

Cálculo (A e B)

MIEEIC, MIECOM

2007/2008

Ana Jacinta Soares

Notas sobre a disciplina

Programa Resumido

1. Funções trigonométricas inversas.
2. Funções hiperbólicas directas e inversas
3. Primitivas.
4. Integral de Riemann. Aplicações.
5. Séries numéricas.

Principais Referências Bibliográficas

- [1] T. Apostol, *Cálculo*, Vol. 1, Editora Réverté, 1991.
- [2] Robert A. Adams,, *A Complete Course: Calculus*, Addison-Wesley, 1999.
- [3] Jaime. C. Silva, *Princípios de Análise Matemática Aplicada*, McGraw Hill, 1994.
- [4] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Gulbenkian, 1999.
- [5] H. L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo*, Vol 1, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1986.

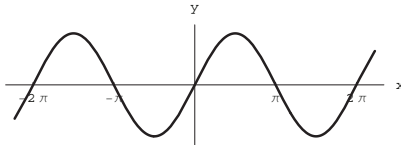
Funções trigonométricas
directas e
inversas

A. Funções trigonométricas directas

As funções *seno*, *cosseno*, *tangente* e *cotangente* são contínuas e periódicas nos respectivos domínios. Todas elas são funções não injectivas e, portanto, não possuem inversa.

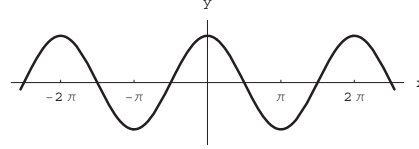
Seno

$$y = \operatorname{sen} x, x \in \mathbb{R}, \operatorname{CD}_{\operatorname{sen}} = [-1, 1]$$



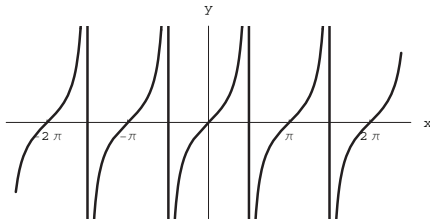
Cosseno

$$y = \cos x, x \in \mathbb{R}, \operatorname{CD}_{\cos} = [-1, 1]$$



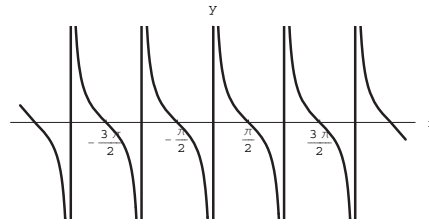
Tangente

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$\operatorname{CD}_{\operatorname{tg}} = \mathbb{R}$$



Cotangente

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\operatorname{CD}_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R}$$



B. Funções trigonométricas inversas

Considerando restrições adequadas das funções trigonométricas, obtemos funções contínuas e bijetivas definidas em intervalos. A injectividade será conseguida excluindo do domínio todos os pontos onde a função se repete. A sobrejectividade será obtida eliminando do conjunto de chegada todos os pontos que a função não assume. As inversas das restrições assim definidas serão também contínuas.

B.1 Arco-seno

Relativamente à função seno, convencionamos considerar a restrição bijetiva

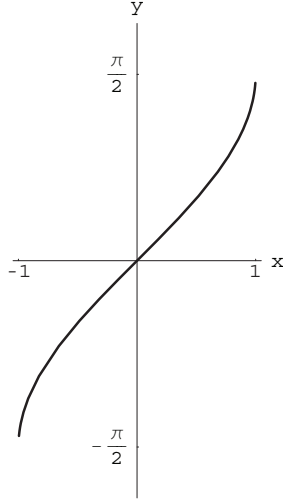
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{sen}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] & \longrightarrow [-1, 1] \\ & x & \longmapsto \operatorname{sen} x. \end{array} \quad (1)$$

A sua inversa, que se designa por *arco-seno* – lê-se *arco (cujo) seno* – é a a função

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arcsen}: & [-1, 1] & \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ & y & \longmapsto \operatorname{arcsen} y, \end{array} \quad (2)$$

onde $\arcsen y$ indica o único arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a y . Assim,

$$x = \arcsen y, \ y \in [-1, 1] \iff y = \sen x, \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3)$$



$$y = \arcsen x, \ x \in [-1, 1], \ \text{CD}_{\arcsen} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Pelo facto de as funções (1) e (2) serem inversas uma da outra, tem-se

$$\begin{aligned} \arcsen(\sen x) &= x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \sen(\arcsen y) &= y, \quad \forall y \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (4)$$

No entanto, apesar de fazer sentido calcular $\arcsen(\sen z)$, para $z \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se

$$\arcsen(\sen z) \neq z, \quad \forall z \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (5)$$

uma vez que $\text{CD}_{\arcsen} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemplo 1

$$(a) \quad \arcsen 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsen \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

De facto, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{3}$ são os únicos arcos do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ onde o seno é, respectivamente, igual a 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Tem-se, por exemplo, $\sen(3\pi) = 0$ e $\sen(8\pi) = 0$, mas $\arcsen 0 = 0$.

Porque 0 é o único arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ onde o seno é igual a 0. ■

B.2 Arco-cosseno

Relativamente à função cosseno, convencionou-se considerar a restrição bijectiva

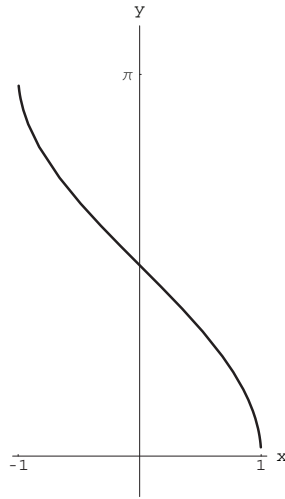
$$\begin{array}{ccc} \cos : & [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & \cos x . \end{array} \quad (6)$$

A sua inversa, que se designa por *arco-cosseno* – lê-se *arco* (*cujo*) *cosseno* – é a função

$$\begin{array}{ccc} \arccos : & [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ & y & \longmapsto & \arccos y , \end{array} \quad (7)$$

onde $\arccos y$ indica o único arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno é igual a y . Assim

$$x = \arccos y, \ y \in [-1, 1] \iff y = \cos x, \ x \in [0, \pi]. \quad (8)$$



$$y = \arccos x, \ x \in [-1, 1], \ \text{CD}_{\arccos} = [0, \pi]$$

Atendendo a que as funções (6) e (7) são inversas uma da outra, tem-se

$$\begin{aligned} \arccos(\cos x) &= x, \quad \forall x \in [0, \pi], \\ \cos(\arccos y) &= y, \quad \forall y \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (9)$$

Por outro lado, uma vez que $\text{CD}_{\arccos} = [0, \pi]$, tem-se

$$\arccos(\cos z) \neq z, \quad \forall z \notin [0, \pi]. \quad (10)$$

Exemplo 2

$$(a) \quad \arccos 1 = 0, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$(b) \quad \arccos(\cos 5\pi) = \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\left(\cos \frac{25\pi}{4}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

B.3 Arco-tangente

Relativamente à função *tangente*, consideramos a restrição bijectiva

$$\begin{array}{ccc} \text{tg} : & \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \text{tg } x. \end{array} \quad (11)$$

A sua inversa, designada por *arco-tangente* – lê-se *arco (cuja) tangente* – é a função

$$\begin{array}{ccc} \text{arctg} : & \mathbb{R} & \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ y & \longmapsto & \text{arctg } y, \end{array} \quad (12)$$

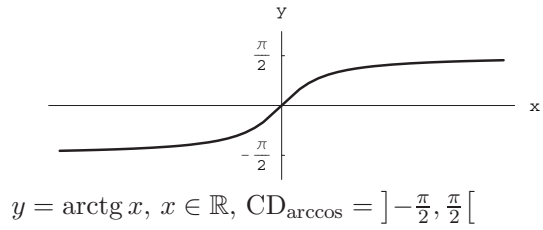
onde $\text{arctg } y$ indica o único arco do intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ cuja tangente é igual a y .

Assim,

$$x = \text{arctg } y, \text{ com } y \in \mathbb{R}$$

se e só se

$$y = \text{tg } x, \quad x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$



B.4 Arco-cotangente

Relativamente à função *co-tangente*, consideramos a restrição bijectiva

$$\begin{array}{ccc} \text{tg} : &]0, \pi[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \text{cotg } x, \end{array} \quad (13)$$

cuja inversa é a função *arco-cotangente* – lê-se *arco (cuja) cotangente* – definida por

$$\begin{array}{ccc} \text{arccotg} : & \mathbb{R} & \longrightarrow]0, \pi[\\ y & \longmapsto & \text{arccotg } y, \end{array} \quad (14)$$

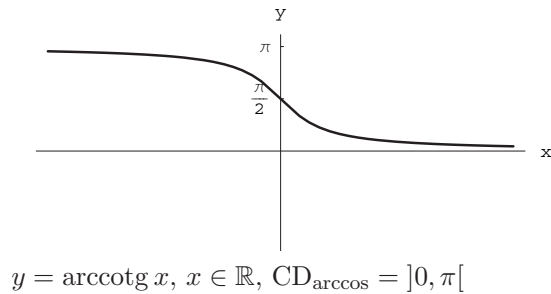
onde $\text{arccotg } y$ indica o único arco do intervalo $]0, \pi[$ cuja cotangente é igual a y .

Então,

$$x = \text{arccotg } y, \text{ com } y \in \mathbb{R}$$

se e só se

$$y = \text{cotg } x, \quad x \in]0, \pi[.$$



B.5 Derivadas das funções trigonométricas inversas

Acabámos de definir as funções trigonométricas inversas mas não obtivemos as suas expressões designatórias envolvendo uma variável independente, digamos x . Definimos estas funções precisamente como as inversas de certas restrições das funções trigonométricas directas. Para o cálculo das derivadas correspondentes, vamos recorrer à regra de derivação da função inversa, que passamos a recordar.

[Regra da derivada da função inversa]

Seja $f: I \rightarrow J$, com I e J intervalos de \mathbb{R} , uma função bijectiva e $f^{-1}: J \rightarrow I$ a sua inversa. Se f é derivável no ponto $a \in I$, sendo $f'(a) \neq 0$, e f^{-1} é contínua em $b = f(a)$, então f^{-1} é derivável em b , tendo-se

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \quad (15)$$

A fórmula (15) significa que a derivada da função inversa é o inverso da derivada da função directa, com cada uma delas calculada num ponto adequado. ■

Usando a regra da derivada da função inversa, vamos verificar que

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[. \quad (16)$$

A função directa é $f(x) = \cos x$, com $x \in [0, \pi]$, e a função inversa é $f^{-1}(y) = \arccos y$, com $y \in [-1, 1]$. Tem-se $f'(x) = -\sin x$, $x \in [0, \pi]$, sendo $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in]0, \pi[$. Como $f(0) = 1$ e $f(\pi) = -1$, a regra anterior é aplicável em $] -1, 1[$, dando

$$\arccos' y = \frac{1}{-\sin(\arccos y)} = \frac{-1}{\sin(\arccos y)}, \quad y \in]-1, 1[. \quad (17)$$

Resta agora simplificar o denominador da última expressão. Para tal, repare-se que

$$y \in]-1, 1[\implies \arccos y \in]0, \pi[\text{ e } \sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$$

porque $\sin^2(\arccos y) + \cos^2(\arccos y) = 1$, ou seja, $\sin^2(\arccos y) + y^2 = 1$, sendo o seno positivo em $]0, \pi[$. Fica então justificada a fórmula (16).

Sendo u uma função derivável de x , a regra da derivada da função composta dá

$$(\arccos u)'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \quad (18)$$

nos pontos onde a derivada existe. ■

Procedendo de maneira semelhante com as outras funções trigonométricas inversas, iríamos obter as restantes expressões das derivadas. Poderíamos, assim, construir a seguinte tabela.

Tabela - Derivadas das funções trigonométricas inversas

As derivadas das principais funções trigonométricas inversas são

$$\begin{aligned}\arcsen' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[& \arccos' x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[\\ \arctg' x &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} & \operatorname{arccotg}' x &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Sendo u uma função derivável, tem-se (nos pontos onde a derivada existe)

$$\begin{aligned}(\arcsen u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} & (\arccos u)' &= \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ (\arctg u)'(x) &= \frac{u'}{1+u^2} & (\operatorname{arccotg} u)' &= \frac{-u'}{1+u^2}\end{aligned}$$

Funções hiperbólicas
directas e
inversas

C. Funções hiperbólicas directas

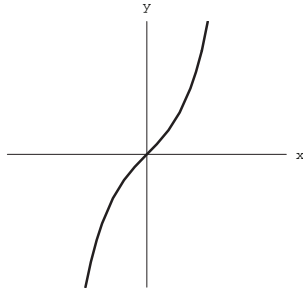
Vamos agora introduzir as funções *hiperbólicas*, apresentar algumas das suas propriedades e esboçar os seus gráficos.

C1. Seno hiperbólico

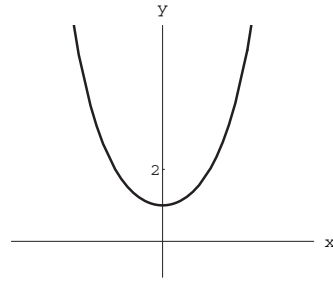
O *seno hiperbólico* é a função

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injectiva. Possui um único zero, a origem. Além disso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh } x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh } x = -\infty$.



$$y = \text{sh } x, x \in \mathbb{R}, \text{CD}_{\text{sh}} = \mathbb{R}$$



$$y = \text{ch } x, x \in \mathbb{R}, \text{CD}_{\text{ch}} = [1, +\infty[$$

C2. Cosseno hiperbólico

O *cosseno hiperbólico* é a função

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Trata-se de uma função contínua e par. Logo, não é injectiva. Não possui zeros e atinge um mínimo na origem, com valor $\text{ch } 0 = 1$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch } x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch } x = +\infty$.

C3. Tangente hiperbólica

A *tangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}, \end{aligned} \quad (21)$$

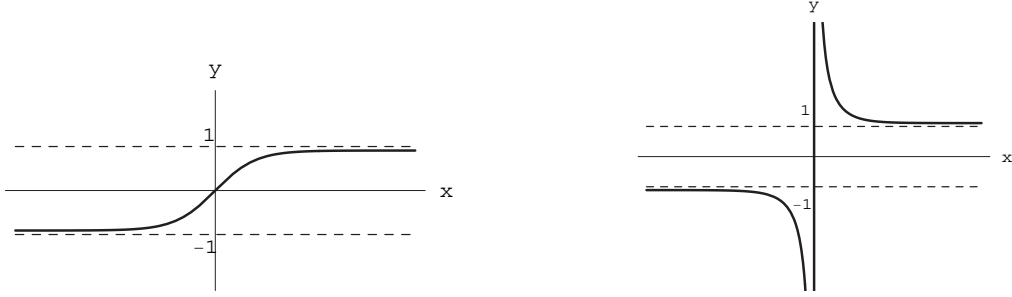
ou seja, por

$$\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injectiva. Possui um único zero, em 0. Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1, \quad (23)$$

pelo que o gráfico da th possui uma assíntota horizontal de equação $y = 1$, para $x \rightarrow +\infty$. Da imparidade da th , existe outra assíntota horizontal de equação $y = -1$, para $x \rightarrow -\infty$. Tem-se ainda $\operatorname{CD}_{\operatorname{th}} =]-1, 1[$.



$$y = \operatorname{th} x, x \in \mathbb{R}, \operatorname{CD}_{\operatorname{th}} =]-1, 1[$$

$$y = \operatorname{coth} x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \operatorname{CD}_{\operatorname{coth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

C4. Cotangente hiperbólica

A *cotangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{aligned} \operatorname{coth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \end{aligned} \quad (24)$$

ou seja, por

$$\operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (25)$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e sem zeros. Apesar de não ser monótona, é estritamente decrescente para $x > 0$, onde toma valores positivos, e para $x < 0$, onde toma valores negativos. Logo é injectiva. Da definição (25), sai que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{coth} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{coth} x = 1, \quad (26)$$

pelo que o gráfico da coth possui uma assíntota horizontal de equação $y = 1$, para $x \rightarrow +\infty$, e uma assíntota vertical de equação $x = 0$. Da imparidade da coth , existe outra assíntota horizontal de equação $y = -1$, para $x \rightarrow -\infty$. Tem-se ainda $\operatorname{CD}_{\operatorname{coth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

C5. Algumas propriedades

A partir das definições (19), (20), (22) e (25) das funções hiperbólicas, com manipulações algébricas simples, é fácil verificar que estas funções verificam as seguintes propriedades:

- (i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- (iv) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- (v) $\operatorname{th}^2 x + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- (vi) $\operatorname{coth}^2 x - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (vii) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
- (viii) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
- (vii) $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
- (viii) $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

De facto

(i) Seja $x \in \mathbb{R}$, qualquer. Então

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1. \end{aligned}$$

(viii) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, quaisquer. Então

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \operatorname{ch}(x+y). \end{aligned}$$

As restantes alíneas demonstram-se de maneira semelhante. ■

C6. Derivadas das funções hiperbólicas

Quanto às derivadas das funções hiperbólicas, basta aplicar as regras usuais de derivação, podendo construir-se a seguinte tabela.

Tabela - Derivadas das funções hiperbólicas directas

As derivadas das funções hiperbólicas directas são

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch} x, & x \in \mathbb{R} & \qquad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x, & x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{th}' x &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, & x \in \mathbb{R} & \qquad \operatorname{coth}' x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\end{aligned}$$

Sendo u uma função derivável, tem-se (nos pontos onde a derivada existe)

$$\begin{aligned}(\operatorname{sh} u)' &= u' \operatorname{ch} u & (\operatorname{ch} u)' &= u' \operatorname{sh} u \\ (\operatorname{th} u)' &= \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u} & (\operatorname{coth} u)' &= \frac{-u'}{\operatorname{sh}^2 u}\end{aligned}$$

D. Funções hiperbólicas inversas

Vamos agora definir as funções hiperbólicas inversas. Como vimos na subsecção C, as funções sh , th e coth são injectivas, enquanto que a função ch não é injectiva e, portanto, não será invertível. Para esta última, iremos considerar uma restrição apropriada.

