Ficha 2

1. $T(t) = \operatorname{sen} t + t^2$

a) taxa de variação média de T no intervalo $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(\pi/6) - T(-\pi/6)}{\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6})} = \frac{\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2}{36} - \left(\sin(-\frac{\pi}{6}) + \frac{\pi^2}{36}\right)}{\frac{2}{6}\pi}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{36} - (-\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{36})}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} + \cancel{\frac{\pi^2}{36}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\pi^2}{36}}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}$$

b) $T'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{T(t) - T(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t + t^2}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{t^{\cancel{2}}}{\cancel{t}} = 1 + 0 = 1$$

2.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

• $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cancel{2} - x - \cancel{2}}{2(x+2)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x}}{2(x+2)\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{2(x+2)} = -\frac{1}{4}$$

Recta tangente:

$y = mx + b$

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

C.A.

• $m = -\frac{1}{4}$

• $f(0) = \frac{1}{2}$

• $b = y - mx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0$

$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

b) $g(x) = \sqrt{x+1}$

• $g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \overset{(0/0)}{=}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{1} - \cancel{1}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$= \frac{1}{2}$

Recta tangente:

$y = \overset{=\frac{1}{2}}{m}x + b$

$y = \frac{1}{2}x + 1$

C.A.: $m = g'(0) = \frac{1}{2}$

$g(0) = \sqrt{0+1} = 1$

$y = mx + b \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + b$

$\Leftrightarrow 1 = 0 + b \Rightarrow b = 1$

(2)

c) $f(x) = e^{x^2}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - e^0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} x \times \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} x \times \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 0 \times 1 = 0$$

recta tangente:

$y = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{m}x + b$

$y = 1$

C.A.: $f(0) = e^0 = 1$

$b = y - mx \Leftrightarrow b = 1 - 0\times 0 = 1$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

$f'(1) = ?$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1-(2-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x-1} \overset{0/0}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-(2-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2$$

Como $f'(1^+) = f'(1^-)$, então existe e $f'(1) = 2$

4. $f(x) = |x-1| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 1} f(x) \overset{?}{=} f(1)$

Vejamos:

- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x-1 = 0$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -x+1 = 0$
- Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$, existe

$\lim_{x \to 1} f(x)$ e $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

- $f(1) = 0$

Como $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$, f é contínua em $x = 1$

b)

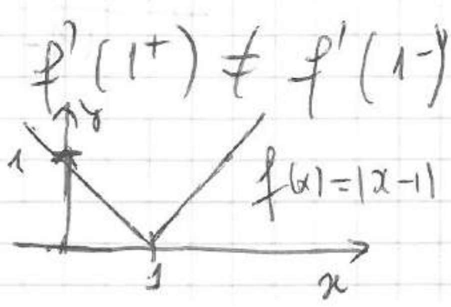
$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\cancel{x-1} - 0}{\cancel{x-1}} = 1$

$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x+1-0}{x-1} =$

$= -1$

Como $f'(1^+) \neq f'(1^-)$, não existe $f'(1)$.

c)



5. Recta tangente ao gráfico de f:

$y = mx + b$

Como passa na origem, então $b=0$:

$y = mx$

Como passa no ponto $(1,2)$, então:

$2 = m \times 1 \Rightarrow m = 2$

Portanto: $y = 2x$ e consequentemente

$f'(1) = 2$ que é o declive da recta tang. em $x=1$.

6. Regras das derivadas:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$

$$f'(x) = \left(x^{1/2} + \ln x\right)' = \left(x^{1/2}\right)' + (\ln x)'$$
$$= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \times x' + \frac{x'}{x}$$
$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

b) $$g'(x) = \left(\frac{x+\cos x}{1-\sin x}\right)' = \frac{(x+\cos x)' \cdot (1-\sin x) - (x+\cos x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)(1-\sin x) - (x+\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)^2 + \cos x\,(x+\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{1 + \overbrace{\sin^2 x - 2\sin x + x\cos x + \cos^2 x}^{1}}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1+1-2\sin x + x\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\,(1-\sin x) + x\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

c) $h(x) = (1+\cos x)^4$

$h'(x) = \left((1+\cos x)^4\right)' = 4(1+\cos x)^3 (1+\cos x)'$

$= 4(1+\cos x)^3(-\sin x)$

7. $f(x) = g(\sin^2 x) - g(\cos^2 x)$

$f'(x) = \left(g(\sin^2 x)\right)' - \left(g(\cos^2 x)\right)'$

$\Leftrightarrow f'(x) = (\sin^2 x)' \cdot g'(\sin^2 x) - (\cos^2 x)' \cdot g'(\cos^2 x)$

