

Математический анализ

Модуль 3

2021 год

«Интеграл функции одной переменной»

Иванов Сергей, Иванов Алексей, Титов Даниил

M3104

Май 2021

ИТМО

Содержание

1	Интегральная сумма	3
1.1	Исследуйте интегральную сумму функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$	3
2	Несобственный интеграл	4
2.1	Исследуйте несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α	4
2.1.1	Определите особую точку несобственного интеграла. Есть ли другие особые точки? К какому типу относится данный несобственный интеграл? Является ли подынтегральная функция неотрицательной на промежутке интегрирования?	4
2.1.2	Постройте графики подынтегральной функции при нескольких значениях параметра	4
2.1.3	Есть ли значение параметра, при котором легко находится первообразная? Если есть, то найдите её и сделайте вывод о сходимости интеграла	6
2.1.4	Сформулируйте признаки сравнения для определения сходимости несобственных интегралов	6
2.1.5	Оцените сверху и снизу трансцендентную функцию (логарифм или арктангенс) для сравнения исходного интеграла с интегралом вида $\int_a^b \frac{1}{x^\beta} dx$. Установите, при каких значениях параметра это сравнение позволяет сделать вывод о сходимости интеграла	6
2.1.6	Вспомните, как ведёт себя интеграл при значении параметра α , при котором легко находится первообразная. Используйте этот интеграл как эталон для сравнения с интегралом при другом параметре α	6
2.1.7	Запишите ответ	7
3	Приложения определенного интеграла	8
3.1	Найти давление воды на поверхность цилиндра диаметром 4м и высотой 6м, если его верхнее основание находится на уровне свободной поверхности воды.	8
4	Приближенные вычисления определенного интеграла	9
4.1	Вычислить значения интеграла $I_0^2 = \int_0^2 f(x)dx$ по формулам трапеций и парабол при $h = 1$, сравнить полученные результаты с точным значением.	9

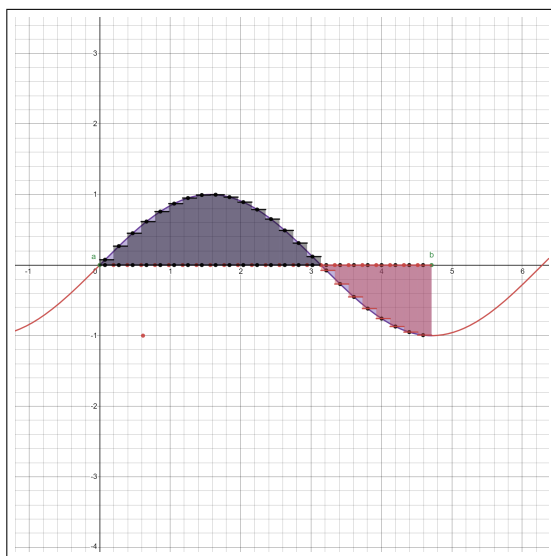
1 Интегральная сумма

1.1 Исследуйте интегральную сумму функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$

$$f(x) = \sin x$$
$$[a, b] = [0; 3\pi/2]$$

Что мы сделали:

- Изобразили график функции
- Изобразили криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции, вертикальными прямыми, проходящими через концы отрезка, и осью Ox
- Разбили отрезок на n элементарных отрезков, точками отметьте их концы на рисунке
- Выбрали по точке внутри каждого элементарного отрезка, отметили их на рисунке
- Вычислили значения функции в выбранных точках, отметили их на рисунке
- Изобразили ступенчатую фигуру на основе выбранного разбиения и точек внутри элементарных отрезков



<https://clck.ru/UjTMB>

2 Несобственный интеграл

2.1 Исследуйте несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$$

2.1.1 Определите особую точку несобственного интеграла. Есть ли другие особые точки? К какому типу относится данный несобственный интеграл? Является ли подынтегральная функция неотрицательной на промежутке интегрирования?

