Funções reais de variável real

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Funções reais de variável real

- Noções elementares
- Limites de funções reais de variável real
- Funções contínuas

Funções reais de variável real

Neste capítulo vamos estudar funções reais de uma variável real, dando particular atenção às noções de limite e de continuidade bem como aos resultados envolvendo estes conceitos.

Funções reais de variável real (noções elementares)

Função:

Sejam D e B dois conjuntos (diferentes do vazio). Uma função **f** de **D** com valores em **B** é uma regra ou correspondência que associa a cada elemento **x** (objecto) de **D** **um e um só elemento y=f(x)** (imagem) de **B** .
Simbolicamente:

$$\begin{array}{rlll} \mathbf{f}: & \mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ & \mathbf{x} & \hookrightarrow & \mathbf{y=f(x)} \end{array}$$

Nota

- **x** chama-se variável independente (e toma valores em **D**);
- **y** chama-se variável dependente (dado que os seus valores dependem dos valores que a variável **x** toma) e toma valores em **B** .
- **f(x)** chama-se expressão analítica da função **f** , e traduz o modo como a variável **y** depende da variável **x**.
- O conjunto **D** é chamado o **DOMÍNIO** da função **f** , e **B** é chamado o **CONJUNTO de CHEGADA** de f.
- A função **f** diz-se real de variável real quando $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}$.

Funções reais de variável real (noções elementares)

Seja $\mathbf{f} : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Domínio e contradomínio:

- O DOMÍNIO de **f** (D_f) é o conjunto constituído pelos números reais que têm imagem pela função **f**, isto é, o conjunto dos números reais para os quais a expressão analítica de **f** está bem definida.
- O CONTRADOMÍNIO de **f** (D'_f) é o conjunto constituído por todas as imagens de f,
$$D'_f = \{f(x) : x \in D_f\}$$

Gráfico da função:

Chama-se GRÁFICO de f ao conjunto dos pares ordenados

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$$

Teste da recta vertical - Uma curva representada num referencial é o gráfico de uma função se e só se qualquer recta vertical intersecta o gráfico, no máximo, num ponto. Ou seja, a cada objecto corresponde uma e uma só imagem.

Funções reais de variável real (noções elementares)

Exemplos de funções

- a funcao constante: $f(x) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$;
- a função identidade: $f(x) = x$;
- a função afim: $f(x) = mx + b$, onde m, $b \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$;
- a função polinomial de grau n:
  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$; onde $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $a_0 \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Em particular:
  se $n = 2$, $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ é uma função quadrática;
  se $n = 3$, $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ é uma função cúbica;
- função potência: $f(x) = x^a$; onde $a \in \mathbb{R}$. Em particular:
  se $a = \frac{1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $f(x) = \sqrt[n]{x}$ e tem-se
  se n é par, $D_f = [0, +\infty[$;
  se n é ímpar, $D_f = \mathbb{R}$;
- a função racional: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são funções polinomiais. Note que $D_f = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$;
- função definida por ramos: definida por expressões diferentes em partes diferentes do seu domínio; por exemplo $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Funções reais de variável real (noções elementares)

Seja $\mathbf{f} : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Zeros da função:
Chamam-se ZEROS da função **f** aos valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 0$.

Monotonia da função:
A função **f** diz-se:

- **crescente** em $D \subset D_f$ se

$$\forall a,\ b \in D, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b);$$

  em particular **estritamente crescente** se $\forall a,\ b \in D, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$;

- **decrescente** em $D \subset D_f$ se

$$\forall a,\ b \in D, a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b);$$

  em particular **estritamente decrescente** se $\forall a,\ b \in D, a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$;

- **monótona** no intervalo D se é *crescente* ou *decrescente* em D; em particular, **estritamente monótona** se é *estritamente crescente* ou *estritamente decrescente*.
- Uma função constante f é *crescente e decrescente* em qualquer intervalo $D \subset D_f$.

Função majorada, minorada e limitada:

A função **f** diz-se:

- majorada quando
$$\exists M \in \mathbb{R} : \; \forall x \in D_f, \; f(x) \leq M,$$
ou seja, quando
$$\exists M \in \mathbb{R} : \; \forall x \in D, \; f(x) \in]-\infty, M];$$
- minorada quando
$$\exists m \in \mathbb{R} : \; \forall x \in D_f, \; f(x) \geq m,$$
ou seja, quando
$$\exists m \in \mathbb{R} : \; \forall x \in D_f, \; f(x) \in [m, +\infty[\,;$$
- limitada quando é majorada e minorada, ou seja quando
$$\exists \, m, M \in \mathbb{R} : \; \forall x \in D_f, \; f(x) \in [m, M],$$
ou equivalentemente, quando
$$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \; |f(x)| < c, \; \forall x \in D_f$$

Função injectiva, sobrejectiva e bijectiva:

A função **f** diz-se:

- **injectiva** quando a objectos distintos em D_f correspondem imagens distintas em $\mathbb{R}$

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2);$$

ou equivalentemente, quando

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- **sobrejectiva** quando o seu contra-domínio coincide com o conjunto de chegada, ou seja, quando

$$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in D_f : y = f(x);$$

- **bijectiva** quando é, simultaneamente, *injectiva* e *sobrejectiva*.

Nota. Graficamente verifica-se que uma função f é injectiva se, qualquer recta paralela ao eixo das abcissas intersecta o gráfico de f em apenas um ponto.

Funções reais de variável real (noções elementares)

Função par, ímpar e enquadrada:

A função **f** diz-se:

- **par** quando
$$\forall x, -x \in D_f, \ \ f(-x) = f(x);$$
- **ímpar** quando
$$\forall x, -x \in D_f, \ \ f(-x) = -f(x);$$
- **enquadrada** pelas funções g e h, tais que $D_g = D_h = D_f$, quando
$$\forall x \in D_f, \ \ g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Nota. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do referencial.

