Exercícios de

Tópicos de Análise Matemática

Autores: Carolina Ribeiro, Gaspar J. Machado, Sofia Lopes e Irene Brito

Instituição: Universidade do Minho

Data: fevereiro 2021

Versão: 10.0

Índice

D

Capítulo 1 — Noções de Geometria Analítica

1.1 Exercícios

1. Identifique as cónicas dadas pelas seguintes equações:

   (a) $x^2 + y^2 = 2$.
   (b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.
   (c) $x^2 + 2y^2 = 1$.
   (d) $x^2 + 2y^2 - 2x = 0$.
   (e) $y = 2x^2$.
   (f) $x^2 + y - 1 = 0$.
   (g) $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$.
   (h) $x^2 - 2y^2 + 1 = 0$.

2. Identifique as quádricas dadas pelas seguintes equações:

   (a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$;
   (b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$;
   (c) $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 7$;
   (d) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$;
   (e) $x^2 + 2z^2 - 4y = 0$;
   (f) $2x^2 + 2z^2 + 3y = 0$;
   (g) $3x^2 - 2y^2 = z$;
   (h) $x^2 + 2y^2 = z^2$;
   (i) $x^2 + 2y^2 = z$;
   (j) $x^2 + 2y^2 = 1$;
   (k) $2y^2 = z$;
   (l) $x^2 - 2y^2 = 1$;
   (m) $y^2 + 2z^2 - 4x = 0$;
   (n) $y^2 + 2z^2 = 4x^2$;
   (o) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$;
   (p) $2x^2 + 2y^2 = 1$.

1.2 Soluções

1. Identifique as cónicas dadas pelas seguintes equações:

(a) $x^2 + y^2 = 2$.
(b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.
(c) $x^2 + 2y^2 = 1$.
(d) $x^2 + 2y^2 - 2x = 0$.
(e) $y = 2x^2$.
(f) $x^2 + y - 1 = 0$.
(g) $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$.
(h) $x^2 - 2y^2 + 1 = 0$.

(a) Circunferência (de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$).
(b) Circunferência (de centro $(1,-2)$ e raio 1).
(c) Elipse (de centro $(0,0)$ e semi-eixos 1 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$).
(d) Elipse (de centro $(1,0)$ e semi-eixos 1 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$).
(e) Parábola (de vértice $(0,0)$ voltada para cima).
(f) Parábola (de vértice $(0,1)$ voltada para baixo).
(g) Hipérbole.
(h) Hipérbole.

2. Identifique as quádricas dadas pelas seguintes equações:

(a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$;
(b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$;
(c) $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 7$;
(d) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$;
(e) $x^2 + 2z^2 - 4y = 0$;
(f) $2x^2 + 2z^2 + 3y = 0$;
(g) $3x^2 - 2y^2 = z$;
(h) $x^2 + 2y^2 = z^2$;
(i) $x^2 + 2y^2 = z$;
(j) $x^2 + 2y^2 = 1$;
(k) $2y^2 = z$;
(l) $x^2 - 2y^2 = 1$;
(m) $y^2 + 2z^2 - 4x = 0$;
(n) $y^2 + 2z^2 = 4x^2$;
(o) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$;
(p) $2x^2 + 2y^2 = 1$.

(a) Elipsóide.
(b) Esfera.
(c) Hiperbolóide de uma folha.
(d) Hiperbolóide de duas folhas.
(e) Parabolóide elítico.
(f) Parabolóide circular.
(g) Parabolóide hiperbólico.
(h) Cone.
(i) Parabolóide elítico.
(j) Cilindro elítico.
(k) Cilindro parabólico.
(l) Cilindro hiperbólico.
(m) Parabolóide elítico.
(n) Cone.
(o) Hiperbolóide de uma folha.
(p) Cilindro circular.

Capítulo 2 — Funções reais de várias variáveis reais

2.1 Exercícios

1. Indique por compreensão e represente graficamente o domínio das seguintes funções reais de duas variáveis reais:
   (a) $f_1(x,y) = \sqrt{x-y^2}$.
   (b) $f_2(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(y-x^2)}$.
   (c) $f_3(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.
   (d) $f_4(x,y) = \sqrt{x\cos y}$.
   (e) $f_5(x,y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{arcsen}(\frac{x}{2})+\operatorname{arctg}(y)}{x^2+y^2}$.
   (f) $f_6(a,b) = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(a)}}{a^2-b^2}$.
   (g) $f_7(\alpha,\beta) = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt{\ln(\alpha+\beta)}}$.
   (h) $f_8(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. Considere a função real de duas variáveis reais $f(x,y) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{x^2+y^2}}$ com domínio de D_f. Indique quais das seguintes proposições é a verdadeira:

   A $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$.

