Fundamentos de Análisis y Diseño de Algoritmos (FADA)

Notas de Clase No. 4 (FADA-NC04)

Antonio Vélez
antvelez@uvpalmira.edu.co
Universidad del Valle - Palmira

Crecimiento de Funciones - Notación Asintótica

T(n): tiempo de ejecución en el peor caso para una entrada de tamaño n.

T(n) es una función matemática, dominio

N={0,1,2, ... }

Orden de crecimiento vs. cálculo exacto

- ←(n^2) vs. $(n^2 + 5n + 1)$
- (nlgn) vs. 50nlgn

Orden de Crecimiento:

- Comportamiento asintótico
- Eficiencia en el límite

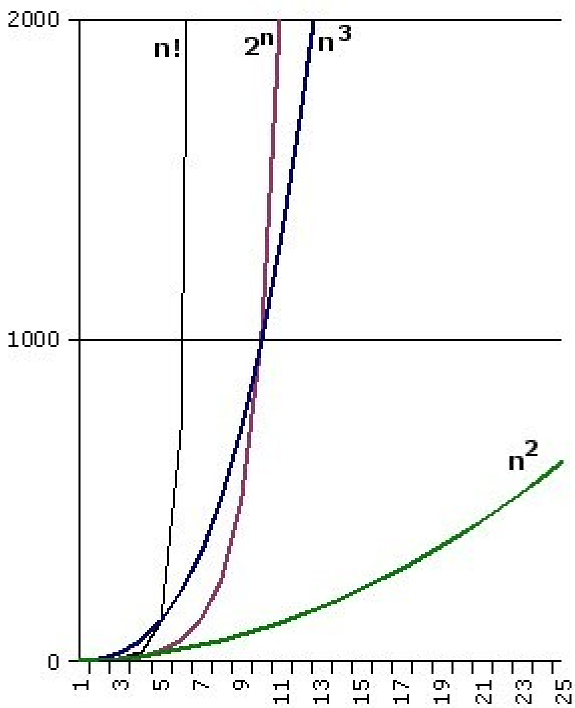

Figura 1. Crecimientos de funciones : Comparativo entre las funciones factorial, exponencial, cúbica y cuadrática para un tamaño grande de la entrada.

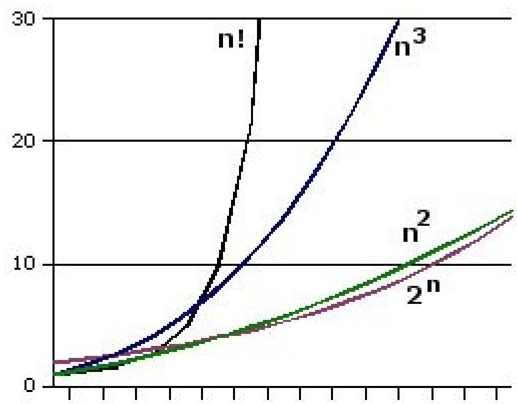

Figura 2. Crecimientos de funciones : Comparativo entre las funciones factorial, exponencial, cúbica y cuadrática para un tamaño pequeño de la entrada.

Observe que para entradas pequeñas, es menor el costo de una función exponencial comparada con una función polinómica.

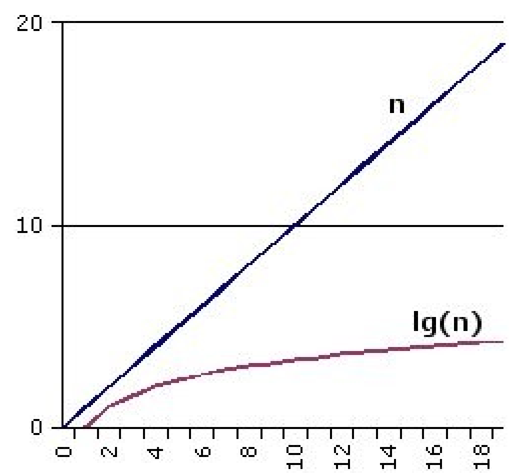

Figura 3. Crecimientos de funciones : Comparativo entre las funciones lineal y logarítmica.