D1. Argumento do seno hiperbólico

A função sh definida em (19) é contínua, bijectiva e possui inversa contínua. Trata-se da função *argumento do seno hiperbólico*, que se define por

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \operatorname{argsh} y,\end{aligned}\tag{27}$$

onde

$$x = \operatorname{argsh} y, \ y \in \mathbb{R} \iff y = \operatorname{sh} x, \ x \in \mathbb{R}.\tag{28}$$

Mas, para $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}y = \operatorname{sh} x &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &\iff y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.\end{aligned}\tag{29}$$

A última condição em (29) traduz uma equação do segundo grau na incógnita e^x . Tratando-a com a fórmula resolvente, sai

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1},$$

sendo a solução com o sinal + a única admissível, uma vez que

$$e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y - \sqrt{y^2 + 1} < 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

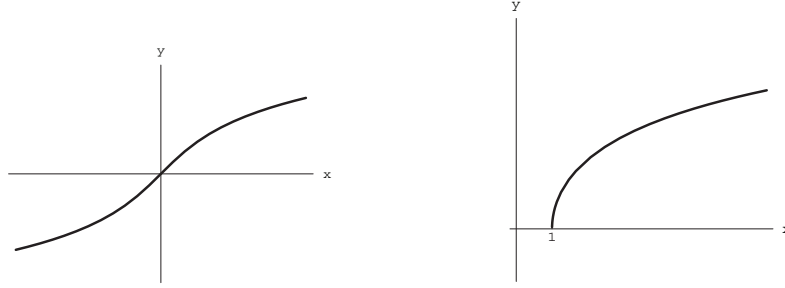
Mas

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right),$$

donde

$$\operatorname{argsh} y = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

As expressões (27) e (30) definem completamente a função argsh .



$$y = \operatorname{argsh} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{CD}_{\operatorname{argsh}} = \mathbb{R}$$

$$y = \operatorname{arch} x, \quad x \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{CD}_{\operatorname{arch}} = [0, +\infty[$$

D2. Argumento do cosseno hiperbólico

A função ch definida por (20) não é injectiva, logo, não é invertível. Como tal, definiremos a inversa da seguinte restrição bijectiva e contínua

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} : [0, +\infty[&\longrightarrow [1, +\infty[\\ x &\longmapsto \operatorname{ch} x, \end{aligned} \quad (31)$$

que se designa por *argumento do cosseno hiperbólico* e que é também uma função contínua. Representa-se por

$$\begin{aligned} \operatorname{argch} : [1, +\infty[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ y &\longmapsto \operatorname{argch} y, \end{aligned} \quad (32)$$

onde

$$x = \operatorname{argch} y, \quad y \in [1, +\infty[\iff y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0, +\infty[. \quad (33)$$

Mas, para $x \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \operatorname{ch} x &\iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\iff y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

A última igualdade de (34) traduz uma equação do segundo grau em e^x , donde

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Como $x \geq 0 \implies e^x \geq 1$, a solução com o sinal $+$ é a única admissível (a solução com o sinal $-$ corresponderia à inversa da restrição do ch para $x \leq 0$). Mas

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 1 \iff x = \log \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right), \quad x \geq 0, \quad y \geq 1,$$

donde

$$\operatorname{argch} y = \log \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right), \quad y \in [1, +\infty[. \quad (35)$$

A função argumento do cosseno hiperbólico fica completamente definida por (32) e (35).

D3. Argumento da tangente hiperbólica

A função tangente-hiperbólica definida em (21) é injectiva mas não é sobrejectiva. Para poder inverter, basta considerar

$$\begin{aligned} \operatorname{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow]-1, 1[\\ x &\longmapsto \operatorname{th} x, \end{aligned} \quad (36)$$

que é bijectiva e, portanto, é invertível. Sendo contínua num intervalo, a sua inversa é contínua. Trata-se da função *argumento da tangente hiperbólica*, que se define por

$$\begin{aligned} \operatorname{argth} :]-1, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \operatorname{argth} y, \end{aligned} \quad (37)$$

onde

$$x = \operatorname{argth} y, \quad y \in]-1, 1[\iff y = \operatorname{th} x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (38)$$

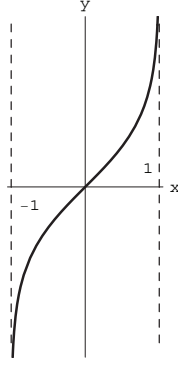
Para $x \in \mathbb{R}$, $y \in]-1, 1[$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \operatorname{th} x &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ &\iff e^{2x} (1 - y) = 1 + y \iff x = \log \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \right), \end{aligned}$$

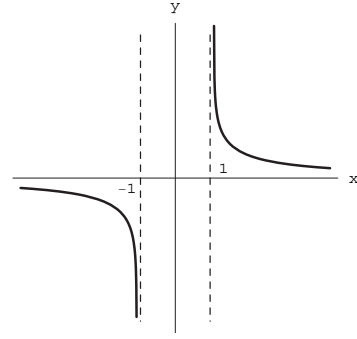
donde

$$\operatorname{argth} y = \log \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \right), \quad y \in]-1, 1[, \quad (39)$$

completando-se a definição do argumento da tangente hiperbólica com (37) e (39).



$$y = \operatorname{argth} x, x \in]-1, 1[, \\ \operatorname{CD}_{\operatorname{argth}} = \mathbb{R}$$



$$y = \operatorname{arcoth} x, x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \\ \operatorname{CD}_{\operatorname{arcoth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

D4. Argumento da cotangente hiperbólica

A função cotangente-hiperbólica definida em (24) é injectiva mas não é sobrejectiva. Consideremos então

$$\begin{aligned} \coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \\ x &\longmapsto \coth x \end{aligned} \quad (40)$$

que é bijectiva e, portanto, é invertível. A sua inversa é contínua. Trata-se da função *argumento da cotangente hiperbólica*, que se define por

$$\begin{aligned} \operatorname{arcoth} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y &\longmapsto \operatorname{arcoth} y \end{aligned} \quad (41)$$

onde

$$x = \operatorname{arcoth} y, y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \iff y = \coth x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (42)$$

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, tem-se

$$y = \coth x \iff x = \log \left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} \right),$$

pelo que

$$\operatorname{arcoth} y = \log \left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} \right), y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \quad (43)$$

ficando assim completa a definição da função argumento da cotangente hiperbólica, através das expressões (41) e (43).

D5. Derivadas das funções hiperbólicas inversas

Para obter as derivadas das funções hiperbólicas inversas, basta aplicar as regras usuais de derivação às expressões (30), (35), (39) e (43) obtidas para estas funções. Podemos construir a seguinte tabela.

Tabela - Derivadas das funções hiperbólicas inversas

As derivadas das funções hiperbólicas inversas são

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R} & \operatorname{argch}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x \in]1, +\infty[\\ \operatorname{argth}' x &= \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in]-1, 1[& \operatorname{argcoth}' x &= \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]\end{aligned}$$

Sendo u uma função derivável, tem-se (nos pontos onde a derivada existe)

$$\begin{aligned}(\operatorname{argsh} u)' &= \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} & (\operatorname{argch} u)' &= \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}} \\ (\operatorname{argth} u)' &= \frac{u'}{1 - u^2} & (\operatorname{argcoth} u)' &= \frac{u'}{1 - u^2}\end{aligned}$$

Primitivas

imediatas

por partes

por substituição

de funções racionais

1 Introdução

O problema central desta secção é o de, dada uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo I , determinar uma nova função $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \quad (44)$$

Trata-se do chamado problema da primitivação da função f no intervalo I . Existindo solução do problema, dizemos que f é *primitivável* em I e cada função F verificando a condição (44) é chamada uma *primitiva* ou uma *antiderivada* de f em I . Escrevemos

$$F(x) = P(f(x)) \quad \text{ou} \quad F(x) = \int f(x) dx. \quad (45)$$

Em particular, na segunda expressão de (45), o símbolo \int representa um “S” alongado e “ dx ” é uma partícula formal usada para denotar a variável independente em relação à qual se está a primitivar. Da definição, é imediato que

$$F(x) = P(f(x)), \quad \forall x \in I \quad \text{sse} \quad F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I,$$

ou seja, que

$$F \text{ é uma primitiva de } f \quad \text{sse} \quad f \text{ é a derivada de } F.$$

Fica assim claro que a primitivação é o processo inverso da derivação.

Exemplo 1

(a) A função definida por $F(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. De facto, basta atender a que $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) A função definida por $F(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, é uma primitiva de $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$. Basta recordar que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. ■

2 Consequências

Da definição de primitiva, extraem-se algumas consequências que passamos a enunciar.

Consequência 1

Se F é uma primitiva de f no intervalo I então toda a função

$$F(x) + C, \quad x \in I, \quad (46)$$

com C uma constante real arbitrária, é também uma primitiva de f . ■

Basta notar que $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

Consequência 2

Se F_1 e F_2 são duas primitivas de f em I então $F_2(x) = F_1(x) + C$, $x \in I$. ■

Basta atender a que $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, $x \in I$, resultando $[F_1(x) - F_2(x)]' = 0$, $x \in I$. Como I é um intervalo, conclui-se que $F_1(x) - F_2(x) = C$, $x \in I$, ou seja que $F_1(x) = F_2(x) + C$, $x \in I$.

Observação 1

- (a) Das Consequências 1 e 2 sai que, quando o problema da primitivação de uma função num intervalo é possível, ele admite uma infinidade de soluções, que se obtêm de uma primitiva conhecida adicionando uma constante real arbitrária. Para além destas, não há outras primitivas de f no intervalo I . Representamos a expressão geral das primitivas de f por

$$F(x) + C, \quad C \text{ constante,}$$

onde F é uma primitiva conhecida, e escrevemos

$$P(f(x)) = F(x) + C. \quad (47)$$

- (b) A título de curiosidade, note-se que o problema da primitivação de uma função num intervalo pode também não possuir solução. É o que se passa, por exemplo, com a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

em qualquer intervalo e com a função

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

no intervalo $[0, 4]$. Estas funções não podem ser a derivada de função alguma num intervalo, porque a derivada de uma função num intervalo, ainda que seja descontínua, possui a propriedade do valor intermédio, não passando de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios. Este resultado é conhecido por *Teorema de Darboux* do valor intermédio para a derivada de uma função num intervalo (*cf.* a bibliografia recomendada). As descontinuidades de uma derivada num intervalo, se existirem, são bastante complexas, e nunca descontinuidades de salto.

- (c) Mais adiante vamos abordar algumas regras de primitivação muito úteis. Convém, no entanto, registar que estas regras não permitem determinar as primitivas de todas as funções primitiváveis. Um exemplo bem conhecido (*cf.* a bibliografia recomendada) é o da função definida por e^{-x^2} , $x \in \mathbb{R}$, que, como ficará claro mais adiante, é primitivável em qualquer intervalo I e, no entanto, as regras que iremos abordar não permitem determinar as primitivas desta função. ■

Exemplo 2

$$P(\cos x) = \sin x + \mathcal{C};$$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + \mathcal{C}.$$

■

3 Primitivas imediatas

Chamamos *primitivas imediatas* àquelas primitivas que se obtêm por simples reversão das regras de derivação, recorrendo, eventualmente, a alguns artifícios de cálculo. A partir de um quadro de derivadas do tipo

<i>Função</i>	<i>Derivada</i>
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
ax	a
x^k	kx^{k-1}

facilmente construímos um quadro de primitivas imediatas. Para tal, basta fazer uma troca de colunas, adicionar uma constante arbitrária aos elementos da coluna da direita e, eventualmente, ajustar constantes. Resulta

<i>Função</i>	<i>Primitiva</i>
e^x	$e^x + \mathcal{C}$
$\cos x$	$\sin x + \mathcal{C}$
$\sin x$	$-\cos x + \mathcal{C}$
a	$ax + \mathcal{C}$
x^{k-1}	$x^k/k + \mathcal{C}$

Mais em geral, sendo $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável num intervalo I e a, α constantes reais, alguns exemplos de primitivas imediatas são:

$$(i) P(a) = ax + \mathcal{C} \quad (a \in \mathbb{R}) \qquad (ii) P(f'(x)f^\alpha(x)) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + \mathcal{C} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$(iii) P\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \ln|f(x)| + \mathcal{C} \qquad (iv) P\left(a^{f(x)}f'(x)\right) = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + \mathcal{C} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1)$$

$$(v) P(\cos f(x)f'(x)) = \sin f(x) + \mathcal{C} \qquad (vi) P(\operatorname{sh} f(x)f'(x)) = \operatorname{ch} f(x) + \mathcal{C}$$

É assim possível construir uma tabela de primitivas imediatas (Apêndice 1 deste capítulo) que mais não é do que uma lista de regras obtidas por leitura revertida de regras de derivação. Em cada caso, põe-se dentro do sinal $P(\dots)$ uma “expressão” na forma de “derivada de alguma função”. A tabela diz-nos, no segundo membro, qual é essa função. Por exemplo, a regra (vi) afirma que a primitiva de uma “expressão” do tipo

$\text{sh } f(x) f'(x)$ é igual a $\text{ch } f(x) + \mathcal{C}$; isto acontece porque a derivada de $\text{ch } f(x) + \mathcal{C}$ é precisamente igual a $\text{sh } f(x) f'(x)$. Para que a tabela seja útil, devemos ser capazes de traduzir a “expressão” a primitivar numa das formas contempladas na tabela dentro do símbolo $P(\dots)$. Este passo representa a única dificuldade do processo de primitivação imediata. Ele requer um conhecimento razoável das regras de derivação.

Exemplo 3 [Primitivas imediatas]

$$1. \quad P(-\sin x \cos^5 x) = \frac{\cos^6 x}{6} + \mathcal{C}. \quad [\text{Regra 4. da tabela}]$$

$$2. \quad P\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right) = P\left(\frac{e^x}{1+(e^x)^2}\right) = \arctg e^x + \mathcal{C}. \quad [\text{Regra 15. da tabela}]$$

$$3. \quad P\left(\frac{e^x}{7+e^x}\right) = \ln(7+e^x) + \mathcal{C}. \quad [\text{Regra 3 da tabela}]$$

$$4. \quad P\left(\frac{e^x}{\sqrt[4]{(5+e^x)^3}}\right) = P\left(e^x(5+e^x)^{-3/4}\right) = \frac{(5+e^x)^{-3/4+1}}{-3/4+1} + \mathcal{C} \\ = 4 \sqrt[4]{5+e^x} + \mathcal{C}. \quad [\text{Regra 4 da tabela}]$$

■

4 Regras de primitivação

O cálculo das primitivas de uma função baseia-se num conjunto de regras, as chamadas *regras de primitivação*, que se obtêm a partir das regras de derivação.

4.1 Regra de primitivação por decomposição

Resulta da regra da derivação da soma de funções e da regra de derivação do produto de uma função por uma constante. Se u e v são funções deriváveis e α e β são constantes reais, então

$$[\alpha u(x) + \beta v(x)]' = \alpha u'(x) + \beta v'(x). \quad (48)$$

Em termos de primitivas, a regra (48) traduz-se por

$$P[\alpha u'(x) + \beta v'(x)] = \alpha u(x) + \beta v(x) + \mathcal{C}.$$

Pondo, mais em geral, $u'(x) = f(x)$, $v'(x) = g(x)$ e $u(x) = F(x)$, $v(x) = G(x)$, com F e G primitivas de f e de g , respectivamente, vem

$$P[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha F(x) + \beta G(x) + \mathcal{C}.$$

Podemos então estabelecer o seguinte resultado.

Conclusão 1 [Primitivação por decomposição]

Sejam f e g funções primitiváveis num intervalo I e α, β duas constantes reais.. Então $\alpha f + \beta g$ é primitivável em I , tendo-se

$$P[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha P(f(x)) + \beta P(g(x)). \quad (49)$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned} P\left(5 \cos x - \frac{2}{5}e^x + \frac{3 \sin x}{1 + \cos^2 x}\right) &= 5 P(\cos x) - \frac{2}{5} P(e^x) - 3 P\left(\frac{-\sin x}{1 + \cos^2 x}\right) \\ &= 5 \sin x - \frac{2}{5}e^x - 3 \operatorname{arctg}(\cos x) + \mathcal{C} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2 Regra de primitivação por partes

Resulta da regra de derivação de um produto de funções. Se u e v são funções deriváveis, então

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (50)$$

Em termos de primitivas, podemos traduzir a igualdade (50) por

$$P[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] = u(x)v(x) + \mathcal{C}.$$

Numa forma mais útil, e atendendo ao que se vimos na subsecção 4.1, podemos escrever

$$P[u'(x)v(x)] = u(x)v(x) - P[u(x)v'(x)] + \mathcal{C}.$$

Pondo agora $u'(x) = f(x)$, $v(x) = g(x)$, $u(x) = F(x)$, onde F é uma primitiva de f , sai

$$P[f(x)g(x)] = F(x)g(x) - P[F(x)g'(x)],$$

ou ainda,

$$P[f(x)g(x)] = P[f(x)] g(x) - P\left[P(f(x))g'(x)\right]. \quad (51)$$

Podemos então estabelecer a seguinte conclusão.

Conclusão 2 [Primitivação por partes]

Sejam $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ primitivável, $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f e $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, tais que o produto Fg' é primitivável em I . Então fg é primitivável em I , tendo-se

$$P[f(x)g(x)] = F(x)g(x) - P[F(x)g'(x)]. \quad (52)$$

Podemos ler a fórmula (52) da seguinte forma: *a primitiva de um produto é igual à primitiva do primeiro factor a multiplicar pelo segundo factor, menos a primitiva do novo produto que resulta de multiplicar o factor que já está primitivado pela derivada do segundo factor.* A regra de primitivação expressa na fórmula (52) evidencia que a primitiva de um produto pode ser calculada em duas partes: na primeira, primitiva-se apenas o primeiro factor, que depois é multiplicado pelo segundo; na segunda parte, primitiva-se o produto da função que já está primitivada pela derivada do segundo factor.

Observação 2

- (a) Para que o método de primitivação por partes tenha sucesso, pelo menos um dos factores deve ter primitiva imediata; o método resulta quando se sabe primitivar o produto que aparece na segunda parte (*cf.* o exemplo 5 (a)).
- (b) Em geral, conhecendo a primitiva de ambos os factores, escolhe-se para primeiro aquele que menos se simplifica a derivar (*cf.* o exemplo 5 (b)).
- (c) O método de primitivação por partes pode ser aplicado com sucesso para primitivar uma função que não tem primitiva imediata, digamos $f(x)$, interpretando-a como o produto $1f(x)$ e começando por primitivar o factor 1,

$$P[f(x)] = P[1f(x)] = xf(x) - P[xf'(x)] = \dots \quad (53)$$

Este é o processo habitualmente utilizado para primitivar, por exemplo, logaritmos, arcos trigonométricos e argumentos hiperbólicos (*cf.* o exemplo 5 (c)).

