Integração

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Integração

5.1 Introdução e motivação

5.2 Definição de integral

5.3 Propriedades do integral

5.4 Condições suficientes de integrabilidade

5.5 Teorema fundamental do cálculo

5.6 Teoremas clássicos do cálculo integral

5.7 Aplicações do integral

5.8 Integral impróprio

5. Integração

Neste capítulo vamos apresentar a noção de integral segundo Riemann, estudar algumas das suas propriedades e referir algumas das suas aplicações.

Começamos com uma motivação intuitiva clássica, baseada na noção de área de uma região plana e no chamado “método da exaustão”.

5.1 Introdução e motivação

Classicamente, o conceito de integral aparece associado à noção intuitiva de área de uma região plana. Nós vamos seguir a via clássica para motivar a nossa exposição.

Considere-se uma função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sejam

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

5.1 Introdução e motivação

Suponhamos que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, e consideremos a região plana (*cf.* a Figura 1)

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

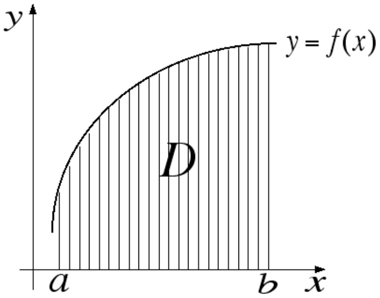


Figura 1: Região $\mathcal{D}$ limitada pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

5.1 Introdução e motivação

Suponhamos que pretendemos determinar o valor da área da região $\mathcal{D}$:

$$\text{área}(\mathcal{D})$$

Em geral, a forma geométrica de $\mathcal{D}$ é pouco "regular", pelo que as fórmulas da geometria elementar não são aplicáveis.

Podemos pensar então em recorrer ao chamado "método da exaustão", aproximando sucessivamente a área de $\mathcal{D}$ pela área de figuras simples, quer inscritas em $\mathcal{D}$, quer circunscritas a $\mathcal{D}$, e considerar depois as melhores aproximações.

Consideraremos apenas regiões rectangulares. Com as regiões inscritas em $\mathcal{D}$ formaremos aproximações por *defeito*, e com as regiões circunscritas a $\mathcal{D}$ formaremos aproximações por *excesso*.

Primeiras aproximações para a área de $\mathcal{D}$

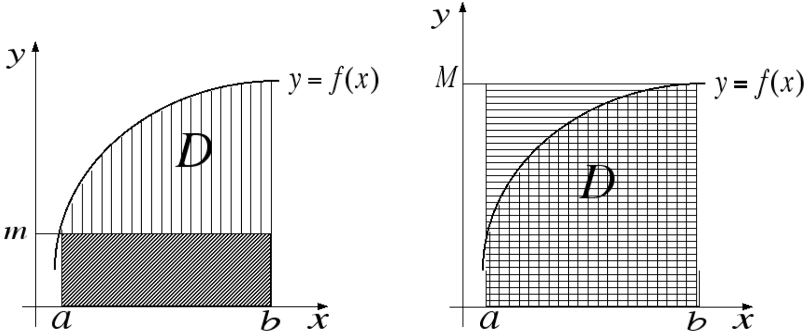


Figura 2: Aproximações para a área de $\mathcal{D}$; por defeito (esquerda) e por excesso (direita).

É fácil reconhecer que

$$m(b-a) \leq \text{área}(\mathcal{D}) \leq M(b-a)$$

já que $m(b-a)$ dá a área da região rectangular de base $b-a$ e altura m, inscrita em $\mathcal{D}$, enquanto que $M(b-a)$ dá a área da região rectangular de base $b-a$ e altura M, circunscrita a $\mathcal{D}$.

Então poderíamos encarar os números $m(b-a)$ e $M(b-a)$ como aproximações do valor da área de $\mathcal{D}$, por defeito e por excesso, respectivamente.

É claro que, em geral, o erro cometido nestas aproximações é bastante grande, sendo também possível melhorá-las significativamente.

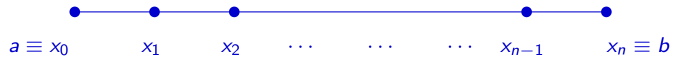
Podemos aproximar a área de $\mathcal{D}$ pela área de figuras simples, compostas por regiões rectangulares justapostas.

5.1 Introdução e motivação

Para melhorar estas aproximações, podemos proceder da seguinte forma.
Estratégia:

1. Decompomos o intervalo $[a, b]$ num número finito de subintervalos, determinados pelos pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$



a que chamamos *partição* $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ nos subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad \ldots, \quad [x_{n-2}, x_{n-1}], \quad [x_{n-1}, x_n];$$

2. Em cada subintervalo genérico, $J_i = [x_{i-1}, x_i]$, fixamos arbitrariamente um ponto, digamos

$$y_1 \in [x_0, x_1], \quad y_2 \in [x_1, x_2], \quad y_{n-1} \in [x_{n-2}, x_{n-1}], \quad y_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

e consideramos o correspondente valor de f,

$$f(y_1), \quad f(y_2), \quad \ldots, \quad f(y_{n-1}), \quad f(y_n).$$

3. Aproximamos a área da porção $\mathcal{D}_k$ da região $\mathcal{D}$ que assenta no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ (Figura 3 à esquerda) pela área da região rectangular $\mathcal{R}_k$ de base $x_k - x_{k-1}$ e altura $f(y_k)$ (Figura 3 à direita)

$$\text{área}\,\mathcal{D}_k \simeq f(y_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

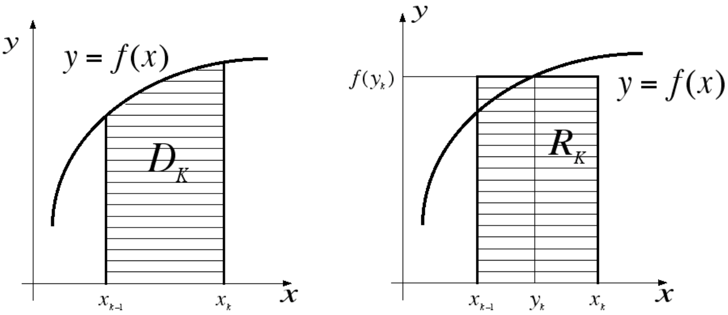


Figura 3: Aproximação da área de $\mathcal{D}_k$ pela área de uma região rectangular.