$\Leftrightarrow f'(x) = 2\sin x\cos x \cdot g'(\sin^2 x) + 2\cos x \cdot \sin x \, g'(\cos^2 x)$

Portanto,

$f'(x) = 2\sin x\cos x \left(g'(\sin^2 x) + g'(\cos^2 x)\right)$

$f'(0) = 2\times 0\times 1 \left(g'(0) + g'(1)\right) = 0$

8.

a) $f(3x) \Longrightarrow (f(3x))' = (3x)' \cdot f'(3x) = 3f'(3x)$

b) $f(x^2) \rightarrow (f(x^2))' = (x^2)' \cdot f'(x^2) = 2x f'(x^2)$

c) $f(5f(x)) \rightarrow (f(5f(x)))' = (5 \cdot f(x))' \cdot f'(5f(x))$

$= 5f'(x) \cdot f'(5f(x))$

9.

a) $(x \cdot \arcsin(4x))' = x' \cdot \arcsin(4x) + x \cdot (\arcsin(4x))'$

$= \arcsin(4x) + x \cdot \dfrac{(4x)'}{\sqrt{1-(4x)^2}}$

$= \arcsin(4x) + x \times \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$

$= \arcsin(4x) + \dfrac{4x}{\sqrt{1-16x^2}}$

b) $\left(\operatorname{arctg}^2(7t)\right)' = 2\operatorname{arctg}(7t) \times \left(\operatorname{arctg}(7t)\right)'$ ⑥

$= 2\operatorname{arctg}(7t) * \dfrac{(7t)'}{1+(7t)^2}$

$= 2\operatorname{arctg}(7t) * \dfrac{7}{1+49t^2} = \dfrac{14\operatorname{arctg}(7t)}{1+49t^2}$

c) $\left(\arccos\left(\frac{1}{y}\right)\right)' = -\dfrac{\left(\frac{1}{y}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}} = -\dfrac{-\frac{1}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}$

$= \dfrac{\frac{1}{y^2}}{\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}} = \dfrac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{|y|} \times \sqrt{y^2-1}} = \dfrac{|y|}{y^2 \times \sqrt{y^2-1}}$

d) $K(x) = \cos(\operatorname{arctg} x)$

$K'(x) = \left(\cos(\operatorname{arctg} x)\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' \cdot \sin(\operatorname{arctg} x)$

$= -\dfrac{1}{1+x^2} \times \sin(\operatorname{arctg} x)$

e) $\left(3t \arcsin\sqrt{t^2-1}\right)' = (3t)' \cdot \arcsin\sqrt{t^2-1} + 3t \times \left(\arcsin\sqrt{t^2-1}\right)'$

$= 3\arcsin\sqrt{t^2-1} + 3t \times \dfrac{\left(\sqrt{t^2-1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{t^2-1}\right)^2}}$

$= 3\arcsin\sqrt{t^2-1} + 3t \dfrac{\left((t^2-1)^{1/2}\right)'}{\sqrt{1-(t^2-1)}}$

$= 3\arcsin\sqrt{t^2-1} + 3t \dfrac{\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}t \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}}{\sqrt{2-t^2}}$

$= 3\arcsin\sqrt{t^2-1} + \dfrac{3t^2}{\sqrt{t^2-1} \times \sqrt{2-t^2}}$

f) $\left(\dfrac{1}{\cos y} - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right)\right)' = \left(\dfrac{1}{\cos y}\right)' - \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right)\right)'$

$= \dfrac{-(-\sin y)}{\cos^2 y} - \dfrac{\left(\frac{y}{2}\right)'}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}$

$= \dfrac{\sin y}{\cos^2 y} - \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{y^2}{4}} = \dfrac{\sin y}{\cos^2 y} - \dfrac{1}{2+\frac{y^2}{2}}$

10. ponto $x=b$

* f não é contínua em $x=b$, logo não existe $f'(b)$
* Em b não existe nenhuma das derivadas laterais

(f não é contínua à direita de b, e f não é contínua à esquerda de b)

ponto $x=0$: existem as derivadas laterais,

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)>0 \\ f'(0^+)<0 \end{array}\right. \Rightarrow \nexists f'(0)$$

ponto $x=c$, existe a derivada lateral à esquerda.