- (d) Ao aplicar o método de primitivação por partes duas ou mais vezes sucessivas, é frequente reencontrarmos a primitiva inicial afectada de um certo coeficiente (diferente de 1). A primitiva proposta pode ser obtida como solução de uma equação cuja incógnita é precisamente essa primitiva (*cf.* o exemplo 5 (d)). ■

Exemplo 5

$$(a) P(x \ln x) = \frac{x^2}{2} \ln x - P\left(\frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Repare-se que o factor $\ln x$ não possui primitiva imediata. Devemos, portanto, primitivar primeiro o factor x .

$$(b) P(xe^x) = xe^x - P(e^x) = xe^x - e^x + C.$$

Aqui conhecemos a primitiva de ambos os factores. Mas o polinómio “complica-se” quando primitivado, porque aumenta de grau, e simplifica-se quando derivado. É então conveniente guardá-lo para segundo factor.

$$\begin{aligned} (c) P(\arctg x) &= P(1 \arctg x) = x \arctg x - P\left(x \frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} P\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

O arco-tangente não tem primitiva imediata, mas foi muito simples usar o método de primitivação por partes para o primitivar.

$$\begin{aligned} (d) P(e^x \sin x) &= e^x \sin x - P(e^x \cos x) = e^x \sin x - [e^x \cos x + P(e^x \sin x)] \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - P(e^x \sin x). \end{aligned}$$

E para a primitiva proposta podemos escrever

$$P(e^x \sen x) = e^x(\sen x - \cos x) - P(e^x \sen x).$$

Resolvendo esta última equação a respeito da incógnita $P(e^x \sen x)$, resulta

$$P(e^x \sen x) = \frac{e^x}{2} (\sen x - \cos x) + \mathcal{C}. \quad \blacksquare$$

4.3 Primitivação de potências de funções trigonométricas e hiperbólicas

Há um conjunto de regras práticas para a primitivação de potências com expoente natural de funções trigonométricas e de funções hiperbólicas, que se baseiam em algumas propriedades destas funções. Passemos à apresentação destas regras, apenas no caso das funções *seno* e *coseno*, bem como das funções *seno hiperbólico* e *coseno hiperbólico*.

A - Potências pares de funções trigonométricas e hiperbólicas

No caso da primitivação de potências de expoente par de funções trigonométricas, é conveniente passar para o arco duplo, recorrendo às fórmulas

$$\sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \quad (54)$$

De modo perfeitamente equivalente, no caso da primitivação de potências de expoente par de funções hiperbólicas, é conveniente passar para o argumento duplo, tendo em conta que

$$\sh^2 x = \frac{\ch 2x - 1}{2}, \quad \ch^2 x = \frac{\ch 2x + 1}{2}. \quad (55)$$

Exemplo 6

$$(a) P(\cos^2 x) = P\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) = \frac{1}{2} P(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sen 2x\right) + \mathcal{C}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sen x \cos x + \mathcal{C}.$$

$$(b) P(\ch^4 x) = P\left[\left(\frac{\ch 2x + 1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4} P(\ch^2 2x + 2 \ch 2x + 1)$$

$$= \frac{1}{4} P(\ch^2 2x) + \frac{1}{2} P(\ch 2x) + \frac{x}{4} = \frac{1}{4} P\left(\frac{\ch 4x + 1}{2}\right) + \frac{1}{4} \sh 2x + \frac{x}{4}$$

$$= \frac{1}{8} P(\ch 4x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{4} \sh 2x + \frac{x}{4} = \frac{1}{32} \sh 4x + \frac{x}{8} + \frac{1}{4} \sh 2x + \frac{x}{4} + \mathcal{C}$$

$$= \frac{1}{16} \sh 2x \ch 2x + \frac{3}{8} x + \frac{1}{2} \sh x \ch x + \mathcal{C}$$

$$= \frac{1}{8} \sh x \ch x (\ch^2 x + \sh^2 x) + \frac{3}{8} x + \frac{1}{2} \sh x \ch x + \mathcal{C} \quad \blacksquare$$

B - Potências ímpares de funções trigonométricas e hiperbólicas

No caso da primitivação de potências de expoente ímpar de funções trigonométricas ou hiperbólicas, é conveniente destacar uma unidade à potência ímpar e passar o outro factor para a co-função, através das fórmulas

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \quad (56)$$

Exemplo 7

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(\cos^3 x) &= P(\cos x \cos^2 x) = P(\cos x(1 - \sin^2 x)) \\ &= P(\cos x) - P(\cos x \sin^2 x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad P(\operatorname{ch}^5 x) &= P(\operatorname{ch} x \operatorname{ch}^4 x) = P[\operatorname{ch} x(1 + \operatorname{sh}^2 x)^2] \\ &= P(\operatorname{ch} x + 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^4 x) \\ &= \operatorname{sh} x + \frac{2}{3} \operatorname{sh}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{sh}^5 x + \mathcal{C}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4.4 Regra de primitivação por substituição

Resulta da regra de derivação de uma função composta. Se u e v são funções deriváveis e a composta $u \circ v$ está bem definida, então

$$[u(v(t))]' = u'(v(t)) v'(t). \quad (57)$$

Em termos de primitivas, podemos escrever

$$P[u'(v(t)) v'(t)] = u(v(t)) + \mathcal{C}.$$

Pondo $u'(x)=f(x)$, $u(x)=F(x)$, $v(x)=g(x)$ e $v'(x)=g'(x)$, onde F é uma primitiva de f , vem

$$P[f(g(t)) g'(t)] = F(g(t)) + \mathcal{C}. \quad (58)$$

A expressão (58) pode adquirir uma forma mais útil, atendendo a que $F(g(t)) + \mathcal{C}$ indica uma primitiva genérica de $f(x)$ calculada em $x=g(t)$. De facto, podemos escrever

$$P[f(g(t)) g'(t)] = \left[P[f(x)] \right]_{x=g(t)}, \quad (59)$$

mas a expressão (59) ainda não é bem o que nos interessa. No entanto, tendo em conta que, em geral, o problema que nos é proposto é o de calcular $P[f(x)]$, basta então desfazer a substituição $x = g(t)$ na fórmula (59), através de $t = g^{-1}(x)$. Legitimando as “manobras” anteriores, a conclusão é a seguinte.

Conclusão 3 [Primitivação por substituição]

Sejam $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável no intervalo I , F uma primitiva de f em I , e $g: J \rightarrow I$ uma função bijetiva com derivada não nula em cada ponto de J . Então $F \circ g$ é uma primitiva de $(f \circ g) g'$ em J , tendo-se

$$P[f(x)] = \left[P[f(g(t)) g'(t)] \right]_{t=g^{-1}(x)}. \quad (60)$$

A expressão (60) exprime a regra de primitivação por substituição de variável. Mais concretamente, ela indica que o cálculo da primitiva de $f(x)$ pode ser efectuado da seguinte forma:

- faz-se a substituição $x = g(t)$;
- calcula-se depois a nova primitiva $P[f(g(t)) g'(t)]$;
- desfaz-se a substituição, regressando à variável inicial x , através de $t = g^{-1}(x)$.

Observação 3

Em geral, aplica-se o método de primitivação por substituição quando não se sabe primitivar a função dada por outro processo, ou ainda quando o cálculo da primitiva dada se simplifica significativamente. O sucesso do método depende, obviamente, da substituição adoptada. A dificuldade está em intuir uma substituição adequada para a primitiva que nos é proposta. Para a escolha da substituição, podemos recorrer a uma tabela onde se listam substituições de sucesso para os casos mais importantes (Apêndice 2 deste capítulo). ■

Exemplo 8

- (a) Para calcular $P(x\sqrt{x-1})$, faça-se a substituição definida por $x-1 = t^2$, $t \geq 0$.

Vem $x = 1 + t^2$, $t \geq 0$, e no âmbito da fórmula (60), tem-se $g(t) = 1 + t^2$. Então $g'(t) = 2t$ e somos conduzidos ao cálculo da nova primitiva,

$$P\left[(1+t^2)\sqrt{t^2}\underbrace{2t}_{g'(t)}\right] = 2P(t^2+t^4) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + \mathcal{C}.$$

Para regressar à variável x , desfaz-se a substituição, notando que $t = \sqrt{x-1}$ com $x \geq 1$, uma vez que $t \geq 0$. Resulta finalmente

$$P\left(x\sqrt{x-1}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \mathcal{C}.$$

- (b) Para calcular $P(\sqrt{1-x^2})$, faça-se a substituição $x = \cos t$, com $t \in [0, \pi]$. Neste caso, tem-se $g(t) = \cos t$ e $g'(t) = -\sin t$, para $t \in [0, \pi]$. Calculemos então

$$\begin{aligned} P\left[\sqrt{1-\cos^2 t}\underbrace{(-\sin t)}_{g'(t)}\right] &= -P(\sin^2 t) \stackrel{*}{=} -P\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}P(\cos 2t - 1) = \frac{1}{2}\sin t \cos t - \frac{1}{2}t + \mathcal{C}, \end{aligned}$$

onde na igualdade $\stackrel{*}{=}$ se usou o que vimos na subsecção 4.3, parte A. Para regressar à variável x , atenda-se a que $x = \cos t$, $t \in [0, \pi] \Leftrightarrow t = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$ e a que, para $t \in [0, \pi]$, $\cos t = x \Leftrightarrow \sin t = \sqrt{1 - x^2}$, uma vez que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Então

$$P\left(\sqrt{1 - x^2}\right) = \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2} \arccos x + \mathcal{C}.$$

- (c) Para calcular $P\left(\frac{\arcsen \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$, faça-se $x = t^2$, $t > 0$. Depois de introduzir a substituição, caímos numa primitiva que podemos determinar recorrendo ao método de primitivação por partes. Vem

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\arcsen t}{t} \underbrace{2t}_{\text{derivada}}\right) &= 2P(\arcsen t) = 2P(1 \arcsen t) \\ &= 2 \left[t \arcsen t - P\left(t \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\right) \right] \\ &= 2t \arcsen t + P\left[(-2t)(1 - t^2)^{-1/2}\right] \\ &= 2t \arcsen t + 2\sqrt{1 - t^2} + \mathcal{C}, \end{aligned}$$

donde, regressando à variável x , resulta

$$P\left(\frac{\arcsen \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x} \arcsen \sqrt{x} + 2\sqrt{1 - x} + \mathcal{C}.$$

- (d) Para calcular $P\left(\frac{x - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\right)$, faça-se $x = t^6$, $t \geq 0$. A solução é

$$\begin{aligned} P\left(\frac{x - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\right) &= \frac{3}{5} x^{5/3} - \frac{3}{4} x^{4/3} - \frac{6}{7} x^{7/6} + x + \frac{6}{5} x^{5/6} - \frac{3}{2} x^{2/3} \\ &= -2x^{1/2} + 6x^{1/6} - 3 \ln(1 + x^{1/3}) - 6 \arctg(x^{1/6}) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

- (e) Para calcular $P(x \sqrt[4]{1 + x})$, faça-se $1 + x = t^4$, $t \geq 0$. Vem

$$P(x \sqrt[4]{1 + x}) = \frac{4}{9} \sqrt[4]{(1 + x)^9} - \frac{4}{5} \sqrt[4]{(1 + x)^5} + \mathcal{C}.$$

■

5 Primitivação de funções racionais

A primitivação de funções definidas como quociente de polinómios (funções racionais),

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}, \quad (61)$$

é feita com uma técnica muito própria que se baseia na decomposição da fracção $P(x)/Q(x)$ em fracções mais simples, ditas *elementares*. Para obter uma tal decomposição, é crucial a determinação dos zeros do polinómio Q , bem como a especificação da natureza

e da multiplicidade de cada zero. Omitindo aqui alguns resultados sobre polinómios, passemos à descrição desta técnica.

Passo 1 Divisão dos polinómios (nem sempre é necessário).

Se grau $Q \geq$ grau P então efectua-se a divisão dos dois polinómios. Resulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad (62)$$

onde S e R são polinómios e grau $R <$ grau Q . A fracção $\frac{R(x)}{Q(x)}$ deve agora ser decomposta, como virá explicado nos passos seguintes.

Passo 2 Decomposição de $\frac{R(x)}{Q(x)}$ em fracções simples.

(a) Determinam-se os zeros de Q , atendendo a que:

- se Q é um polinómio de grau n então Q possui exactamente n zeros, que podem ser reais ou complexos;
- os zeros complexos ocorrem sempre aos pares de conjugados, isto é, se $a + bi$ é um zero de Q então $a - bi$ também é um zero de Q ;
- cada zero de Q pode ser *simples* ou de *multiplicidade um*, quando anula Q mas não anula a sua derivada Q' , e pode ser *múltiplo* com *multiplicidade* $k > 1$, quando anula Q e todas as suas derivadas até à ordem $k - 1$ mas não anula a derivada de ordem k ;
- o polinómio Q possui o zero real $x = a$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na factorização de Q , o factor $(x - a)$ ocorre exactamente k vezes;
- o polinómio Q possui o par de zeros complexos $x = a \pm bi$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na factorização de Q , o factor $[(x - a)^2 + b^2]^k$ ocorre exactamente k vezes.

(b) Decompõe-se $\frac{R(x)}{Q(x)}$ numa soma de fracções simples, com base nos zeros de Q encontrados em (a), atendendo a que:

- cada zero real $x = a$, com multiplicidade k , contribui com k fracções simples da forma

$$\frac{A_1}{(x - a)^k}, \frac{A_2}{(x - a)^{k-1}}, \dots, \frac{A_k}{x - a}, \quad (63)$$

onde A_1, A_2, \dots, A_k são constantes reais a determinar;

- cada par de zeros complexos conjugados $x = a \pm bi$, com multiplicidade k , contribui com k fracções simples da forma

$$\frac{P_1x + Q_1}{[(x - a)^2 + b^2]^k}, \frac{P_2x + Q_2}{[(x - a)^2 + b^2]^{k-1}}, \dots, \frac{P_kx + Q_k}{(x - a)^2 + b^2} \quad (64)$$

onde $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_k, Q_k$ são constantes reais a determinar.

- (c) Calculam-se as constantes A_i, P_i, Q_i que figuram nos numeradores das fracções simples (63) e (64), recorrendo ao chamado método dos *coeficientes indeterminados*, que virá exposto nos exemplos que se apresentam a seguir. Na prática, recorre-se muitas vezes a outras regras bastante simples que, conjugadas com o método anterior, simplificam significativamente os cálculos a efectuar.

Passo 3 Cálculo das primitivas.

O cálculo da primitiva inicial é efectuado a partir do que se viu nos passos anteriores, nomeadamente, a partir da expressão (62), onde $\frac{R(x)}{Q(x)}$ se escreve como uma soma de parcelas dos tipos (63) e (64). Então

$$P \left[\frac{P(x)}{Q(x)} \right] = P [S(x)] + P \left[\frac{R(x)}{Q(x)} \right]$$

onde a primeira primitiva no segundo membro é imediata, por se tratar de um polinómio, e a segunda primitiva é a soma das primitivas das fracções simples envolvidas na decomposição. Todas as fracções da forma (63) têm primitiva imediata (regra 4. da potência e regra 3. do logaritmo). As fracções da forma (64) podem ser primitivadas através de uma substituição de variável. A última, em particular, pode ser tratada como primitiva imediata, depois de algumas manipulações algébricas (regra 15. do arco-tangente). ■

Exemplo 9

1. Calcular $P \left(\frac{2x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} \right)$.

Passo 1 Neste caso, grau $P = 5$ e grau $Q = 4$, pelo que é necessário efectuar a divisão dos dois polinómios. Resulta

$$\frac{2x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = 2x + \frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}.$$

Passo 2 Vamos decompor a fracção no segundo membro da última equação em fracções simples.

- (a) Os zeros de $Q(x) = (x^2 + 1)(x - 1)^2$ são:
- $x = 1$, real com multiplicidade 2;
 - $x = \pm i$, complexos conjugados com multiplicidade 1.

- (b) A fracção decompõe-se numa soma de três fracções simples, duas delas associadas ao zero real de multiplicidade 2 e a outra associada ao par de complexos conjugados de multiplicidade 1,

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{A_1}{(x - 1)^2} + \frac{A_2}{x - 1} + \frac{Px + Q}{x^2 + 1}, \quad (65)$$

onde A_1 , A_2 , P e Q são constantes a determinar.

- (c) Da equação (65), reduzindo ao mesmo denominador, sai que

$$\begin{aligned} x &= A_1(x^2 + 1) + A_2(x - 1)(x^2 + 1) + (Px + Q)(x - 1)^2 \\ &= (A_2 + P)x^3 + (A_1 - A_2 - 2P + Q)x^2 + (A_2 + P - 2Q)x + (A_1 - A_2 + Q), \end{aligned}$$

donde

$$A_2 + P = 0, \quad A_1 - A_2 - 2P + Q = 0, \quad A_2 + P - 2Q = 1, \quad A_1 - A_2 + Q = 0,$$

e, portanto

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = 0, \quad P = 0, \quad Q = -\frac{1}{2}. \quad (66)$$

A concluir este segundo passo, da equação (65) e das expressões (66), resulta

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(x - 1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 + 1}.$$

Passo 3 Do que se viu anteriormente, sai

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} \right) &= P(2x) + P\left(\frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} \right) \\ &= P(2x) + \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{(x - 1)^2} \right) - \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{2} \arctg x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

2. Calcular $P\left(\frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x} \right)$.

Passo 1 Não é necessário dividir os polinómios.

Passo 2 Obter $\frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 1}.$

Passo 3 Resulta $P\left(\frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x} \right) = \ln \frac{|x - 1|^3 (x + 1)^2}{|x|} + \mathcal{C}.$

3. Calcular $P\left(\frac{x+1}{x(x^2+1)^2}\right)$.

Passo 1 Não é necessário dividir os polinómios.

Passo 2 Obter $\frac{x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{-x}{x^2+1}$.

Passo 3 Resulta

$$P\left(\frac{x+1}{x(x^2+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + \mathcal{C}.$$

■

Tabela de primitivas imediatas

Primitivas Imediatas

Na lista de primitivas que se segue, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável no intervalo I e c denota uma constante real arbitrária.

