Séries de Números Reais

Definições e Consequências

Algumas séries de relevo

Resultados sobre convergência

Séries de termos positivos

Convergência simples e absoluta

Séries alternadas

Nesta última parte do curso vamos lidar com expressões envolvendo somas com um número infinito de parcelas. O objectivo é o de atribuir significado matemático a este tipo de somas, recorrendo ao conceito de limite. Iremos ver, em particular, que apenas em alguns casos estas somas podem ser calculadas.

1 Introdução

No sentido de motivar a necessidade de um quadro matemático rigoroso para o estudo de somas com uma infinidade de parcelas, suponhamos que pretendemos calcular o valor da soma

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Associando as parcelas duas a duas, escreveríamos

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

e seríamos levados a concluir que $S = 0$. Se agora destacarmos a primeira parcela e associarmos as restantes duas a duas, escrevemos

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

e já somos levados a pensar que será $S = 1$. E poderíamos ainda destacar simplesmente a primeira parcela, resultando

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S,$$

donde $S = 1/2$. É então claro que estas "manobras" não levaram a qualquer conclusão sobre o valor de S. Aquilo que somos levados a pensar é que, a propriedade associativa não pode ser válida, em geral, quando estendemos a adição a um número infinito de parcelas. Para dar sentido a expressões como a anterior, encaramos estas somas como um limite de certas somas parciais quando o número de parcelas aumenta sucessivamente, tornado-se arbitrariamente grande. Vamos formalizar estas ideias.

2 Definições e consequências

Considere-se uma sucessão $(u_n)_n$ de números reais. À expressão $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, que representa uma soma com um número infinito de parcelas, chamamos *série numérica de termo geral* u_n ou *série numérica gerada* por u_n. Usamos as notações

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \,, \quad \sum_{n\geq 1} u_n \,, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \,, \quad \sum_{n} u_n \,, \tag{120}$$

realçando que uma tal soma pode ter início em qualquer inteiro não negativo diferente de 1; por exemplo, considera-se frequentemente n a variar de 0 até $+\infty$. Relativamente à série representada por qualquer uma das expressões (120), a sucessão $(u_n)_n$ diz-se a *sucessão geradora* da série. Para averiguarmos se a soma subjacente a uma tal série pode ser efectuada, construimos a *sucessão* $(s_n)_n$ *das somas parciais*, ou *sucessão associada* da série, pondo

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{121}$$

e procuramos $S = \lim\limits_n s_n = \lim\limits_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$. Quando este limite existir (em $\mathbb{R}$), dizemos que a série de (120) é *convergente* e escrevemos $S = \sum\limits_{n\geq 1} u_n$, chamando a S a *soma* da série. Por outro lado, quando aquele limite não existe, em particular quando a soma em causa tende para $\pm\infty$, dizemos que a série é *divergente*.

Exemplo 1

(a) Consideremos a série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

A correspondente sucessão geradora é $u_n = (-1)^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, e a sucessão das somas parciais é $s_n = 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Então $s_n = 0$, se n é par, e $s_n = 1$, se n é ímpar, pelo que $(s_n)_n$ não tem limite. Logo, a série é divergente.

(b) Consideremos agora a série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$

A sucessão geradora é $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $n \in\mathbb{N}$, e a sucessão das somas parciais é $s_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$, $n \in \mathbb{N}$. Então $\lim\limits_n s_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-0}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\,$, e a série é convergente, possuindo soma $S = 1/2\,$.

(c) Consideremos finalmente a série $\sum_{n\geq 1} n = 1+2+3+\cdots$

Tem-se $u_n = n$, $n\in\mathbb{N}$, e $s_n = 1+2+\cdots+n = \dfrac{1+n}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.

Então $\lim_n s_n = +\infty$ e a série é divergente. ■

Das definições apresentadas extraem-se os seguintes resultados.

Propriedade 1

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries convergentes de somas S e T, respectivamente. Então:

(a) a série $\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n)$ converge e tem soma $S+T$;

(b) a série $\sum_{n\geq 1} \alpha u_n$ converge e tem soma αS, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$. ■

De facto, se $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ forem as sucessões das somas parciais das séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$, respectivamente, então $(s_n+t_n)_n$ será a sucessão das somas parciais de $\sum(u_n+v_n)$ e $(\alpha s_n)_n$ a de $\sum \alpha u_n$. Como $\lim_n s_n = S$ e $\lim_n t_n = T$, vem $\lim_n s_n+t_n = S+T$ e $\lim_n \alpha s_n = \alpha S$.

