# Diferencias Finitas en la Ecuación de Laplace

Laura C. Triana Santiago Talero P.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Física Computacional 1

2 de junio de 2023

# Contenido

# Contenido

# Objetivos de la Implementación

- Desarrollar el método de diferencias finitas.
- Aplicar el método para el potencial eléctrico de los alambres.
- Implementar el método en el lenguaje de programación C++

# Contenido

## Potencial eléctrico

Se tienen dos alambres conductores de tal manera que forman un rectángulo de dimensiones $a$ y $b$ sin que estos se unan. A ambos alambres se les aplica una tensión eléctrica con el ánodo de una fuente eléctrica en la parte superior del rectángulo y el cátodo en la parte inferior.

# Potencial eléctrico

Se tienen dos alambres conductores de tal manera que forman un rectángulo de dimensiones $a$ y $b$ sin que estos se unan. A ambos alambres se les aplica una tensión eléctrica con el ánodo de una fuente eléctrica en la parte superior del rectángulo y el cátodo en la parte inferior. Estos alambres se encuentran inmersos en un medio conductor (agua) el cual permite generar con mayor facilidad el potencial eléctrico en el interior de los dos alambres. Dentro del rectángulo fijamos una cuadrícula para calcular el potencial en cada punto y realizar un mapeo del potencial eléctrico.

## Ilustración del problema

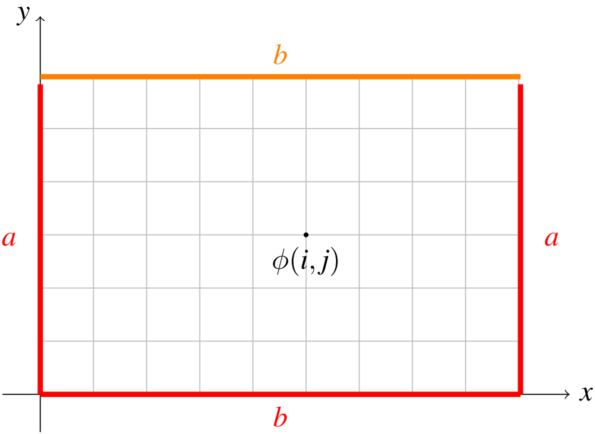



Figura 1: *Diagrama de los alambres conductores que contienen un potencial eléctrico medido en cada punto de una cuadrícula esquematizada.*

## Análisis del Problema

La ecuación de Laplace para el potencial eléctrico en una superficie se denota de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

cuyo método de solución más práctico es *separación de variables*.

$$\phi(x, y) = \sum_n X_n(x)\, Y_n(y) \tag{2}$$

## Condiciones de Dirichlet

El problema está sujeto a condiciones de frontera en donde los potenciales para el problema tratado son:

$$\begin{aligned}
\phi(x=0,\, 0 \leq y \leq a) = X(0)Y(y) = 0 \quad &\rightarrow \quad X(0) = 0 \\
\phi(x=b,\, 0 \leq y \leq a) = X(b)Y(y) = 0 \quad &\rightarrow \quad X(b) = 0 \\
\phi(0 \leq x \leq b,\, y=0) = X(x)Y(0) = 0 \quad &\rightarrow \quad Y(a) = 0
\end{aligned}$$

$$\phi(0 \leq y \leq b,\, y=a) = X(x)Y(a) = V_0$$

## Solución analítica

El valor del potencial para cualquier punto $(x, y)$ de la función $\phi(x.y)$ es expresado de la siguiente manera

$$\boxed{\phi(x,y) = \sum_{n=1} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}\,x\right)\,\sinh\left(\frac{n\pi}{a}\,y\right)}$$

donde $c_n$ se calcula a partir de las condiciones anteriores

$$c_n = \frac{2V_0}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

# Contenido

## Diferencias Finitas

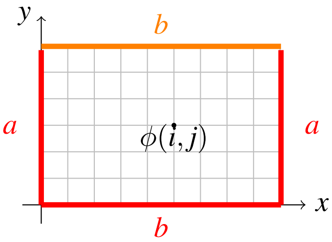
Con la diferencia de potencial aplicada en los alambres se puede establecer el esquema de *diferencias finitas* que es derivado de analizar una solución mediante series de potencias y diferencias centrales para la EDP de Laplace.