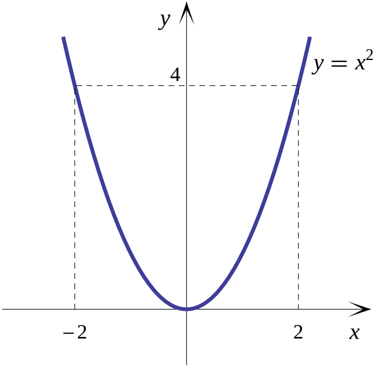
Função periódica:

A função **f** diz-se **periódica** de período $T > 0$ quando
$$\forall x \in D_f, \quad x + T \in D_f \quad \wedge \quad f(x+T) = f(x);$$

Funções reais de variável real (noções elementares)

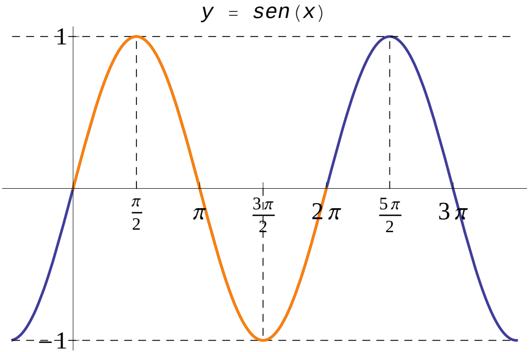
Exemplos

1. A função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$ é par, não é periódica, não é injectiva porque $f(-x)=f(x)$, nem é sobrejectiva porque $f(\mathbb{R})=[0,+\infty[$ e, portanto, dado $y<0$, não existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=y$. Além disso, f é minorada mas não é majorada. Não é monótona, embora seja estritamente crescente em $[0,+\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\infty,0]$.



Exemplos

2. Sobre a função $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\operatorname{sen} x$, podemos dizer que é ímpar, periódica de período 2π, não é injectiva porque $g(x)=g(x+2\pi)$, nem é sobrejectiva porque $g(\mathbb{R})=[-1,1]$. Podemos ainda dizer que g é limitada e que não é monótona, embora seja estritamente crescente, por exemplo, em $[0,\pi/2]$ e estritamente decrescente, por exemplo, em $[\pi/2,\pi]$.

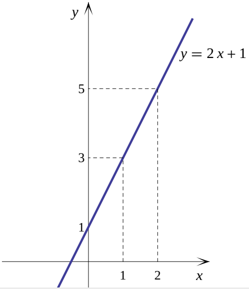


Exemplos

3. Consideremos agora a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x + 1$. Trata-se de uma função que não é par, não é ímpar, nem é periódica. É injectiva porque

$$h(x) = h(y) \Longrightarrow 2x + 1 = 2y + 1 \Longrightarrow x = y.$$

Também é sobrejectiva porque $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De facto, dado arbitrariamente $y \in \mathbb{R}$, basta tomar $x = (y - 1)/2$ para ter $h(x) = y$. Logo, h é bijectiva. Podemos ainda dizer que h não é majorada nem minorada, e que é estritamente crescente.



Funções reais de variável real (noções elementares)

Extremos da função:

Diz-se que a função $\mathbf{f} : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possui um:

- máximo absoluto em $a \in$D$_f$ se
$$\forall x \in D_f, f(a) \geq f(x);$$
- mínimo absoluto em $a \in$D$_f$ se
$$\forall x \in D_f, f(a) \leq f(x);$$
- máximo local (ou relativo) em $a \in$D$_f$ se
$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D_f, f(a) \geq f(x);$$
- mínimo local (ou relativo) em $a \in$D$_f$ se
$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D_f, f(a) \leq f(x);$$

Nota. Um ponto onde a função f atinge um extremo diz-se um ponto extremante de f, podendo tratar-se de um maximizante ou de um minimizante.

Funções reais de variável real (noções elementares)

Das definições apresentadas resulta que:

1.º Qualquer extremo absoluto é também extremo relativo.

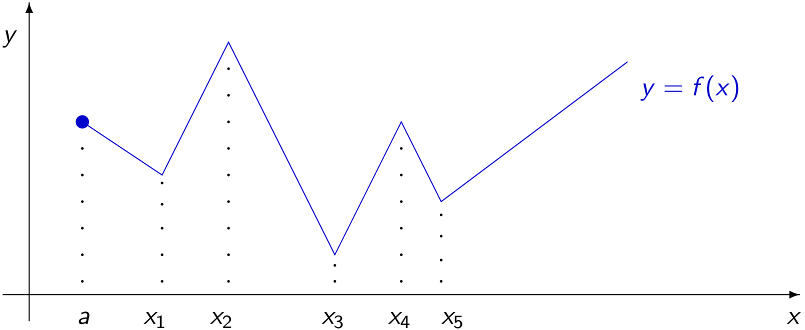
2.º Se uma função tem máximo absoluto este coincide com o maior dos máximos relativos e com o maior valor do contradomínio.

3.º Se uma função tem mínimo absoluto este coincide com o menor dos mínimos relativos e com o menor valor do contradomínio.

4.º Uma função pode ter extremos relativos e não ter extremos absolutos.

Exemplos

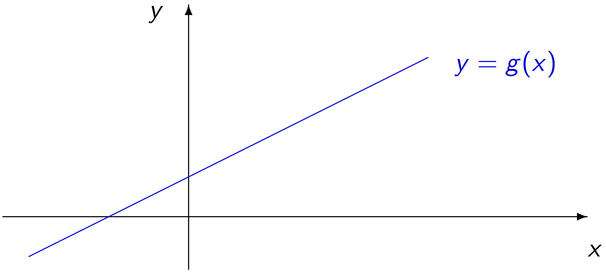
1. Consideremos a função f definida em $D = [a, +\infty[$, cuja representação gráfica é



A função f possui máximos locais em a, x_2 e x_4, que são $f(a)$, $f(x_2)$ e $f(x_4)$, respectivamente. Não possui máximo absoluto. Possui mínimos locais em x_1, x_3 e x_5, que são $f(x_1)$, $f(x_3)$ e $f(x_5)$, respectivamente, e um mínimo absoluto em x_3.