5.1 Introdução e motivação

4. A área da região $\mathcal{D}$ será aproximada pela soma das áreas das subregiões rectangulares $\mathcal{R}_k$ (Figura 4)

$$\begin{aligned} \text{área}\, \mathcal{D} &\simeq \text{área}\, \mathcal{R}_1 + \text{área}\, \mathcal{R}_2 + \cdots + \text{área}\, \mathcal{R}_n \\ &\simeq f(y_1)(x_1 - x_0) + f(y_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(y_n)(x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

ou seja, abreviando a notação,

$$\text{área}\, \mathcal{D} \simeq \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}).$$

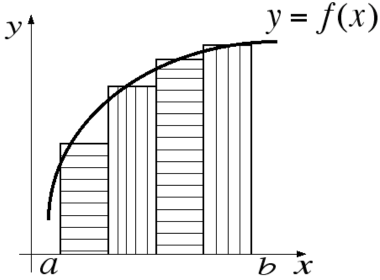


Figura 4: Aproximação da área de $\mathcal{D}$ pela área de uma região poligonal

5.1 Introdução e motivação

5. É intuitivo que:

    (a) a aproximação obtida para a **área de** $\mathcal{D}$ será tanto melhor quanto maior for o número de pontos considerados para a decomposição do intervalo $[a, b]$;

    (b) **a aproximação óptima** será obtida com um número infinitamente grande de pontos ($n \to \infty$), ou seja, com subintervalos de amplitude infinitamente pequena ($\Delta x_k \to 0$)

6. Assim, obtém-se uma definição para a área de $\mathcal{D}$ através da passagem ao limite na expressão anterior:

$$\text{área}\,\mathcal{D} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}).$$

5.2 Definição de integral

Passemos agora à exposição rigorosa deste assunto.

A área da região $\mathcal{D}$ vai dar lugar ao **integral de f em $[a, b]$.** Também se diz *integral definido* de f em $[a, b]$.

Apresentaremos a **definição de integral segundo Riemann,** recorrendo às chamadas *somas de Riemann*.

Apresentaremos a definição de integral segundo Riemann, para uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, limitada, não necessariamente contínua nem necessariamente positiva.

5.2 Definição de integral

Definição(Amplitude da partição)
Dada uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a,b]$, chamamos amplitude de $\mathcal{P}$ à maior das amplitudes dos subintervalos $[x_{k-1},x_k]$,

$$||\mathcal{P}|| = \max\{x_k - x_{k-1} : \quad k = 1,2,\ldots,n\},$$

pelo que, considerar o número de subintervalos a tender para $+\infty$, equivale a considerar $||\mathcal{P}||$ a tender para 0.

Definição (Soma de Riemann)
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função limitada, não necessariamente contínua nem necessáriamente positiva. Seja $\mathcal{P}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ e c_k um ponto qualquer de cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$.
À expressão matemática

$$S(f;\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

chama-se *soma de Riemann* de f em $[a,b]$ para a partição $\mathcal{P}$ e escolha arbitrária dos pontos $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Observações

[Significado geométrico atribuído à soma de Riemann]

Para cada parcela do Soma de Riemann pode concluir-se o seguinte:

- se $f(c_k) > 0$ então $f(c_k)\Delta x_k$ representa o valor da área do rectângulo $\mathcal{R}_k$, cujo comprimento da base é $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ e cuja a altura é $f(c_k)$

$$\text{área}\, \mathcal{R}_k = f(c_k)\Delta x_k$$

- se $f(c_k) < 0$ então $f(c_k)\Delta x_k$ é simétrico do valor da área do rectângulo $\mathcal{R}_k$, cujo comprimento da base é $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ e cuja a altura é $-f(c_k)$

$$\text{área}\, \mathcal{R}_k = -f(c_k)\Delta x_k$$

- Assim geometricamente , uma Soma de Riemann de uma função f em $[a, b]$ para a partição $\mathcal{P}$ é numericamente igual à **diferença entre** a soma das áreas dos rectângulos que estão acima do eixo OX e a soma das áreas dos rectângulos que estão abaixo do eixo OX.

5.2 Definição de integral

Definição (Integrabilidade de f)
Segundo Riemann, dizemos que uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada é **integrável** no intervalo $[a, b]$ e que o correspondente integral é igual a $\mathcal{I}$ quando, independentemente da partição $\mathcal{P}$ e da escolha dos pontos c_k, se tiver

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} S(f; \mathcal{P}) = \mathcal{I}$$

ou seja

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = \mathcal{I}.$$

Ao valor $\mathcal{I}$ chama-se **integral** de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathcal{I},$$

onde f é a função integranda, a é o limite inferior do integral, b é o limite superior do integral, $[a, b]$ é o intervalo de integração e x é a variável de integração. O símbolo dx representa uma partícula formal que fixa a variável de integração.

5.2 Definição de integral

Observações

- Só se define integral de uma função limitada, mas nem toda a função limitada é integrável. Mais adiante, identificaremos algumas classes de funções limitadas que são integráveis.
- [Significado geométrico atribuído ao integral]
  Seja f uma função limitada, não necessariamente contínua nem necessáriamente positiva, integrável em [a, b].
  Geometricamente ,
  $$\int_a^b f(x)\,dx$$
  é numericamente igual à **diferença entre** a soma das áreas das regiões planas que estão acima do eixo OX
  $$\overline{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \ \wedge\ 0 \leq y \leq f(x)\right\},$$
  e a soma das áreas dos regiões planas que estão abaixo do eixo OX
  $$\underline{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \ \wedge\ f(x) \leq y \leq 0\right\}.$$

5.3 Propriedades do integral

Nesta secção vamos apresentar algumas propriedades do integral que se revelarão extremamente úteis.

Propriedade 1

[Aditividade do integral a respeito do intervalo de integração]

Sejam f limitada em $[a, b]$ e $c \in]a, b[$. Então f é integrável em $[a, b]$ se e só se f integrável separadamente em $[a, c]$ e $[c, b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

No sentido de estender esta propriedade a todos os reais $a, b, c,$ adoptamos as seguintes convenções clássicas

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R},$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R}.$$

5.3 Propriedades do integral

Propriedade 2
[Linearidade do integral]

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$. Então:

(a) a soma $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,;$$

(b) o produto fg é integrável em $[a, b]$; em particular, se α é uma constante real arbitrária, o produto αf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

Propriedade 3

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$. Se $|g(x)| \geq k > 0, \forall x \in [a, b]$, então a função $1/g$ é limitada e o quociente f/g é integrável.