1. $P(a) = ax + c$

2. $P(f' f^\alpha) = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$

3. $P\left(\frac{f'}{f}\right) = \ln |f| + c$

4. $P(a^f f') = \frac{a^f}{\log a} + c \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

5. $P(f' \cos f) = \sin f + c$

6. $P(f' \sin f) = -\cos f + c$

7. $P\left(\frac{f'}{\cos^2 f}\right) = \operatorname{tg} f + c$

8. $P\left(\frac{f'}{\sin^2 f}\right) = -\operatorname{cotg} f + c$

9. $P(f' \operatorname{tg} f) = -\log |\cos f| + c$

10. $P(f' \operatorname{cotg} f) = \log |\sin f| + c$

11. $P\left(\frac{f'}{\cos f}\right) = \log \left| \frac{1}{\cos f} + \operatorname{tg} f \right| + c$

12. $P\left(\frac{f'}{\sin f}\right) = \log \left| \frac{1}{\sin f} - \operatorname{cotg} f \right| + c$

13. $P\left(\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\right) = \operatorname{arcsen} f + c$

14. $P\left(\frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\right) = \arccos f + c$

15. $P\left(\frac{f'}{1+f^2}\right) = \operatorname{arctg} f + c$

16. $P\left(\frac{-f'}{1+f^2}\right) = \operatorname{arccotg} f + c$

17. $P(f' \operatorname{ch} f) = \operatorname{sh} f + c$

18. $P(f' \operatorname{sh} f) = \operatorname{ch} f + c$

19. $P\left(\frac{f'}{\operatorname{ch}^2 f}\right) = \operatorname{th} f + c$

20. $P\left(\frac{f'}{\operatorname{sh}^2 f}\right) = -\operatorname{coth} f + c$

21. $P\left(\frac{f'}{\sqrt{f^2+1}}\right) = \operatorname{argsh} f + c$

22. $P\left(\frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}\right) = \operatorname{argch} f + c$

23. $P\left(\frac{f'}{1-f^2}\right) = \operatorname{argth} f + c$

24. $P\left(\frac{f'}{1-f^2}\right) = \operatorname{argcoth} f + c$

Tabela de substituições

Primitivas por Substituição

Na lista de substituições que se segue, a , b e c são constantes reais arbitrárias. A notação $R(\dots)$ indica uma função racional dos monómios que se encontram dentro dos parêntesis. Na coluna da esquerda, figuram diferentes tipos de funções primitiváveis. Na coluna da direita sugere-se, em cada caso, uma substituição adequada à função indicada na coluna da esquerda.

Tipo de Função	Substituição
1. $\frac{1}{(x^2 + a^2)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$	$x = a \operatorname{tg} t$
2. $\frac{Q(x)}{(ax^2 + bx + c)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, $b^2 - 4ac < 0$ onde $Q(x)$ é um polinómio de grau inferior a $2k$	$ax + \frac{b}{2} = t$
3. $\frac{Q(x)}{[(x-p)^2 + q^2]^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ onde $Q(x)$ é um polinómio de grau inferior a $2k$	$x = p + qt$
4. $R(a^{rx}, a^{sx}, \dots)$	$a^{mx} = t$ com $m = \text{m.d.c.}(r, s, \dots)$
5. $R(\log_a x)$	$t = \log_a x$
6. $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, \dots\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ com $m = \text{m.m.c.}(q, s, \dots)$
7. $R\left(x, (ax+b)^{p/q}, (ax+b)^{r/s}, \dots\right)$	$(ax+b) = t^m$ com $m = \text{m.m.c.}(q, s, \dots)$
8. $R\left(x, x^{p/q}, x^{r/s}, \dots\right)$	$x = t^m$ com $m = \text{m.m.c.}(q, s, \dots)$
9. $R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2 x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t$ ou $x = \frac{a}{b} \cos t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{th} t$
10. $R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2 x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{sh} t$
11. $R\left(x, \sqrt{b^2 x^2 - a^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \sec t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{ch} t$
12. $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a - bx}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen}^2 t$ ou $x = \frac{a}{b} \cos^2 t$
13. $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a + bx}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg}^2 t$

Tipo de Função

14. $R(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx-a})$

15. $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

16. $x^m(a+bx^n)^{p/q}$

17. $R(\sin x, \cos x)$ com

(a) R ímpar em $\sin x$ isto é
 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

(b) R ímpar em $\cos x$ isto é
 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

(c) R par em $(\sin x, \cos x)$ isto é
 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

(d) nos restantes casos (e até nos anteriores)

18. $R(\sin mx, \cos mx)$

19. $R(e^x \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$

20. $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ com

(a) R ímpar em $\operatorname{sh} x$

(b) R ímpar em $\operatorname{ch} x$

(c) R par em $(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$

(d) nos restantes casos (e até nos anteriores)

21. $R(\operatorname{sh} mx, \operatorname{ch} mx)$

Substituição

$$x = \frac{a}{b} \sec^2 t$$

se $a > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t$

se $c > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$

se $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$ faz-se

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_1)t \text{ ou}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_2)t$$

se $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = t^q$

se $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = x^n t^q$

$$\cos x = t$$

$$\sin x = t$$

$\operatorname{tg} x = t$, sendo então (supondo $x \in]0, \pi/2[$)
 $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, sendo $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$mx = t$$

$$x = \log t$$

$$\operatorname{ch} x = t$$

$$\operatorname{sh} x = t$$

$\operatorname{th} x = t$, sendo $\operatorname{sh} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$, sendo $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

$$mx = t$$

Cálculo Integral

Integral de Riemann

Definição, Propriedades

Teorema fundamental do cálculo

Métodos de integração

Aplicações geométricas do integral

Integral impróprio

Na primeira parte deste capítulo vamos apresentar a noção de integral segundo Riemann, estudar algumas das suas propriedades e referir algumas das suas aplicações. Na segunda parte estudaremos os integrais impróprios.

1 Introdução e motivação

Classicamente, o conceito de integral aparece associado à noção intuitiva de área de uma região plana. Nós vamos seguir a via clássica para motivar a nossa exposição.

Considere-se uma função contínua $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sejam

$$m = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \min_{x \in [a, b]} f(x). \quad (67)$$

Suponhamos que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, e consideremos a região plana (*cf.* a Figura 1)

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\} \quad (68)$$

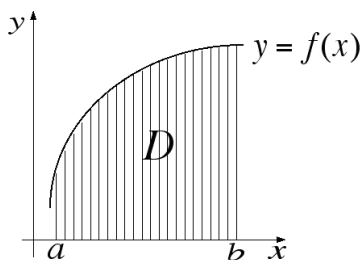


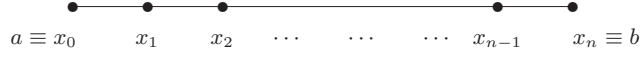
Figura 1: Região \mathcal{D} limitada pelo gráfico de f , pelo eixo OX e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Suponhamos que pretendemos determinar o valor da área da região \mathcal{D} . Em geral, a forma geométrica de \mathcal{D} é pouco “regular”, pelo que as fórmulas da geometria elementar não são aplicáveis. Podemos pensar então em aproximar a área de \mathcal{D} pela área de figuras simples, compostas por regiões rectangulares justapostas.

Estratégia

1. Começamos por decompor o intervalo $[a, b]$ num número finito de subintervalos, determinados pelos pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$



A uma tal decomposição iremos chamar *partição* \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$.

2. Em cada subintervalo genérico, $J_i = [x_{i-1}, x_i]$, fixamos arbitrariamente um ponto, digamos

$$y_1 \in [x_0, x_1], \quad y_2 \in [x_1, x_2], \quad y_{n-1} \in [x_{n-2}, x_{n-1}], \quad y_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

e consideramos o correspondente valor de f ,

$$f(y_1), \quad f(y_2), \quad \dots, \quad f(y_{n-1}), \quad f(y_n).$$

3. Aproximamos a área da porção \mathcal{D}_k da região \mathcal{D} que assenta no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, Figura 2, à esquerda, pela área da região rectangular \mathcal{R}_k de base $x_k - x_{k-1}$ e altura $f(y_k)$, Figura 2, à direita,

$$\text{área } \mathcal{D}_k \simeq f(y_k)(x_k - x_{k-1}).$$

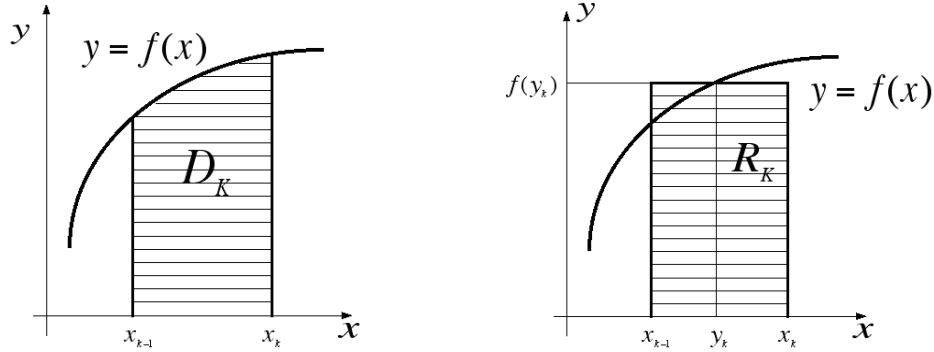


Figura 2: Aproximação da área de \mathcal{D}_k pela área de uma região rectangular.

Para a região completa \mathcal{D} tomamos a aproximação (Figura 3)

$$\begin{aligned} \text{área } \mathcal{D} &\simeq \text{área } \mathcal{R}_1 + \text{área } \mathcal{R}_2 + \dots + \text{área } \mathcal{R}_n \\ &\simeq f(y_1)(x_1 - x_0) + f(y_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(y_n)(x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

ou seja, abreviando a notação,

$$\text{área } \mathcal{D} \simeq \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (69)$$

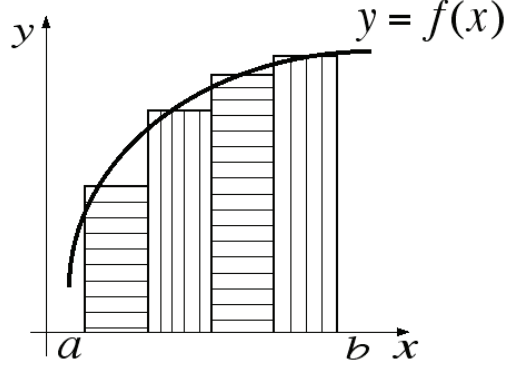


Figura 3: Aproximação da área de \mathcal{D} pela área de uma região poligonal

4. É intuitivo que:
 - (a) a aproximação obtida na expressão (69) será tanto melhor quanto maior for o número de pontos considerados para a decomposição do intervalo $[a, b]$;
 - (b) a aproximação *ótima* seria obtida com um número infinitamente grande de pontos, ou seja, com subintervalos de amplitude infinitamente pequena.
5. Obtemos então uma definição para a área de \mathcal{D} através da passagem ao limite na expressão (69), tomando

$$\text{área } \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (70)$$

Vamos passar agora à exposição rigorosa deste assunto, formalizando adequadamente as ideias intuitivas que acabamos de expor. A área da região \mathcal{D} vai dar lugar ao *integral de f em $[a, b]$* e cada quantidade introduzida na expressão (69) para aproximar a área de \mathcal{D} vai dar lugar a uma *soma de Riemann*.

2 Definição de integral

Nesta secção apresentaremos a definição de integral segundo Riemann, para uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitada, não necessariamente contínua nem necessariamente positiva.

Dada uma partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$, chamamos *amplitude* de \mathcal{P} à maior das amplitudes dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$,

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{x_k - x_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n\},$$

pelo que, considerar o número de subintervalos a tender para $+\infty$, equivale a considerar $\|\mathcal{P}\|$ a tender para 0.

Fixando arbitrariamente pontos $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$, definimos uma soma de Riemann da função f em $[a, b]$, para a partição \mathcal{P} considerada, por

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (71)$$

Dizemos que a função f é integrável em $[a, b]$ e que o correspondente integral é igual a \mathcal{I} quando, independentemente da partição \mathcal{P} e da escolha dos pontos y_k , se tiver

$$\mathcal{I} = \lim_{||\mathcal{P}|| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (72)$$

Ao número \mathcal{I} chamamos o *integral de f em $[a, b]$* e representámo-lo por

$$\int_a^b f(x) dx,$$

onde f é a *função integranda*, a é o *limite inferior do integral*, b é o *limite superior do integral*, $[a, b]$ é o *intervalo de integração* e x é a *variável de integração*. O símbolo dx representa uma partícula formal que fixa a variável de integração.

Exemplo 1

Seja $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, com c uma constante e x em certo intervalo $[a, b]$.

Dada uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ em subintervalos J_1, J_2, \dots, J_n teremos, independentemente da escolha dos pontos y_k ,

$$f(y_k) = c, \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, n,$$

pelo que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}) &= c(x_1 - x_0) + c(x_2 - x_1) + \dots + c(x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b - a) \end{aligned}$$

Então f é integrável em $[a, b]$, tendo-se $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$. ■

Exemplo 2

Seja $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ para todo x em certo intervalo $[a, b]$.

Independentemente da partição \mathcal{P} de $[a, b]$, podemos escolher cada um dos pontos y_k em \mathbb{Q} ou em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, uma vez que todo o intervalo não degenerado de \mathbb{R} contém racionais e irracionais. Se os escolhermos todos em \mathbb{Q} , resulta

$$g(y_k) = 1, \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, n,$$

e pelo que vimos no Exemplo 1, vem

$$\sum_{k=1}^n g(y_k)(x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

De modo perfeitamente análogo, se escolhermos todos os y_k em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, resulta

$$g(y_k) = 0, \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, n,$$

e

$$\sum_{k=1}^n g(y_k)(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Consequentemente, não existe o limite das somas de Riemann para esta função, no sentido exposto anteriormente, e g não é integrável em intervalo algum. ■

Observação 1

Só se define integral de uma função limitada, mas nem toda a função limitada é integrável. Veja-se o Exemplo 2. Mais adiante, identificaremos algumas classes de funções limitadas que são integráveis. ■

A definição que apresentámos anteriormente para função integrável e para integral de uma função, e que usámos nos Exemplos 1 e 2, é muito complexa para a generalidade das funções, por ser difícil estudar a existência do limite das somas de Riemann para uma partição qualquer do intervalo e para uma escolha arbitrária de pontos y_k . O nosso objectivo será agora o de enunciar resultados que nos ajudem a decidir sobre a integrabilidade de uma função e o de apresentar processos eficazes para o cálculo do integral. Começemos com as principais propriedades do integral.

3 Propriedades do integral

Nesta secção vamos apresentar, sem demonstrar, algumas propriedades do integral que se revelarão extremamente úteis.

Propriedade 1 [Aditividade do integral a respeito do intervalo de integração]

Sejam f limitada em $[a, b]$ e $c \in]a, b[$. Então f é integrável em $[a, b]$ se e só se f integrável separadamente em $[a, c]$ e $[c, b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (73)$$

■

No sentido de estender a Propriedade 1 a todos os reais a, b, c , adoptamos as seguintes convenções clássicas

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}, \quad (74a)$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \text{ para todos } a, b \in \mathbb{R}. \quad (74b)$$

Propriedade 2 [Linearidade do integral]

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$. Então:

- (a) a soma $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx; \quad (75)$$

- (b) o produto fg é integrável em $[a, b]$; em particular, se α é uma constante real arbitrária, o produto αf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx. \quad (76)$$

■

Propriedade 3

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$. Se $|g(x)| \geq k > 0, \forall x \in [a, b]$, então a função $1/g$ é limitada e o quociente f/g é integrável. ■

Propriedade 4 [Monotonia do integral]

Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx; \quad (77)$$

em particular, se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Propriedade 5

Se f é integrável em $[a, b]$ então a função $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right|. \quad (78)$$

Propriedade 6

- (a) Se f é limitada em $[a, b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a, b]$ excepto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = 0; \quad (79a)$$

- (b) se f é integrável em $[a, b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a, b]$, então

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (79b)$$

4 Caracterização das funções integráveis

Vamos agora enunciar, sem demonstrar, alguns resultados que estabelecem condições suficientes para a integrabilidade de uma função num intervalo, a partir dos quais identificaremos três classes de funções integráveis (Teoremas 1, 2 e 3).

Teorema 1 [Integrabilidade das funções contínuas]

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é integrável em $[a, b]$. ■

Exemplo 3

As funções

$$x^k, x \in \mathbb{R}, \quad e^x, x \in \mathbb{R}, \quad \sin x, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R},$$

são integráveis em qualquer intervalo $[a, b]$ por serem funções contínuas. ■

Observação 2

O Teorema 1 estabelece que a continuidade de uma função garante a sua integrabilidade. No entanto, é conveniente reter, desde já, que existem funções descontínuas que são integráveis. ■

Teorema 2 [Integrabilidade das funções monótonas]

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona então f é integrável em $[a, b]$. ■

Exemplo 4

A função $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$, definida em $[0, 1]$, possui um número

infinito de descontinuidades - todos os pontos da forma $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, são pontos de descontinuidade de f . No entanto, f é integrável por ser monótona. ■

Observação 3

Do Teorema 2, podemos concluir que, ainda que uma função não seja contínua, se for monótona, então ela é também integrável. Mais uma vez, chama-se a atenção para o facto de existirem funções que não são monótonas (nem contínuas) e, mesmo assim, são integráveis. ■

Teorema 3 [Integrabilidade das funções com um número finito de descontinuidades]

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada possuindo um número finito de descontinuidades então f é integrável em $[a, b]$. ■

Exemplo 5

A função

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

é integrável em $[0, 4]$ porque possui apenas duas descontinuidades, em $x = 1$ e em $x = 2$.

Também a função

$$h(x) = \begin{cases} e^{\sin x} & \text{se } x \neq \pi \\ -1 & \text{se } x = \pi \end{cases}$$

é integrável em $[0, 9]$ porque possui apenas uma descontinuidade em $x = \pi$. ■

Observação 4

Mostra-se ainda que, se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e o conjunto dos pontos de descontinuidade de f constitui um conjunto numerável¹ então f é integrável em $[a, b]$. ■

5 O Teorema fundamental do cálculo

Um dos resultados mais notáveis do Cálculo está patente no teorema que agora iremos apresentar. Nele estabelece-se uma ligação crucial entre os conceitos de derivada e de integral, a partir da qual é possível obter um processo extremamente eficaz para o cálculo do integral, dispensando o recurso à definição apresentada na Secção 2.

Consideremos uma função contínua, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, logo integrável. Para cada $x \in [a, b]$, f é integrável em $[a, x]$, pelo que podemos definir uma nova função, $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, por passagem ao integral, pondo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (80)$$

A função F acabada de definir possui uma característica importante, relacionada com a função inicial f .

Teorema 4 [Teorema Fundamental do Cálculo, parte I]

A função $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão (80) é derivável em $[a, b]$, tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (81)$$

■

A partir da expressão (81), podemos concluir que a função f é uma primitiva de F , pelo que vale o seguinte resultado.