Propriedade 2

Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente então, dado $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, a série $\sum_{n\geq 1}\alpha u_n$ também é divergente.
■

Se a série $\sum \alpha u_n$, com $\alpha\neq 0$, fosse convergente, também o seria a série $\sum \dfrac{1}{\alpha}(\alpha u_n)$, ou seja, a série $\sum u_n$, contrariando a hipótese. Logo $\sum \alpha u_n$ é divergente.

Propriedade 3

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série convergente e $\sum_{n\geq 1} v_n$ uma série divergente. Então uma série $\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n)$ é divergente. ■

Se $\sum(u_n+v_n)$ fosse convergente, também $\sum[(u_n+v_n)-u_n]$ seria convergente, o que é falso. Logo, a série $\sum(u_n+v_n)$ é divergente.

Observação 1

Se as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ forem divergentes, nada se pode concluir, em geral, sobre a natureza da série $\sum(u_n+v_n)$. De facto, mais adiante, será fácil reconhecer que as séries $\sum \dfrac{1}{n}$, $\sum \dfrac{-1}{n+1}$ e $\sum \dfrac{1}{n+2}$ são divergentes, que a série $\sum\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ é convergente e que a série $\sum\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+2}\right)$ é divergente. ■

3 Resultados sobre algumas séries particulares

Vamos agora estudar, a partir da definição, algumas séries clássicas de relevo. Como iremos ver ao longo de todo este capítulo, o conhecimento da natureza destas séries será muito útil no estudo de outras séries.

A - Série geométrica

Chama-se *série geométrica de razão r* a uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{122}$$

A sucessão geradora, $(u_n)_n$, é definida por $u_n = r^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, e a sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, é definida por $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$. Para $r = 1$ tem-se $s_n = n$ e para $r \neq 1$, como também $rs_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$, sai que $s_n - rs_n = 1 - r^n$, donde

$$s_n = \begin{cases} n & \text{se } r = 1 \\ \dfrac{1 - r^n}{1 - r} & \text{se } r \neq 1. \end{cases} \tag{123}$$

Da definição de convergência de uma série sai que:

$$\begin{aligned}
r = 1 &\implies \text{série divergente, porque } \lim_n s_n = \lim_n n = +\infty; \\
r > 1 &\implies \text{série divergente, porque } \lim_n s_n = +\infty, \text{ já que } \lim_n r^n = +\infty; \\
r \leq -1 &\implies \text{série divergente, porque } \nexists \lim_n s_n, \text{ já que também } \nexists \lim_n r^n; \\
-1 < r < 1 &\implies \text{série convergente com soma } S = \frac{1}{1-r}\,, \text{ porque } \lim_n s_n = \frac{1}{1-r}\,, \\
& \text{já que } \lim_n r^n = 0.
\end{aligned}$$

Conclusão A

A série geométrica de razão r definida pela expressão (122) é convergente se e só se $|r| < 1$. Em caso de convergência, a sua soma é $S = \dfrac{1}{1-r}$. ■

Exemplo 2

(a) Seria imediato concluir que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}$ do Exemplo 1 é divergente, por se tratar de uma série geométrica de razão $r = -1$.

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ é convergente, porque $r = -\dfrac{1}{e}$, com soma $S = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{e}} = \dfrac{e}{e+1}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{2}{3} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ é convergente com soma $S = \dfrac{2}{3} \dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 2$.

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{5}{4}\right)^{n} = -\frac{5}{4}\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1}$ é divergente porque $r = -\dfrac{5}{4}$ e , portanto, $|r| > 1$.