Propriedade 4

[Monotonia do integral]

Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x), \; \forall x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx;$$

em particular, se $f(x) \geq 0, \; \forall x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.

Propriedade 5

Se f é integrável em $[a, b]$ então a função $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \, .$$

Propriedade 6

(a) Se f é limitada em $[a, b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a, b]$ excepto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0;$$

(b) se f é integrável em $[a, b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a, b]$, então

$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

5.4 Condições suficientes de integrabilidade

Nesta secção enunciaremos alguns resultados que estabelecem condições suficientes para a integrabilidade de uma função num intervalo, a partir dos quais identificaremos três classes de funções integráveis .

Teorema 1

[Integrabilidade das funções contínuas]

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é integrável em $[a, b]$.

Observação

Este teorema estabelece que a continuidade de uma função garante a sua integrabilidade. No entanto, é conveniente reter que existem funções descontínuas que são integráveis.

Teorema 2
[Integrabilidade das funções monótonas]
Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona então f é integrável em $[a, b]$.

Observação

Deste teorema, podemos concluir que, ainda que uma função não seja contínua, se for monótona, então é também integrável. Mais uma vez, chama-se a atenção para o facto de existirem funções que não são monótonas (nem contínuas) e, mesmo assim, são integráveis.

Teorema 3
[Integrabilidade das funções com um número finito de descontinuidades]
Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada possuindo um número finito de descontinuidades então f é integrável em $[a, b]$.

Exemplos

1. A função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 2 & \text{se } x \in [2,4] \end{cases}$$

   é integrável por ser contínua.

2. A função

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0,1] \\ -x & \text{se } x \in]1,3] \\ x^2 & \text{se } x \in]3,5] \end{cases}$$

   é integrável por possuir um número finito de descontinuidades.

5.5 Teorema fundamental do cálculo

Um dos resultados mais notáveis do Cálculo está patente no teorema que agora iremos apresentar. Nele estabelece-se uma ligação crucial entre os conceitos de derivada e de integral, a partir da qual é possível obter um processo extremamente eficaz para o cálculo do integral, dispensando o recurso à definição apresentada anteriormente.

Consideremos uma função limitada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que é integrável. Para cada $x \in [a, b]$, f é integrável em $[a, x]$, pelo que podemos definir uma nova função, $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, a partir da função f, pondo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

A função F acabada de definir possui uma característica importante, relacionada com a função inicial f.

5.5 Teorema fundamental do cálculo

Teorema

[Teorema Fundamental do Cálculo]

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $[a, b]$, tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

A partir deste Teorema, podemos concluir que a função F é uma primitiva de f, pelo que se obtém o seguinte resultado.

Corolário

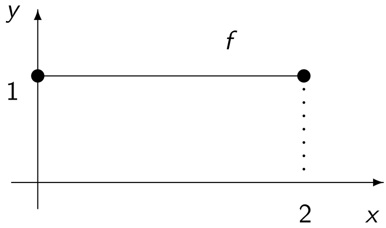
Toda a função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ possui primitiva em $[a, b]$.

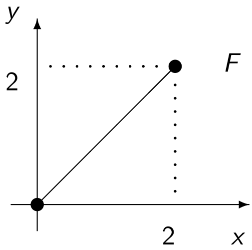
5.5 Teorema fundamental do cálculo

Observação

Quando f não é contínua, mantendo-se integrável, define-se na mesma a função F como referido atrás. Contudo, F pode não ser derivável, ou então, até ser derivável mas a sua derivada não coincidir com f nos pontos de descontinuidade de f.

Exemplo



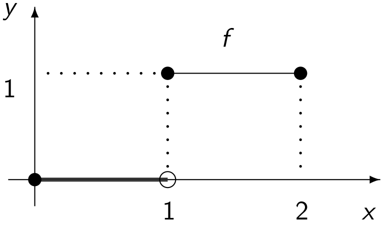


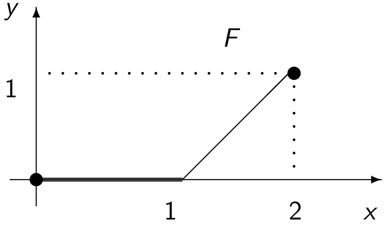
f é contínua, logo integrável e primitivável.

Define-se a função F, que é derivável. Além disso,

$$f(x) = 1 \implies F(x) = \int_0^x 1\,dt = x, \ \forall x \in [0,2].$$

Exemplo





f é limitada mas possui uma descontinuidade de salto no ponto 1.

Logo f é integrável mas não é primitivável. Define-se novamente a função F, tendo-se

$$x \in [0,1[\implies f(x) = 0 \implies F(x) = \int_0^x 0\,dt = 0,$$

$$x \in [1,2] \implies f(x) = 1 \implies F(x) = \int_1^x 1\,dt = x - 1,$$

atestando a continuidade de F. No entanto F não é derivável em 1.

Do ponto de vista do cálculo do integral de uma função, a consequência mais relevante que se extrai do Teorema Fundamental do Cálculo é a que se apresenta a seguir.

Teorema

[Fórmula de Barrow]

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e F uma primitiva de f em $[a, b]$. Então

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Notação

Usamos a notação

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

O Teorema fornece um processo extremamente útil para o cálculo do integral de uma função num intervalo, onde ela possua primitiva. Basta fazer a diferença entre os valores da primitiva nos extremos de integração.

5.5 Teorema fundamental do cálculo

Exemplo

(a) $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2\,.$

(b) Se

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \;\; x \in [0,1] \\ 3 & \text{se} \;\; x \in \,]1,2] \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 3\,dx \\ &= \Big[x\Big]_0^1 + \Big[3x\Big]_1^2 = (1-0) + (6-3) = 4\,. \end{aligned}$$

(c)

$$\int_{-5}^3 |x|\,dx = \int_{-5}^0 (-x)\,dx + \int_0^3 x\,dx \qquad \begin{aligned} &= -\tfrac{1}{2}\Big[x^2\Big]_{-5}^0 + \tfrac{1}{2}\Big[x^2\Big]_0^3 \\ &= \tfrac{25}{2} + \tfrac{9}{2} = 7 \end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^5 = \frac{1}{2}(\ln 26 - \ln 1) \; = \; \ln\sqrt{26}\,.$

(e) Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ x-3 & \text{se } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

então, vem

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x)\,dx &= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^3 2\,dx + \int_3^6 (x-3)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \Big[2x\Big]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^6 \\ &= \frac{1}{3} + (6-2) + \left(0 + \frac{9}{2}\right) \; = \; \frac{53}{6}\,. \end{aligned}$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo saem outras consequências que passamos a apresentar.