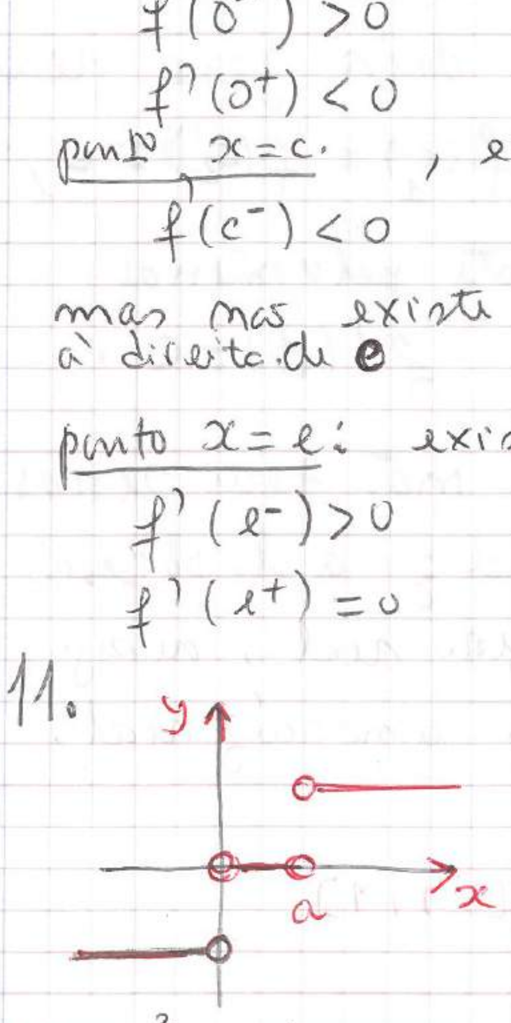
$f'(c^-)<0$

mas não existe $f'(c^+)$, pois f não é contínua à direita de c

ponto $x=e$: existem as derivadas laterais

$$\left.\begin{array}{l} f'(e^-)>0 \\ f'(e^+)=0 \end{array}\right. \quad \text{mas não existe } f'(e)$$

11.



12. $x^3+x-1=0$

Seja $f(x)=x^3+x-1$

1º usar o Corolário de Bolzano para mostrar que existe uma raiz real

* f é uma função polinomial, então f contínua em $\mathbb{R}$, e em particular é contínua no intervalo $[0,1]$

• Como $f(0)=-1<0$ e $f(1)=1>0$

Nota:

* Corolário Bolzano:
se f é uma função contínua num intervalo $[a,b]$ e se $f(a)\times f(b)<0$, então f tem pelo menos um zero no intervalo $]a,b[$

* Corolário de Rolle
Seja f uma função contínua que é derivável em $]a,b[$.

1º Entre dois zeros de f existe pelo menos um zero pelo Corolário de Bolzano, existe pelo menos $c_1 \in]0,1[$ tal que: $f(c_1)=0$., ou seja, a equação dada tem uma raíz real.

(8)

2.º Usar o teorema de Rolle para mostrar que a equação dada não tem outra raíz real:

Vejamos:

Se a função f tivesse dois zeros reais, c_1 e c_2, isto é, $f(c_1) = f(c_2) = 0$, então

Pelo T.ᵃ Rolle, existe pelo menos $d \in]c_1, c_2[$ tal que $f'(d)=0$.

Mas $f'(x) = 3x^2+1$ não tem zeros reais, o que contradiz a hipótese. Logo f só tem um zero real, ou seja, a equação dada só tem uma raíz real.

13. $x^3+3x+a=0$, $[-1, 1]$

Seja $f(x) = x^3+3x+a$

* f é uma função polinomial, Logo é contínua e derivável em $\mathbb{R}$, e em particular $[-1,1]$.

• Se f tivesse dois zeros reais, c_1 e c_2, então pelo Teorema de Rolle, existe pelo menos um zero de f':

Mas $f'(x) = 3x^2+3$ não tem zeros reais, o que contradiz a hipótese.

Logo f possui quanto muito, um zero real.

2.º usar Corolário Bolzano para mostrar que f tem exatamente um zero real.