¹Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se numerável se existir uma bijecção $\psi: A \rightarrow \mathbb{N}$, significando que A possui tantos elementos como o conjunto \mathbb{N} . Alguns exemplos de conjuntos numeráveis são \mathbb{Z} e \mathbb{Q} e de conjuntos não numeráveis são \mathbb{R} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Corolário 1

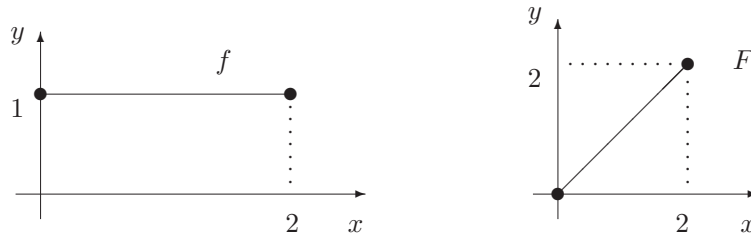
Toda a função contínua $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ possui primitiva em $[a, b]$. ■

De facto, basta pensar na correspondente função F obtida como em (80), por integração da função f desde a até x .

Observação 5

Quando f não é contínua, mantendo-se integrável, podemos definir uma função F como em (80). Acontece, porém, que F pode não ser derivável, ou então, até ser derivável mas a sua derivada não coincidir com f nos pontos de descontinuidade de f (Exemplos 6, 7 e 8).

Exemplo 6

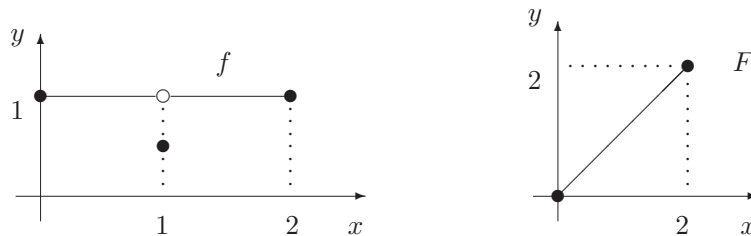


f é contínua, logo integrável (Teorema 1) e primitivável (Teorema 4).

Define-se a função F , que é derivável. Além disso,

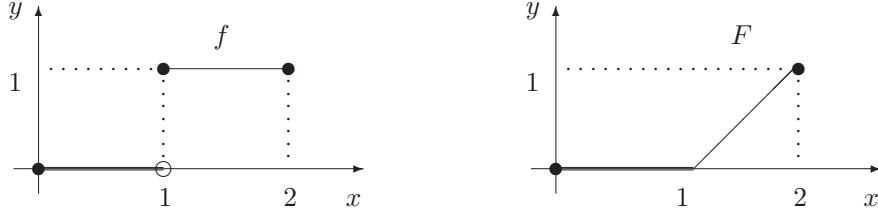
$$f(x) = 1 \implies F(x) = \int_0^x 1 \, dt = x, \quad \forall x \in [0, 2].$$
 ■

Exemplo 7



f é limitada com uma descontinuidade em 1, logo é integrável (Teorema 3). No entanto, f não é primitivável (isto é, f não é a derivada de função alguma em $[0, 2]$). Mesmo assim, a integrabilidade de f em $[0, 2]$ é suficiente para que se possa definir a função F , como em (80). Como a função f deste Exemplo 7 difere da função f do Exemplo 6 apenas no ponto 1, os integrais das duas são iguais (Propriedade 6), pelo que $F(x) = x, \forall x \in [0, 2]$. Além disso, F é obviamente derivável, com $F'(x) = 1, \forall x \in [0, 2]$. Acontece, porém, que a derivada de F em 1 difere de $f(1)$. ■

Exemplo 8



f é limitada e possui uma descontinuidade no ponto 1. Logo f é integrável (Teorema 3) mas não é primitivável. Define-se novamente a função F , como em (80), e vem

$$\begin{aligned} x \in [0, 1[&\implies f(x) = 0 \implies F(x) = \int_0^x 0 \, dt = 0, \\ x \in [1, 2] &\implies f(x) = 1 \implies F(x) = \int_1^x 1 \, dt = x - 1. \end{aligned}$$

A função f é contínua mas não é derivável em 1. ■

Do ponto de vista do cálculo do integral de uma função, a consequência mais relevante que se extrai do Teorema 4 é a que se apresenta a seguir.

Teorema 5 [Teorema Fundamental do Cálculo, Fórmula de Barrow]

Sejam $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e G uma primitiva de f em $[a, b]$. Então

$$\int_a^b f(t) \, dt = G(b) - G(a). \quad (82)$$
■

Demonstração

Pondo $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$, tem-se $F(b) = \int_a^b f(t) \, dt$.

Atendendo a que F e G são duas primitivas de f em $[a, b]$, tem-se

$$G(x) = F(x) + C, \quad x \in [a, b], \quad C \text{ constante.}$$

Em particular, para $x = a$, vem

$$G(a) = F(a) + C \implies C = G(a),$$

pelo que

$$G(x) = F(x) + G(a), \quad x \in [a, b].$$

Para $x = b$, vem

$$G(b) = F(b) + G(a) \implies F(b) = G(b) - G(a)$$

ficando, assim, justificada a igualdade (82). ■

Notação

Para traduzir a identidade (82), usamos a notação $\int_a^b f(t) \, dt = \left[G(x) \right]_a^b$.

O Teorema 5 fornece um processo extremamente útil para o cálculo do integral de uma função contínua num intervalo. Quando a função integranda não é contínua, conjugamos o Teorema 5 com as propriedades enunciadas na Secção 3, para calcular o integral por intermédio de uma primitiva da função integranda em cada intervalo de continuidade.

Exemplo 9

$$(a) \int_0^\pi \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

$$(b) \int_{-5}^3 |x| \, dx = \int_{-5}^0 (-x) \, dx + \int_0^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \left[x^2 \right]_{-5}^0 + \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_0^3 = \frac{25}{2} + \frac{9}{2} = 7.$$

$$(c) \int_0^5 \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \left[\log(x^2+1) \right]_0^5 = \frac{1}{2} (\log 26 - \log 1) = \log \sqrt{26}.$$

$$(d) \text{ Se } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 3 & \text{se } x \in]1, 2] \end{cases} \text{ então } \int_0^2 f(x) \, dx \stackrel{\text{Prop. 6(b)}}{=} \int_0^1 1 \, dx + \int_1^2 3 \, dx \\ = \left[x \right]_0^1 + \left[3x \right]_1^2 = (1 - 0) + (6 - 3) = 4.$$

$$(e) \text{ Se } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ x-3 & \text{se } 3 < x \leq 6 \end{cases} \text{ então, novamente pela Propriedade 6 (b), vem}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) \, dx &= \int_0^1 x^2 \, dx + \int_1^3 2 \, dx + \int_3^6 (x-3) \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[2x \right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_3^6 = \frac{1}{3} + (6 - 2) + \left(0 + \frac{9}{2} \right) = \frac{53}{6}. \end{aligned}$$

6 Resultados clássicos do cálculo do integral

Do teorema fundamental do cálculo, Teorema 4, saem algumas consequências que passamos a apresentar.

A - Derivação sob o sinal de integral

Seja $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função F definida como em (80) é derivável e será também derivável a composta $F \circ \varphi$, com $\varphi: [c, d] \longrightarrow [a, b]$ uma função derivável qualquer. Por um lado, pela regra de derivação de funções compostas, vem

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \varphi'(x),$$

e pelo teorema fundamental do cálculo, Teorema 4, sai que

$$(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x). \quad (83a)$$

Por outro lado, da definição (80) para F , sai também que

$$(F \circ \varphi)(x) = F(\varphi(x)) = \int_0^{\varphi(x)} f(t) dt,$$

pelo que

$$(F \circ \varphi)'(x) = \left(\int_0^{\varphi(x)} f(t) dt \right)' . \quad (83b)$$

Das expressões (83a-b), resulta

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right)' = f(\varphi(x)) \varphi'(x) , \quad (84)$$

que dá uma fórmula para a derivação do integral com limite superior que é função da variável. Mais em geral, sendo $\varphi, \psi: [c, d] \longrightarrow [a, b]$ funções deriváveis, partindo de

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = \int_a^{\psi(x)} f(t) dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt$$

e usando o resultado da fórmula (84), vem

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x)) \psi'(x) - f(\varphi(x)) \varphi'(x) . \quad (85)$$

que dá uma fórmula para a derivação do integral com os dois limites de integração que são função da variável.

Exemplo 10

Estudemos a monotonia da função definida por

$$H(x) = x^2 \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$H'(x) = 2x \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt + 3x^4 e^{-x^6}, \quad x \in \mathbb{R},$$

que se anula apenas para $x = 0$, já que $3x^4 e^{-x^6} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e que

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies 2x > 0 \wedge \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt > 0 \implies H'(x) > 0, \\ x < 0 &\implies 2x < 0 \wedge \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt < 0 \implies H'(x) > 0. \end{aligned}$$

Logo H é monótona crescente. ■

B - Fórmula do valor médio para integrais

Novamente, dada $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua, podemos definir

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x),$$

e por ser

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b],$$

da monotonia do integral, sai que

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx,$$

ou seja,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

Consequentemente, ter-se-á

$$\int_a^b f(x) \, dx = \alpha(b-a), \quad \text{com} \quad \alpha \in [m, M].$$

Sendo contínua em $[a, b]$, a função f toma todos os valores desde m até M , existindo $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \alpha$, valendo o seguinte resultado.

Teorema 6 [do valor médio para integrais]

Se $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a)f(c). \quad (86)$$

■

Com base no Teorema 6, define-se usualmente o *valor médio* da função f por

$$\tilde{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \quad (87)$$

Exemplo 11

O valor médio da função $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \pi/2]$ é dado por

$$\tilde{f} = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

■

C - Integração por partes

Consideremos agora $f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ com f contínua, F uma sua primitiva e g possuindo derivada contínua. Então fg é integrável e conjugando a fórmula de Barrow expressa pelo teorema fundamental do cálculo, Teorema 5, com o método de primitivação por partes, sai que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \left[F(x)g(x) - P\left(F(x)g'(x)\right) \right]_a^b$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \left[F(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx. \quad (88)$$

Exemplo 12

$$(a) \int_0^2 xe^x dx = \left[e^x x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - \left[e^x \right]_0^2 = e^2 + 1.$$

$$(b) \int_1^e \log \sqrt{x} dx = \left[x \log \sqrt{x} \right]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{e}{2} - \int_1^e \frac{1}{2} dx = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \left[x \right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

$$(c) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{2x}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \left[\ln(1+x^4) \right]_0^1 \\ = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2. \quad \blacksquare$$

C - Integração por substituição

Para calcular o integral $\int_a^b f(x) dx$ de uma função contínua $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos conjugar a fórmula de Barrow, Teorema 5, com o método de primitivação por substituição, passando da variável x a uma nova variável, digamos t , através da mudança de variável $x = g(t)$. Já sabemos como uma tal mudança altera a função a primitivar, que passará de $f(x)$ para $f(g(t))g'(t)$. Mas é de esperar que o intervalo de integração tenha que ser adaptado à nova variável t . Para isso, devemos procurar saber em que intervalo irá variar t , se temos x a variar em $[a, b]$ e fazemos $x = g(t)$. Ou seja, devemos procurar pontos α e β tais que

$$a = g(\alpha) \quad \text{e} \quad b = g(\beta).$$

Para uma função $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua, e para uma substituição definida através de uma função $g: [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ possuindo derivada contínua e tal que $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$, o resultado é o seguinte

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt. \quad (89)$$

A expressão (89) dá a fórmula de substituição no integral, para uma mudança de variável definida por $x = g(t)$.

Observação 6

No integral do segundo membro da expressão (89), os limites de integração α e β são quaisquer números reais tais que $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, ainda que haja várias escolhas possíveis. Cf. o Exemplo 13. ■

Exemplo 13

- (a) Calculemos $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, efectuando a mudança de variável $x = \sin t$.

Pondo $g(t) = \sin t$, vem $g'(t) = \cos t$. Quanto aos limites de integração, temos

$$\begin{cases} x = \sin t \\ x = 0 \end{cases} \implies \sin t = 0 \implies t = t_1 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} x = \sin t \\ x = 1 \end{cases} \implies \sin t = 1 \implies t = t_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A escolha mais simples parece ser $t_1 = 0$ e $t_2 = \frac{\pi}{2}$, resultando

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A título de ilustração, faça-se outra escolha, por exemplo, $t_1 = 2\pi$ e $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Viria

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt$$

Mas $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$ e $\cos t$ não tem sinal constante em $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, pelo que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(2\pi - \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

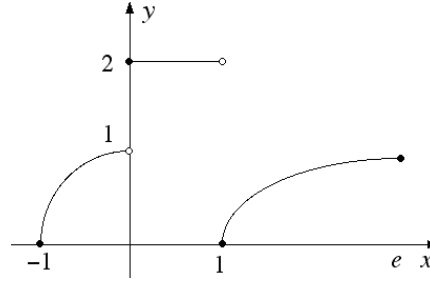
- (b) Calculemos agora $\int_1^2 x \sqrt{x-1} dx$, efectuando a mudança de variável $x-1 = t^2$.

Pondo $g(t) = t^2 + 1$, vem $g'(t) = 2t$. Atendendo a que $g(0) = 1$ e $g(1) = 2$, resulta

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \sqrt{x-1} dx &= \int_0^1 (1+t^2) \sqrt{t^2} 2t dt = 2 \int_0^1 (t^2 + t^4) dt \\ &= \frac{2}{3} [t^3]_0^1 + \frac{2}{5} [t^5]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

(c) Calculemos $\int_{-1}^e f(x) dx$ para

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 2 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \log x & \text{se } 1 \leq x \leq e. \end{cases}$$



Recorrendo à Propriedade 6 (b), vem

$$\int_{-1}^e f(x) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 2 dx + \int_1^e \log x dx,$$

onde o primeiro integral se calcula por substituição fazendo, por exemplo, $x = \sin t$, o segundo é imediato e o terceiro calcula-se por partes. Resulta $\int_{-1}^e f(x) dx = \frac{\pi}{4} + 2 + 1$. ■

Exemplo 14

Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Vejamos que:

(a) se f é par então $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;

(b) se f é ímpar então $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(a) Sendo f par, tem-se $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in [-a, a]$, e então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(-x) dx}_J + \int_0^a f(x) dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = -t$ no integral J , vem

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^0 f(t)(-1) dt + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(b) Sendo f ímpar, tem-se $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in [-a, a]$, e então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \underbrace{\int_{-a}^0 f(-x) dx}_J + \int_0^a f(x) dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = -t$ no integral J , vem

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_a^0 f(t)(-1) dt + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0. \quad \blacksquare$$

7 Aplicações do integral

Algumas aplicações geométricas do integral estão relacionadas com a área de um domínio plano limitado, o comprimento de um arco de curva entre dois pontos, o volume de um sólido de revolução, e a área de uma superfície de revolução.

7.1 Área de um domínio plano

Vamos retomar o problema que serviu de motivação à definição de integral (Secção 1). No caso em que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, dissemos que a área do domínio limitado pelo gráfico de f , pelo eixo OX e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, representado na Figura 1 da Secção 1, é dada por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Daqui extraem-se as seguintes consequências.

(a) Se $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$, então, por simetria em relação a OX , a área da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge f(x) \leq y \leq 0\}$$

coincide com a área de um novo domínio plano, digamos \mathcal{D}^* , obtido de \mathcal{D} por simetria em relação ao eixo OX , ou seja

$$\mathcal{D}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq -f(x)\}$$

donde

$$\text{área}(\mathcal{D}) = - \int_a^b f(x) dx. \quad (90)$$

(b) Se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $0 \leq g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$, então, a área da região

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

pode ser dada por $\text{área}(\mathcal{D}) = \text{área}(\mathcal{D}_1) - \text{área}(\mathcal{D}_2)$, onde \mathcal{D}_1 é a região plana sob o gráfico de f e \mathcal{D}_2 é a região plana sob o gráfico de g . Então

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

ou seja

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (91)$$

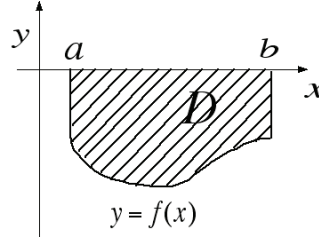


Figura 4: Região limitada pelo gráfico de uma função negativa, pelo eixo OX e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

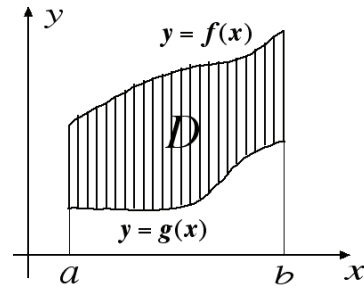


Figura 5: Região limitada pelos gráficos de duas funções positivas e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

(c) Consideremos agora uma região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

onde f e g são duas funções contínuas, não necessariamente positivas, tais que $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Por translação segundo um vector vertical orientado no sentido positivo de OY , a região \mathcal{D} seria transportada para o semiplano superior (positivo), obtendo-se uma região \mathcal{D}^* geometricamente igual a \mathcal{D} , limitada por $y = f(x) + k$, $y = g(x) + k$, com k uma constante positiva tal que $k > |\min_{x \in [a, b]} f(x)|$.