Exemplos

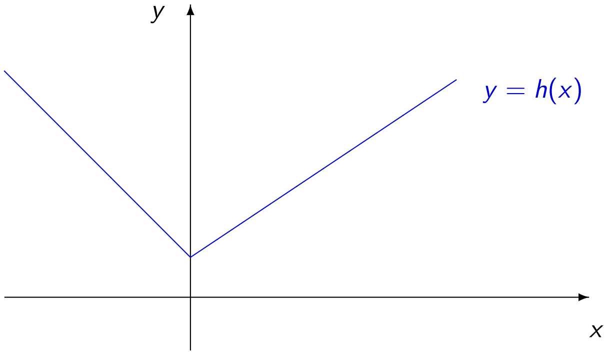
2. Consideremos agora a função g definida em $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica é



A função g não possui extremos locais (nem absolutos).

Exemplos

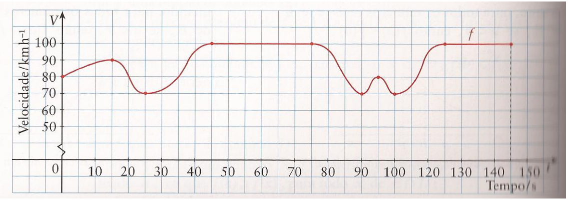
3. Seja agora a função h definida em $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica é



A função h não possui máximos locais (nem absolutos) mas possui um mínimo absoluto na origem, que é $h(0)$.

Exercício 1.

1. A partir de um determinado instante, considerado como origem, registaram-se os valores de velocidade, v em km/h, em função do tempo, t, em segundos, durante uma parte do circuito que um automóvel percorria num rali.



   1.1 O gráfico representa uma função? Justifique a sua resposta.
   1.2 Qual a variável dependente?
   1.3 Considere a função f representada graficamente. Determine:

$a)$	o domínio;	$b)$	o contradomínio;
$c)$	os intervalos de monotonia;	$d)$	os extremos relativos;
$e)$	os extremos absolutos;	$f)$	os minimizantes;
$g)$	os maximizantes.		

2. Calcular o domínio das funções: $a)$ $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$ $\quad b)$ $g(t) = \sqrt{1 - t^2}$

Funções reais de variável real (noções elementares)

Sejam $\mathbf{f}: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{g}: D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções.

Igualdade de funções:
As funções **f** e **g** dizem-se **iguais** quando

$$D_f = D_g = D \quad \wedge \quad f(x) = g(x), \ \forall x \in D.$$

Exemplos

1. As funções

$$f(x) = |x|, \ x \in \mathbb{R}^- \quad \text{e} \quad g(x) = -x, \ x \in \mathbb{R}^+,$$

   não são iguais.
   De facto, embora seja $f(x) = g(x) = -x$, as funções têm domínios diferentes.

2. Já as funções

$$h(x) = |x|, \ x \in \mathbb{R}^- \quad \text{e} \quad j(x) = \sqrt{x^2}, \ x \in \mathbb{R}^-,$$

   são iguais.
   Repare-se que, para $x \in \mathbb{R}^-$, vem $h(x) = j(x) = -x > 0$.

Funções reais de variável real (noções elementares)

Operações com funções:

- função soma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $D_{f+g} = D_f \cap D_g$;
- função diferença: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ e $D_{f-g} = D_f \cap D_g$;
- função produto: $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ e $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$;
- função quociente: $(\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$;

Exercício 2. Considere as funções $f(x) = \sqrt{1-x}$ e $g(x) = \sqrt{5+x}$. Calcule cada uma das funções $f+g$, $f-g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ e seus domínios.

Função composta:

Chama-se **função composta** de f com g à função fog (lê-se f após o g ou composta de f com g) tal que:

- $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$
- $(fog)(x) = f[g(x)], \ \forall x \in D_{fog}$

Observação

- A composição de duas funções não tem a propriedade comutativa mas tem a propriedade associativa

$$(fog)oh = fo(goh), \ \forall f, g, h.$$

- f e g dizem-se funções permutáveis quando

$$fog = gof$$

Exercício 3.

1. Considere $f(x) = x + 5$ e $g(x) = x^2 - 3$. Calcule:

$a)$	$fog(0)$	$b)$	$g(f(0))$	$c)$	$f(g(x))$
$d)$	$gof(x)$	$e)$	$fof(-5)$	$f)$	$g(g(2))$
$g)$	$f(f(x))$	$h)$	$gog(x)$		

2. Defina gof e fog, sendo f definida em $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ por $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ e g definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $g(x) = \sqrt{x}$.
3. Verifique se são ou não permutáveis as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 3x$ e $g(x) = 2x^2 + 1$.
4. Considere as $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$. Calcule as funções compostas fog, gof, fof, gog e seus domínios.

Uma função f admite função inversa se e só se f é injectiva.

Função inversa:

Seja f uma função real de variável real injectiva de domínio D_f

$$\begin{array}{llll} f: & D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \hookrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

Se D'_f o contradomínio de f, isto é, $D'_f = f(D_f)$, chama-se **função inversa de f** e representa-se por f^{-1} à função definida por:

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: & D'_f & \longrightarrow & D_f \\ & y & \hookrightarrow & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

em que $f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall x \in D_f$

Nota

- $D_{f^{-1}} = D'_f; \ D'_{f^{-1}} = D_f$
- Como $G_{f^{-1}} = \{(y, x) : (x, y) \in G_f\}$, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à recta $y = x$.