$f(-1) = -4 + a$

$f(1) = 4 + a$

* $f(-1) \times f(1) = (a-4)(a+4) = a^2 - 16 < 0$ se $-4 < a < 4$

* se $a = 4$, então $f(-1) = 0$

se $a = -4$, então $f(1) = 0$

Portanto se $-4 \leq a \leq 4$, f tem um zero no intervalo $[-1, 1]$.

14.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $x \in [-1, 1]$

f é uma função polinomial. Logo é contínua e derivável em $\mathbb{R}$, e em particular no intervalo $[-1, 1]$.

Pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]-1, 1[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6c + 2 = \frac{10 - 6}{2} \Leftrightarrow 6c = 0$$

C.A.

$$\Leftrightarrow c = 0$$

C.A.

$f'(x) = 6x + 2 \rightarrow f'(c) = 6c + 2$

$f(1) = 3 + 2 + 5 = 10$

$f(-1) = 3 - 2 + 5 = 6$

Nota:

Teorema do valor médio de Lagrange

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a, b[$.

Então $\exists c \in]a, b[$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente significa que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [0,1]$

- f é contínua em $\mathbb{R}$, e em particular $[0,1]$
- $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, f é derivável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

e em particular no intervalo $]0,1[$

Logo f satisfaz as condições do Teorema Lagrange no intervalo $[0,1]$, pelo que

$$\exists c \in]0,1[: f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}} = \frac{1-0}{1-0} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{c^2} = \frac{1}{3} \underset{\text{(elevar 3 ambos os lados)}}{\Leftrightarrow} c^2 = \frac{1}{3^3} \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{\frac{1}{3^3}}$$

$$\Leftrightarrow c = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{9}$$

Como $c \in]0,1[$, a solução é $c = +\frac{\sqrt{3}}{9}$

c) $h(x) = \frac{x}{x+2}$, $x \in [1,4]$

- h é contínua no seu domínio $D_h = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$
- $h'(x) = \frac{1\times(x+2) - 1\times x}{(x+2)^2} \Leftrightarrow h'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$; $D_{h'} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

h é derivável em $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Assim, h satisfaz as condições do T. de Lagrange no intervalo $[1,4]$.

Existe $c \in]1,4[: h'(c) = \frac{h(4)-h(1)}{4-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(c+2)^2} = \frac{\frac{4}{4+2} - \frac{1}{1+2}}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{(c+2)^2} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(c+2)^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{3}{1}} \Leftrightarrow \frac{2}{(c+2)^2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow (c+2)^2 = 18$$

$\Leftrightarrow c+2 = \pm\sqrt{18} \Leftrightarrow c = -2 \pm 3\sqrt{2}$. Como $c \in]1,4[$, a solução é $c = -2+3\sqrt{2}$.

15.
Sabemos: $f(2) = ?$

- $f(0) = -3$
- $f'(x) \leq 5$, $\forall x \in D_f$
- f é derivável no seu domínio.

Se f é derivável no seu domínio então f é contínua no seu domínio.

Considerando o intervalo $[0,2]$ contido no seu domínio, tem-se que f satisfaz as condições do T. Lagrange no intervalo $[0,2]$.

Logo, existe $c \in]0,2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(2)+3}{2}$$

Como, por hipótese, $f'(c) \leq 5$, vem:

$$\frac{f(2)+3}{2} \leq 5 \Leftrightarrow f(2)+3 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \quad f(2) \leq 10-3 \quad , \Leftrightarrow f(2) \leq 7$$

Logo, o maior valor possível para $f(2)$ é 7.

16.

Mostrar que:

$2\arcsin x = \arccos(1-2x^2)$,

ou seja $2\arcsin x - \arccos(1-2x^2) = 0$

para $x \in [0,1]$.

* Corolário do Teorema de Lagrange

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

f é uma função constante se e só se $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$

• Seja $f(x) = 2\arcsin x - \arccos(1-2x^2)$. (12)

$Df = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq 1-2x^2 \leq 1\} \underset{C.A.}{=} [-1,1]$

C.A.:

$1-2x^2 \leq 1 \wedge 1-2x^2 \geq -1$

$-2x^2 \leq 0 \wedge -2x^2+2 \geq 0$.

$x^2 \geq 0 \wedge x^2-1 \leq 0$

$x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

Se mostrarmos que $f'(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$ então pelo Corolário Teorema de Lagrange $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ $\forall x \in [0,1]$.