A área da região \mathcal{D} seria então dada por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \text{área}(\mathcal{D}^*) = \int_a^b [f(x) + k - (g(x) + k)] dx,$$

ou seja novamente por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

(d) Mais em geral, se os gráficos das funções f e g se intersectam num ponto de abcissa c e invertem a posição relativa, a área da região \mathcal{D} limitada pelos gráficos de f e de g e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ pode ser calculada como a soma de duas áreas, a da região entre $x = a$ e $x = c$ e a da região entre $x = c$ e $x = b$. Pelo que vimos em (b), resulta

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{D}) &= \int_a^c [f(x) - g(x)] dx \\ &+ \int_c^b [g(x) - f(x)] dx. \end{aligned} \quad (92)$$

Exemplo 15

(a) A área da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$, que se intersectam para $x = -1$ e $x = 1$, é dada por (caso (b))

$$\int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

(b) A área da região limitada pelas curvas $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$ é dada por (caso (d))

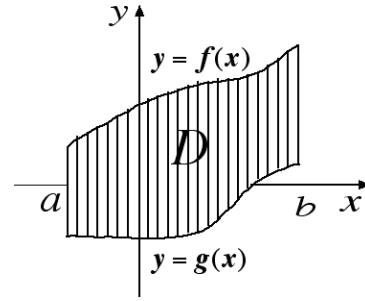


Figura 6: Região limitada pelos gráficos de duas funções quaisquer, e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

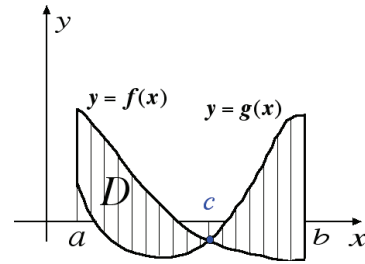
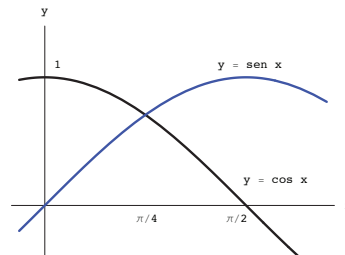
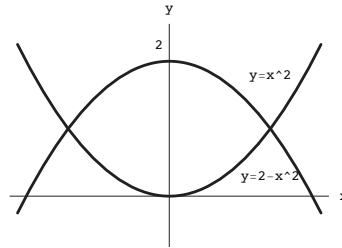


Figura 7: Região limitada pelos gráficos de f e de g , quando estes se intersectam, e ainda pelas rectas $x = a$ e $x = b$.



$$\begin{aligned}
\text{área } \mathcal{D} &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\
&= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\pi/4} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} - 2.
\end{aligned}$$

■

7.2 Comprimento de um arco de curva

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função possuindo derivada contínua. Designemos por \mathcal{C} o arco de curva $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, representado na Figura 8, imagem da esquerda. Vamos atribuir significado ao comprimento do arco \mathcal{C} , recorrendo à definição de integral em termos das somas de Riemann. Para tal, vamos considerar uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ definida por pontos $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Sejam P_0, P_1, \dots, P_n os pontos correspondentes sobre a curva \mathcal{C} e consideremos a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ representada à direita na Figura 8, definida pelos segmentos de recta $P_{i-1}P_i$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

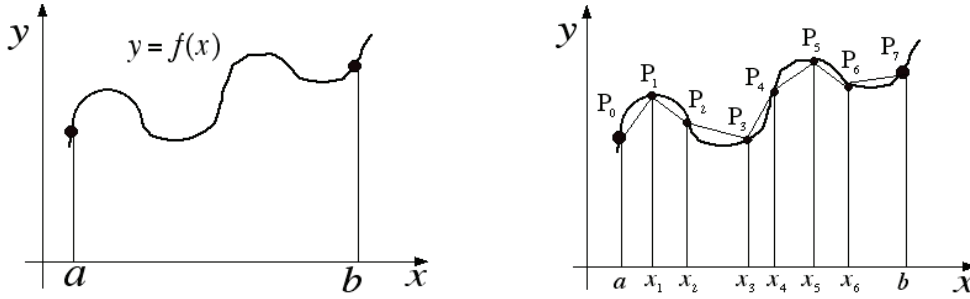


Figura 8: Arco de curva \mathcal{C} (à esquerda) e linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ (à direita).

Quando os pontos P_i são considerados cada vez mais próximos uns dos outros, ou seja, quando a amplitude $\|\mathcal{P}\|$ da partição tende para zero, a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com o arco \mathcal{C} . Então, por definição, pomos

$$\text{comp } \mathcal{C} = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \text{comp } L_{\mathcal{P}}. \quad (93)$$

Mas o comprimento da linha poligonal é a soma dos comprimentos dos vários segmentos de recta que a constituem, ou seja

$$\text{comp } L_{\mathcal{P}} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n},$$

sendo o comprimento de cada segmento $P_{i-1}P_i$ dado pela distância entre $P_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1})$ e $P_i = (x_i, y_i)$, ou seja por

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

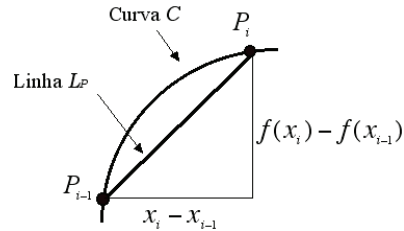


Figura 9: Ampliação de uma porção do arco \mathcal{C} e da linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$.

ou ainda por

$$\overline{P_{i-1}P_i} = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2}.$$

O quociente que figura no radical do segundo membro dá o declive do segmento de recta $P_{i-1}P_i$ e, portanto, dá também o declive de uma recta r paralela ao segmento e tangente à curva \mathcal{C} . Como f é derivável (teorema do valor médio de Lagrange), tal declive pode ser expresso como a derivada de f em algum ponto $y_i \in]x_{i-1}, x_i[$, e vem

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}).$$

Consequentemente, o comprimento da linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ é dado por

$$\text{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}), \quad (94)$$

onde, no segundo membro, mais não temos do que uma soma de Riemann para a função integrável $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Tomando o limite quando $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ na equação (94), vem (cf. as equações (71) e (72))

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \text{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (95)$$

e tendo em conta a definição (93), sai

$$\text{comp}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (96)$$

Exemplo 16

(a) O comprimento do arco de curva $y = \text{ch } x$, entre os pontos de abcissa $x = -1$ e $x = 2$ é dado por

$$\text{comp}(\mathcal{C}) = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + \text{sh}^2 x} dx = \int_{-1}^2 \text{ch } x dx = \left[\text{sh } x \right]_{-1}^2 = \text{sh } 2 + \text{sh } 1.$$

(b) O comprimento do arco de curva $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, entre os pontos de abcissa $x = 1$ e $x = 8$ é dado por

$$\text{comp}(\mathcal{C}) = \int_1^8 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_1^8 \sqrt{1 + x} dx = \frac{2}{3} \left[(1 + x)^{3/2} \right]_1^8 = 18 - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

■

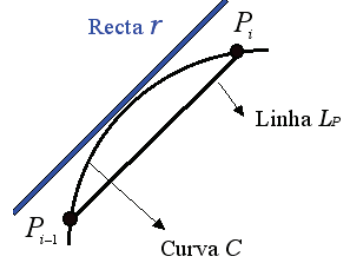
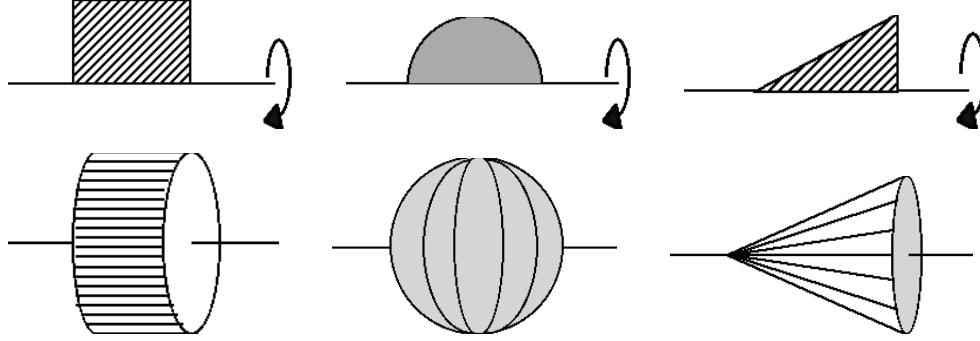


Figura 10: Recta r tangente a \mathcal{C} e paralela ao segmento $P_{i-1}P_i$.

7.3 Volume de um sólido de revolução

Quando uma região plana roda em torno de uma recta r do mesmo plano, obtém-se um sólido dito de revolução. Assim, um cilindro pode ser obtido pela rotação de uma região rectangular, uma esfera pode ser obtida pela rotação de um semi-círculo, e um cone pode ser obtido pela rotação de uma região triangular.



Nesta secção, estamos interessados nos sólidos de revolução \mathcal{S} gerados pela rotação em torno do eixo OX de uma região plana \mathcal{D} limitada pelo gráfico de uma função contínua, pelo eixo OX e por duas rectas verticais, $x = a$ e $x = b$. Mais concretamente vamos obter uma expressão para o cálculo do volume do sólido \mathcal{S} , recorrendo novamente à definição de integral em termos das somas de Riemann. Para tal, consideramos uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ definida por pontos x_0, x_1, \dots, x_n . Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ fixamos arbitrariamente um ponto c_i .

Tomamos a região poligonal $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ definida pelas n regiões rectangulares de altura $f(c_i)$ que se erguem sobre os vários subintervalos. Observamos que, quando a amplitude $||\mathcal{P}||$ da partição tende para zero, a região poligonal $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com o domínio \mathcal{D} e o sólido $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ gerado por $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$, à direita na Figura 11, tende a confundir-se com o sólido \mathcal{S} gerado por \mathcal{D} , à esquerda na Figura 11. Então, por definição, pomos

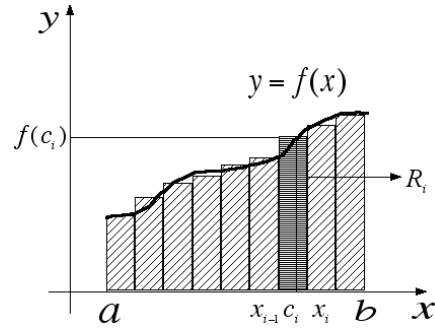


Figura 11: Soma de Riemann para o volume de um sólido de rotação.

$$\text{vol } \mathcal{S} = \lim_{||\mathcal{P}|| \rightarrow 0} \text{vol } \mathcal{S}_{\mathcal{P}}. \quad (97)$$

Reparando (Figura 10) que cada rectângulo elementar R_i gera um cilindro “achatado” S_i (Figura 11, à direita) com volume

$$\text{vol}(S_i) = \pi \left(f(c_i) \right)^2 (x_i - x_{i-1}),$$

obtemos

$$\text{vol}(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n \pi \left(f(c_i) \right)^2 (x_i - x_{i-1}). \quad (98)$$

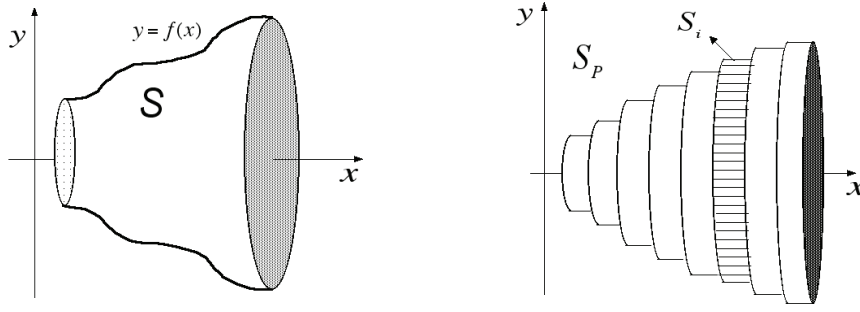


Figura 12: Sólido \mathcal{S} de volume a definir e sólido \mathcal{S}_P cujo volume aproxima o de \mathcal{S} .

No segundo membro da equação (98) temos novamente uma soma de Riemann, desta vez para a função $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \pi(f(x))^2$, que é integrável. Logo, tomando o limite quando $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ na equação (98), vem

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \text{vol}(\mathcal{S}_P) = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx, \quad (99)$$

e da definição (97), sai

$$\text{vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx. \quad (100)$$

Exemplo 17

O volume do sólido \mathcal{S} gerado pela rotação em torno de OX da região

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 + 1\}$$

é dado por

$$\text{vol } \mathcal{S} = \int_{-1}^1 \pi(x^2 + 1)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = 2\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right).$$

■

Exemplo 18

A fórmula para o volume de uma esfera \mathcal{S} de raio r pode ser obtida pensando na esfera como o sólido gerado pela rotação em torno de OX do semi-círculo superior

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge y \geq 0\}.$$

Atendendo à simetria da esfera, podemos considerar apenas a rotação do quarto de círculo situado no primeiro quadrante. Vem

$$\text{vol } \mathcal{S} = 2 \int_0^r \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi r^2 [x]_0^r - \frac{2\pi}{3} [x^3]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

■

À semelhança do que fizemos na Subsecção 7.1 em relação ao conceito de área, podemos obter fórmulas mais gerais para o cálculo do volume de sólidos de revolução. Por exemplo, no caso em que $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, o

volume do sólido \mathcal{S} gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

é dado por

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{S}) &= \int_a^b \pi f^2(x) dx - \int_a^b \pi g^2(x) dx \\ &= \int_a^b \pi [f^2(x) - g^2(x)] dx. \end{aligned}$$

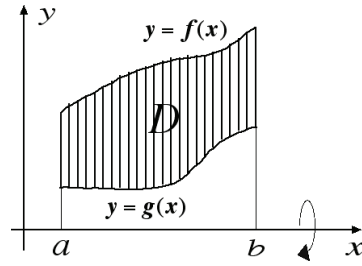


Figura 13: Sólido gerado pela rotação em torno de OX da região \mathcal{D} .

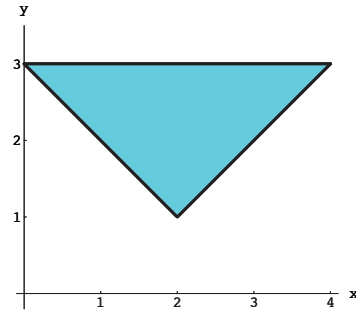
Exemplo 19

O volume do sólido \mathcal{S} gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + 1 \leq y \leq 3\}$$

é dado por (tendo em conta a simetria)

$$\begin{aligned} \text{vol } \mathcal{S} &= 2 \int_0^2 \pi (3^2 - (-x + 3)^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (-x^2 + 6x) dx = \frac{56\pi}{3}. \end{aligned}$$

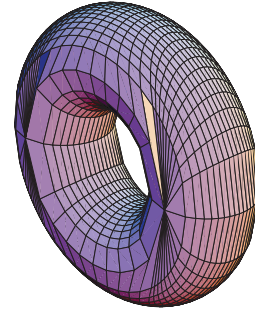


Exemplo 20 [Volume de um toro]

O volume do sólido \mathcal{S} gerado pela rotação em torno de OX da região plana

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + (y - 4)^2 \leq 1\}$$

é dado por (tendo em conta a simetria em relação à recta $x = 4$)



$$\begin{aligned} \text{vol } \mathcal{S} &= 2\pi \int_4^5 \left[(4 + \sqrt{1 - (x - 4)^2})^2 - (4 - \sqrt{1 - (x - 4)^2})^2 \right] dx \\ &= 32\pi \int_4^5 \sqrt{1 - (x - 4)^2} dx \quad [\text{substituição } x - 4 = \sin t] \\ &= 32\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 32\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 16\pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 16\pi \left([t]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} [\sin 2t]_0^{\pi/2} \right) = 8\pi^2. \end{aligned}$$

7.4 Área de uma superfície de revolução

Quando um arco de curva $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, roda em torno do eixo OX , obtém-se uma superfície de revolução. Vamos recorrer à definição de integral em termos das somas de Riemann para obter uma fórmula para o cálculo da área de tal superfície.

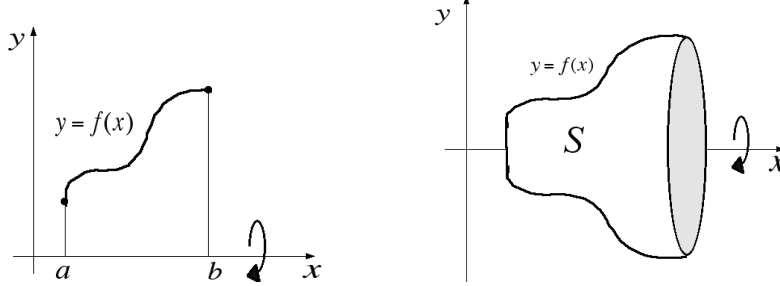


Figura 14: Arco de curva \mathcal{C} (à esquerda) e superfície S de revolução (à direita).

Para tal, consideramos uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ definida por pontos x_0, x_1, \dots, x_n . Sejam P_0, P_1, \dots, P_n os correspondentes pontos sobre a curva \mathcal{C} e consideremos a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ representada na Figura 15, definida pelos segmentos de recta $P_{i-1}P_i$, com $i = 1, 2, \dots, n$. Quando os pontos P_i são considerados cada vez mais próximos uns dos outros, ou seja quando a amplitude $\|\mathcal{P}\|$ da partição tende para zero, a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com a curva \mathcal{C} e a superfície $S_{\mathcal{P}}$ gerada por $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com a superfície S gerada por \mathcal{C} . Então pomos

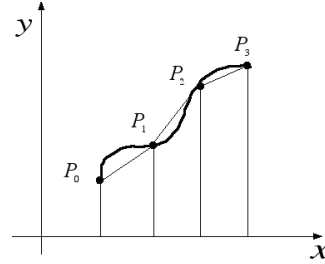


Figura 15: Partição do intervalo $[a, b]$ e linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$.

$$\text{área } \mathcal{S} = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \text{área } \mathcal{S}_{\mathcal{P}}. \quad (101)$$

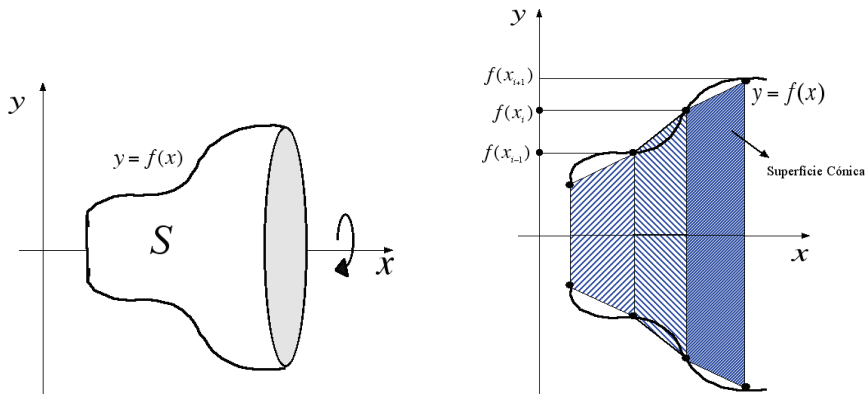


Figura 16: Superfície S gerada por \mathcal{C} e superfície $S_{\mathcal{P}}$ gerada por $L_{\mathcal{P}}$.

Mas cada segmento de recta “inclinado” gera um tronco de superfície cónica C_i (Figura 16, à direita), com área lateral

$$\text{área}(C_i) = 2\pi \overline{P_{i-1}P_i} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2},$$

uma vez que a área da superfície lateral de um tronco de cone (Figura 17, direita) é dada por $2\pi g(r+R)/2$.