Consequência1

[Fórmula do valor médio para integrais]

Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)\,.$$

Exemplo

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0.$ Vejamos que, se f é contínua, então f possui pelo menos um zero em $]a, b[$.

Pela Fórmula do valor médio,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a),$$

para algum $c \in]a, b[$. Como este integral é nulo, vem

$$f(c)(b-a) = 0,$$

para algum $c \in]a, b[$, ou seja,

$$f(c) = 0,$$

para algum $c \in]a, b[$.

Consequência2

[Integração por partes]

Sejam $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ com f contínua, F uma primitiva de f e g de classe $C^1\big([a,b]\big)$. Então

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx\,.$$

Exemplo

(a) $\displaystyle\int_0^2 xe^x\,dx = \Big[e^x x\Big]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - \Big[e^x\Big]_0^2 = e^2 + 1\,.$

(b) $\displaystyle\int_1^e \ln\sqrt{x}\,dx = \big[x\,\ln\sqrt{x}\,\big]_1^e - \int_1^e x\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{e}{2} - \int_1^e \frac{1}{2}\,dx = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}\,[x]_1^e = \frac{1}{2}\,.$

Consequência3

[Integração por substituição]

Sejam $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e $g : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ de classe $C^1\big([c,d]\big)$ tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt\,.$$

Exemplo

(a) Calculemos agora $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$, efectuando a mudança de variável $x-1=t^2$.

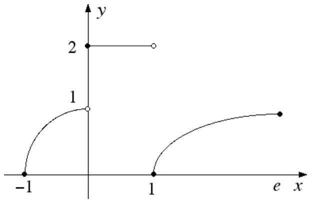
Pondo $g(t)=t^2+1$, vem $g'(t)=2t$.

Atendendo a que $g(0)=1$ e $g(1)=2$, resulta

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx &= \int_0^1 (1+t^2)\sqrt{t^2}\,2t\,dt = 2\int_0^1 \left(t^2+t^4\right)\,dt \\ &= \frac{2}{3}\left[t^3\right]_0^1 + \frac{2}{5}\left[t^5\right]_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{2}{5} = \frac{16}{15}\,.\end{aligned}$$

(b) Calculemos $\displaystyle\int_{-1}^{e} f(x)\,dx$ para

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 \le x < 0, \\ 2 & \text{se } 0 \le x < 1, \\ \ln x & \text{se } 1 \le x \le e\,. \end{cases}$$



Vem

$$\int_{-1}^{e} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{0}^{1} 2\,dx + \int_{1}^{e} \ln x\,dx = \frac{\pi}{4} + 2 + 1$$

onde o primeiro integral se calcula por substituição fazendo, por exemplo, $x = \sin t$, o segundo é imediato e o terceiro calcula-se por partes.

Exemplo

Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $f\colon [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Vejamos que:

(a) se f é par então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;

Sendo f par, tem-se $f(x) = f(-x),\ \forall x \in [-a,a]$, e então

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ , dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx}_{J} + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = -t$ no integral J, vem

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_a^0 f(t)(-1)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(b) se f é ímpar então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Sendo f ímpar, tem-se $f(x) = -f(-x), \ \forall x \in [-a, a],$ e então

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\underbrace{\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx}_{J} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = -t$ no integral J, vem

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= -\int_{a}^{0} f(t)(-1)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

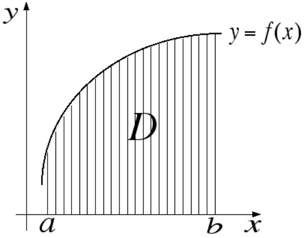
5.7 Aplicações do integral

Algumas aplicações geométricas do integral estão relacionadas com a área de um domínio plano, o comprimento de uma curva e o volume de um sólido de revolução.

5.7.1 Área de um domínio plano

Vamos retomar o problema que nos serviu de motivação à definição de integral. Em particular, no caso em que $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$, definimos a área do domínio

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$



pela fórmula

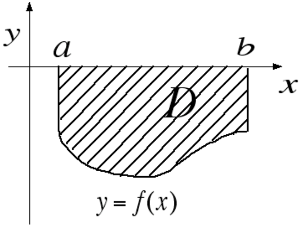
$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

5.7.1 Área de um domínio plano

Daqui extraem-se as seguintes consequências.

(a) Por um lado, se $f(x) \leq 0, \ \forall x \in [a, b]$ então, por simetria em relação a OX, a área da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ f(x) \leq y \leq 0\}$$



coincide com a área de

$$\mathcal{D}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq -f(x)\}$$

e, portanto,

$$\text{área}(\mathcal{D}) = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

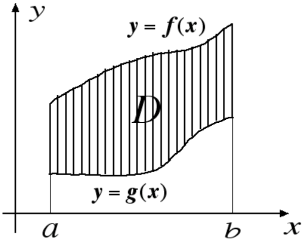
5.7.1 Área de um domínio plano

Neste caso (a), mas também no caso em que f é não negativa, temos

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

(b) Por outro lado, se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $0 \leq g(x) \leq f(x), \ \forall x \in [a, b],$ então, a área da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$



5.7.1 Área de um domínio plano

pode ser calculada como área$(\mathcal{D})$ =área$(\mathcal{D}_1)-$área$(\mathcal{D}_2)$, onde $\mathcal{D}_1$ é a região plana sob o gráfico de f e $\mathcal{D}_2$ é a região plana sob o gráfico de g.

