Cálculo EE

Ficha 2 | Outubro

Derivadas

1. A temperatura T de um metal varia com o tempo t, segundo a expressão $T(t) = \sin t + t^2$.

   (a) Calcule a taxa de variação média da temperatura no intervalo $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

   (b) Calcule a taxa de variação no instante $t = 0$.

2. Para cada uma das funções seguintes, use a definição de derivada para determinar $f'(0)$ e escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; (b) $g(x) = \sqrt{x+1}$; (c) $f(x) = \exp(x^2)$.

3. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$. Verifique se existe $f'(1)$.

4. Considere a função $f(x) = |x - 1|$.

   (a) Mostre que f é contínua em $x = 1$.

   (b) Calcule $f'(1^+)$ e $f'(1^-)$ e verifique se existe $f'(1)$.

   (c) Represente a função graficamente.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x = 1$. Sabendo que $f(1) = 2$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2)$ passa pela origem, calcule $f'(1)$.

6. Determine as derivadas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$; (b) $g(x) = \dfrac{x + \cos x}{1 - \sin x}$; (c) $h(x) = (1 + \cos x)^4$.

7. Considere a função definida por $f(x) = g(\sin^2 x) - g(\cos^2 x)$, com g uma função derivável em $x = 0$ e $x = 1$. Determine a derivada da função f no ponto $x = 0$.

8. Sabendo que f é uma função derivável, exprimir as derivadas das seguintes funções em função de f'.

   (a) $f(3x)$; (b) $f(x^2)$; (c) $f(5f(x))$.

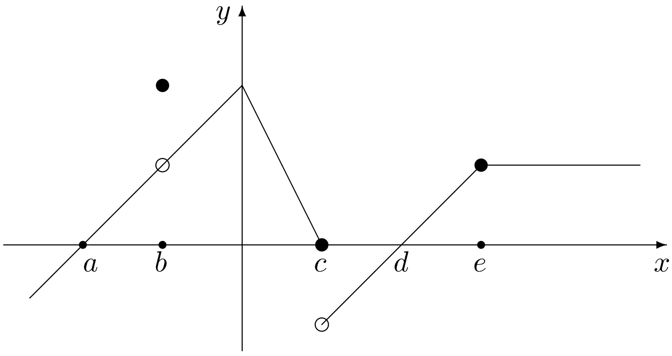
9. Determine a expressão das derivadas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x.\arcsin(4x)$; (b) $g(t) = \arctan^2(7t)$; (c) $h(y) = \arccos\left(\dfrac{1}{y}\right)$

   (d) $k(x) = \cos(\arctan x)$; (e) $j(t) = 3t \arcsin\sqrt{t^2 - 1}$; (f) $s(y) = \dfrac{1}{\cos y} - \arctan\left(\dfrac{y}{2}\right)$

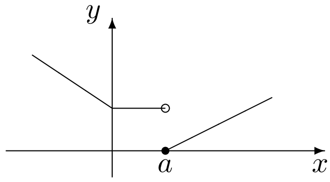
   (g) $t(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{argth} x)$; (h) $u(t) = 9t^2 \operatorname{argch}\sqrt{1 - t^2}$; (i) $v(y) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 y} - \operatorname{argsh} y$

10. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representada graficamente na figura seguinte



Indique os pontos onde f não é derivável, especificando se existem as derivadas laterais e indicando o seu sinal.

11. Esboce o gráfico da derivada da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representada na figura ao lado.



12. Mostre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raíz real.

13. Mostre que, independentemente do valor real de a, a equação $x^3+3x+a = 0$ tem, quando muito, uma raíz no intervalo $[-1, 1]$.

14. Mostre que as funções seguintes satisfazem as hipóteses do Teorema de Lagrange e determine todos os números reais c que satisfazem a conclusão do teorema.

    (a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad x \in [-1, 1]$; (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \in [0, 1]$; (c) $h(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad x \in [1, 4]$.

15. Considere uma função real de variável real derivável no seu domínio e suponha que $f(0) = -3$ e que $f'(x) \leq 5$ para todos os valores do domínio de f. Qual é o maior valor possível para $f(2)$? Sugestão: Use o teorema de Lagrange.

16. Mostre que $2 \arcsin x = \arccos(1 - 2x^2)$ para $0 \leq x \leq 1$.

17. Mostre que $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

18. Aplicando a regra de L'Hôpital, calcule:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x.\ln x$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

19. Determina o polinómio de Taylor de grau 3 em $x = 0$:

    a) $y = \sin x$ b) $f(x) = \exp(-x/2)$ c) $f(x) = \cos(\pi - 5x)$

    d) $f(x) = \sqrt{4x+1}$ e) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ f) $y = x \exp(3x)$

20. Determina o polinómio de Taylor de grau 3 em x_0:

    a) $y = \frac{1}{5-x}, \ x_0 = 4$ b) $f(x) = \ln x, \ x_0 = 1$ c) $f(x) = \cos(x), \ x_0 = \pi$

    d) $f(x) = x^4 + x + 1, \ x_0 = 2$

21. Utiliza o polinómio de grau 2 da função $\ln x$ em $x = 1$ para estimar $\ln 0.8$.

22. Utiliza o polinómio de grau 2 da função $\exp(-x/2)$ em $x = 0$ para estimar $\exp(-0.05)$.

Problemas

1. A altura h que uma pulga consegue atingir quando salta na direcção vertical, depende do tempo t da seguinte forma $h(t) = 4.4t - 4.9t^2$. Determina a velocidade quando $t = 0$ e a máxima altura que a pulga conseguiu atingir.

2. O degelo da neve provoca a saída de um rio das suas margens. $h(t)$ é a altura da água na rua paralela às margens do rio, t horas após o degelo. Qual das seguintes duas situações é a melhor?

   a) $h(100) = 3, h'(100) = 2, h''(100) = -5$; b) $h(100) = 3, h'(100) = -2, h''(100) = 5$

3. Pretende-se fazer um jardim rectangular encostado a uma casa. Os outros 3 lados do jardim vão ser vedados com uma sebe de 40 metros. Determina as dimensões do jardim de modo a maximizar a sua área.

4. Uma companhia aérea tem cerca de 8000 passageiros por mês a frequentar uma rota, cada um a pagar 50 euros. Pretende-se aumentar os preços dos bilhetes mas a companhia sabe que, por cada euro de aumento, perde 100 passageiros. Determina o preço que maximiza o lucro da companhia.

5. Um artista plástico pretende vender as suas obras do seu último trabalho. Se ele colocar à venda 50 obras, cobrará 400 euros por cada. Se colocar mais de 50 obras, ele precisa de diminuir o preço em 5 euros por cada obra acima das 50. Quantas obras ele poderá colocar à venda para maximizar o seu lucro?