Дискретная математика

Домашняя работа 6

Ученик: Титов Даниил, M3104

Преподаватель: Lipenx

Санкт-Петербург

2021

Содержание

1 Найдите количество различных 5-значных чисел, используя цифры 1-9 при заданных ограничениях. Для каждого случая приведите несколько примеров соответствующих чисел и выведите общую формулу

1.1 Цифры могут повторяться

Так как цифры могут повторяться, то на 1ую позицию у нас есть 9 цифр, на 2ую тоже, на 3-5ые аналогично
Общая формула: $\overline{A_n^k} = n^k = 9 * 9 * 9 * 9 * 9 = 9^5$
Пример чисел:
- 11111
- 22223
- 96185

1.2 Цифры не могут повторяться

Так как цифры не могут повторяться, то на 1ую позицию у нас есть 9 цифр, на 2ую 8, на 3ью 7 и так далее
Общая формула: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{9!}{(9-5)!} = 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 15120$
Пример чисел:
- 12345
- 29476
- 97842

1.3 Цифры могут повторяться и должны быть записаны в невозрастающем порядке

В данной задаче мы будем использовать Stars and Bars, и исходя из этого
Общая формула: $C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*((n+k-1)-(n-1))!} = \frac{13!}{8!*(13-8)!} = 1287$
Пример чисел:
- 98765 $- |||| * | * | * | * |*$
- 99887 $- |||||| * | * *| * *$
- 76541 $- *||| * | * | * | * ||$

1.4 Цифры не могут повторяться и должны быть записаны в порядке возрастания

Чтобы понять, сколько чисел нам нужно взять, возьмём любое 5-значное число, например, 92134. Надо, чтобы цифры в нём шли по возрастанию и оно однозначно становится таким: 12349, и так у нас будет всегда, следовательно существует лишь одно число из выборки, цифры которого идут в порядке возрастания
Общая формула: $C_k^n = \frac{n!}{k!*(n-k)} = \frac{9!}{5!*(9-5)!} = 126$
Пример чисел:
- 12345
- 23456
- 56789

1.5 Цифры могут повторяться, должны быть записаны в неубывающем порядке, а 4-я цифра должна быть 6

Я бы разбил данную задачу на две подзадачи, так как у нас есть 4-я цифра, которая точно должна быть 6 + условие о неубывающем порядке, следовательно:

1. Первые три цифры могут быть от 1 до 6 включительно, строго в неубывающем порядке, то есть наша задача 1.3, то есть для первых трёх чисел будет:
$C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*((n+k-1)-(n-1))!}$, где $n - 6$, а $k - 3$, следовательно:
$C_8^5 = \frac{8!}{5!*(8-5)!} = 56$

2. Четвёртая цифра нам известна - 6, значит остаётся пятая, из-за условия о неубывании она может быть 6-9, следовательно это 4 случая

Итого: объединив 2 подзадачи, мы получаем $56 * 4$ случаев, то есть 224

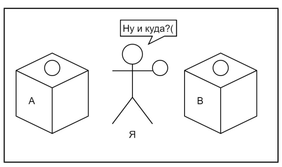
Общая формула: $C_{n+k-1}^{n-1} * 4 = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! * ((n+k-1)-(n-1))!} * 4 = C_8^5 * 4 = \frac{8!}{5! * (8-5)!} * 4 = 56 * 4 = 224$
Пример чисел:
- 11166
- 12367
- 15679

2 Одной из классических комбинаторных задач является подсчет количества расположений n шариков в k коробках. Существует по крайней мере 12 вариантов этой проблемы: четыре случая (a–d) с тремя различными ограничениями (1-3). Для каждой задачи (случай+ограничение) выведите соответствующую общую формулу. Кроме того, выберите несколько (репрезентативных) значений для n и k и используйте полученные формулы для поиска чисел аранжировок, чтобы визуализировать несколько возможных аранжировок для выбранных n и k

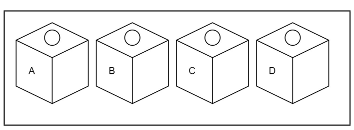
2.1 U → L: Шары не помечены, Коробки помечены