Особая точка: $x = 1$, так как значение функции в ней всегда равно 0

Подынтегральная функция не является неотрицательной на промежутке интегрирования

Ещё особая точка: $x = 0$, но она не входит в предел интегрирования

$D : x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{0}{1} = 0$$

Тип интеграла:

1) Первого рода, так как пределы интегрирования от до $+\infty$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$$

$$a = 0$$

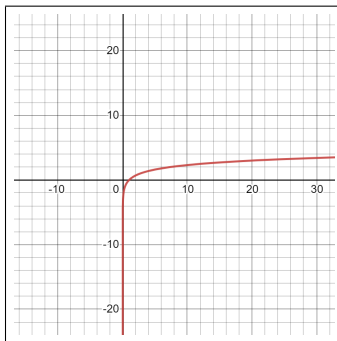
$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \ln x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln x x - x|_1^A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} (A(\ln A - 1)) + \lim_{A \rightarrow +\infty} A \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A - 1) + 1 = +\infty$$

Для некоторого a :

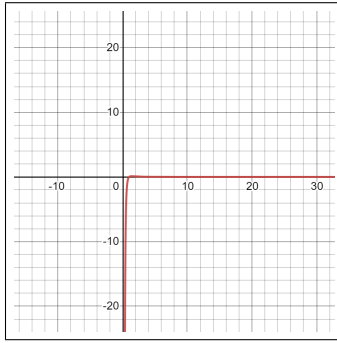
$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\ln x}{(a-1)x^{a-1}} - \frac{1}{(a-1)^2 x^{a-1}} \Big|_1^A \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln A}{(a-1)A^{a-1}} - \frac{1}{(a-1)^2 A^{a-1}} - \left(\frac{-\ln 1}{(a-1)^2 \cdot 1} - \frac{1}{(a-1)^2 \cdot 1} \right) \right) = \frac{1}{(a-1)^2}$$

В зависимости от a , может быть и сходящимся и расходящимся

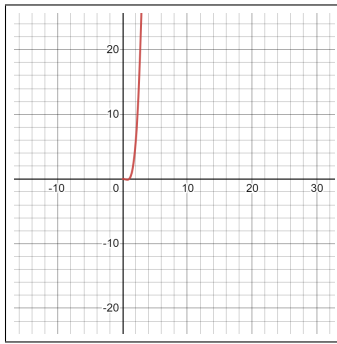
2.1.2 Постройте графики подынтегральной функции при нескольких значениях параметра



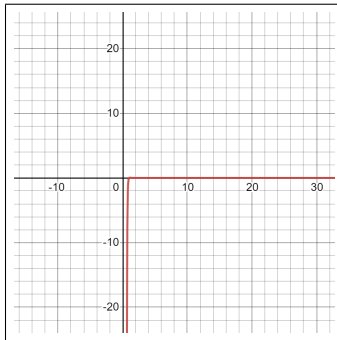
$$\alpha = 0$$



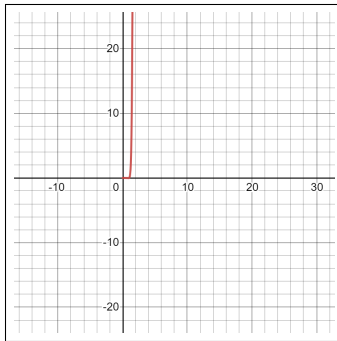
$$\alpha = 3$$



$$\alpha = -3$$



$$\alpha = 10$$



$$\alpha = -10$$

2.1.3 Есть ли значение параметра, при котором легко находится первообразная? Если есть, то найдите её и сделайте вывод о сходимости интеграла

При $\alpha = 0$:

$$\int \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \int \frac{\ln x}{x^0} dx = \int \ln x dx = uv - \int u dv = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow \text{расходится}$$

При $\alpha = 1$:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

При $\alpha \in \mathbb{Z}$: берётся по частям

2.1.4 Сформулируйте признаки сравнения для определения сходимости несобственных интегралов