Funções reais de variável real (noções elementares)

- Para determinar a expressão da inversa, basta resolver em ordem a x a equação $y = f(x)$. No fim, para expressar f^{-1} como uma função de x, troca-se x por y.

Exercício 4.

1. Considere-se a função f definida por $f(x) = \frac{3}{x-2}$. Caracterize a função inversa de f
2. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$.
   a) Justifique se é possível ou não inverter estas funções em todo o seu domínio. Em caso negativo, indique o maior subdomínio onde é possível inverter cada uma.
   b) Caracterize as funções inversas de f de g.

Limites de funções reais de variável real

Nesta secção vamos estudar a noção mais importante do cálculo – o limite de uma função. Considerando uma função f de domínio $D \subset \mathbb{R}$ vamos falar *limite de $f(x)$ quando x tende para a*, para certo $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.

Ponto de acumulação e ponto isolado

Ideia intuitiva de limite

Definição de limite

Propriedades do limite

Limites laterais

Limites no infinito

Limites infinitos

Ponto de acumulação

- Diz-se que **a** é ponto isolado do conjunto D se $\mathbf{a} \in D$ e se existe pelo menos uma vizinhança de **a** em que **a** é o único elemento de D.
- Diz-se que **a** é ponto de acumulação do conjunto D se em qualquer vizinhança de **a** existe pelo menos um elemento de D diferente de **a**.

Ideia intuitiva de limite

Dada uma função $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, quando escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

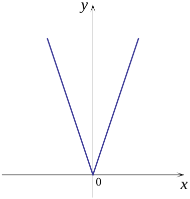
queremos dizer que os valores de $f(x)$ se aproximam de L à medida que x se aproxima do ponto a, por valores à esquerda ou à direita de a.

O limite apresentado pretende descrever o comportamento de f quando x está próximo de a mas é diferente de a; tal ponto a pode pertencer ou não ao domínio de f; se pertencer, o valor $f(a)$ não tem qualquer influência sobre o limite L. Tudo depende exclusivamente daquilo que se passa em pontos $x \neq a$ nas vizinhanças de a, ou seja, é necessário que a seja um *ponto de acumulação* de D.

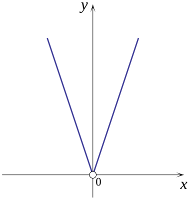
Exemplo

Analisemos, intuitivamente, a existência de limite na origem para as seguintes funções:

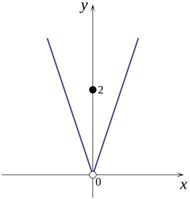
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3|x| \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3|x| \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} h : \quad \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & 3|x| \\ x = 0 & \mapsto & 2 \end{array}$$



Observamos que cada uma das funções se aproxima de 0, tanto quanto se queira, desde que se tome x suficientemente próximo de 0, sempre com $x \neq 0$, pelo que somos levados a conjecturar que seja

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0.$$

Definição: Limite de uma função num ponto

Sejam $\mathbf{f} : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\mathbf{a}$ um ponto de acumulação de D_f. Diz-se que o número real L é o **limite** de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se for possível tornar os valores $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, desde que x se torne suficientemente próximo de a, percorrendo apenas pontos do domínio D_f mas sem nunca atingir o ponto a.

Simbolicamente,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

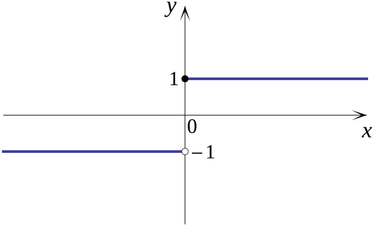
Significado geométrico: para qualquer $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\} \cap D_f$, no caso de haver limite, vai existir sempre uma vizinhança de L , $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$, que contém a imagem f(x).

Limites Laterais

No estudo de limites é útil introduzir a noção de limite lateral. Esta noção intervém muitas vezes para mostrar que certos limites não existem.

É o que se passa, por exemplo, com a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$



para a qual se tem

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1.$$

Estes limites representam precisamente os limites das restrições de f a $x < 0$ e a $x > 0$.

Limites de funções reais de variável real

Noutras situações, pode até existir o limite "completo", digamos $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, mas ser conveniente considerar separadamente

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x),$$

o que é possível desde que a seja ponto de acumulação, de ambos os lados, do domínio de f. Estão em causa os chamados *limites laterais*.

Definição: Limite lateral à direita em a
Sejam $\mathbf{f} : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\mathbf{a}$ um ponto de acumulação de D_f. Diz-se que o número real L é o limite lateral à direita de $f(x)$ quando x tende para $\mathbf{a}$ por valores à direita de $\mathbf{a}$ e escreve-se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição: **Limite lateral à esquerda em a:**
Sejam $\mathbf{f} : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\mathbf{a}$ um ponto de acumulação de D_f. Diz-se que o número real L é o limite lateral à esquerda de $f(x)$ quando x tende para $\mathbf{a}$ por valores à esquerda de $\mathbf{a}$ e escreve-se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \wedge a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

A existência de um limite "completo" pode ser decidida com base nos limites laterais, através do seguinte resultado.

Teorema:
Tem-se $L = \lim_{x \to a} f(x)$ se e só se existem e são iguais a L os correspondentes limites laterais, isto é,

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \iff \left(\lim_{x \to a^+} f(x) = L \;\wedge\; \lim_{x \to a^-} f(x) = L \right).$$

Limites de funções reais de variável real

Exemplos

(a) Não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

De facto, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$.