   B $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \wedge y > 0\}$.

   C $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$.

   D $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$.

3. A função cujo gráfico representa a metade superior da esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 4 é:

   A $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+16}$.

   B $f(x,y) = \sqrt{-x^2-y^2+16}$.

   C $f(x,y) = \sqrt{-x^2-y^2+4}$.

   D $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$.

4. Identifique o gráfico e as curvas de nível das seguintes funções:
   (a) $f_1(x,y) = 6+3x-y$.
   (b) $f_2(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2}$.
   (c) $f_3(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$.
   (d) $f_4(x,y) = 1-x^2-y^2$.

5. Mostre, usando a definição de limite de funções reais de duas variáveis reais, que:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0.$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

6. Considere a função $f(x,y) = \frac{y^2}{(x+y^2)^2}$ com domínio D_f e o conjunto $C_m = \{(t, mt) : t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$, $m \in \mathbb{R}$. Indique quais das seguintes proposições é a verdadeira:

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} f(x,y) = 0.$

$\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} f(x,y) = \frac{1}{m^2}.$

$\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} f(x,y) = m.$

$\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C}} f(x,y) = m^2.$

7. Mostre que não existem os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-y}{3x+y}.$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}.$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2}.$

8. Estude a continuidade das seguintes funções reais de duas variáveis reais:

(a) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $h(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $i(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2.2 Resoluções

1. Indique por compreensão e represente graficamente o domínio das seguintes funções reais de duas variáveis reais:

   (a) $f_1(x,y) = \sqrt{x - y^2}$.

   (b) $f_2(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(y-x^2)}$.

   (c) $f_3(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

   (d) $f_4(x,y) = \sqrt{x \cos y}$.

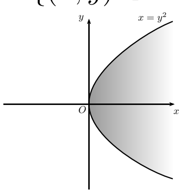
   (e) $f_5(x,y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{arcsen}(\frac{x}{2})+\operatorname{arctg}(y)}{x^2+y^2}$.

   (f) $f_6(a,b) = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(a)}}{a^2-b^2}$.

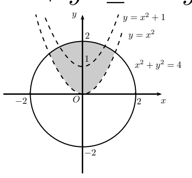
   (g) $f_7(\alpha,\beta) = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt{\ln(\alpha+\beta)}}$.

   (h) $f_8(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

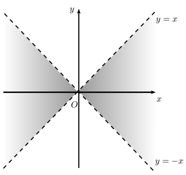
(a) $D_{f_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$.



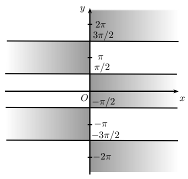
(b) $D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge y - x^2 > 0 \wedge \ln(y - x^2) \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y > x^2 \wedge y \neq x^2 + 1\}$.



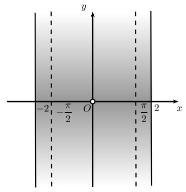
(c) $D_{f_3} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 - y^2} \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 < 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y - x)(y + x) < 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y - x < 0 \wedge y + x > 0) \vee (y + x < 0 \wedge y - x > 0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y < x \wedge y > -x) \vee (y < -x \wedge y > x)\}$.



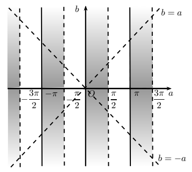
(d) $D_{f_4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cos y \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge \cos y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge \cos y \leq 0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq y \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \vee (x \leq 0 \wedge \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$.



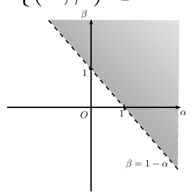
(e) $D_{f_5} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos x \neq 0 \wedge -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \wedge x^2+y^2 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 2 \wedge (x,y) \neq (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2] \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}\} \setminus \{(0,0)\}$.



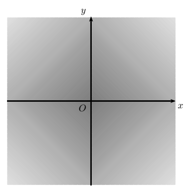
(f) $D_{f_6} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{tg} a \geq 0 \wedge a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge a^2 - b^2 \neq 0\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b \neq \pm a, k\pi \leq a < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



(g) $D_{f_7} = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \ln(\alpha+\beta) > 0 \wedge \alpha+\beta > 0\} = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha+\beta > 1\} = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta > 1-\alpha\}$.