Então

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

ou seja,

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\;dx.$$

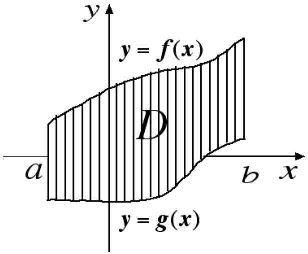
Repare-se que, também neste caso (b), poderíamos escrever

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b \Big|f(x) - g(x)\Big|\,dx.$$

5.7.1 Área de um domínio plano

(c) Por translacção segundo um vector oportuno orientado no sentido positivo de OY, seria fácil concluir que, dadas $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas e tais que $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b],$ independentemente do sinal de f ou de g, a área da região plana

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$$

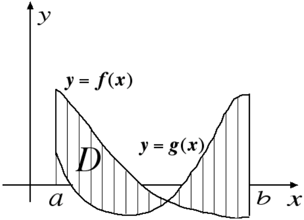


poderia ser dada também pelo integral

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b \Big[f(x) - g(x)\Big]\, dx.$$

5.7.1 Área de um domínio plano

(d) Mais em geral, se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, a área da região plana $\mathcal{D}$ limitada pelos gráficos de f e de g e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$



seria dada por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^c \Big[f(x) - g(x)\Big]\, dx + \int_c^b \Big[g(x) - f(x)\Big]\, dx,$$

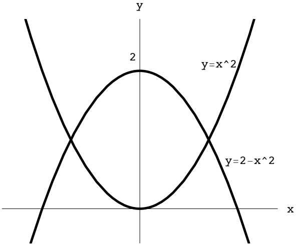
onde c é a abcissa do ponto de intersecção das duas curvas.
Consequentemente, também neste caso, poderíamos exprimir a área de $\mathcal{D}$ pelo integral

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b \Big|f(x) - g(x)\Big|\, dx.$$

5.7.1 Área de um domínio plano

Exemplo

A área do domínio plano D limitado pelas curvas de equações $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$, que se intersectam para $x = -1$ e para $x = 1$,



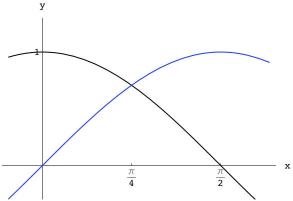
é dada por

$$\text{área}\,\mathcal{D} = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\,dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\,.$$

5.7.1 Área de um domínio plano

Exemplo

A área do domínio plano D limitado pelas curvas de equações $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$,



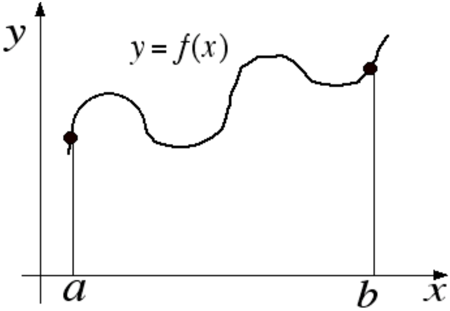
é dada por

$$\begin{aligned}
\text{área}\,\mathcal{D} &= \int_0^{\pi/2} \Big| \cos x - \sin x \Big| \, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\, dx \\
&= \Big[\sin x + \cos x \Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \sin x \Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \; = \; 2\sqrt{2} - 2.
\end{aligned}$$

5.7.2 Comprimento de curvas

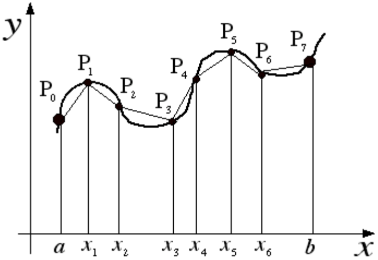
Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1\big([a,b]\big)$. Designemos por $\mathcal{C}$ o arco de curva $y = f(x)$, com $x \in [a,b]$.

Vamos dar uma definição para o comprimento do arco $\mathcal{C}$, recorrendo à definição de integral em termos das somas de Riemann.



5.7.2 Comprimento de curvas

Para tal, consideremos uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ definida por pontos $x_0 = a$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n = b$. Sejam P_0, P_1, ..., P_n os pontos correspondentes sobre a curva e consideremos a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$, , definida pelos segmentos de recta $P_{i-1}P_i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$.



Quando os pontos P_i são considerados cada vez mais próximos uns dos outro, ou seja, quando o amplitude $|\mathcal{P}|$ da partição tende para zero, a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com o arco .
Então, por definição, pomos

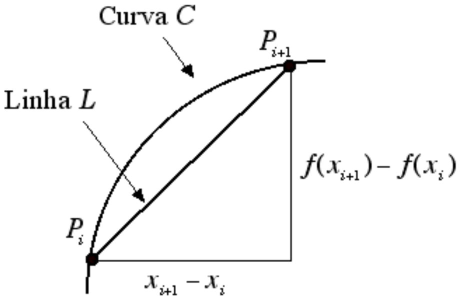
$$\operatorname{comp} \mathcal{C} = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \operatorname{comp} \mathcal{L}_{\mathcal{P}}.$$

Por outro lado,

$$\text{comp}\, L_{\mathcal{P}} = \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1} P_n}$$

e, para cada segmento de recta $P_{i-1}P_i$, tem-se

$$\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2}.$$



5.7.2 Comprimento de curvas

No entanto, como f é derivável, o teorema do valor médio de Lagrange dá

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(c_{i+1})$$

para algum $c_{i+1} \in]x_i, x_{i+1}[$, resultando

$$\begin{aligned}\overline{P_i P_{i+1}} &= \sqrt{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 + \left(f'(c_{i+1})\right)^2 \left(x_{i+1} - x_i\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(f'(c_{i+1})\right)^2}\left(x_{i+1} - x_i\right).\end{aligned}$$

Consequentemente, o comprimento da linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ é dado por

$$\text{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(f'(c_{i+1})\right)^2}\left(x_{i+1} - x_i\right).$$

5.7.2 Comprimento de curvas

No segundo membro da igualdade anterior, mais não temos do que uma soma de Riemann para a função $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

que é integrável.