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n + 4^{n+1}}{3^{n+2}}$ é divergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n\geq 1}\left[-\frac{1}{3^3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{4^2}{3^3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\right],$$

onde $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é convergente e $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ é divergente (Propriedade 3). ∎

Observação 2

Mais em geral, uma série geométrica de razão r apresenta a forma

$$\sum_{n=p}^{+\infty} ar^{n+k}\,, \quad a, r\in\mathbb{R}\,,\ a\neq 0\,,\ p\in\mathbb{N}\,,\ k\in\mathbb{Z}\,, \tag{124}$$

representando a soma

$$ar^{p+k} + ar^{p+k+1} + ar^{p+k+2} + \cdots = ar^{p+k}\left(1 + r + r^2 + \cdots\right),$$

e tem a mesma natureza que as séries $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} r^{n+k}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}$. Então a série (124) converge se e só se $|r| < 1$. Em caso de convergência, a sua soma é $S = ar^{p+k}\dfrac{1}{1-r}$. ∎

Exemplo 3

$\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 5\left(-\frac{3}{7}\right)^{n+2}$ é convergente com soma $S = 5\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{5}\dfrac{1}{1-(-\frac{3}{7})} = -\dfrac{3^5}{2\cdot 7^4}$. ∎

B - Série telescópica

Chama-se série telescópica a uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+p})\,, \quad p\geq 1, \tag{125}$$

onde $(a_n)_n$ é uma sucessão qualquer. O exemplo típico é o da *série de Mengoli*, habitualmente apresentada numa das formas equivalentes (*cf.* o Exemplo 4)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \tag{126}$$

Outros exemplos são

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+5}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\operatorname{sen} n}{n^3}-\frac{\operatorname{sen}(n+3)}{(n+3)^3}\right]. \tag{127}$$

Para estas séries, é possível estudar a sucessão das somas parciais de uma forma muito simples. Vejamos um caso. Todos os outros se estudam da mesma forma.

Exemplo 4

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ converge e tem soma $S=3/4$.

(i) Comecemos por escrever a série dada noutra forma, procurando constantes reais A e B tais que

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}-\frac{B}{n+2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Existindo tais constantes, deveremos ter

$$1=A(n+2)-Bn \iff 1=(A-B)n+2A \iff \begin{cases} A-B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \end{cases}$$

pelo que a série assume a forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1/2}{n}-\frac{1/2}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.

(ii) Para a sucessão das somas parciais, vem

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\right. \\ &\qquad \left.+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right), \tag{128}$$

donde $\lim_n s_n=3/4$ e conclui-se que a série dada é convergente com soma $S=3/4$.

■

Exercício

Verificar que a série de Mengoli definida em (126) converge e tem soma $S=1$. ■

Exemplo 5

Para a série com a expressão geral (125), vem

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1-a_{p+1})+(a_2-a_{p+2})+(a_3-a_{p+3})+\cdots \\ &\quad +(a_p-a_{2p})+(a_{p+1}-a_{2p+1})+(a_{p+2}-a_{2p+2})+\cdots \\ &\quad +(a_{n-2}-a_{n+p-2})+(a_{n-1}-a_{n+p-1})+(a_n-a_{n+p}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}), \tag{129}$$

pelo que, existe $\lim_n s_n$ se e só se existe $\lim_n (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p})$, ou seja, se e só se existe $\lim_n a_n$. Então a série converge quando e só quando a sucessão $(a_n)_n$ também converge, caso em que a soma da série é precisamente o valor S do limite da expressão que define o segundo membro da equação (129).

Conclusão B

A série de Mengoli definida pela expressão (125) é convergente se e só se a correspondente sucessão $(a_n)_n$ é convergente. Em caso de convergência, a soma da série é

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \lim_n a_n. \tag{130}$$

■

C - Série harmónica

Trata-se da série com a forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \tag{131}$$

com sucessão geradora, $(u_n)_n$, de termos positivos, definida por $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, e sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, crescente e definida por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,. \tag{132}$$

Os termos da série, ou seja as parcelas $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, decrescem e tendem para 0, mas mesmo assim esta série diverge lentamente para $+\infty$, porque $\lim_n s_n = +\infty$. Vamos mostrar que, de facto, é assim, por dois processos diferentes: o primeiro, de carácter geométrico e bastante intuitivo, que envolve um integral impróprio; o segundo, puramente analítico mas muito interessante, baseado na definição de convergência de uma série.