Признаки сравнения:

Первый признак сравнения:

Если на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывные $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию:

$0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$

Второй признак сравнения:

Если существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$:

($0 < k < \infty$, $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$), то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся

2.1.5 Оцените сверху и снизу трансцендентную функцию (логарифм или арктангенс) для сравнения исходного интеграла с интегралом вида $\int_a^b \frac{1}{x^\beta} dx$. Установите, при каких значениях параметра это сравнение позволяет сделать вывод о сходимости интеграла

Рассмотрим возможные значения параметра β :

1. $\beta \in \mathbb{Z}$

$$2. \beta < 0 : \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\beta} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\beta+1}}{-\beta+1} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-\beta+1} * (b^{-\beta+1} - 1) \right) = \infty$$

$$3. \beta = 0 : \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\beta} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (x \Big|_1^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (b - 1) = \infty$$

$$4. \beta = 1 : \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\beta} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln |x| \Big|_1^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln |b| - \ln |1|) = \infty$$

$$5. \beta \geq 2 : \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\beta} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{(\beta-1)x^{\beta-1}} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\beta-1} * \left(\frac{1}{b^{\beta-1}} - 1 \right) \right) = \frac{1}{\beta-1}$$

$x \in [1; +\infty]$

$\ln x < \frac{1}{x^\beta}$, $\beta \leq -1$, $\ln x < \frac{1}{x^\beta}$, $\ln x$ - расх. $\Rightarrow \frac{1}{x^\beta}$ - расх.

$\ln x = \frac{1}{x^\beta}$ X

$\ln x \geq \frac{1}{x^\beta}$ - какое β не возьми, около $x = 1$ $\frac{1}{x^\beta} > \ln x \Rightarrow$ не выполняется условие сравнения

2.1.6 Вспомните, как ведёт себя интеграл при значении параметра α , при котором легко находится первообразная. Используйте этот интеграл как эталон для сравнения с интегралом при другом параметре α

$a = 0$

$f_1 = \ln x$ - расходящаяся

$a = 1$

$f_2 = \frac{\ln x}{x}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \ln x d(\ln x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^A \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 A}{2} = \infty - \text{расходящаяся}$$

$$f_2 \leq f_1$$

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \ln x$$

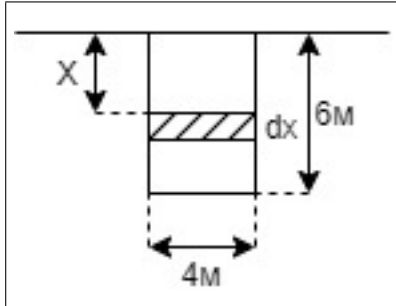
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2}{f_1} = \frac{\ln x}{x \ln x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1}{f_2} = +\infty$$

2.1.7 Запишите ответ

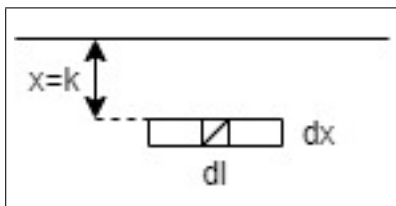
3 Приложения определенного интеграла

3.1 Найти давление воды на поверхность цилиндра диаметром 4м и высотой 6м, если его верхнее основание находится на уровне свободной поверхности воды.



$$p = \rho g x S$$

$$dp = \rho g x dS = p_1$$



$$dS_1 = dx * dl$$

$$dp_1 = \rho g k * dx * dl$$

$$p_1 = \int_0^{2*2\pi} \rho g k * dx * dl = \rho g k * dx * \int_0^{2*2\pi} dl = 4\pi \rho g k * dx$$

$$p = \int_0^6 4\pi \rho g x * dx = 4\pi \rho g \int_0^6 x * dx = 4\pi \rho g \frac{x^2}{2} \Big|_0^6 = 72\pi \rho g$$

$$g = 9.81$$

$$72\pi \rho g \approx 2.21897 * 10^6$$

4 Приближенные вычисления определенного интеграла

4.1 Вычислить значения интеграла $I_0^2 = \int_0^2 f(x)dx$ по формулам трапеций и парабол при $h = 1$, сравнить полученные результаты с точным значением.