Notación ®

Se dice que f(n) es ®(g(n)) sii existe c_1, c_2, $n_0 > 0$ tal que

$c_1 g(n) <= f(n) <= c_2 g(n)$ para todo $n > n_0$

Se escribirá f(n) = ®(g(n)) en lugar de

f(n) ▯ ®(g(n))   (abuso de notación)

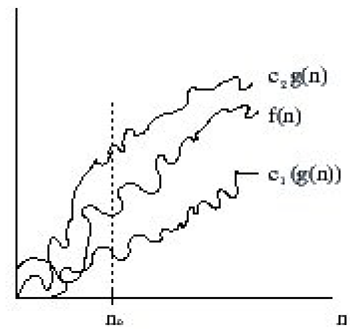

Figura 4. f(n) = ®(g(n))

- Para todo valor n n_0 la función f(n) es igual a g(n) multiplicada por un factor constante (c_1 o c_2).
- g(n) limita asintóticamente a f(n)

Ejemplo

Demostrar que $n^2/2 - 3n$ = ®(n^2) (lo que importa es el término dominante).

- Se debe encontrar las constantes c_1, c_2, $n_0 > 0$, tales que

$$c_1 n^2 \quad <= \quad \frac{1}{2}n^2 - 3\mathrm{n} \quad <= \quad c_2 n^2$$

- Dividiendo por n^2, tenemos :

$$c_1 \quad <= \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \quad <= \quad c_2$$

- Cuál es el valor de la constante c_1 ?

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \quad <= \quad c_2$$

Multiplicando por n

$$\frac{n}{2} - 3 \quad <= \quad n c_2$$

$$\frac{n}{2} - n c_2 \quad <= 3$$

$$\frac{n}{2} - n c_2 \quad <= 3$$

$$n\left(\frac{1}{2} - c_2\right) \quad <= 3$$

Para $c_2 >= ½$ se tiene que

$$n\left(\frac{1}{2} - c_2\right) \quad <= 3, \quad \text{para todo } n >= 1$$

- Cuál es el valor de la constante c_2 ?

$$c_1 n^2 \quad <= \quad \frac{1}{2}n^2 - 3\mathrm{n}$$

$$c_1 n \quad <= \quad \frac{n}{2} - 3$$

$$c_1 n - \frac{n}{2} \quad <= -3$$

$$n\left(c_1 - \frac{1}{2}\right) \quad <= -3$$

para $c_1 <= ¼$ se tiene que

$$n\left(c_1 - \frac{1}{2}\right) \quad <= -3 \text{ ; para todo } n >= 12$$

Entonces, para $c_1 = ¼$, $c_2 = ½$, $n_0 = 12$ se tiene que:

$$c_1 \quad <= \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \quad <= \quad c_2$$

Por lo que queda demostrado que

$n^2/2 - 3n$ = ®(n^2)

Ejemplo

Es $6n^3$ = ®(n^2) ?

- Se debe encontrar las constantes c_1, c_2, $n_0 > 0$, tales que $c_1 n^2 <= 6 n^3 <= c_2 n^2$ para todo $n >= n_0$
- Dividiendo $6 n^3 <= c_2 n^2$ por n^3 se tiene que

  $n <= c^2/6$ para todo $n >= n^0$ lo cual es una contradicción.

Intuitivamente, los términos de bajo orden son ignorados.

- fn) = $an^2 + bn + c$, para $a > 0$, se dice que

  f(n) = ®(n^2)
- Para un polinomio de grado d

  P(n) = $\sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ para $a_d > 0$

  se dice que P(n) = ®(n^d)

Notación O

Cota superior asintótica

Se dice que f(n) es O(g(n)) sii existe c_1, $n_0 > 0$ tal que

$0 <= f(n) <= c_1\, g(n)$ para todo $n > n_0$

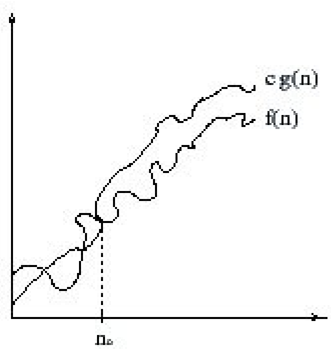

Figura 5. f(n) = O(g(n))

Se escribirá f(n) = O(g(n)) en lugar de

f(n) O(g(n)) (abuso de notación)