2.1.1 ≤ 1 мяч на коробку

Так как нам нужно выбрать Коробки, которые мы заполняем одним Шаром, то:
Общая формула: $C_k^n = \frac{k!}{n!*(k-n)!}$
Пример 1: C_2^3 - невозможно, так как Шаров больше, чем Коробок - 0

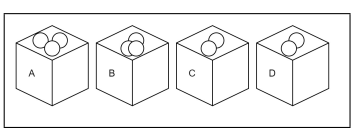


Пример 2: $C_4^4 = 1$

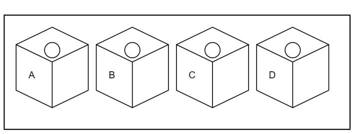


2.1.2 ≥ 1 мяч в коробке

Будем использовать метод "Stars and Bars"
Чтобы разбить n Шаров на k Коробок нам понадобится $k-1$ перегородок и $n-1$ мест для них, следовательно:
Общая формула: $C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!*((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!*(n-k)!}$
Пример 1: $C_{10-1}^{4-1} = 84$

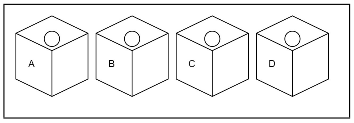


Пример 2: $C_{4-1}^{4-1} = 1$

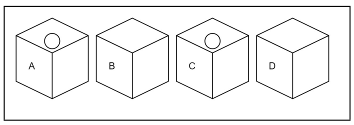


2.1.3 Произвольное количество шаров в коробке

Будем использовать метод "Stars and Bars"
Чтобы разбить n Шаров на k Коробок нам понадобится $k-1$ перегородок и $n+k-1$ мест для них, следовательно:
Общая формула: $C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!*((n+k-1)-(k-1))!} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!*n!}$
Пример 1: $C_{4+4-1}^{4-1} = 1$



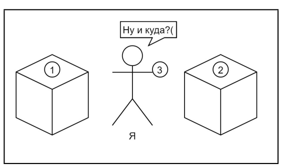
Пример 2: $C_{2+4-1}^{4-1} = 10$



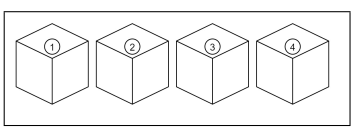
2.2 L → U: Шары помечены, Коробки не помечены

2.2.1 $\leq$ 1 мяч на коробку

Так как коробки неразличимы, то какие-то коробки пустые, а какие-то заполнены, следовательно - 1
Пример 1: Невозможно, так как Шаров больше, чем Коробок - 0

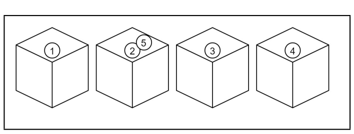


Пример 2: 1

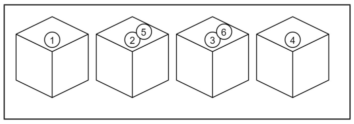


2.2.2 $\geq$ 1 мяч в коробке

Нам понадобится число Стирлинга второго рода, так как каждый из наших нумерованных шаров должен быть распределён по коробкам, следовательно:
Общая формула: $S_k^{II}(n)$
Пример 1: $S_4^{II}(5) = 10$



Пример 2: $S_4^{II}(6) = 65$

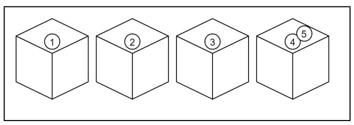


2.2.3 Произвольное количество шаров в коробке

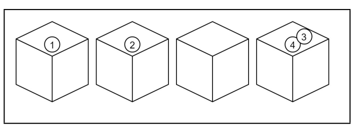
Нам нужна сумма числа Стирлинга второго рода, так как нужно распределить все нумерованные шары по коробкам, учитывая все варианты j-ого числа

Общая формула: $\sum_{j=1}^{k} S_k^{II}(n)$

Пример 1: $\sum_{j=1}^{4} S_4^{II}(5) = 52$



Пример 2: $\sum_{j=1}^{4} S_4^{II}(4) = 15$



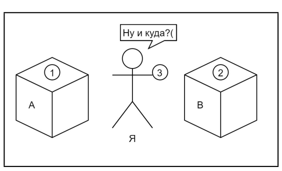
2.3 L → L: Шары помечены, Коробки помечены