Logo, tomando o limite quando $|\mathcal{P}| \to 0$ vem

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \operatorname{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Da definição apresentada para comprimento do arco $\mathcal{C}$ sai

$$\operatorname{comp}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx\,.$$

5.7.2 Comprimento de curvas

Exemplo

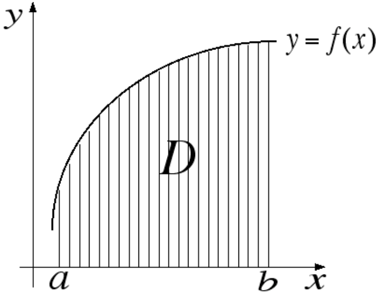
O comprimento do arco da curva de equação $y = \operatorname{ch} x$, entre os pontos $(-1, \operatorname{ch}(-1))$ e $(2, \operatorname{ch} 2)$ é dado por

$$\operatorname{comp}(\mathcal{C}) = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + sh^2 x}\, dx = \int_{-1}^{2} chx\, dx = \Big[sh\, x\Big]_{-1}^{2} = sh\, 2 + sh\, 1\,.$$

5.7.3 Volume de um sólido de revolução

Quando uma região plana roda em torno de uma recta r do mesmo plano, obtém-se um sólido dito de revolução. A recta r diz-se o eixo de rotação.

Nesta secção, estamos interessados nos sólidos de revolução $\mathcal{S}$ gerados pela rotação em torno do eixo OX de uma região plana $\mathcal{D}$ definida a partir de uma função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$.

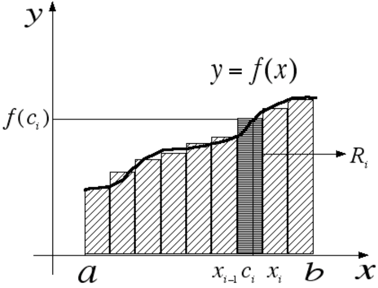


5.7.3 Volume de um sólido de revolução

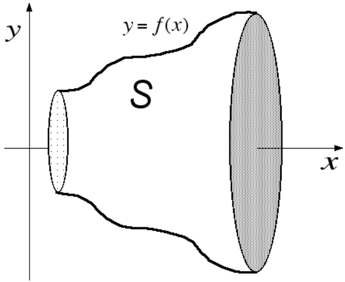
Vamos dar uma definição para o volume do sólido $\mathcal{S}$, recorrendo novamente à definição de integral em termos das somas de Riemann.

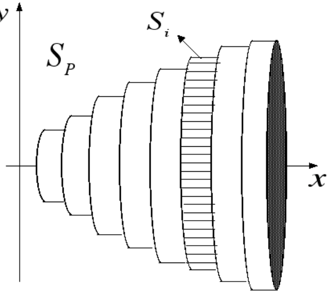
Para tal, consideramos uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ definida pelos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, fixamos arbitrariamente um ponto c_i.

Tomamos a região poligonal $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ definida pelas n regiões rectangulares de altura $f(c_i)$ que se erguem sobre esses subintervalos.



Observamos que, quando o amplitude $|\mathcal{P}|$ da partição tende para zero, a região poligonal $\mathcal{R}_\mathcal{P}$ tende a confundir-se com o domínio $\mathcal{D}$ e o sólido $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ gerado por $\mathcal{R}_\mathcal{P}$ tende a confundir-se com o sólido $\mathcal{S}$ gerado por $\mathcal{D}$.





Sólido $\mathcal{S}$ à esquerda e sólido $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ à direita

Então, por definição, pomos

$$\operatorname{vol}\mathcal{S} = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \operatorname{vol}\mathcal{S}_\mathcal{P}.$$

5.7.3 Volume de um sólido de revolução

No entanto, reparando que cada região elementar R_i gera um cilindro "achatado" S_i de volume

$$\mathrm{vol}(S_i) = \pi\Big(f(c_i)\Big)^2(x_i - x_{i-1})$$

obtemos

$$\mathrm{vol}(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} \pi\Big(f(c_i)\Big)^2(x_i - x_{i-1}).$$

No segundo membro desta equação temos precisamente uma soma de Riemann para a função $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \pi\big(f(x)\big)^2,$$

que é integrável. Logo, tomando o limite quando $|\mathcal{P}| \to 0$, vem

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \mathrm{vol}(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}) = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\, dx.$$

Da definição de volume de $\mathrm{vol}(\mathcal{S})$, sai

$$\mathrm{vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\, dx\,.$$

Exemplo

O volume do sólido $\mathcal{S}$ gerado pela rotação em torno de OX da região

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq x^2 + 1\right\}$$

é dado por

$$\text{vol}\,\mathcal{S} = \int_{-1}^{1} \pi (x^2 + 1)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = 2\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right).$$

5.7.3 Volume de um sólido de revolução

Exemplo

A fórmula para o volume de uma esfera $\mathcal{S}$ de raio r pode ser obtida pensando na esfera como o sólido gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq r^2 \;\wedge\; y \geq 0.\right\}$$

Atendendo à simetria da esfera, vem

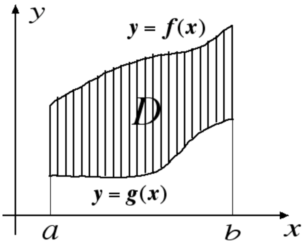
$$\begin{aligned} \operatorname{vol} \mathcal{S} &= 2 \int_0^r \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) dx \\ &= 2\pi r^2 \left[x\right]_0^r - \frac{2\pi}{3} \left[x^3\right]_0^r \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

5.7.3 Volume de um sólido de revolução

À semelhança do que fizemos em relação ao conceito de área, podemos obter fórmulas mais gerais para o cálculo do volume de sólidos de revolução.

Por exemplo, no caso em que $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $0 \leq g(x) \leq f(x),\ \forall x \in [a, b]$, então, o volume do sólido $\mathcal{S}$ gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \ \wedge\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$



é dado por

$$\text{vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b \pi \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx.$$

5.7.3 Volume de um sólido de revolução

Exemplo

O volume do sólido $\mathcal{S}$ gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x-2|+1 \leq y \leq 3\right\}$$

é dado por (tendo em conta a simetria)

$$\text{vol}\,\mathcal{S} = 2\int_0^2 \pi\left(3^2 - (-x+3)^2\right) dx = 2\pi \int_0^2 \left(-x^2+6x\right) dx = \frac{56\pi}{3}.$$

5.8 Integral impróprio

Neste capítulo apresentámos a definição de integral segundo Riemann , para uma função limitada que está definida num intervalo limitado.

A extensão desta definição aos casos em que o intervalo de integração é não limitado ($[a,+\infty[, \,]-\infty, a], \,]-\infty, +\infty[$) ou em que a função integranda se torna não limitada nas vizinhança de um ponto do intervalo de integração , conduz à noção de *integral impróprio* .

