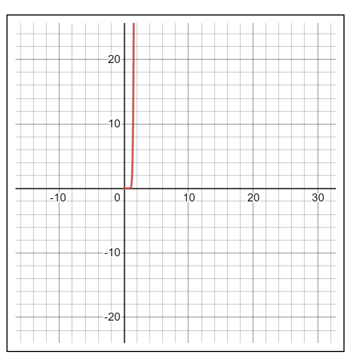
$\alpha = 3$



$\alpha = -3$



$\alpha = 10$



$\alpha = -10$

2.1.3 Есть ли значение параметра, при котором легко находится первообразная? Если есть, то найдите её и сделайте вывод о сходимости интеграла

При $\alpha = 0$:
$\int \frac{\ln x}{x^\alpha}dx = \int \frac{\ln x}{x^0}dx = \int \ln x dx = uv - \int udv = x \ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$
$f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty =>$ расходится

При $\alpha = 1$:
$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$
При $\alpha \in Z$: берётся по частям

2.1.4 Сформулируйте признаки сравнения для определения сходимости несобственных интегралов

Признаки сравнения:
Первый признак сравнения:
Если на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывные $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию:
$0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$
Второй признак сравнения:
Если существует предел $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$:
$(0 < k < \infty, f(x) > 0$ и $g(x) > 0)$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся
Но использовать второй признак сравнения нельзя, так как k является либо нулём, либо бесконечностью, а должно быть каким-то числом. Из-за этого мы должны использовать только первый пункт сравнения, который этим же пунктом и доказывается

2.1.5 Оцените сверху и снизу трансцендентную функцию (логарифм или арктангенс) для сравнения исходного интеграла с интегралом вида $\int\limits_a^b \frac{1}{x^\beta}dx$. Установите, при каких значениях параметра это сравнение позволяет сделать вывод о сходимости интеграла

Траснцедентная функция: $\ln x$
$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = \infty =>$ сверху не ограничена
$\lim\limits_{x\to 1+}(\ln x) = 0$
Интеграл для сравнения: $- \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}dx$
Рассмотрим сходимость интеграла:
$\int\limits_1^{+\infty} \ln x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \ln x dx = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln x x - x|_1^b) = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b b - b + 1) = \lim\limits_{b\to+\infty}(b(\ln b - 1) + 1) = \infty =>$ интеграл расходится
$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x^\beta}dx$
Рассмотрим возможные значения параметра β:

1. $\beta < 0: \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x^\beta}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{x^{-\beta+1}}{-\beta+1}|_1^b) = \lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{-\beta+1} * (b^{-\beta+1} - 1)) = \infty$
2. $\beta = 0: \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x^\beta}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}(x|_1^b) = \lim\limits_{b\to+\infty}(b - 1) = \infty$
3. $\beta = 1: \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x^\beta}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln|x||_1^b) = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln|b| - \ln|1|) = \infty$
4. $\beta \ge 2: \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x^\beta}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{-1}{(\beta-1)x^{\beta-1}}|_1^b) = \lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{-1}{\beta-1} * (\frac{1}{b^{\beta-1}} - 1)) = \frac{1}{\beta-1}$

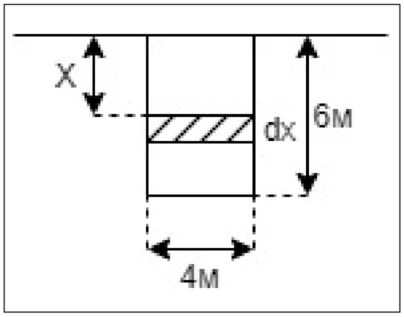
$x \in [1; +\infty]$
$\ln x < \frac{1}{x^\beta}$, $\beta \le -1$, $\ln x < \frac{1}{x^\beta}$, $\ln x$ - расх. => $\frac{1}{x^\beta}$ - расх.
$\ln x = \frac{1}{x\beta}$ X
$\ln x \ge \frac{1}{x^\beta}$ - какое β не возьми, около $x = 1$ $\frac{1}{x^\beta} > \ln x$ => не выполняется условие сравнения

2.1.6 Вспомните, как ведёт себя интеграл при значении параметра α, при котором легко находится первообразная. Используйте этот интеграл как эталон для сравнения с интегралом при другом параметре α

$a = 0$
$f_1 = \ln x$ - расходящаяся
$a = 1$
$f_2 = \frac{\ln x}{x}$
$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_1^A \frac{\ln x}{x} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_1^A \ln x d(\ln x) = \lim\limits_{A \to +\infty} (\frac{\ln^2 x}{2}|_1^A) = \lim\limits_{A \to +\infty} \frac{\ln^2 A}{2} = \infty$ - расходящаяся
$f_2 \le f_1$
$0 \le \frac{\ln x}{x} \le \ln x$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2}{f_1} = \frac{\ln x}{x \ln x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1}{f_2} = +\infty$

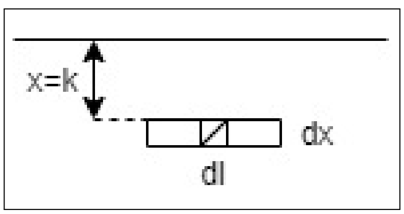
3 Приложения определенного интеграла

3.1 Найти давление воды на поверхность цилиндра диаметром 4м и высотой 6м, если его верхнее основание находится на уровне свободной поверхности воды.