(b) Seja

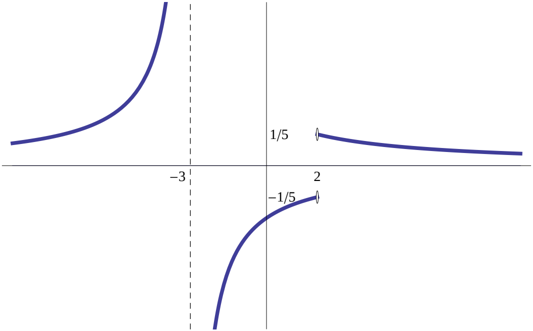
$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^2+x-6}, \quad x \in \setminus\{-3, 2\}.$$

Observe-se que $|x-2| = x-2$ se $x > 2$ e que $|x-2| = -(x-2)$ se $x < 2$. Assim,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{5}$$

Limites de funções reais de variável real

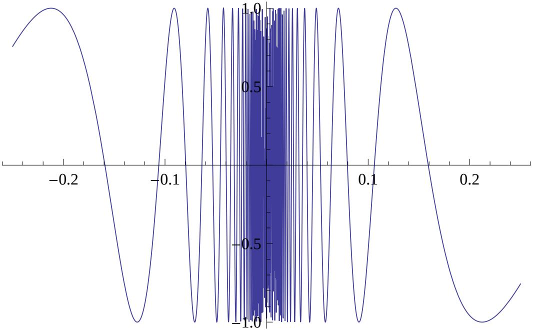


Uma vez que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

concluímos que não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(c) Seja $h(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Não existe $\lim_{x \to 0} h(x)$.

De facto, considerando

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ y \in \mathbb{R} : \ y = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

tem-se

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ , \ n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{y} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \ , \ n \in \mathbb{N},$$

donde

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e, portanto, o limite em causa não existe, uma vez que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in A}} h(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in B}} h(x) = -1.$$

Limites de funções reais de variável real

Os limites laterais são também úteis para descrever o comportamento de uma função em pontos extremos do seu domínio.

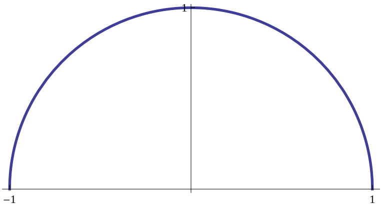
Exemplo

Considere-se a função definida por

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Esta função tem domínio $[-1, 1]$, de forma que, em $x = -1$, só podemos falar de $\lim_{x \to -1^+} g(x)$ e, em $x = 1$, de $\lim_{x \to 1^-} g(x)$. Tem-se

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = 0.$$



Limites de funções reais de variável real

Propriedades dos limites de funções

Usando a definição de limite, estabelem-se alguns resultados fundamentais, entre os quais destacamos os seguintes.

Propriedade 1 (Unicidade do limite)

O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.

Propriedade 2 (Aritmética dos limites)

1. a. Se k é uma constante e $a \in \mathbb{R}$ então $\lim\limits_{x \to a} k = k$.

   b. Se $a \in \mathbb{R}$ então $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

2. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = b_2$ em que $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ e **a** é finito, então:

   a. $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = b_1 + b_2$

   b. $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = b_1 - b_2$

   c. $\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = b_1 b_2$

   d. se $b_2 \neq 0$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}$

   e. $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n = b_1^n, \quad n \in \mathbb{N}$

   f. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{b_1}, \quad n \in \mathbb{N};\ f(x) \geq 0$ se n par

   g. Se $f(x) \leq g(x)$ num intervalo contendo a no seu interior, então $b_1 \leq b_2$

Exemplos

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{sen} x + x^2 \cdot \frac{1}{e^x} + 7\right) = 0 + 0 \cdot \frac{1}{1} + 7 = 7$

(b) Para calcular $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cos\frac{1}{x}$, a propriedade anterior não é aplicável, por não existir $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

Mas uma vez $\lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$ e que $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$, é imediato que

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\frac{1}{x} = 0$$

Limites de funções reais de variável real

Propriedade 3

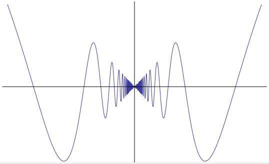
Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g é uma função limitada numa vizinhança de a , então

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = 0$$

Repare-se que a conclusão desta propriedade é válida ainda que não exista $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0.$

Não existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, mas a conclusão é justificada pela propriedade anterior, uma vez que $-1 \leq \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \leq 1,\ \forall x \in \backslash\{0\}$.



Limites de funções reais de variável real

Propriedade 4
Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $D'g \subset D_f$, e $\mathbf{a}$ um ponto de acumulação de D_g e $\mathbf{b}$ um ponto de acumulação de D_f. Se $\lim_{x\to a} g(x) = b$ e $\lim_{x\to b} f(x) = c = f(b)$, então $\lim_{x\to a}(fog)(x) = c$

Propriedade 5 (Princípio do enquadramento)
Sejam $f, g, h\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D tais que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in D\setminus\{a\}.$$

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ então também $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Limites de funções reais de variável real

Exemplo

$\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0.$

Tem-se $-1 \leq \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq 1\,,\ x \neq 0\,,$ pelo que

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq x^4\,,\ x \neq 0$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} (-x^4) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^4$, a propriedade anterior garante que o limite proposto vale 0.

Exercício 5.

1. Dado que $3 - x^2 \leq u(x) \leq 3 + x^2$ para todo $x \neq 0$, calcular $\lim_{x\to 0} u(x)$.
2. Mostrar que se $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Limites no infinito

Vamos agora dar significado à expressão $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ quando o domínio D_f é ilimitado inferiormente, e à expressão $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ quando D_f é ilimitado superiormente.