Vejamos,

$$f'(x) = \left(2\arcsin x - \arccos(1-2x^2)\right)'$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-(-4x)}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{1-(1-4x^2+4x^4)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{\cancel{1}-\cancel{1}+4x^2-4x^4}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}} \underset{x \in [0,1]:\ |x| = x}{=} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4\cancel{x}}{2\cancel{x}\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \cancel{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}} - \cancel{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}} = 0, \quad \forall x \in [0,1]$$

Portanto, pelo Corolário T. de Lagrange f é uma função constante $\forall x \in [0,1]$. Para determinar K, basta determinar o valor de f num $x \in [0,1]$.

Por exemplo, para $x=0$ tem-se:

$$f(0)=k \Leftrightarrow 2\arcsin 0 - \arccos 1 = k$$

$$\Leftrightarrow 2\times 0 - 0 = k \Leftrightarrow k=0$$

Portanto, $f(x)=0$, ou seja,

$$2\arcsin x = \arccos(1-x^2), \quad \forall x \in [0,1].$$

17. Mostrar que: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

Seja $g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x - \frac{\pi}{2}$; $D_g = \mathbb{R}$

$$g'(x) = \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x - \frac{\pi}{2}\right)' = \cancel{\frac{1}{1+x^2}} - \cancel{\frac{1}{1+x^2}} + 0 = 0.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, pelo Corolário T. de Lagrange g é uma função constante $\forall x \in \mathbb{R}$: $g(x) = k$

Para determinar k, basta calcular o valor de g num $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, em $x=1$:

$$g(1) = k \Leftrightarrow \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arccotg} 1 - \frac{\pi}{2} = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{\pi}{4}} + \cancel{\frac{\pi}{4}} - \cancel{\frac{\pi}{2}} = k \Leftrightarrow k=0$$

Portanto, $g(x)=0$, ou seja,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

18. indeterminações : $\frac{0}{0}$; $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; 0^0; ∞^0; $1^{+\infty}$

SABER

Teorema: Regra de L'Hôpital

Sejam $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $]a,b[$, com $a<b$ e possivelmente infinitos. Seja x_0 um dos extremos do intervalo $]a,b[$.

Se $g'(x_0) \neq 0$; $\forall x \in]a,b[$ e

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

Então, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{R. L'Hop.}}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$

14

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \underset{\text{R. L'Hop.}}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{\text{R. L'Hop}}{\overset{\infty/\infty}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{\infty}{2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \underset{\text{R. L'Hop.}}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^{1/3})'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3} x^{-2/3}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{x \cdot x^{-2/3}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{\sqrt[3]{+\infty}} = \frac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} \underset{\text{R. L'Hôp.}}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x.\sin x)'}{(1-\cos x)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{-(-\sin x)} \underset{\text{R. L'Hop.}}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x + x\cos x)'}{(\sin x)'}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x + x(-\sin x)}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos x - x\sin x}{\cos x}$

$= \frac{2\cos 0 - 0 \times \sin 0}{\cos 0} = \frac{2-0}{1} = 2$

e) "produtos indeterminados":

$\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x \overset{0\times\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{R. L'Hop.}}{\overset{-\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

f1) "diferenças indeterminadas" (extra!)

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) \overset{\infty-\infty}{=}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1-\sin x}{\cos x} \underset{\text{R. L'Hôp.}}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{-}\cos x}{\cancel{-}\sin x} = \frac{0}{1} = 0$

"potencias indeterminadas"

f) $\lim_{x\to 0^+} x^x \overset{0^0}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} =$

$= e^{\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x \ln x}_{C.A.}} \underset{CA}{=} e^0 = 1$

C.A:

$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x \underset{(2)}{=} 0$

$f_3)$ $\lim_{x\to 0^+} (1+\sin 4x)^{\cot g x} \overset{1^{+\infty}}{=}$ (extra!)