Assim, por exemplo, os integrais

$$\int_0^{+\infty} x^2\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

são todos impróprios.

5.8.1 Intervalo de integração ilimitado

Neste caso, o integral impróprio diz-se de primeira espécie ou de tipo I.

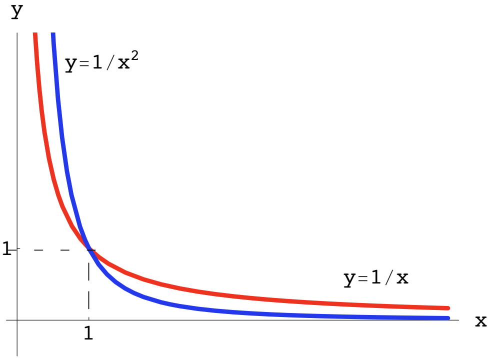
Exemplo

Consideremos os integrais

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx \qquad \text{e} \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Do ponto de vista geométrico, os integrais I e J estão relacionados com a medida da área das regiões não limitadas situadas à direita da recta $x = 1$, acima do eixo OX, sob o gráfico de cada uma das curvas.

5.8.1 Intervalo de integração ilimitado



Por se tratar de regiões com "largura" infinita e "altura" que se torna infinitamente pequena, poderá ser possível atribuir uma medida à área em causa.

5.8.1 Intervalo de integração ilimitado

Para decidir se esta possibilidade se verifica, estudamos os limites

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx,$$

para os quais vem, respectivamente,

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\Big[\ln x\Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\big(\ln b - \ln 1\big) = +\infty,$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\Big(-\frac{1}{b}+1\Big) = 1,$$

donde se depreende que apenas fará sentido atribuir significado à área da região relacionada com o integral J, podendo dizer-se que a medida dessa área é igual a 1.

Passemos agora a expor a teoria geral.

5.8.1 Intervalo de integração ilimitado: $[a, +\infty[$

Caso A

Seja $f\colon [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, integrável em todo o intervalo limitado do tipo $[a, x]$ tal que $[a, x] \subset [a, +\infty[$.

Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é **convergente** , ou que a função f é integrável em sentido impróprio, se existir o correspondente limite,

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

caso em que escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

No caso contrário, em que aquele limite não existe, dizemos que o integral impróprio é **divergente** ou que a função f não é integrável em sentido impróprio.

5.8.1 Intervalo de integração ilimitado: $[a, +\infty[$

Propriedade 1

[Linearidade]

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se f e g são integráveis em sentido impróprio em $[a, +\infty[$ então $\alpha f + \beta g$ é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty[$ e

$$\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\, dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\, dx.$$

Propriedade 2

[Aditividade]

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se f é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty[$ então f é integrável em sentido impróprio em $[b, +\infty[$ e

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{b} f(x)\, dx + \int_b^{+\infty} f(x)\, dx.$$

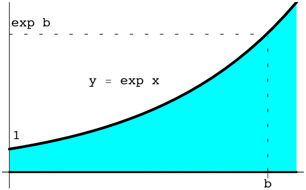
5.8.1 Intervalo de integração ilimitado: $[a, +\infty[$

Exemplo

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x\, dx$ é divergente.

   De facto, estudando o correspondente limite, vem

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left[e^x\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} (e^b - 1) = +\infty.$$

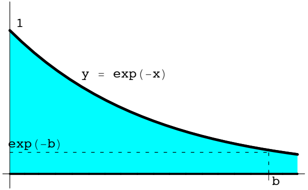


5.8.1 Intervalo de integração ilimitado: $[a, +\infty[$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ é convergente e igual a 1.

Para o correspondente limite, vem

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+1) = 1.$$



5.8.2 Intervalo de integração ilimitado: $]-\infty, b]$

Caso B

Seja $f\colon]-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrável em todo o intervalo limitado do tipo $[x, b]$ tal que $[x, b] \subset]-\infty, b]$.

Neste caso, o estudo do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ é semelhante, baseando-se no

$$\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Para este caso, valem resultados semelhantes aos das Propriedades 1 e 2, com as adaptações necessárias.

Exemplo

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx$ é divergente.

De facto, estudando o limite correspondente, vemos que

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \cos x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \Big[\sin x\Big]_a^0 = -\lim_{a\to-\infty} \sin a,$$

que não existe porque, sendo a função seno periódica, podemos exibir duas restrições do seno com limites diferentes. Por exemplo, pondo

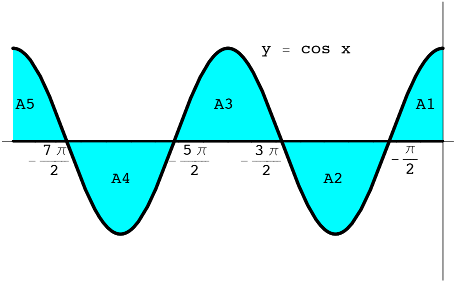
$$A = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}^-\right\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}^-\right\},$$

tem-se $x \in A \Longrightarrow \sin x = 1$ e $x \in B \Longrightarrow \sin x = -1$, pelo que

$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\in A}} \sin x = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\in B}} \sin x = -1.$$

5.8.2 Intervalo de integração ilimitado: $]-\infty, b]$

Não seria difícil antecipar esta conclusão a partir da Figura:



Por um lado, se cada A_i representar a área de uma parte da região da Figura, então

$$A_1 = A_5 = 1 \qquad \text{e} \qquad A_2 = A_3 = A_4 = 2.$$

5.8.2 Intervalo de integração ilimitado: $]-\infty, b]$

Por outro lado, como a área de cada região A_i se pode exprimir como um integral de $\cos x$ ou de $-\cos x$, consoante estiver em causa um intervalo onde o cosseno seja positivo ou negativo, temos por exemplo

$$\int_{-4\pi}^{0} \cos x \, dx = A_5 - A_4 + A_3 - A_2 + A_1 = 0,$$
$$\int_{-7\pi/2}^{0} \cos x \, dx = -A_4 + A_3 - A_2 + A_1 = -1,$$
$$\int_{-5\pi/2}^{0} \cos x \, dx = A_3 - A_2 + A_1 = 1,$$

o que, de imediato, nos leva a intuir que não será possível atribuir um valor ao integral apresentado.

