El Modelo de Lorenz

Un acercamiento computacional

Laura Triana y Sebastian Manrique

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

18 de mayo de 2023

£De qué se trata?

Figura 1: Edward Lorenz

Con el objetivo de estudiar la predecibilidad del comportamiento del clima, Edward Lorenz sustituyó el modelo atmosférico por un conjunto de sólo tres ecuaciones.

Modelo de convección

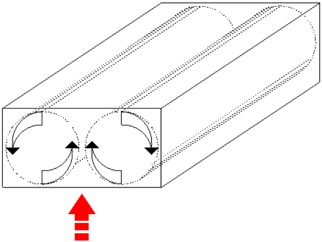

Figura 2: Edward Lorenz

El proceso de convección en la atmósfera se refiere a la transferencia vertical del calor absorbido por la superficie terrestre, principalmente el agua, a través de la tropósfera. El fenómeno de la convección describe un sistema como una delgada capa de fluido entre dos láminas horizontales paralelas con una diferencia de temperatura entre ellas. Si el fluido no se mueve, se establecerá un gradiente de temperatura que producirá un gradiente de densidad.

El modelo de Lorenz se plantea de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma\left(y - x\right) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x\left(\rho - z\right) - y \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy + bz \tag{3}$$

donde σ es llamado el número de Prandl el cual es la relación entre la viscosidad cinemática y la conductividad térmica, ρ es la relación del número de Rayleigh (R) y el número crítico de Rayleigh (Rc), el cual es el valor de R donde comienza el proceso de convección, finalmente b es una constante positiva de origen geométrico que relaciona la altura de la capa del fluido con el tamaño de los vórtices de convección.

Los métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta (RK) son una familia de métodos numéricos usados para la solución de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x, y\right), \tag{4}$$

donde se propone una solución general de la forma

$$y_{i+1} = y_i + \phi\left(x_i, y_i, h\right) h. \tag{5}$$

La función ϕ se conoce como una función de incremento la cual está para un salto de iteración h; al ser un método numérico, la solución se propone como una iteración de datos sujeta a condiciones iniciales.

Profundizando un poco, los métodos RK son una generalización de la ecuación (5) heredando la precisión de las series de Taylor. En general se propone la función incremento ϕ como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \cdots + a_n k_n \tag{6}$$

donde las a's son constantes y las k's vienen dadas de la forma

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} h_{n-1} h)
\end{aligned}$$

Las p's y q's igualmente son constantes que al igual que las a's se deben determinar. Se podría decir que estas son arbitrarias sin abusar de la notación ya que permiten infinitos valores para ϕ y con ello se tienen infinitas soluciones basadas en los métodos RK, de ahí que estos son una familia de métodos numéricos.

Para determinar las constantes existen dos formas, la primera es de manera clásica usando las series de Taylor de orden n (nótese que n también me determina el orden del método RK y con ello la precisión) o de la segunda forma que es proponiéndolas con base en el modelo (ecuación diferencial) que esté trabajando.

Dentro de los métodos RK más conocidos y/o usados están:

- El método de Euler. (RK 1^{er} orden)
- El método de Euler-Gauss. (RK 2^{do} orden)
- El método de Heun con corrector 1/2. (RK 2^{do} orden)
- El método del punto medio. (RK 2^{do} orden)
- El método RK45 o método de Fehlberg. (RK 4^{to} y 5^{to} orden)

entre otros.

Método RK de 4$^{\text{to}}$ orden

Para la solución de las ecuaciones de Lorenz, se propone el método RK de 4$^{\text{to}}$ orden el cual viene expresada la solución de la forma

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) h \tag{7}$$

donde las k's son respectivamente

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right) \tag{8}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \tag{9}$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \tag{10}$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right) \tag{11}$$

Solución de las ecuaciones de Lorenz

Sin embargo, para este caso particular se realiza un ajuste a las k's al tener un sistema acoplado sin la variable independiente t explícita. La solución usada es:

$$(x, y, z)_{i+1} = (x, y, z)_i + \frac{1}{6}\left(k_1^* + 2k_2^* + 2k_3^* + k_4^*\right) h$$

donde las k^*'s son respectivamente

$$\begin{aligned}
k_1^* &= k_{(x,y,z),1} = f\left(x_i, y_i, z_i\right) \\
k_2^* &= k_{(x,y,z),2} = f\left(x_i + 0{,}5 \cdot k_{x,1}h, y_i + 0{,}5 \cdot k_{y,1}h, z_i + 0{,}5 \cdot k_{z,1}h\right) \\
k_3^* &= k_{(x,y,z),3} = f\left(x_i + 0{,}5 \cdot k_{x,2}h, y_i + 0{,}5 \cdot k_{y,2}h, z_i + 0{,}5 \cdot k_{z,2}h\right) \\
k_4^* &= k_{(x,y,z),4} = f\left(x_i + k_{x,3}h, y_i + k_{y,3}h, z_i + k_{z,3}h\right)
\end{aligned}$$