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+\sin 4x)^{\cot g x}}$

$= e^{\overbrace{\lim_{x\to 0^+} \cot g x \cdot \ln(1+\sin 4x)}^{C.A.}} \underset{C.A.}{=} e^4$

C.A:

$\lim_{x\to 0^+} \cot g x \cdot \ln(1+\sin 4x) \overset{0\times\infty}{=}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x \cdot \ln(1+\sin 4x)}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\underset{R.\,L'Hôp.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos x \cdot \ln(1+\sin 4x))'}{(\sin x)'}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x \cdot \ln(1+\sin 4x) + \cos x \cdot \frac{(1+\sin 4x)'}{1+\sin 4x}}{\cos x}$

$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x \cdot \ln(1+\sin 4x)}{\cos x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}$

$= \frac{0}{1} + \frac{4}{1} = 4$

19. $P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

a) $f(x) = \sin x$; $n = 3$; $a = 0$

$f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x \rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos x \rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$$P_{3,0}(x) = \overset{=0}{f(0)} + \overset{=1}{f'(0)}x + \frac{\overset{=0}{f''(0)}}{2!}\cdot x^2 + \frac{\overset{=-1}{f'''(0)}}{3!}x^3$$

$$\therefore P_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$

b) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = (e^{-x/2})' = \left(-\frac{x}{2}\right)' \cdot e^{-x/2} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x/2} = \frac{1}{4}e^{-x/2} \rightarrow f''(0) = \frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{1}{4}(e^{-x/2})' = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x/2} = -\frac{1}{8}e^{-x/2} \rightarrow f'''(0) = -\frac{1}{8}$

$$P_{3,0}(x) = \overset{=1}{f(0)} + \overset{=-\frac{1}{2}}{f'(0)}x + \frac{\overset{=\frac{1}{4}}{f''(0)}}{2!}x^2 + \frac{\overset{=-\frac{1}{8}}{f'''(0)}}{3!}x^3$$

$$P_{3,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{8}\times\frac{1}{3!}x^3$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^3}{48}$$

c) $f(x) = \cos(\pi - 5x)$

$f(0) = \cos\pi = -1$

$f'(x) = -(\pi-5x)' \cdot \sin(\pi - 5x) = 5\sin(\pi-5x) \rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -25\cos(\pi - 5x) \rightarrow f''(0) = -25\cos(\pi) = 25$

$f'''(x) = -125\sin(\pi - 5x) \rightarrow f'''(0) = 0$

$P_{3,0}(x) = \overset{=-1}{f(0)} + \overset{=0}{f'(0)}x + \frac{\overset{=25}{f''(0)}}{2!}x^2 + \frac{\overset{=0}{f'''(0)}}{3!}x^3$

$P_{3,0}(x) = -1 + \frac{25}{2}x^2$

d) $f(x) = \sqrt{4x+1}$

$f(0) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \left((4x+1)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(4x+1)^{-1/2} \times 4 = 2(4x+1)^{-1/2} \rightarrow f'(0) = 2$

$f''(x) = 2\left((4x+1)^{-1/2}\right)' = \cancel{2} \times \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(4x+1)^{-3/2} \times 4 =$

$= -4(4x+1)^{-3/2} \longrightarrow f''(0) = -4$

$f'''(x) = -4\left((4x+1)^{-3/2}\right)' = -\overset{2}{\cancel{4}} \times \left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)(4x+1)^{-5/2} \times 4$

$= 24(4x+1)^{-5/2} = \frac{24}{\sqrt{(4x+1)^5}} \longrightarrow f'''(0) = 24$

$P_{3,0}(x) = \overset{=1}{f(0)} + \overset{=2}{f'(0)}x + \frac{\overset{=-4}{f''(0)}}{2!}x^2 + \frac{\overset{=24}{f'''(0)}}{3!}x^3$

$= 1 + 2x - \frac{4}{2}x^2 + \frac{24}{6}x^3$

$= 1 + 2x - 2x^2 + 4x^3$

e) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

$f(0) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \left(\frac{1}{x+2}\right)' = -\frac{1}{(x+2)^2} \longrightarrow f'(0) = -\frac{1}{4}$

$f''(x) = -\left((x+2)^{-2}\right)' = 2(x+2)^{-3} = \frac{2}{(x+2)^3} \rightarrow f''(0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$$f'''(x) = \left(2\left((x+2)^{-3}\right)\right)' = -6(x+2)^{-4} = -\frac{6}{(x+2)^4} \rightarrow f'''(0) = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$P_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$ (18)

