Cálculo EE

Ficha 5

Derivação do integral

1. Calcule a derivada da função $\displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\,dt$, para $x>0$.
2. Calcule a derivada da função $\displaystyle\int_1^{\ln x} \sin(u+e^u)\,du$, com $x>0$.
3. Estude a monotonia da função $f(x)=\displaystyle\int_0^{x^3} e^{-t^2}dt$.
4. Determine uma função contínua f tal que
$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3e^x - x^4, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
5. Determine uma função contínua f e uma constante k tal que, para todo o $x\in\mathbb{R}$, se verifique:
$$\int_k^x f(t)\,dt = \sin x + \frac{1}{2}.$$
6. Seja f uma função real de variável real definida por
$$f(x)=\int_0^x \frac{1+\operatorname{sen}(t)}{2+t^2}dt.$$
Sem calcular o integral, encontre um polinómio P de grau 2 tal que $P(0)=f(0)$, $P'(0)=f'(0)$ e $P''(0)=f''(0)$.

Áreas planas

1. Em cada alínea, determine a medida da área da região limitada pelas curvas cujas equações são dadas:

   (a) $x=0,\quad x=1,\quad y=3x,\quad y=-x^2+4;$

   T (b) $x=0,\quad x=\frac{\pi}{2},\quad y=\sin x,\quad y=\cos x;$

   T (c) $y=0,\quad x=-\ln 2,\quad x=\ln 2,\quad y=\operatorname{senh}(x);$

   (d) $y+x^2=6,\quad y+2x-3=0;$

   (e) $x=-1,\quad y=|x|,\quad y=2x,\quad x=1;$

   (f) $y=-|x|,\quad y=-4,\quad x=2,\quad x=-4;$

   (g) $x=0,\quad x=2,\quad x^2+(y-2)^2=4,\quad x^2+(y+2)^2=4;$

   (h) $y-x=6,\quad y-x^3=0,\quad 2y+x=0;$

   (i) $y=-x^2+\frac{7}{2},\quad y=x^2-1;$

   (j) $y=\cos x,\quad y=x+1,\quad x=\pi;$

   (k) $y=\dfrac{1}{x},\quad 2x+2y=5;$

(l) $y = \dfrac{4}{x^2}, \quad y = 5 - x^2;$

(m) $x^2 = 12(y-1), \quad x^2 + y^2 = 16;$

(n) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

(o) $y = -x^3, \quad y = -(4x^2 - 4x).$

2. Indique como recorreria ao cálculo integral para determinar a área de cada uma das seguintes regiões:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq x\};$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\};$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \text{ e } y \geq x^2 - 4x + 3 \text{ e } y \leq -x^2 + 5x - 4\}.$

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\};$

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq e^x \text{ e } 0 \leq y \leq e^{-x}\};$

(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ e } y \geq x^2 - 2xy \leq 4\}.$