5.8.3 Intervalo de integração ilimitado: $]-\infty, +\infty[$

Caso C

Seja $f\colon]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, integrável em todo o intervalo limitado do tipo $[x, y]$.

Para analisar o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ escolhe-se arbitrariamente um ponto $c \in \mathbb{R}$ (em geral, considera-se $c = 0$) e estuda-se separadamente cada um dos integrais

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

como descrito anteriormente.

Pela aditividade do integral impróprio (Propriedade 2 e correspondente adaptação ao caso B), a convergência destes integrais não depende da escolha do ponto c.

5.8.3 Intervalo de integração ilimitado: $]-\infty, +\infty[$

Assim, dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é **convergente** , ou que a função f é integrável em sentido impróprio , se e só se os integrais indicados são convergentes. Escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Por outro lado, se algum dos integrais é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ também é **divergente** .

Para este caso, valem também resultados semelhantes aos das Propriedades 1 e 2, com as adaptações necessárias.

5.8.3 Intervalo de integração ilimitado: $]-\infty, +\infty[$

Exemplo

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \, dx$ é divergente.

   Basta atender à definição apresentada e ao que vimos num exemplo anterior.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$ é convergente e igual a π.

   De facto, por um lado,

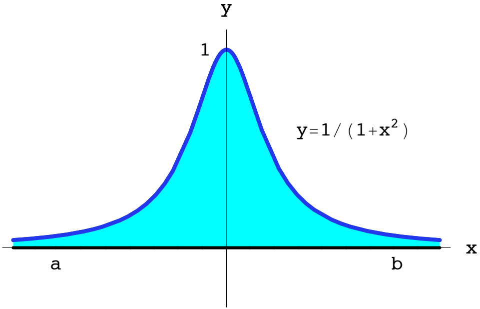
$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim_{b \to +\infty} (arctg\, b - arctg\, 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

   e, por outro lado,

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim_{a \to -\infty} (arctg\, 0 - arctg\, a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

5.8.3 Intervalo de integração ilimitado: $]-\infty,+\infty[$

Atendendo ao gráfico da função integranda, e à sua simetria em relação ao eixo OY bastaria ter estudado o integral impróprio estendido a um dos intervalos $[0,+\infty[$ ou $]-\infty,0]$.



5.8.4 Função integranda ilimitada

No caso em que a função integranda se torna ilimitada numa vizinhança de algum ponto do intervalo de integração – um extremo ou um ponto interior – o integral impróprio diz-se de segunda espécie ou de tipo II .

5.8.4 Função integranda ilimitada:]a,b]

Caso A

Seja $f\colon]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ilimitada, mantendo-se integrável em qualquer intervalo $[c,b]$ com $[c,b] \subset]a,b]$.

Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é **convergente** , ou que a função f é integrável em sentido impróprio , se existir o limite

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx,$$

caso em que escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Quando este limite não existe, dizemos que o integral impróprio é **divergente** ou que a função f não é integrável em sentido impróprio .

Também para este tipo de integral impróprio valem resultados semelhantes aos das Propriedades 1 e 2, com as adaptações necessárias.

Exemplo

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ é divergente.

   A função integranda torna-se ilimitada à direita da origem. Calculamos

$$\mathcal{L} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{c} \right) = +\infty,$$

   donde se conclui que o integral impróprio apresentado diverge para $+\infty$.

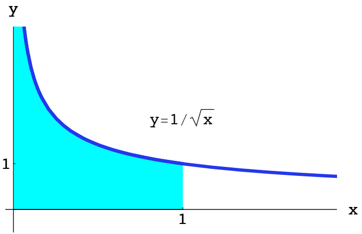
5.8.4 Função integranda ilimitada:]a,b]

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ é convergente .

A função integranda torna-se ilimitada à direita da origem. Calculamos

$$\mathcal{L} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{c}\right) = 2,$$

pelo que o integral converge, tendo-se $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$



5.8.5 Função integranda ilimitada: [a,b[

Caso B

O estudo do integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, quando $f : [a, b[\longrightarrow$ é ilimitada, mantendo-se integrável em todo o intervalo $[a, c]$, com $[a, c] \subset [a, b[$, é perfeitamente análogo, baseando-se no estudo do

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Valem novamente resultados semelhantes aos das Propriedades 1 e 2, com as adaptações necessárias.

5.8.6 Função integranda ilimitada:]a,b[

Caso C

O caso em que $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, mantendo-se integrável em todo o intervalo $[x, y]$, com $[x, y] \subset]a, b[$, reduz-se aos casos anteriores, escolhendo arbitrariamente um ponto $c \in]a, b[$ e estudando separadamente os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^c f(x)\,dx,$$

como descrito anteriormente (casos A e B). Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é **convergente** , ou que a função f é integrável em sentido impróprio , se e só se os integrais indicados são convergentes. Escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Por outro lado, se algum dos integrais indicados é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ também é **divergente** .

5.8.7 Função integranda ilimitada: $[a, c[\cup]c, b]$

Caso D

Consideremos agora $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que $a < c < b$, e seja $f\colon [a, c[\cup]c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função ilimitada em pelo menos um dos intervalos $[a, c[$ ou $]c, b]$, que se mantém integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $[a, x] \subset [a, c[$ e em qualquer intervalo $[y, b]$ com $[y, b] \subset]c, b]$.

Neste caso, estudamos separadamente os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)\,dx,$$

como descrito anteriormente.

5.8.7 Função integranda ilimitada: $[a, c[\cup]c, b]$

Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é **convergente** , ou que a função f é integrável em sentido impróprio , se e só se estes dois integrais são convergentes, caso em que escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Por outro lado, se algum daqueles integrais é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ também é **divergente** .

5.8.7 Função integranda ilimitada: $[a, c[\cup]c, b]$

Exemplo

$\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ é divergente.

A função integranda torna-se ilimitada em torno do ponto $x = 1$. Estudamos separadamente os integrais

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \quad \text{e} \quad J = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx\,.$$

Para o primeiro, calculamos

$$\lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{c\to 1^-} \left(-\left[\frac{1}{x-1}\right]_0^c\right) = \lim_{c\to 1^-} \left(-\frac{1}{c-1} - 1\right) = +\infty,$$

donde se conclui que o integral proposto é divergente (independentemente da natureza do integral J).

5.8.7 Função integranda ilimitada: $[a, c[\cup]c, b]$