2.3.1 $\leq$ 1 мяч на коробку

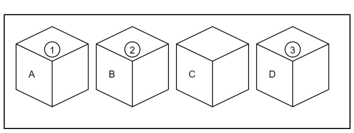
Так как нам нужно использовать все n нумерованных шаров (не могут повторяться), то мы используем эту формулу:

Общая формула: $A_k^n = \frac{k!}{(k-n)!}$

Пример 1: A_2^3 - невозможно, так как Шаров больше, чем Коробок - 0

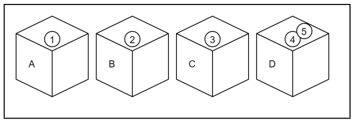


Пример 2: $A_4^3 = 24$

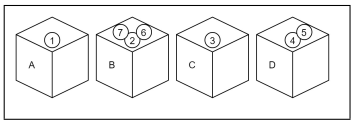


2.3.2 ≥ 1 мяч в коробке

Из-за того, что коробки нумерованны и шары тоже, то придётся использовать перестановки и число Стирлинга второго рода
Общая формула: $S_k^{II}(n) * P_k = S_k^{II}(n) * k!$
Пример 1: $S_4^{II}(5) * P_4 = 10 * 24 = 240$

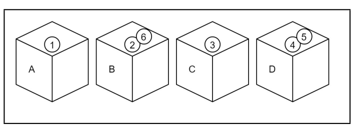


Пример 2: $S_4^{II}(7) * P_4 = 350 * 24 = 8400$

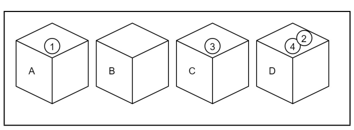


2.3.3 Произвольное количество шаров в коробке

Любой мяч может оказаться в любой коробке из-за произвольного количества шаров в коробке, следовательно:
Общая формула: $\overline{A_k^n} = k^n$
Пример 1: $\overline{A_4^6} = 4^6 = 4096$



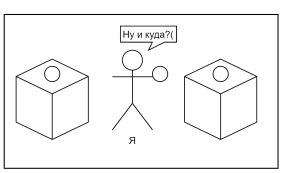
Пример 2: $\overline{A_4^4} = 4^4 = 256$



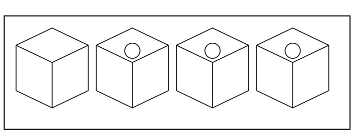
2.4 U → U: Шары не помечены, Коробки не помечены

2.4.1 ≤ 1 мяч на коробку

Так как коробки неразличимы, то какие-то коробки пустые, а какие-то заполнены, следовательно - 1
Пример 1: Невозможно, так как Шаров больше, чем Коробок - 0

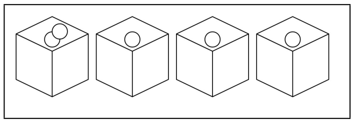


Пример 2: 1

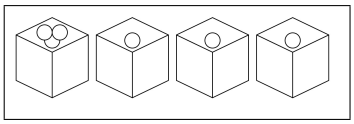


2.4.2 ≥ 1 мяч в коробке

Из-за того, что у нас не пронумерованы ни Шары, ни Коробки, то придётся использовать разбиение числа:
Общая формула: $p_k(n)$
Пример 1: $p_4(5) = 1$

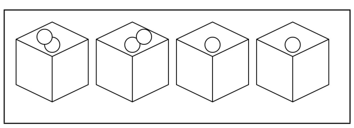


Пример 2: $p_4(6) = 2$



2.4.3 Произвольное количество шаров в коробке

Ситуация похожа на задание 2.2.3, только тут нам нужно использовать суммирование с разбиением числа, так как у нас ящики могут быть, как наполненными, так и пустыми и нужно учесть каждый из вариантов
Общая формула: $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j(n)$
Пример 1: $\sum\limits_{j=1}^{4} p_j(6) = 1 + 3 + 2 + 2 = 8$



Пример 2: $\sum\limits_{j=1}^{4} p_j(4) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$