(h) $D_{f_7} = \mathbb{R}^2$.



2. Considere a função real de duas variáveis reais $f(x,y) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{x^2+y^2}}$ com domínio de D_f. Indique quais das seguintes proposições é a verdadeira:

A $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$.

B $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \wedge y > 0\}$.

C $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$.

D $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$.

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\ln(x)}{x^2+y^2} \geq 0 \wedge x > 0 \wedge x^2+y^2 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x) \geq 0 \wedge x > 0 \wedge (x,y) \neq (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \wedge x > 0 \wedge (x,y) \neq (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$.

A opção correta é a A.

3. A função cujo gráfico representa a metade superior da esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 4 é:

   A $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+16}$.

   B $f(x,y) = \sqrt{-x^2-y^2+16}$.

   C $f(x,y) = \sqrt{-x^2-y^2+4}$.

   D $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$.

A equação geral de uma esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 4 é $x^2+y^2+z^2=16$. Como a função representa a metade superior da esfera, então $f(x,y) = \sqrt{-x^2-y^2+16}$.

A opção correta é a B.

4. Identifique o gráfico e as curvas de nível das seguintes funções:

   (a) $f_1(x,y) = 6+3x-y$.

   (b) $f_2(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2}$.

   (c) $f_3(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$.

   (d) $f_4(x,y) = 1-x^2-y^2$.

(a) O conjunto das curvas de nível é definido por: $\text{CN}_k(f_1) = \{(x,y) \in D_{f_1} = \mathbb{R}^2 : 6+3x-y=k\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x+(6-k)\}$, $k \in \mathbb{R}$. As curvas de nível são retas com declive 3.

O gráfico de f_1 é definida por: $\text{graf}_{f_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_{f_1} = \mathbb{R}^2 \wedge z = 6+3x-y\}$. O gráfico é um plano.

(b) O conjunto das curvas de nível é definido por: $\text{CN}_k(f_2) = \{(x,y) \in D_{f_2} = \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+4y^2} = k\}$, $k \in \mathbb{R}$. Logo, $\text{CN}_k(f_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 = k^2\}$, $k \in \mathbb{R}_0^+$. Para $k \in \mathbb{R}^+$, temos $\text{CN}_k(f_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{(\frac{k}{2})^2} = 1\}$. Logo, curvas de nível são elipses de centro $(0,0)$ e semi-eixos k e $\frac{k}{2}$.

Para $k=0$, temos $\text{CN}_0(f_2) = \{(0,0)\}$. A curva de nível é o ponto $(0,0)$.

O gráfico de f_2 é definida por: $\text{graf}_{f_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_{f_2} = \mathbb{R}^2 \wedge z = \sqrt{x^2+4y^2}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge z^2 = x^2+4y^2 \wedge z \geq 0\}$. f_2 representa a metade superior de um cone elítico.

(c) O conjunto das curvas de nível é definido por: $\text{CN}_k(f_3) = \{(x,y) \in D_{f_3} : \sqrt{9-x^2-y^2} = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, em que $D_{f_3} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\}$.

Logo, $\text{CN}_k(f_3) = \{(x,y) \in D_{f_3} : 9-x^2-y^2 = k^2\} = \{(x,y) \in D_{f_3} : x^2+y^2 = 9-k^2\}, k \in \mathbb{R}_0^+$.

Para $k \in [0,3[$, $\text{CN}_k(f_3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = (\sqrt{9-k^2})^2\}$. As curvas de nível são circunferências de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{9-k^2}$

Para $k=3$, temos $\text{CN}_3(f_3) = \{(0,0)\}$. A curva de nível é o ponto $(0,0)$.

O gráfico de f_3 é definida por: $\text{graf}_{f_3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_{f_3} \wedge z = \sqrt{9-x^2-y^2}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_{f_3} \wedge z^2 = 9-x^2-y^2 \wedge z \geq 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_{f_3} \wedge x^2+y^2+z^2 = 9 \wedge z \geq 0\}$. f_3 representa a metade superior da esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 3.

(d) O conjunto das curvas de nível é definido por: $\text{CN}_k(f_4) = \{(x,y) \in D_{f_4} = \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 = k\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1-k\}, k \in \mathbb{R}$.

Para $k \in]-\infty, 1[$, $\text{CN}_k(f_4) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = (\sqrt{1-k})^2\}$. As curvas de nível são circunferências de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{1-k}$.