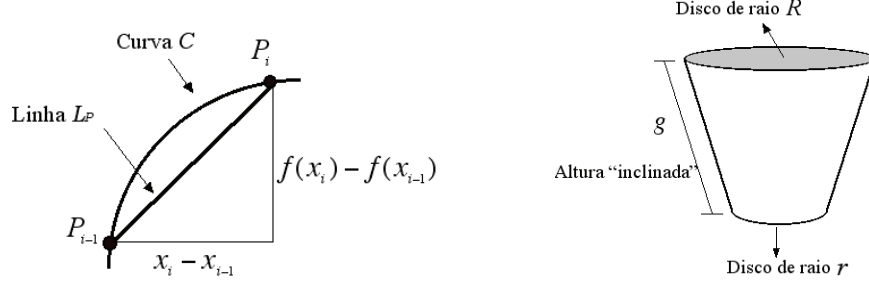


Figura 17: Tronco de cone (à direita) e pormenor da curva que gera a superfície S (à esquerda).

Mas (Figura 17, esquerda)

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

e como vimos na subsecção 7.3, podemos escrever

$$\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}),$$

para algum $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Se agora aproximarmos $\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$ por $f(y_i)$ vem então

$$\text{área}(C_i) = 2\pi f(y_i) \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}).$$

Consequentemente, a área da superfície de revolução S_P é dada por

$$\text{área}(S_P) = 2\pi \sum_{i=1}^n f(y_i) \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} (x_i - x_{i-1}). \quad (102)$$

O segundo membro da expressão (102) não é mais do que uma soma de Riemann para a função $k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Como a função k é integrável, tomando o limite quando $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ na equação (102) vem então

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (103)$$

Nos casos mais gerais em que a função f muda de sinal entre a e b , resulta

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (104)$$

Exemplo 21

A área da superfície de revolução S gerada pela rotação em torno de OX do arco de parábola $x = y^2$, para $y \geq 0$ e $0 \leq x \leq 1$, é dada por

$$\begin{aligned}\text{área}(S) &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4x} dx \\ &= \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{(1 + 4x)^3} \right]_0^1 = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}.\end{aligned}$$

■

8 Coordenadas polares

Habitualmente identificamos a posição de um ponto P do plano através das suas coordenadas cartesianas, (x, y) , definidas em relação a um referencial ortonormado XOY constituído por uma origem O e por dois eixos ortonormados, OX e OY . Em muitas situações revela-se mais útil introduzir um novo referencial e identificar a posição de um ponto do plano através de um novo sistema de coordenadas. Vamos agora introduzir as chamadas *coordenadas polares*.

8.1 Definição

Consideremos em \mathbb{R}^2 um ponto O , a que chamamos *pólo*, e uma semirecta OX , a que chamamos *eixo polar*. A posição de um ponto P de \mathbb{R}^2 pode ser identificada pela distância de P ao pólo e pelo ângulo entre a direcção de P e o eixo polar. Definimos assim as *coordenadas polares* de $P \neq O$ pelo par (ρ, θ) , com $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$, onde

$$\rho = \text{dist}(O, P), \quad \theta = \angle(OX, \overrightarrow{OP}), \quad (105)$$

a que chamamos *raio vector* e *ângulo polar*, respectivamente.

O ângulo é medido no sentido positivo, ou anti-horário, a partir do eixo polar. Para cada ponto $P \neq O$, o par (ρ, θ) assim definido é único e escrevemos $P = (\rho, \theta)$. Por outro lado, o ponto O é identificado por qualquer par $(0, \theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi[$, pelo que as suas coordenadas polares não são únicas.

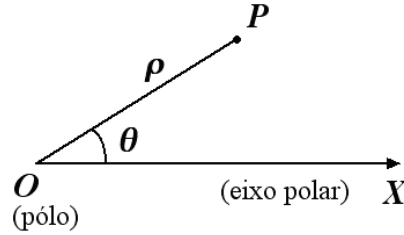


Figura 17: Sistema de coordenadas polares.

Em vez do habitual sistema de eixos graduados, usamos um referencial polar graduado (cf. a Figura 18) com uma escala para a distância ρ e outra para o ângulo θ . Assim, em relação aos pontos A , B , C e D representados na Figura 18, teremos

$$A = (3, 0), \quad B = \left(1, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$C = \left(3, \frac{5\pi}{6}\right), \quad D = \left(2, -\frac{3\pi}{2}\right).$$

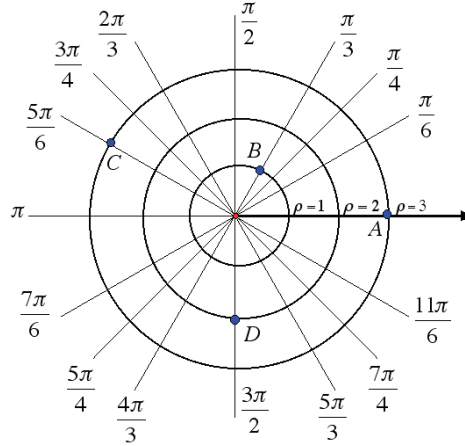
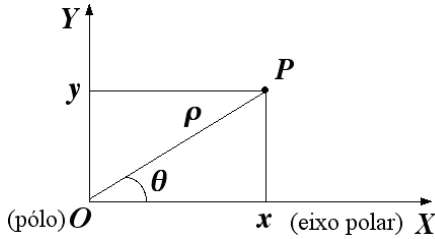


Figura 18: Referencial polar “graduado”.

8.2 Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares

Para relacionarmos os dois tipos de coordenadas, consideremos um referencial cartesiano ortonormado, XOY , e um referencial polar com pólo coincidente com O e eixo polar sobre OX^+ .



Dado um ponto P , qualquer, de coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (ρ, θ) , da Figura 19, é fácil reconhecer que se tem

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \rho \sin \theta, \quad (106)$$

Figura 19: Coordenadas cartesianas e polares. donde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (107a)$$

Por outro lado, se $x \neq 0$, tem-se também

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \quad (107b)$$

e, se $x = 0$, então P está sobre OX , podendo ser

$$(\theta = \pi/2 \text{ se } y > 0) \vee (\theta = 3\pi/2 \text{ se } y < 0) \vee (\theta \in [0, 2\pi[\text{ se } y = 0). \quad (107c)$$

Assim, usaremos as expressões (106) para passar de coordenadas polares a cartesianas, e as expressões (107a) e (107b-c), juntamente com os sinais de x e de y , para passar de coordenadas cartesianas a polares.

Exemplo 22

1. Se as coordenadas cartesianas de certos pontos são dadas por

$$A = (1, 1), \quad B = (-4, -4), \quad C = (0, 2), \quad E = \left(0, -\frac{1}{2}\right), \quad F = (-\sqrt{3}, -3),$$

então as correspondentes coordenadas polares são

$$A = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right), B = \left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4} \right), C = \left(2, \frac{\pi}{2} \right), E = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2} \right), F = \left(2\sqrt{3}, \frac{4\pi}{3} \right).$$

2. Reciprocamente, se as coordenadas polares de certos pontos são dadas por

$$A = \left(1, \frac{\pi}{4} \right), B = \left(3, \frac{11\pi}{6} \right), C = (0, \pi), E = (\sqrt{3}, 0), F = (1, 5).$$

então as correspondentes coordenadas cartesianas são

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), B = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} \right), C = (0, 0), E = (\sqrt{3}, 0), F = (\cos 5, \sin 5).$$

■

8.3 Representação polar de curvas

Analisemos agora o problema da representação geométrica de curvas, dadas pelas suas equações polares. Começemos com os casos mais simples.

A) $\rho = r$, com r uma constante positiva.

Trata-se da circunferência de centro O e raio r , tal como decorre da definição (105). Cf. a Figura 20.

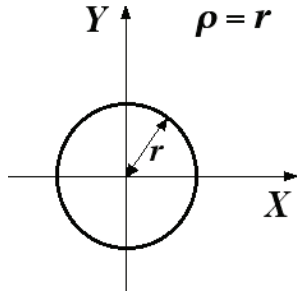


Figura 20: Curva de equação $\rho = r$.

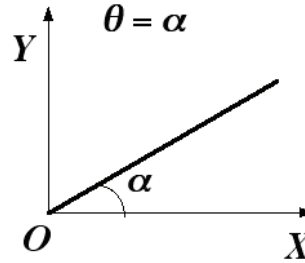


Figura 21: Curva de equação $\theta = \alpha$.

B) $\theta = \alpha$, com α uma constante em $[0, 2\pi[$.

Trata-se da semi-reta de origem em O que faz com OX um ângulo de α radianos, tal como decorre também da definição (105). Cf. a Figura 21.

C1) $\rho = \theta$, considerando $\theta \in \mathbb{R}_0^+$.

Neste caso, a curva passa pelo pólo e ρ cresce linearmente com θ . Obtém-se a curva representada na Figura 22, que é conhecida por *espiral de Arquimedes*.

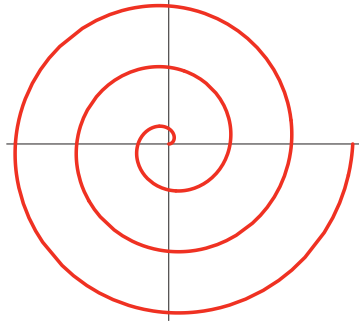


Figura 22: Espiral de Arquimedes, $\rho = \theta$.

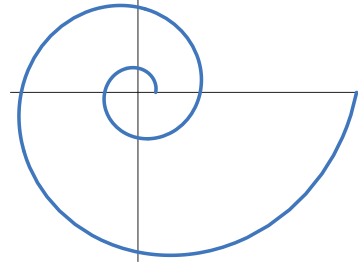


Figura 23: Espiral exponencial, $\rho = e^\theta$.

C2) $\rho = e^\theta$, considerando $\theta \in \mathbb{R}_0^+$.

A curva não passa pelo pólo, pois para $\theta = 0$ vem $\rho = 1$. Além disso, ρ cresce exponencialmente com θ e obtém-se a curva representada na Figura 23, que começa de dentro para fora. Esta curva é conhecida por *espiral exponencial*.

C3) $\rho = e^{-\theta}$, considerando $\theta \in \mathbb{R}_0^+$.

A curva não passa pelo pólo, pois para $\theta = 0$ vem $\rho = 1$. Desta vez, ρ decresce exponencialmente com θ e obtém-se a curva representada na Figura 24, que começa de fora para dentro. Esta curva é conhecida por *espiral logarítmica*.

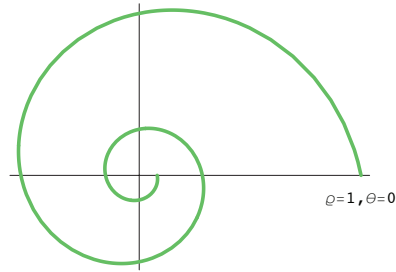


Figura 24: Espiral logarítmica, $\rho = e^{-\theta}$.

D1) $\rho = 1 - \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Como $\cos \theta$ varia entre -1 e 1 , ρ vai variar entre $\rho_{\min} = 0$ (para $\theta = 0$) e $\rho_{\max} = 2$ (para $\theta = \pi$). Obtém-se a curva da Figura 25, conhecida por *cardeóide*.

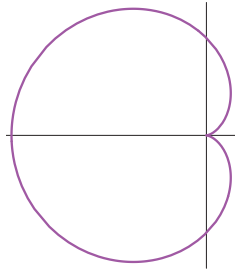


Figura 25: Cardeóide $\rho = 1 - \cos \theta$.

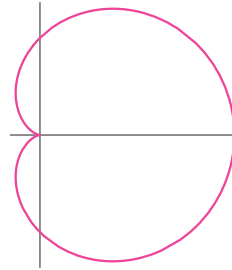


Figura 26: Cardeóide $\rho = 1 + \cos \theta$.

D2) $\rho = 1 + \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Com uma análise breve, semelhante à efectuada em F1), btém-se o *cardeóide* da Figura 26.

D3) $\rho = 1 - \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Também agora, com uma análise semelhante à efectuada em F1), btém-se o *cardeóide* da Figura 27.

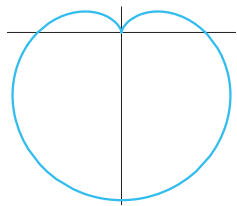


Figura 27: Cardeóide $\rho = 1 - \sin \theta$.

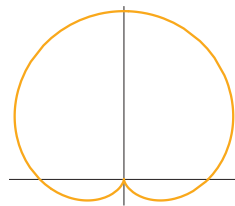


Figura 28: Cardeóide $\rho = 1 + \sin \theta$.

D4) $\rho = 1 + \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Mais uma vez, de maneira semelhante, btém-se o *cardeóide* da Figura 28.

E1) $\rho^2 = \cos 2\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

Observe-se que o intervalo de variação de θ é aquele onde se tem $\cos 2\theta \geq 0$. Neste caso, ρ é máximo quando $\theta = 0$ e quando $\theta = \pi$, caso em que $\rho = 1$. Analisando a monotonia de ρ como função de θ , obtém-se a curva da Figura 29, a que se chama *lemniscata*.

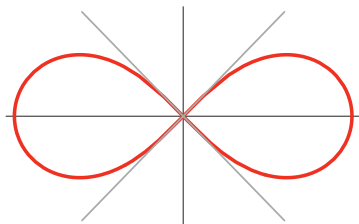


Figura 29: Lemniscata $\rho^2 = \cos 2\theta$.

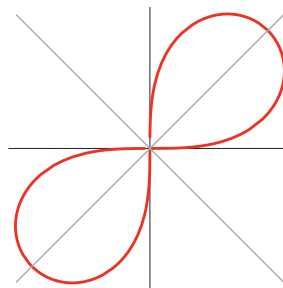


Figura 30: Lemniscata $\rho^2 = \sin 2\theta$.

E2) $\rho^2 = \sin 2\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

O intervalo de variação de θ é aquele onde se tem $\sin 2\theta \geq 0$. A curva é a lemniscata representada na Figura 30, tendo-se $\rho = 1$ para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e para $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

F1) $\rho = |\cos 2\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Agora, ρ será máximo e igual a 1 quando $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$. A curva está representada na Figura 31 e chama-se *rosa de quatro pétalas*.

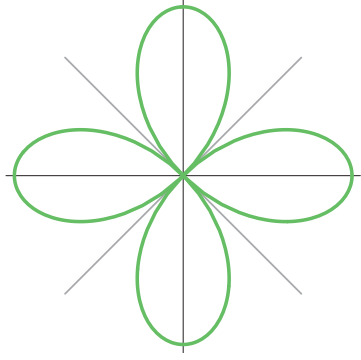


Figura 31: Rosa de 4 pétalas, $\rho = |\cos 2\theta|$.

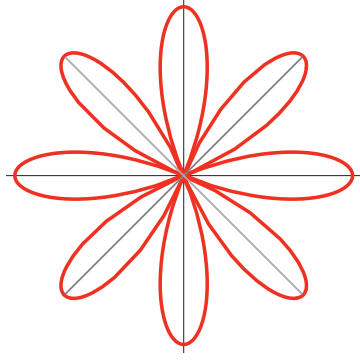


Figura 32: Rosa de 8 pétalas, $\rho = |\cos 4\theta|$.

F2) $\rho = |\cos 4\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Desta vez, ρ será máximo e igual a 1 quando $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{5\pi}{4}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ e $\theta = \frac{7\pi}{4}$. A curva está representada na Figura 31 e chama-se *rosa de quatro pétalas*.

G1) $\rho = |\sin 3\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

A curva está representada na Figura 33 e chama-se *rosa de três pétalas*.

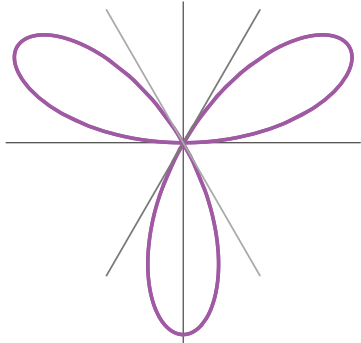


Figura 33: Rosa de 3 pétalas, $\rho = |\sin 3\theta|$.

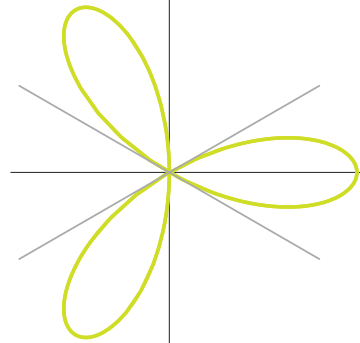


Figura 34: Rosa de 3 pétalas, $\rho = |\cos 3\theta|$.

G2) $\rho = |\cos 3\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

A curva está representada na Figura 34 e também é uma *rosa de três pétalas*.

H) Se agora a curva for dada em coordenadas cartesianas, podemos obter a correspondente equação polar, atendendo às expressões (105).

H1) Circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, de centro $C = (1, 0)$ e raio 1.

Tem-se $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$, donde $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Em coordenadas polares, fica $\rho^2 - 2\rho \cos \theta = 0$, donde se conclui que $\rho = 2 \cos \theta$ é a equação polar da circunferência dada, já que $\rho = 0$ define apenas o pólo. Como $\rho \geq 0$, tem-se $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. A circunferência está representada na Figura 35.

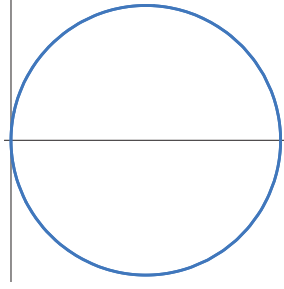


Figura 35: Circunferência passando por O com diâmetro sobre OX , $\rho = 2 \cos \theta$.

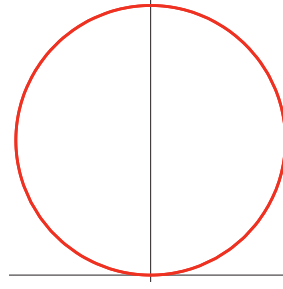


Figura 36: Circunferência passando por O com diâmetro sobre OY , $\rho = 2 \sen \theta$.

H2) Circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, de centro $C = (0, 1)$ e raio 1.

A correspondente equação polar é $\rho = 2 \sen \theta$, com $\theta \in [0, \pi]$. A circunferência está representada na Figura 36.

8.4 Áreas planas em coordenadas polares

Em muitas situações, torna-se mais simples trabalhar em \mathbb{R}^2 com coordenadas polares. Esta situação ocorre frequentemente no cálculo de áreas de regiões planas, quando a primitiva da função integranda é complicada. Vamos agora estabelecer uma fórmula para o cálculo de uma tal área, através de um integral em coordenadas polares.

