

Duração: 90 minutos

2º Teste de ALGA EE

Nome: _____ Nr.: _____ Curso: _____

GRUPO I (10 valores)

Indique com as letras V ou F o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações, sem apresentar cálculos.
Cotação - Resposta certa: **1** valor. Resposta em branco: **0** valores. Resposta errada: **-0,5** valores.

1. O conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y + z^2\}$ é um subespaço de \mathbb{R}^3 .
2. Os vetores $(\alpha, 1, 1)$, $(4, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ são linearmente independentes em \mathbb{R}^3 para qualquer valor real de α .
3. A função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (y + 3, x + y, z)$ não é uma transformação linear.
4. Os vetores $(1, 2, 1)$, $(2, 4, 2)$, $(0, 3, 1)$ são geradores de \mathbb{R}^3 .
5. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ tem determinante nulo.
6. O conjunto $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; w = 2x + y + 2z\}$ é um subespaço de \mathbb{R}^4 .
7. Os valores próprios de $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$.
8. O sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ tem apenas uma solução.
9. Todo o sistema $Ax = b$ tem mais do que uma solução.
10. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $|A| = 3$ e $B = 2A$ então $|B| = 24$.

GRUPO II (10 valores)

Em cada uma das perguntas seguintes, apresente os cálculos relevantes.

1. Considere o
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \\ x - y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

(a) Para que valores de α e β é que o sistema é possível e determinado?

(b) Calcule a solução do sistema para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

2. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Escreva a equação característica associada à matriz A .

(b) Determine todos os valores próprios de A .

(c) Determine os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 3$, da matriz A .

3. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o valor do determinante da matriz B em função dos parametros α e β .

(b) Determine qual a relação entre α e β de forma a que B seja invertível.

4. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição: “Quaisquer $n+1$ vectores de \mathbb{R}^n são linearmente dependentes”.