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}x^2 - \frac{\cancel{3}}{8}\times\frac{1}{\cancel{6}_2}x^3$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - \frac{3}{16}x^3$$

f) $f(x) = x e^{3x}$

$f(0) = 0$

$$f'(x) = (xe^{3x})' = e^{3x} + 3xe^{3x} \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = (e^{3x} + 3xe^{3x})' = 3e^{3x} + 3e^{3x} + 9xe^{3x}$$

$$= 6e^{3x} + 9xe^{3x} \longrightarrow f''(0) = 6$$

$$f'''(x) = (6e^{3x} + 9xe^{3x})' = 18e^{3x} + 9e^{3x} + 27xe^{3x}$$

$$= 27e^{3x} + 27xe^{3x} \longrightarrow f'''(0) = 27$$

$$P_{3,0}(x) = \overbrace{f(0)}^{=0} + \overbrace{f'(0)}^{=1}x + \frac{\overbrace{f''(0)}^{=6}}{2!}x^2 + \frac{\overbrace{f'''(0)}^{=27}}{3!}x^3$$

$$= x + \frac{6}{2}x^2 + \frac{27}{6}x^3 = x + 3x^2 + \frac{9}{2}x^3$$

20. $P_{3,x_0}(x)$

a) $f(x) = \frac{1}{5-x}$; $x_0 = 4$

$$f(4) = \frac{1}{5-4} = 1$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5-x}\right)' = +\frac{1}{(5-x)^2} \longrightarrow f'(4) = 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{(5-x)^2}\right)' = -2(5-x)^{-3}\times(-1) = \frac{2}{(5-x)^3} \rightarrow f''(4) = 2$$

$f'''(x) = \left(\frac{2}{(5-x)^3}\right)' = 2\times(-3)(5-x)^{-4}\times(-1) = \frac{6}{(5-x)^4}$ (19)

$\longrightarrow \quad f'''(4) = 6$

$$P_{3,4}(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3$$

$$= 1 + 1(x-4) + \frac{2}{2}(x-4)^2 + \frac{6}{6}(x-4)^3$$

$$= -3 + x + (x-4)^2 + (x-4)^3$$

b) $f(x) = \ln x \ ; \ x_0 = 1$

$f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(1) = -1$

$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \rightarrow f'''(1) = 2$

$$P_{3,1}(x) = \overbrace{f(1)}^{=0} + \overbrace{f'(1)}^{=1}(x-1) + \frac{\overbrace{f''(1)}^{=-1}}{2!}(x-1)^2 + \frac{\overbrace{f'''(1)}^{=2}}{3!}(x-1)^3$$

$$= x-1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$

c) $f(x) = \cos x \ ; \ x_0 = \pi$

$f(\pi) = \cos \pi = -1$

$f'(x) = -\sin x \rightarrow f'(\pi) = -\sin \pi = 0$

$f''(x) = -\cos x \rightarrow f''(\pi) = -\cos \pi = -(-1) = 1$

$f'''(x) = -(-\sin x) = \sin x \rightarrow f'''(\pi) = \sin \pi = 0$

$$P_{3,\pi}(x) = \overbrace{f(\pi)}^{=-1} + \overbrace{f'(\pi)}^{=0}(x-\pi) + \frac{\overbrace{f''(\pi)}^{=1}}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{\overbrace{f'''(\pi)}^{=0}}{3!}(x-\pi)^3$$

$$= -1 + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2$$

d) $f(x) = x^4 + x + 1$; $x_0 = 2$

$f(2) = 16 + 2 + 1 = 19$

$f'(x) = 4x^3 + 1 \rightarrow f'(2) = 4 \times 8 + 1 = 33$

$f''(x) = 12x^2 \rightarrow f''(2) = 12 \times 4 = 48$

$f'''(x) = 24x \rightarrow f'''(2) = 48$

$$P_{3,2}(x) = \overbrace{f(2)}^{=19} + \frac{\overbrace{f'(2)}^{=33}}{1!}(x-2) + \frac{\overbrace{f''(2)}^{=48}}{2!}(x-2)^2 + \frac{\overbrace{f'''(2)}^{=48}}{3!}(x-2)^3$$

$$= 19 + 33(x-2) + \frac{48}{2}(x-2)^2 + \frac{48}{6}(x-2)^3$$

$$= 19 + 33(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3$$

21. Em 20b) calculou-se o $P_{3,1}(x)$ para $f(x) = \ln x$ em $x_0 = 1$.

Assim,

$$P_{2,1}(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

$$P_{2,1}(0.8) = 0.8 - 1 - \frac{1}{2}(0.8-1)^2 = -0.2 - \frac{1}{2} \times 0.04$$

$$= -0.22$$

Portanto $\ln(0.8) \simeq -0.22$

22. Em 19b) calculou o $P_{3,0}(x)$ para $f(x) = e^{-x/2}$ em $x_0 = 0$.

Assim

$$P_{2,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

Portanto,

$$e^{(-0.05)} = e^{\left(-\frac{0.1}{2}\right)} \simeq P_{2,0}(+0.1) = 1 - \frac{1}{2} \times 0.1 + \frac{1}{8} \times 0.01$$