Definição

Diz-se que o número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ se for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que, em D_f, x se torne suficientemente grande. Simbolicamente, escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in D_f \wedge x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

De maneira análoga define-se o limite de $f(x)$ quando x tende para $-\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in D_f \wedge x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

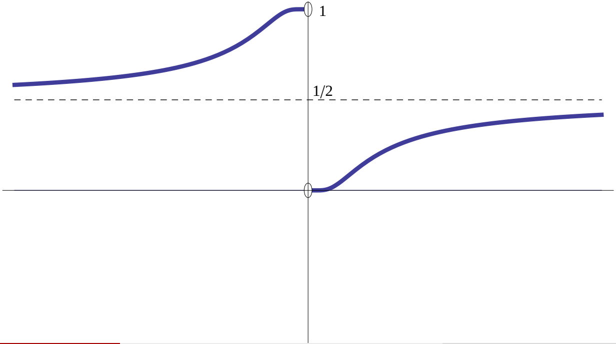
Observação

Para os limites no infinito valem, com as devidas adaptações, os resultados apresentados anteriormente sobre o limite para x a tender para um certo $a \in \mathbb{R}$.

Exemplos

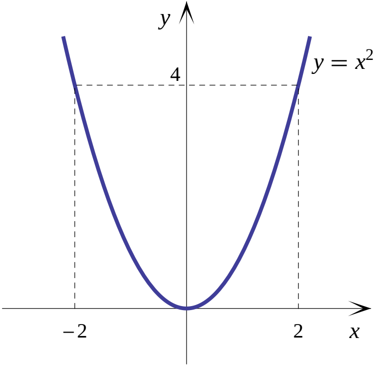
(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}$.

De facto, $x \to \pm\infty \implies 1/x \to 0 \implies e^{1/x} \to 1\,.$



(b) *Em* $\mathbb{R}$, *também não existe* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$ *nem existe* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$.

Basta atender a que x^2 *se torna ilimitado quando* $x \to -\infty$ *ou quando* $x \to +\infty$.

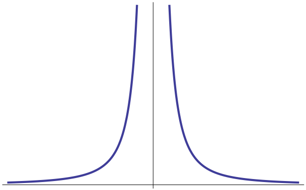


Limites infinitos

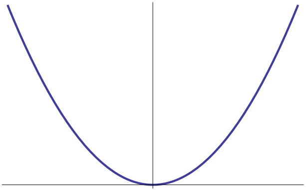
Suponhamos que pretendemos averiguar a existência de $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ e de $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, onde

$$h(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad g(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como h se torna ilimitada quando $x \to 0$ e g se torna ilimitada quando $x \to +\infty$, os limites em causa não existem.



$h(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

No entanto, estas funções tornam-se ilimitadas com um comportamento monótono, levando-nos a afirmar que $h(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para 0 e que $g(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$.

Adoptando a notação utilizada anteriormente para o limite, escrevemos

$$\lim_{x \to 0} h(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty\,.$$

Tratemos os casos gerais. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D_f. Dizemos que $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para a se for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente grande desde que x se torne suficientemente próximo de a, percorrendo apenas pontos de D, mas sem nunca atingir a. Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall N > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$$

Analogamente, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Aritmética

(a) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e g é minorada então $\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x) + g(x)\Big) = +\infty$.

(b) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $g(x) > k > 0$, $\forall x \in D$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = +\infty$.

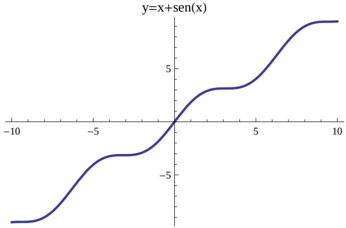
(c) Se $f(x) > 0$, $\forall x \in D$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ se e só se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

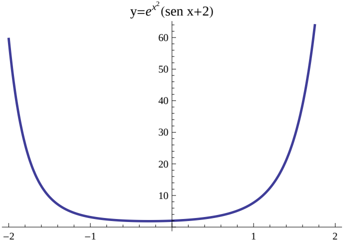
(d) Se f é limitada, com $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Exemplos

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \operatorname{sen} x) = +\infty$,
uma vez que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ e $\operatorname{sen} x$ é uma função limitada.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{x^2} \operatorname{sen} x + 2e^{x^2}\right) = +\infty$,
dado que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} = +\infty$ e $(\operatorname{sen} x + 2)$ é uma função limitada.





Exercício 6. Usando as propriedades dos limites, calcule:
(revisão das indeterminações do tipo: $\frac{0}{0}$, $+\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$)

1. $\lim_{x\to 1}(-5x^3+2x^2+1)$
2. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$
3. $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^4+x^3+3}$
4. $\lim_{x\to +\infty}(x^5-x^4)$ (regra: $\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)=\lim_{x\to\pm\infty}a_0x^n$)
5. $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{3}{x^2+x}$
6. $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (indet. $\infty-\infty$; levantar indet.: multiplicar e dividir a expressão pela sua conjugada)
7. $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ (indet. $\infty-\infty$)
8. $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{2x^3+x}$ (regra: $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_0x^n}{b_0x^m}$)
9. $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{3x^5-2x}{2x^2+1}$
10. $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2x}{-2x^4+x^2}$
11. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$ (indet. $\frac{0}{0}$; levantar indet.:decompor em factor os polinómios e simplificar. Caso o denominador continue a anular-se, há que calcular os limites laterais.)
12. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$ (indet. $\frac{0}{0}$)

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^4+2x^3}$ (indet. $\frac{0}{0}$)

14. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}(x^2-3)$ (indet. $0 \times \infty$ aplicando o produto de limites; levantar indet.: simplificar a expressão)

15. $\lim_{x\to 2^+} (x^2-4)\dfrac{5}{2-x}$ (indet. $0 \times \infty$)

Funções contínuas

Vamos agora tratar a noção de continuidade que, como sabemos, está extremamente relacionada com o conceito de limite. Faremos primeiro uma abordagem sobre a continuidade pontual, isto é sobre a continuidade do ponto de vista local, e passaremos depois a um tratamento global, onde nos interessaremos pelas propriedades das funções contínuas em intervalos.