Suponhamos que pretendemos determinar a área da região plana \mathcal{A} , que é limitada pela curva de equação $\rho = f(\theta)$, com f contínua, e pelas semi-rectas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ (cf. a Figura 37). Então, adotando uma estratégia semelhante à que utilizámos para determinar a área em coordenadas cartesianas:

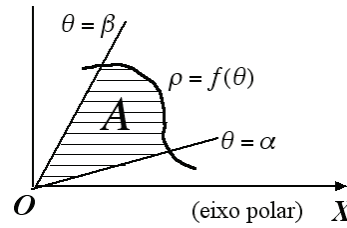


Figura 37: Região plana \mathcal{A} .

- (i) Consideramos uma partição \mathcal{P} de $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- (ii) A região \mathcal{A} fica dividida em n fatias, cada uma de amplitude $\theta_i - \theta_{i-1}$ (Figura 38).

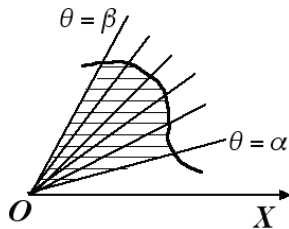


Figura 38: Região plana \mathcal{A} .

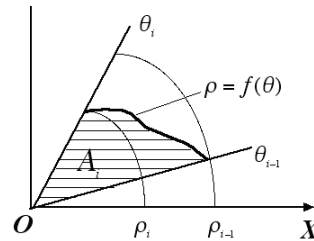


Figura 39: Fatia elementar \mathcal{A}_i .

(iii) Aproximamos a área de cada fatia elementar pela área de um sector circular, começando por observar que (Figura 39)

$$\frac{1}{2} \rho_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) \leq \text{area}(\mathcal{A}_i) \leq \frac{1}{2} \rho_{i-1}^2 (\theta_i - \theta_{i-1}).$$

Mas $\rho_i = f(\theta_i)$ e $\rho_{i-1} = f(\theta_{i-1})$, donde

$$\frac{1}{2} f^2(\theta_i) (\theta_i - \theta_{i-1}) \leq \text{area}(\mathcal{A}_i) \leq \frac{1}{2} f^2(\theta_{i-1}) (\theta_i - \theta_{i-1}).$$

Como f é contínua, resulta que

$$\text{área}(\mathcal{A}_i) = \frac{1}{2} f^2(c_i) (\theta_i - \theta_{i-1}).$$

para algum $c_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$.

(iv) Fazendo a soma para $i = 1, \dots, n$ e tomando o limite quando a amplitude $\|\mathcal{P}\|$ tende para zero, obtemos

$$\text{área } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Exemplo 23

A área do círculo de raio r pode ser obtida com um integral em coordenadas polares, bastando atender a que, se a circunferência estiver centrada na origem, a sua equação polar é $\rho = r$, pelo que

$$\text{área } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \left[\theta \right]_0^{2\pi} = \pi r^2.$$

Exemplo 24

A área da região plana $\mathcal{A} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \theta \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, limitada pela espiral de Arquimedes (Figura 22), é dada por

$$\text{área } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \left[\theta^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3.$$

Exemplo 25

A área da região plana $\mathcal{A} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1 + \cos \theta \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, limitada pelo cardeóide $\rho = 1 + \cos \theta$ (Figura 25), é dada por

$$\begin{aligned} \text{área } \mathcal{A} &= \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\pi} + 2 \left[\sin \theta \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \pi + \frac{1}{2} \left(\left[\theta \right]_0^{\pi} + \left[\sin 2\theta \right]_0^{\pi} \right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

9 Integral Impróprio

Na secção 2 deste capítulo apresentámos a definição de integral segundo Riemann, para uma função limitada que está definida num intervalo limitado. A extensão desta definição aos casos em que o intervalo de integração é não limitado, ou em que a função integranda se torna não limitada nas vizinhanças de um ponto do intervalo de integração, conduz à noção de *integral impróprio*. Assim, diremos que os integrais

$$\int_0^{+\infty} x^2 dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

são todos impróprios. Para estender a definição de Riemann a estes casos, iremos recorrer à noção de limite.

9.1 Intervalo de integração ilimitado

Neste caso, o integral impróprio diz-se de *primeira espécie* ou de *tipo I*. Começemos com o caso em que o intervalo de integração é do tipo $[a, +\infty[$ e, a título de motivação, consideremos os integrais

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx. \quad (108)$$

Do ponto de vista geométrico, os integrais I e J estão relacionados com a medida da área das regiões não limitadas situadas à direita da recta $x = 1$, acima do eixo OX , sob o gráfico de cada uma das curvas representadas na Figura 40. Porém, tratando-se de regiões com “largura” infinita e “altura” que se torna infinitamente pequena, poderá ser possível atribuir uma medida à área em causa.

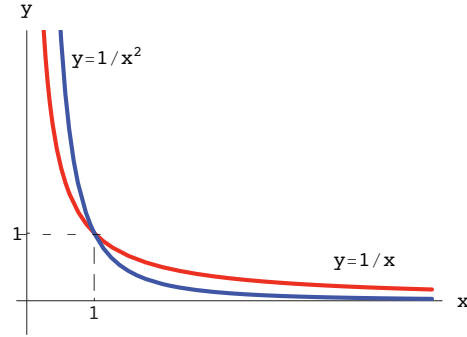


Figura 40: Regiões associadas aos integrais I e J .

Para decidir se esta possibilidade se verifica, estudamos os limites

$$\mathcal{L}(I) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(J) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx, \quad (109)$$

para os quais vem, respectivamente,

$$\mathcal{L}(I) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln x \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty,$$

$$\mathcal{L}(J) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1,$$

donde se depreende que apenas fará sentido atribuir significado à área da região relacionada com o integral J , podendo dizer-se que a medida dessa área é igual a 1.

Passemos agora a expor a teoria geral.

Caso A. Começemos por considerar uma função $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, que é integrável em todo o intervalo limitado $[a, x]$ tal que $[a, x] \subset [a, +\infty[$.

Dizemos que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se existir o correspondente limite,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

caso em que escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

No caso contrário, em que aquele limite não existe (em \mathbb{R}), dizemos que o integral impróprio é *divergente* ou que a função f *não é integrável em sentido impróprio*.

Propriedade 7 [Linearidade]

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se f e g são integráveis em sentido impróprio em $[a, +\infty[$ então $\alpha f + \beta g$ é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty[$ e

$$\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx. \quad (110)$$

Propriedade 8 [Aditividade]

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se f é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty[$ então f é integrável em sentido impróprio em $[b, +\infty[$ e

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx. \quad (111)$$

Exemplo 26

1. $\int_0^{+\infty} e^x dx$ é divergente.

De facto, estudando o correspondente limite (cf. a Figura 41), vem

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [e^x]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - 1) = +\infty.$$

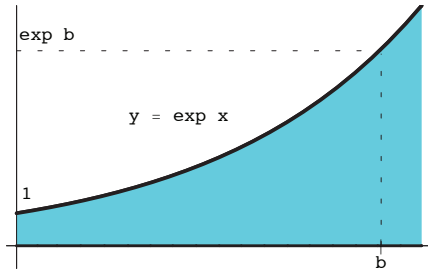


Figura 41: Exemplo 26.1

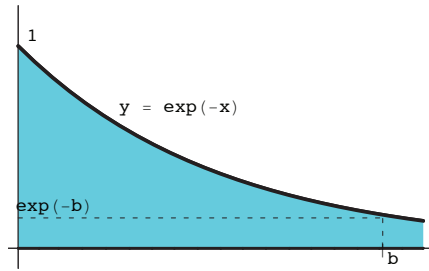


Figura 42: Exemplo 26.1

2. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ é convergente e igual a 1.

Para o correspondente limite (cf. a Figura 42), vem

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

■

Exemplo 27

Estudemos agora o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx$, com k uma constante real.

- Para $k = 1$, vem

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln b - \ln 1]_1^b = +\infty.$$

- Já para $k \neq 1$, vem

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^k} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-k} - 1}{1-k} \right),$$

e como

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-k} = 0, \text{ se } 1-k < 0, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-k} = +\infty, \text{ se } 1-k > 0,$$

resulta

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{1-k}, \text{ se } k > 1, \quad (112)$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^k} dx = +\infty, \text{ se } k < 1.$$

Consequentemente, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx$ diverge se $k \leq 1$ e converge se $k > 1$, caso em que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{1-k}.$$

■

Caso B. O estudo do integral impróprio $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, quando $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em todo o intervalo limitado $[x, b]$ com $[x, b] \subset]-\infty, b]$, é semelhante, baseando-se no

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Para este caso, valem resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Exemplo 28

$\int_{-\infty}^0 \cos x \, dx$ é divergente.

De facto, estudando o limite correspondente, vemos que

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\sin x \right]_a^0 = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a,$$

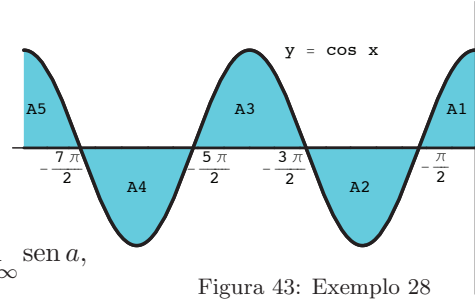


Figura 43: Exemplo 28

que não existe porque, sendo a função seno periódica, podemos exibir duas restrições do seno com limites diferentes. Por exemplo, pondo

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^- \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^- \right\},$$

tem-se $x \in A \implies \sin x = 1$ e $x \in B \implies \sin x = -1$, pelo que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in A}} \sin x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in B}} \sin x = -1.$$

Não seria difícil antecipar esta conclusão a partir da Figura 43. Por um lado, se cada A_i representar a área de uma parte da região (cf. a Figura 43), então

$$A_1 = A_5 = 1 \quad \text{e} \quad A_2 = A_3 = A_4 = 2.$$

Por outro lado, como a área de cada região A_i se pode exprimir como um integral de $\cos x$ ou de $-\cos x$, consoante estiver em causa um intervalo onde o cosseno seja positivo ou negativo, temos por exemplo

$$\begin{aligned} \int_{-4\pi}^0 \cos x \, dx &= A_5 - A_4 + A_3 - A_2 + A_1 = 0, \\ \int_{-7\pi/2}^0 \cos x \, dx &= -A_4 + A_3 - A_2 + A_1 = -1, \\ \int_{-5\pi/2}^0 \cos x \, dx &= A_3 - A_2 + A_1 = 1, \end{aligned}$$

o que, de imediato, nos leva a intuir que não será possível atribuir um valor ao integral apresentado. ■

Caso C. Para analisar o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$, quando $f:]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em todo o intervalo limitado $[x, y]$, escolhe-se arbitrariamente um ponto $c \in \mathbb{R}$ (em geral, considera-se $c = 0$) e estuda-se separadamente cada um dos integrais

$$\int_{-\infty}^c f(x) \, dx \quad \text{e} \quad \int_c^{+\infty} f(x) \, dx, \quad (113)$$

como descrito anteriormente. Pela aditividade do integral impróprio (Propriedade 8 e correspondente adaptação ao caso B), a convergência destes integrais não depende da escolha do ponto c . Assim, dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se e só se os integrais indicados em (113) são convergentes. Escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx. \quad (114)$$

Por outro lado, se algum dos integrais de (113) é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ também é *divergente*.

Para este caso, valem também resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Exemplo 29

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ é divergente.

Basta atender à definição apresentada e ao que vimos no Exemplo 26.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ é convergente e igual a π .

De facto, por um lado,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

e, por outro lado, t

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Atendendo ao gráfico da função integranda, e à sua simetria em relação ao eixo OY (Figura 44), bastaria ter estudado o integral impróprio estendido a um dos intervalos $[0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0]$.

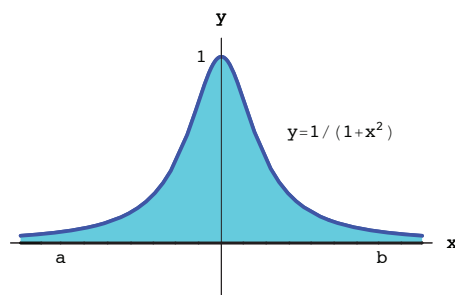


Figura 44: Exemplo 29.2.

9.2 Função integranda ilimitada

No caso em que a função integranda se torna ilimitada numa vizinhança de algum ponto do intervalo de integração – um extremo ou um ponto interior – o integral impróprio diz-se de *segunda espécie* ou de *tipo II*.

Caso A. Consideremos uma função $f:]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que é ilimitada, mantendo-se integrável em qualquer intervalo $[c, b]$ com $[c, b] \subset]a, b]$

Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se existir o limite

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx,$$

caso em que escrevemos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

Quando este limite não existe (em \mathbb{R}), dizemos que o integral impróprio é *divergente* ou que a função f *não é integrável em sentido impróprio*.

Também para este tipo de integral impróprio valem resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Exemplo 30

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ é divergente (Figura 45).

A função integranda torna-se ilimitada à direita da origem. Calculamos

$$\mathcal{L} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{c} \right) = +\infty,$$

donde se conclui que o integral impróprio apresentado diverge para $+\infty$.

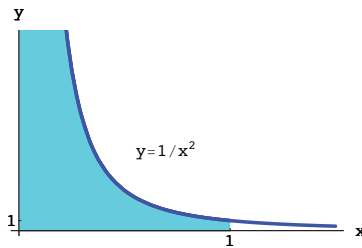


Figura 45: Exemplo 30.1.

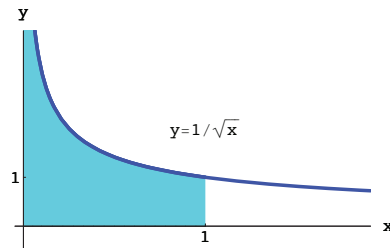


Figura 46: Exemplo 30.2.

2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ é convergente (Figura 46).

A função integranda torna-se ilimitada à direita da origem. Calculamos

$$\mathcal{L} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2,$$

pelo que o integral converge, tendo-se $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$.

3. Estudemos, mais em geral, o integral $\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx$, com k uma constante real.

- Para $k = 1$, vem

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\ln x \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (-\ln c) = +\infty.$$

- Para $k \neq 1$, vem

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - c^{1-k}}{1-k} \right)$$

e como

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} c^{1-k} = 0, \text{ se } 1-k > 0, \quad \lim_{c \rightarrow 0^+} c^{1-k} = +\infty, \text{ se } 1-k < 0,$$

resulta

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{1-k}, \quad \text{se } k < 1, \tag{115}$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k} dx = +\infty, \quad \text{se } k > 1.$$

Consequentemente, o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx$ diverge se $k \geq 1$ e converge se $k < 1$, caso em que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{1-k}.$$

Caso B. O estudo do integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$, quando $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, mantendo-se integrável em todo o intervalo $[a, c]$, com $[a, c] \subset [a, b[$, é perfeitamente análogo, baseando-se no estudo do

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

Valem novamente resultados semelhantes aos das Propriedades 7 e 8, com as adaptações necessárias.

Caso C. O caso em que $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, mantendo-se integrável em todo o intervalo $[x, y]$, com $[x, y] \subset]a, b[$, reduz-se aos casos anteriores, escolhendo arbitrariamente um ponto $c \in]a, b[$ e estudando separadamente os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x) dx, \quad (116)$$

como descrito anteriormente (casos A e B). Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se e só se os integrais indicados em (116) são convergentes. Escrevemos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (117)$$

Por outro lado, se algum dos integrais de (116) é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ também é *divergente*.

Caso D. Consideremos agora $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que $a < c < b$, e seja $f: [a, c[\cup]c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função ilimitada em pelo menos um dos intervalos $[a, c[$ ou $]c, b]$, que se mantém integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $[a, x] \subset [a, c[$ e em qualquer intervalo $[y, b]$ com $[y, b] \subset]c, b]$. Neste caso, estudamos separadamente os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x) dx,$$

como descrito anteriormente. Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é *convergente*, ou que a função f é *integrável em sentido impróprio*, se e só se estes dois integrais são convergentes, caso em que escrevemos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (118)$$

Por outro lado, se algum daqueles integrais é divergente, então dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ também é *divergente*.

Exemplo 31

1. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$ é divergente.

A função integranda torna-se ilimitada em torno do ponto $x = 1$. Estudamos separadamente os integrais

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx \quad \text{e} \quad J = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

Para o primeiro, calculamos

$$\mathcal{L}(I) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)^2} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(- \left[\frac{1}{x-1} \right]_0^c \right) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{c-1} - 1 \right) = +\infty,$$

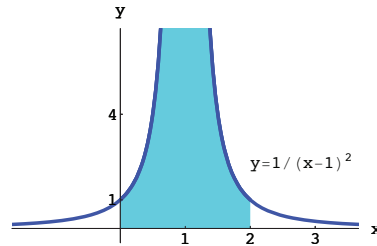


Figura 47: Exemplo 31.1.

donde se conclui que o integral proposto é divergente (independentemente da natureza do integral J).

2. $\int_{-1}^1 \ln |x| dx$ é convergente.

A função integranda torna-se ilimitada em torno do ponto $x = 0$. Então estudamos separadamente os integrais

$$I = \int_{-1}^0 \ln |x| dx = \int_{-1}^0 \ln(-x) dx \quad \text{e} \quad J = \int_0^1 \ln |x| dx = \int_0^1 \ln x dx,$$

que possuem a mesma natureza, tendo em conta a simetria da figura a respeito do eixo OY . Estudamos então o integral J , começando por primitivar por partes,

$$P(\ln x) = x \ln x - x + C,$$

e calculando depois o limite

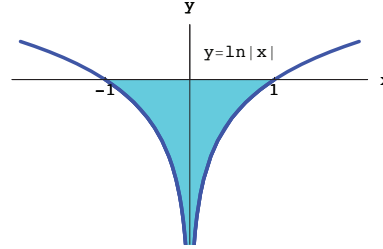


Figura 48: Exemplo 31.2.

$$\mathcal{L}(J) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \ln x dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} [x \ln x - x]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(-1 - \underbrace{c \ln c}_{(*)} + c \right) = -1.$$

Concluimos que o integral J converge, tendo-se $J = -1$. O mesmo se passa com o integral I , tendo-se também $I = -1$. Consequentemente, o integral proposto converge e

$$\int_{-1}^1 \ln |x| dx = -2.$$

(*) Este limite é igual a 0 porque a *velocidade* com que c tende para 0 é exponencialmente superior à *velocidade* com que $\ln c$ tende para $-\infty$.