## Diferencias centrales

Para la segunda derivada de una función se tiene el siguiente esquema

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$




Este es el esquema de diferencias centrales para la segunda derivada.

Al reemplazar en la ecuación de Laplace se obtiene el siguiente desarrollo:

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

La cuadricula al ser simétrica condiciona que $\Delta x = \Delta y$ y por lo tanto

$$(\phi_{i+1,j}) + (\phi_{i-1,j}) + (\phi_{i,j+1}) + (\phi_{i,j-1}) - 4\phi_{i,j} = 0$$

Con esto, dependiendo de que tan fina se tome la cuadrícula, más ecuaciones para cada punto en la cuadrícula se van a generar, conformando un *sistema de ecuaciones con valores de frontera condicional*.

Por lo tanto

$$\phi_{i,j} = \frac{(\phi_{i+1,j}) + (\phi_{i-1,j}) + (\phi_{i,j+1}) + (\phi_{i,j-1})}{4}$$

Por lo tanto

$$\phi_{i,j} = \frac{(\phi_{i+1,j}) + (\phi_{i-1,j}) + (\phi_{i,j+1}) + (\phi_{i,j-1})}{4}$$

En la figura, tendríamos un total de 40 ecuaciones con 40 incógnitas al haber 40 puntos en la cuadrícula.

Por lo tanto

$$\phi_{i,j} = \frac{(\phi_{i+1,j}) + (\phi_{i-1,j}) + (\phi_{i,j+1}) + (\phi_{i,j-1})}{4}$$

En la figura, tendríamos un total de 40 ecuaciones con 40 incoǵnitas al haber 40 puntos en la cuadrícula.

Generalmente se presentan sistemas mucho más robustos de y finos para reducir el error en las medidas, lo que implica un sistema de cómputo mś avanzado para resolver dicho sistema de ecuaciones.

Por lo tanto

$$\phi_{i,j} = \frac{(\phi_{i+1,j}) + (\phi_{i-1,j}) + (\phi_{i,j+1}) + (\phi_{i,j-1})}{4}$$

En la figura, tendríamos un total de 40 ecuaciones con 40 incoǵnitas al haber 40 puntos en la cuadrícula.

Generalmente se presentan sistemas mucho más robustos de y finos para reducir el error en las medidas, lo que implica un sistema de cómputo mś avanzado para resolver dicho sistema de ecuaciones.

¿Cómo se puede refinar el cálculo y la iteración?

# Método de Liebmann

Figura 2: *Heinrich Liebmann (1840-1912)*

La técnica o método de Liebmann consiste en introducir un coeficiente que disminuye el tiempo de iteración y acelera la convergencia del método.

## Coeficiente de sobrerelajación

La siguiente expresión contiene el método de diferencias finitas con el coeficiente de relajación:

$$\phi_{i,j}^{\text{new}} = \lambda\,\phi_{i,j}^{\text{new}} + (1-\lambda)\,\phi_{i,j}^{\text{old}}$$

En donde $\phi_{i,j}^{\text{new}}$, $\phi_{i,j}^{\text{old}}$ son los datos actual y anterior en la iteración y $\lambda$ e un factor de peso que varía entre 1 y 2. Sin embargo, hay un error asociado

$$|(\varepsilon_a)_{i,j}| = \left|\frac{\phi_{i,j}^{\text{new}} - \phi_{i,j}^{\text{old}}}{\phi_{i,j}^{\text{new}}}\right| 100\,\%$$