Definição e primeiros exemplos

Descontinuidades

Continuidade lateral

Propriedades sobre a continuidade pontual

Resultados sobre funções contínuas

Funções contínuas

Definição e primeiros exemplos

Seja $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto do seu domínio. Diz-se que f é *contínua em* a quando

a é ponto isolado de D_f ou a é ponto acumulação e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Simbolicamente, traduz-se a continuidade de f em a escrevendo que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

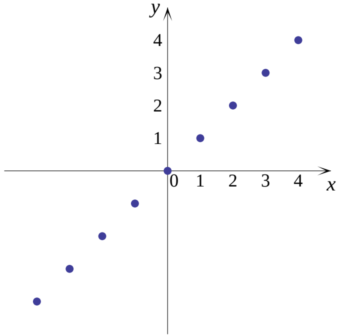
Diz-se ainda que:

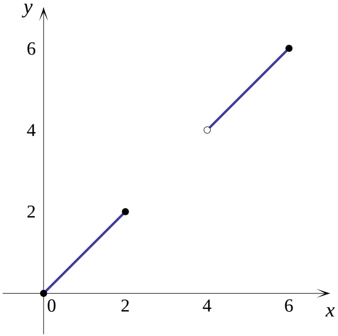
- f é contínua em A, com $A \subset D_f$, quando f é contínua em todo o ponto $a \in A$;
- f é *contínua* quando f é contínua em todo o domínio D_f.

Exemplos

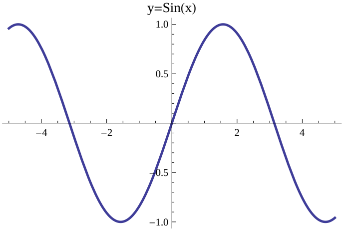
(a) As funções f e g definidas a seguir são contínuas.

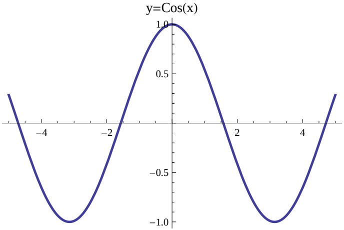
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} g:[0,2]\cup\,]4,6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$



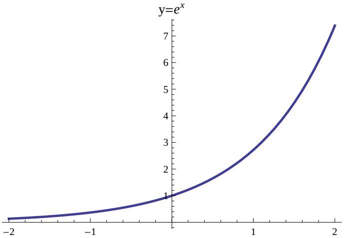


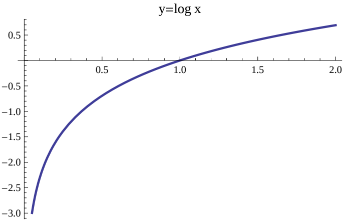
(c) As funções seno e cosseno são contínuas.





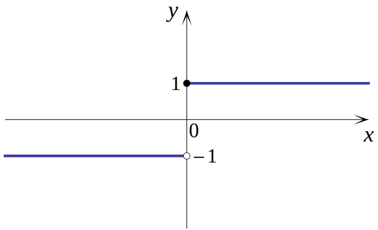
(d) As funções e^x, $x \in \mathbb{R}$, e $\log x$, $x \in \mathbb{R}^+$, são contínuas.

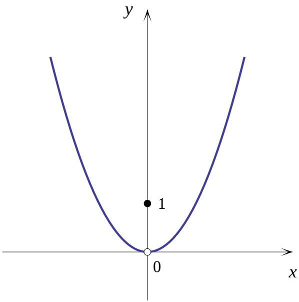




(e) A função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(f) A função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

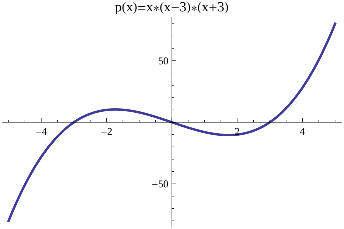


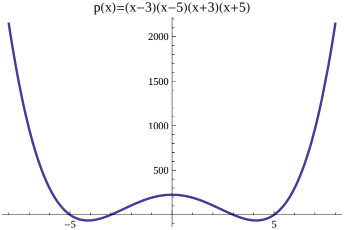


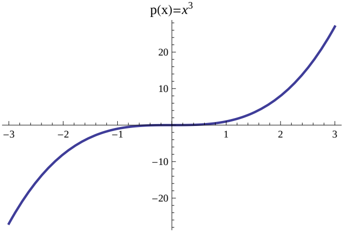
(b) Toda a função polinomial, $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como segue, é contínua

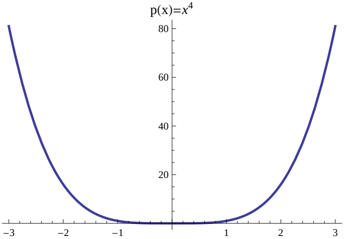
$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Em particular, toda a função constante é contínua.









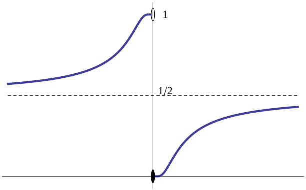
Descontinuidades

Da definição de continuidade, uma função $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possui uma *descontinuidade no ponto* $a \in D_f$ quando se verificar uma das duas condições seguintes:

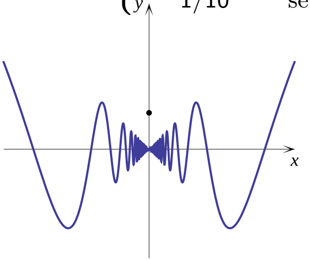
- não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
- existe $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ mas $L \neq f(a)$.

Exemplos As funções apresentadas a seguir possuem uma descontinuidade na origem.