Para $k = 1$, temos $\text{CN}_1(f_4) = \{(0,0)\}$. A curva de nível é o ponto $(0,0)$.

O gráfico de f_4 é definida por: $\text{graf}_{f_4} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_{f_4} = \mathbb{R}^2 \wedge z = 1-x^2-y^2\}$. f_4 representa um parabolóide voltado para baixo com vértice $(0,0,1)$.

5. Mostre, usando a definição de limite de funções reais de duas variáveis reais, que:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0.$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

(a) Seja $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, logo $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Usando a definição de limite, tem-se que mostrar que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left[\left((x,y) \in D_f \wedge 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta\right) \to \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon\right]$:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| &= \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} && \text{pois } x^2 \geq 0 \text{ e } x^2+y^2 > 0 \\
&\leq \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} && \text{pois } x^2 \leq x^2+y^2 \\
&= |y| && \text{pois } x^2+y^2 \neq 0 \\
&\leq \sqrt{x^2+y^2} && \text{pois } |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \\
&< \varepsilon && \text{fazendo } \delta = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

(b) Seja $f(x,y) = \frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, logo $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Usando a definição de limite, tem-se que mostrar que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left[\left((x,y) \in D_f \wedge 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta\right) \to \left|\frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon\right]$:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \frac{5|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} && \text{pois } \sqrt{x^2+y^2} > 0 \\
&\leq \frac{5\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} && \text{pois } |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \\
&= 5\sqrt{x^2+y^2} && \text{pois } \sqrt{x^2+y^2} \neq 0 \\
&< \varepsilon && \text{fazendo } \delta = \frac{\varepsilon}{5}.
\end{aligned}
$$

(c) Seja $f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}$, logo $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Usando a definição de limite, tem-se que mostrar que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left[\left((x,y) \in D_f \wedge 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \right) \rightarrow \left| \frac{y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon \right]$:

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{y^3}{x^2+y^2} \right| &= \frac{y^2|y|}{x^2+y^2} && \text{pois } y^2 \geq 0 \text{ e } x^2+y^2 > 0 \\
&\leq \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} && \text{pois } y^2 \leq x^2+y^2 \\
&= |y| && \text{pois } x^2+y^2 \neq 0 \\
&\leq \sqrt{x^2+y^2} && \text{pois } |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \\
&< \varepsilon && \text{fazendo } \delta = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

(d) Seja $f(x,y) = \frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, logo $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Usando a definição de limite, tem-se que mostrar que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left[\left((x,y) \in D_f \wedge 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \right) \rightarrow \left| \frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon \right]$:

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &\leq \frac{2x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} && \text{pois } |2x^2-3y^2| \leq 2x^2+3y^2 \\
&\leq \frac{3x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} && \text{pois } 2x^2 \leq 3x^2 \\
&= 3\sqrt{x^2+y^2} && \text{pois } \sqrt{x^2+y^2} \neq 0 \\
&< \varepsilon && \text{fazendo } \delta = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

6. Considere a função $f(x,y) = \frac{y^2}{(x+y^2)^2}$ com domínio D_f e o conjunto $C_m = \{(t, mt) : t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$, $m \in \mathbb{R}$. Indique quais das seguintes proposições é a verdadeira:

A $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in C_m}} f(x,y) = 0.$

B $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in C_m}} f(x,y) = \frac{1}{m^2}.$

C $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in C_m}} f(x,y) = m.$

D $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in C}} f(x,y) = m^2.$

Atendendo a

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in C_m}} f(x,y) &= \lim_{t\to 0} f(t, mt) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{m^2t^2}{(t+m^2t^2)^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{m^2t^2}{(1+m^2t)^2t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{m^2}{(1+m^2t)^2}\\
&= m^2,
\end{aligned}
$$

tem-se que a única opção correta é a D.

7. Mostre que não existem os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-y}{3x+y}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$.

(a) Seja $f(x,y) = \frac{3x-y}{3x+y}$, logo $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x+y \neq 0\}$. Calculando o limite de f em $(0,0)$ relativo ao conjunto $C_1 = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$ (que representa a reta horizontal $y=0$), obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_1}} \frac{3x-y}{3x+y} = \lim_{t\to 0} \frac{3t-0}{3t+0} = \lim_{t\to 0} \frac{3t}{3t} = 1.$$

Calculando o limite de f em $(0,0)$ relativo ao conjunto $C_2 = \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$ (que representa a reta vertical $x=0$), obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_2}} \frac{3x-y}{3x+y} = \lim_{t\to 0} \frac{3\cdot 0-t}{3\cdot 0+t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} = -1.$$

Como os limites são diferentes, conclui-se que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-y}{3x+y}$.