а) $f(x) = 1 + x$:

Метод трапеций:

Интервал $[a; b] = [0; 2], h = 1$

Интервал длины "h" $[0; 1], [1; 2]$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$f(x_0) = 1$$

$$f(x_1) = 2$$

$$f(x_2) = 3$$

$$1) \int_0^2 f(x) \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{2}(1 + 4 + 3) = 4$$

2) *Метод парабол:*

Также разбиваем на отрезки

$$x_{2i-2} = x_0 = 0$$

$$x_{2i-1} = x_1 = 1$$

$$x_{2i} = x_2 = 2$$

$$\int_0^2 f(x) \approx \frac{h}{3}(f(0) + 4f(1) + f(2)) = \frac{1}{3}(1 + 8 + 3) = 4$$

Вывод конечной формулы:

Можно переходить к нахождению интеграла $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (a_i x^2 + b_i x + c_i) dx$.

Видно, что

$$f(x_{2i-2}) = f(0) = a_i \cdot 0^2 + b_i \cdot 0 + c_i = c_i$$

$$f(x_{2i-1}) = f(h) = a_i \cdot h^2 + b_i \cdot h + c_i$$

$$f(x_{2i}) = f(0) = 4a_i \cdot h^2 + 2b_i \cdot h + c_i$$

Для осуществления последнего перехода необходимо использовать неравенство вида

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (a_i x^2 + b_i x + c_i) dx &= \int_0^{2h} (a_i x^2 + b_i x + c_i) dx = \\ &= \left(\frac{a_i x^3}{3} + \frac{b_i x^2}{2} + c_i x \right) \Big|_0^{2h} = \frac{8a_i h^3}{3} + 2b_i h^2 + 2c_i h = \\ &= \frac{h}{3} (8a_i h^2 + 6b_i h + 6c_i) = \frac{h}{3} (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})) \end{aligned}$$

Значит, получаем формулу, используя метод парабол:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (a_i x^2 + b_i x + c_i) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{h}{3} (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})) = \\ &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \dots + \\ &\quad + f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) = \\ &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})) \end{aligned}$$

<https://clck.ru/UmPuV>

3) *Подсчёт интеграла напрямую:*

$$\int_0^2 (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x \Big|_0^2 = \frac{4}{2} + 2 - 0 = 4$$

b) $f(x) = 1 + x^3$

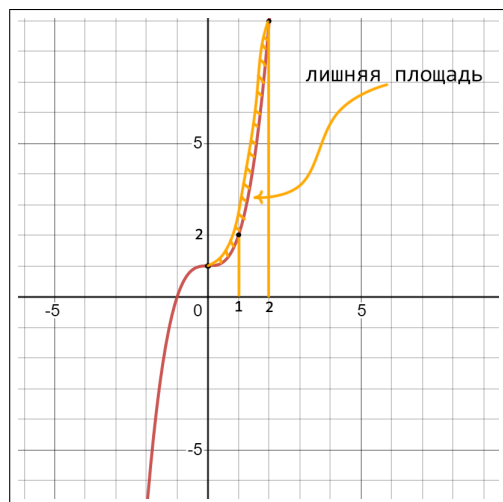
$x_0 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

Аналогично пункту (а):

1) $\int_0^2 \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{2}(1 + 4 + 9) = 7$ - большая погрешность, так как много добавленной (добавочной) лишней площади



2) $\int_0^2 = \frac{h}{3}(f(0) + 4f(1) + f(2)) = \frac{1}{3}(1 + 8 + 9) = 6$

3) $\int_0^2 = \int_0^2 (x^3 + 1)dx = \frac{x^4}{4} + 4|_0^2 = \frac{16}{4} + 2 = 6$