ρ - плотность жидкости
g - гравитационная постоянная, ускорение свободного падения
x - глубина погружения
S - площадь, на которую действует сила давления
p - давление

$p = \rho g x S$ - формула для давления на глубине x, действующее на площадь S
$dp = \rho g x dS = p_1$



$dS_1 = dx * dl$
$dp_1 = \rho g k * dx * dl$
$p_1 = \int\limits_0^{2*2\pi} \rho g k * dx * dl = \rho g k * dx \int\limits_0^{2*2\pi} dl = 4\pi \rho g k * dx$
$p = \int\limits_0^6 4\pi \rho g x * dx = 4\pi \rho g \int\limits_0^6 x * dx = 4\pi \rho g \frac{x^2}{2}|_0^6 = 72\pi \rho g$
$g = 9.81$
$72\pi \rho g \approx 2.21897 * 10^6$

4 Приближенные вычисления определенного интеграла

4.1 Вычислить значения интеграла $I_0^2 = \int\limits_0^2 f(x)dx$ по формулам трапеций и парабол при $h = 1$, сравнить полученные результаты с точным значением.

а) $f(x) = 1 + x$:

Метод трапеций:
Интервал $[a; b] = [0; 2], h = 1$
Интервал длины "h"$[0; 1], [1; 2]$
$x_0 = 0$
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$f(x_0) = 1$
$f(x_1) = 2$
$f(x_2) = 3$
1) $\int\limits_0^2 f(x) \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{2}(1 + 4 + 3) = 4$
2) *Метод парабол:*
Также разбиваем на отрезки
$x_{2i-2} = x_0 = 0$
$x_{2i-1} = x_1 = 1$
$x_{2i} = x_2 = 2$
$\int\limits_0^2 f(x) \approx \frac{h}{3}(f(0) + 4f(1) + f(2)) = \frac{1}{3}(1 + 8 + 3) = 4$
Вывод конечной формулы:

Можно переходить к нахождению интеграла $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right) dx$.

Видно, что

$f(x_{2i-2}) = f(0) = a_i \cdot 0^2 + b_i \cdot 0 + c_i = c_i$
$f(x_{2i-1}) = f(h) = a_i \cdot h^2 + b_i \cdot h + c_i$
$f(x_{2i}) = f(0) = 4a_i \cdot h^2 + 2b_i \cdot h + c_i$

Для осуществления последнего перехода необходимо использовать неравенство вида

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right) dx = \int_0^{2h} \left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right) dx =$$
$$= \left(\frac{a_i x^3}{3} + \frac{b_i x^2}{2} + c_i x\right)\Big|_0^{2h} = \frac{8a_i h^3}{3} + 2b_i h^2 + 2c_i h =$$
$$= \frac{h}{3}\left(8a_i h^2 + 6b_i h + 6c_i\right) = \frac{h}{3}\left(f\left(x_{2i-2}\right) + 4f\left(2_{2i-1}\right) + f\left(x_{2i}\right)\right)$$

Значит, получаем формулу, используя метод парабол:

$$\int_a^b f\left(x\right) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right) dx =$$
$$= \sum_{i=1}^n \frac{h}{3}\left(f\left(x_{2i-2}\right) + 4f\left(x_{2i-1}\right) + f\left(x_{2i}\right)\right) =$$
$$= \frac{h}{3}\left(\begin{array}{c} f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \ldots + \\ + f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \end{array}\right) =$$
$$= \frac{h}{3}\left(f\left(x_0\right) + 4\sum_{i=1}^n f\left(x_{2i-1}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{2i}\right) + f\left(x_{2n}\right)\right)$$

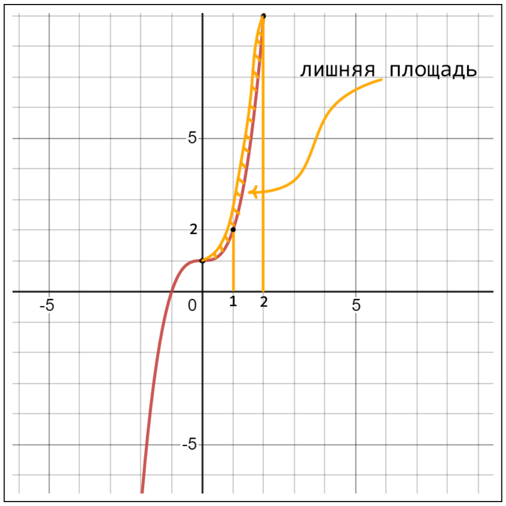
3) *Подсчёт интеграла напрямую:*
$\int\limits_0^2 (x + 1)dx = \frac{x^2}{2} + x|_0^2 = \frac{4}{2} + 2 - 0 = 4$

b) $f(x) = 1 + x^3$

$x_0 = 0$
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$

Аналогично пункту (а):

1) $\int\limits_0^2 \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{2}(1 + 4 + 9) = 7$ - большая погрешность, так как много добавленной (добавочной) лишней площади



2) $\int\limits_0^2 = \frac{h}{3}(f(0) + 4f(1) + f(2)) = \frac{1}{3}(1 + 8 + 9) = 6$

3) $\int\limits_0^2 = \int\limits_0^2 (x^3 + 1)dx = \frac{x^4}{4} + 4|_0^2 = \frac{16}{4} + 2 = 6$

Вывод:
Погрешность вычисления методом трапеций из-за того, что появляется лишняя площадь, а если использовать метод парабол, то мы получаем довольно высокую точность, так как виды функций кубической и обычной парабол похожи.