(b) Seja $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, logo $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Calculando o limite de f em $(0,0)$ relativo ao conjunto $C_1 = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$ (que representa a reta horizontal $y=0$), obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_1}} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t^2+0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} = \infty.$$

Conclui-se que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.

(c) Seja $f(x,y) = \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$, logo $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$. Calculando o limite de f em $(1,0)$ relativo ao conjunto $C_1 = \{(t+1,0) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$ (que representa a reta horizontal $y=0$), obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in C_1}} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0(t+1-1)}{(t+1-1)^2+0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0.$$

Calculando o limite de f em $(1,0)$ relativo ao conjunto $C_2 = \{(1,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$ (que representa a reta vertical $x=1$), obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in C_2}} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t(1-1)}{(1-1)^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0.$$

Como os limites são iguais, conclui-se que caso existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$, este é zero. Contudo não temos a garantia da existência de limite.

Calculando o limite de f em $(1,0)$ relativo ao conjunto $C_m = \{(1+t, mt) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$, para $m \in \mathbb{R}$ (que representa retas não verticais), obtém-se

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in C_m}} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{mt(1+t-1)}{(1+t-1)^2+(mt)^2}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{mt^2}{t^2+m^2t^2}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{mt^2}{(1+m^2)t^2}\\ &= \frac{m}{1+m^2}.\end{aligned}$$

Como o limite depende do valor de m, conclui-se que não existe $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$.

8. Estude a continuidade das seguintes funções reais de duas variáveis reais:

(a) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0),\\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0).\end{cases}$

(b) $h(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0).\end{cases}$

(c) $i(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0).\end{cases}$

(a) Note-se que $D_g = \mathbb{R}^2$.

- $(x,y) \neq (0,0)$: a função é contínua, porque é o quociente de duas funções polinomiais que são contínuas.
- $(x,y) = (0,0)$: Calculando o limite de g em $(0,0)$ relativo ao conjunto $C_1 = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ (que representa a reta horizontal $y=0$), obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_1}} \frac{4x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{4t^2\cdot 0}{t^2+0^2} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^2} = 0.$$

Conclui-se que se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^2+y^2}$ existir, este toma o valor 0. Como $g(0,0)=1$, logo a função não é contínua no ponto $(0,0)$.

Conclui-se que a função g é contínua em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

(b) Note-se que $D_h = \mathbb{R}^2$.

- $(x,y) \neq (0,0)$: a função é contínua, porque é o quociente de duas funções polinomiais que são contínuas.
- $(x,y) = (0,0)$: Pretende-se provar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = h(0,0) = 0$. Usando a definição de limite, tem-se que mostrar que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left[\left((x,y)\in D_h \wedge 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta\right) \to \left|\frac{3xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon\right]$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right| &= \frac{3|x|y^2}{x^2+y^2} && \text{pois } y^2 \geq 0 \text{ e } x^2+y^2>0\\ &\leq \frac{3|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} && \text{pois } y^2 \leq x^2+y^2\\ &= 3|x| && \text{pois } x^2+y^2 \neq 0\\ &\leq 3\sqrt{x^2+y^2} && \text{pois } |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

$$< \varepsilon \qquad \text{fazendo } \delta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, h é contínua no ponto $(0,0)$

Conclui-se que a função h é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(c) Note-se que $D_i = \mathbb{R}^2$.

- $(x,y) \neq (0,0)$: a função é contínua, porque é o quociente de duas funções polinomiais que são contínuas.
- $(x,y) = (0,0)$: Calculando o limite de i em $(0,0)$ relativo ao conjunto $C_m = \{(t,mt) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ (que representa retas não verticais, obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot mt}{\sqrt{t^2+m^2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{mt^2}{\sqrt{1+m^2}|t|} = 0.$$

Conclui-se que se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ existir, este toma o valor 0.
Vamos provar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, usando a definição. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left[\left((x,y) \in D_i \wedge 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta\right) \to \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon\right]$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} && \text{pois } x^2+y^2 > 0\\
&\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} && \text{pois } |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}\\
&= \sqrt{x^2+y^2} && \text{pois } \sqrt{x^2+y^2} \neq 0\\
&< \varepsilon && \text{fazendo } \delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, i é contínua no ponto $(0,0)$

Conclui-se que a função i é contínua em $\mathbb{R}^2$.