- f(n) = ®(g(n)) implica que f(n) = O(g(n)) pues ®(g(n)) † O(g(n))
- n2 = O(n^2)
- n = O(n^2)
- an + b = O(n^2)

Notación ↓

Cota inferior asintótica

Se dice que f(n) es ↓(g(n)) sii existe c_1, $n_0 > 0$ tal que

$0 <= c_1\, g(n) <= f(n)$ para todo $n > n_0$

Se escribirá f(n) = ↓(g(n)) en lugar de

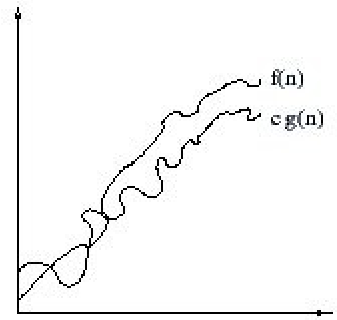

Figura 6. f(n) = ↓(g(n))

f(n) ↓(g(n)) (abuso de notación)

Teorema

Para dos funciones f(n) y g(n), tenemos que

f(n) = ®(g(n)) sii f(n) = O(g(n)) y f(n) = (g(n))

Por ejemplo si $an^2 + bn + c$ = ®(n2), para valores constantes a, b, c, con $a > 0$, implica que

- $an^2 + bn + c$ = O(n2) y
- $an^2 + bn + c$ = ↓(n2).

Notación o

Se dice que f(n) es o(g(n)) sii para toda c_1, existe $n_0 > 0$ tal que $0 <= f(n) < c_1\, g(n)$ para todo $n > n_0$

- $2n^2$ = O(n^2). Es una aproximación bastante cercana a la realidad ya que $2n^2$ está asintóticamente cerca de n^2.
- 2n = O(n^2). Es una aproximación cierta por definición, pero 2n no está asintóticamente cerca de n^2.
- Diremos entonces 2n = o(n2)
- $2n^2$ ❹ o(n^2) pero $2n^2$ = O(n^2)
- El que f(n) = o(g(n)) implica que

  $$lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Notación ✿

Se dice que f(n) es ↓(g(n)) sii para toca constante c_1, existe $n_0 > 0$ tal que

$0 <= c_1\, g(n) < f(n)$ para todo $n > n_0$

- ✿ es a ↓, como o es a O.
- Por ejemplo ½ n^2 = ✿(n) pero ½ n^2 = ✿(n^2)
- El que f(n) = ✿(g(n)) implica que

$$lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Comparación de Funciones

Transitividad

- Si f(n) = ®(g(n)) y g(n) = ®(h(n)) entonces f(n) = ®(h(n))
- Si f(n) = ↓(g(n)) y g(n) = ↓(h(n)) entonces f(n) = ↓(h(n))
- Si f(n) = O(g(n)) y g(n) = O(h(n)) entonces f(n) = O(h(n))
- Si f(n) = o(g(n)) y g(n) = o(h(n)) entonces f(n) = o(h(n))
- Si f(n) = ✿(g(n)) y g(n) = ✿(h(n)) entonces f(n) = ✿(h(n))

Reflexividad

- g(n) = ®(g(n))
- g(n) = O(g(n))
- g(n) = ↓(g(n)).

Simetría

- f(n) = ®(g(n)) sii g(n) = ®(f(n))

Simetría Transpuesta

- f(n) = O(g(n)) sii g(n) = ↓(f(n))
- f(n) = o(g(n)) ssi g(n) = ✿(f(n))

Analogía (con dos números reales a y b)

- f(n) = O(g(n)) ✳ a <= b
- f(n) = (g(n)) ✳ a >= b
- f(n) = (g(n)) ✳ a = b
- f(n) = o(g(n)) ✳ a < b
- f(n) = (g(n)) ✳ a > b

Tricotomía:

Para cualquier par de número a y b, se cumple alguna de las siguientes condiciones

a < b ; a = b ; a > b

Pero no todas las funciones asintóticas son comparables de igual forma. Se da el caso en que

f(n) = O(g(n)) o f(n) = ↓(g(n))

Por ejemplo, las funciones f(n) = n y g(n) = $n^{1+\sin n}$, no son comparables asintóticamente, ya que el valor de (1 + sin n) oscila entre 1 y 2.