(a) $j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



(b) $\ell(x) = \begin{cases} x \,\mathrm{sen}\,(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1/10 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



Continuidade lateral

A continuidade lateral é uma noção que assume algum interesse quando estão em causa pontos de acumulação do domínio da função, já que no caso de pontos isolados, a função é trivialmente contínua, pela própria definição.

Definição (Continuidade lateral)
Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{a} \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f.

- Diz-se que f é contínua à esquerda de **a** se $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
- Diz-se que f é contínua à direita de **a** se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Nota *É óbvio que uma função f é contínua em a se e só se f é contínua à direita e à esquerda no ponto a.*

Definição (Continuidade num intervalo)
Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que

- f é contínua em todos os pontos de um intervalo $]a, b[\subset D_f$ se for contínua em todos os pontos desse intervalo;
- f é contínua em todos os pontos de um intervalo $[a, b] \subset D_f$ se for contínua em $]a, b[$, contínua à direita no ponto **a** e contínua à esquerda no ponto **b**.

Propriedades sobre a continuidade pontual

Propriedades

1. Toda a função constante é contínua.
2. Se f e g são contínuas num ponto **a**, com $\mathbf{a} \in D_f \cap D_g$, então $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ (neste caso, para funções g com $g(a) \neq 0$), também são funções contínuas no ponto **a**.
3. Se f é contínua num ponto **a**, com $\mathbf{a} \in D_f$, então f^n $(n \in \mathbb{N})$, e $\sqrt[n]{f}$ sendo $n \in \mathbb{N}$ e $f(a) \geq 0$ quando n é par, são ainda funções contínuas em ponto **a**;
4. Se as funções f e g são tais que f é contínua em **a** e g é contínua em $b = f(a)$ e $D'f \subset D_g$, então gof é contínua em **a**, ou seja,
$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = g(f(a))$$

Propriedades

1. Toda a função polinomial é contínua em R;
2. Toda a função racional é contínua no seu domínio;
3. Toda a função exponencial $f(x) = b^x$ $(b \in R^+ \backslash \{1\})$ é contínua em $\mathbf{R}$;
4. Toda a função logarítmica é contínua no seu domínio;

Exercício 7.

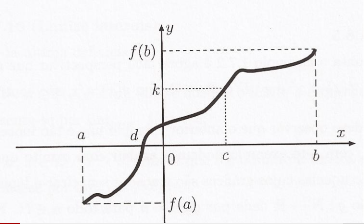
1. Verifique se é ou não contínua a função f, definida por:
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4} & \text{se} \quad x<2\\[2mm] \dfrac{5}{2^x} & \text{se} \quad x\geq 2\end{cases}$$
2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:
$$f(x)=\begin{cases}e^{x-1}+1 & \text{se} \quad x\leq 1\\ \dfrac{3x-3-\ln x}{x-1} & \text{se} \quad x>1\end{cases}$$
   2.1 Estude a continuidade de f no ponto $x=1$.
   2.2 Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Para um determinado de valor de a, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f, definida por
$$f(x)=\begin{cases}\log_2(a-x) & \text{se} \quad x\leq 0\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$
Determine o valor de a.

Resultados sobre funções contínuas

Teorema do valor intermédio ou de Bolzano
Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e se k é um valor estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

Corolário do Teorema de Bolzano
Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e se $f(a)f(b) < 0$, então f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]a, b[$.

Gráfico ilustrativo do Teorema de Bolzano e seu Corolário:



Teorema de Weierstrass

Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, então f tem um máximo e um mínimo em $[a, b]$ (ou seja, existem pontos c_1, $c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$).

Exercício 8.

1. Mostre que a equação $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma raíz no intervalo $]0, \pi[$.
2. Mostre que a equação $(1 - x)\cos x = \sin x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 1[$.
3. Mostre que a função $f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ tem pelo menos um zero no intervalo $[0, 1]$.
4. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = x - \ln(x + \frac{2}{x})$. Recorrendo ao Teorema de Bolzano mostre que:
    - 4.1 g admite pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$;
    - 4.2 a equação $g(x) = 1$ é possível no intervalo $]2, 3[$.
5. Seja f uma função contínua de domínio $[0, 1]$ e contradomínio $]0, 1[$. Mostre, usando o Teorema de Bolzano, que o gráfico de f intersecta a recta de equação $y = x$.

Funções contínuas

Teorema

Se f é uma função contínua num intervalo $\mathbb{I}$, então f é injectiva em $\mathbb{I}$ se e só se é crescente ou decrescente em $\mathbb{I}$.

Teorema

Se f é uma função contínua e injectiva num intervalo $\mathbb{I}$, então

(i) f é crescente em $\mathbb{I} \Longrightarrow f^{-1}$ é crescente em $\mathbb{I}$.

(ii) f é decrescente em $\mathbb{I} \Longrightarrow f^{-1}$ é decrescente em $\mathbb{I}$.

Teorema

Se f é uma função contínua e injectiva num intervalo $\mathbb{I}$, então f^{-1} é contínua no seu domínio.

Soluções

Exercício 1.

1.1 Sim. A cada instante do percurso corresponde uma e uma só velocidade;
1.2 v
1.3a) $D_f = [0, 145]$; 1.3b) $D'_f = [70, 100]$
1.3c) f é crescente em: [0,15]; [25,75]; [90,95]; [100,145]
1.3c) f é decrescente em: [15,25]; [45,90]; [95,100]; [125,145]
1.3d) mínimos relativos: $70; 80; 100$; máximos relativos: $80; 90; 100$;
1.3e) máximo absoluto: 100; mínimo absoluto: 70
1.3f) minimizantes: $0; 25;]45,75[; 90; 100;]125,145]$; maximizantes: 15; [45;75]; 95; [125,145]

2a) $D_f =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$;
2b) $D_g = [-1, 1]$

Exercício 2.