$= 1.075$. Conclusão $e^{(-0.05)} \simeq 1.075$

Problemas

1. $h(t) = 4.4t - 4.9t^2$ → altura do salto da pulga no instante t

Velocidade no instante t:

$h'(t) = 4.4 - 9.8t$

Velocidade no instante $t = 0$ (instante inicial):

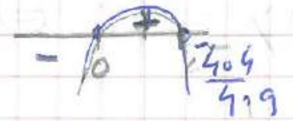
$h'(0) = 4.4$

Determinar a altura máxima que a ~~pulga~~ pulga salta:

$h(t)$ tem que ser positiva:

$h(t) \geq 0 \Leftrightarrow 4.4t - 4.9t^2 \geq 0 \underset{C.A.}{\Leftrightarrow} 0 \leq t \leq \frac{4.4}{4.9}$

C.A.:
$4.4t - 4.9t^2 = 0 \Leftrightarrow t(4.4 - 4.9t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{4.4}{4.9}$



$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 4.4 - 9.8t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4.4}{9.8} = \frac{2.2}{4.9}$

Quadro:

	0		$\frac{2.2}{4.9}$		$\frac{4.4}{4.9}$	
$h'(t)$	+	+	0	−	−	−
$h(t)$	0	↗	MAX	↘	0	

A altura máxima é atingida para $t = \frac{2.2}{4.9}$, sendo o ~~max~~ valor máximo $h\left(\frac{2.2}{4.9}\right) \simeq 0{,}99$

2. a) $h(100) = 3$
$h'(100) = 2$
$h'''(100) = -5$

b) $h(100) = 3$
$h'(100) = -2$
$h'''(100) = 5$

• Em ambas as situações a altura da água é igual

Na situação b) a altura está a diminuir (pois $h'(100) < 0$) enquanto na situação a) está a aumentar (pois $h'(100) > 0$).
E a descida de água está em aceleração (pois $h''(100) > 0$).
Conclusão: a situação b) é melhor do que a situação a) para os moradores da zona.

3.

$A = xy$
$P = 2x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - 2x$

Assim,

$A(x) = x.(40-2x) = 40x - 2x^2$

$A'(x) = 40 - 4x \rightarrow A'(x) = 0 \Leftrightarrow 40 - 4x = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{40}{4} = 10$

Quadro:

	0		10	
$A'(x)$		+	0	−
$A(x)$		↗	MAX	↘

$A(x)$ tem máximo p/ $x = 10$, sendo o valor do máximo $A(10) = 10(40 - 2\times10) = 10\times20$
$= 200\ m^2$

Conclusão: As dimensões são $x = 10m$ e $y = 20m$

4. Escrever a função que descreve o lucro da companhia

* preço do bilhete: x
* aumento do bilhete a partir dos 50€: $x-50$
* por cada unidade de aumento do preço, perde-se 100 passageiros:

$$8000-100(x-50)$$

Função lucro da companhia:

$$L(x)=(8000-100(x-50))\cdot x$$

$$\Leftrightarrow L(x)=(13000-100x)x$$

Assim,

$$L'(x)=0 \Leftrightarrow 13000-200x=0 \Leftrightarrow x=65€$$

Portanto, o lucro é máximo para $x=65€$, sendo o valor do máximo $L(65)=(13000-6500)\times 65$
$=422500€$.

Nota: Fazendo o quadro de sinal, verifica-se que L atinge o seu máximo para $x=65€$.

5. * n.º de obras: x
* n.º de obras acima das 50: $x-50$
* diminuição do preço por cada obra, acima das 50:

$$400-5(x-50)$$

Função lucro:

$$L(x)=(400-5(x-50))x$$

$$\Leftrightarrow L(x)=(650-5x)x$$

Assim,

$L'(x)=0 \Leftrightarrow 650-10x=0 \Leftrightarrow x=65$

<u>Conclusão</u>: O nº obras que ele pode colocar à venda p/ maximizar o lucro é de <u>65</u> obras!