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, fixo, podemos interpretar s_n como a área do domínio plano A_n constituído por n regiões rectangulares de largura 1 e altura sucessivamente igual a 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$ (Figura 49). Consideremos agora a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, e a região sob o seu gráfico,

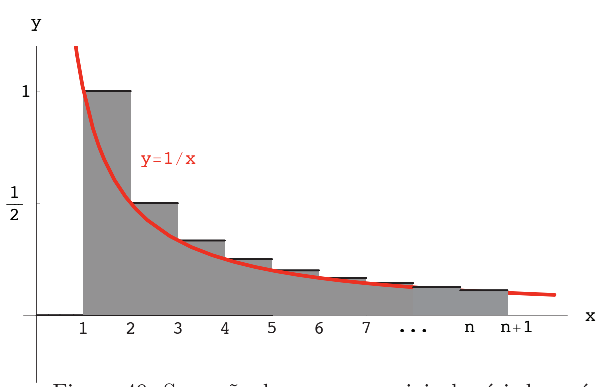

Figura 49: Sucessão das somas parciais da série harmónica.

$$A_n^* = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq f(x) \ \wedge\ 1 \leq x \leq n+1\big\}.$$

Temos então (Figura 49)

$$\text{área}\, A_n^* < \text{área}\, A_n = s_n,$$

com

$$\text{área}\, A_n^* = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln x\Big]_1^{n+1} = \ln(n+1) \quad \text{e} \quad \lim_n \ln(n+1) = +\infty,$$

pelo que $\lim_n s_n = +\infty$, concluindo-se que a série harmónica diverge para $+\infty$.

(ii) Alternativamente, não é difícil reconhecer que $\lim s_n = +\infty$, analisando a sucessão que extraimos de $(s_n)_n$ considerando apenas os termos de ordens 2, 2^2, 2^3, etc, ou seja, a sucessão $(s_{2^n})_n$ cujos termos são s_2 , s_4 , s_8 , s_{16} , s_{32} , s_{2^n} , ... De facto,

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \quad s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8} \\ &\cdots \quad \cdots \\ s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ parcelas}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2 \text{ parcelas}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{2^3 \text{ parcelas}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right)}_{2^4 \text{ parcelas}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1} \text{ parcelas}} \end{aligned}$$

Notando que, em cada bloco de s_{2^n}, a última parcela é a menor, podemos escrever

$$s_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{4} + 4\,\frac{1}{8} + 8\,\frac{1}{16} + 16\,\frac{1}{32} + \cdots + 2^{n-1}\,\frac{1}{2^n} \ = \ 1 + n\,\frac{1}{2}\,.$$

Mas $\lim_n \left(1 + n\,\frac{1}{2}\right) = +\infty$, donde $\lim_n s_{2^n} = +\infty$, e também $\lim_n s_n = +\infty$.
Logo, a série harmónica diverge para $+\infty$.

Conclusão C

A série harmónica, definida pela expressão (131), é divergente (para $+\infty$). ■

D - Série de Riemann

Chama-se série de Riemann (de expoente $r > 0$) a uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\,r}}\ ,\ r \in \mathbb{R}^+, \tag{133}$$

cuja sucessão geradora (de termos positivos) é definida por $u_n = \dfrac{1}{n^r}$, $n \in \mathbb{N}$. A correspondente sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, é crescente e dada por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r}\,. \tag{134}$$

(i) Se $r=1$ então a série (133) reduz-se à série harmónica e, portanto, é divergente.

(ii) Se $0<r<1$ então

$$\begin{aligned} s_n &= 1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\cdots+\frac{1}{n^r} \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\,. \end{aligned} \tag{135}$$

Então $\lim_n s_n=+\infty$ porque, como se viu no parágrafo C sobre a série harmónica, $\lim_n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$. A correspondente série de Riemann é divergente.

(iii) Para $r>1$, consideremos a sucessão que se extrai de $(s_n)_n$ tomando apenas os termos s_1, s_3, s_7, s_{15}, s_{31}, …, s_{2^n-1}, … Atendendo a que

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= 1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^r} \\ &= 1+\underbrace{\left(\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}\right)}_{2\text{ parcelas}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4^r}+\cdots+\frac{1}{7^r}\right)}_{2^2\text{ parcelas}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8^r}+\cdots+\frac{1}{15^r}\right)}_{2^3\text{ parcelas}} \\ &\quad +\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{(2^{n-1})^r}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^r}\right)}_{2^{n-1}\text{ parcelas}}, \end{aligned}$$

e a que, em cada bloco, a parcela maior é a primeira, podemos escrever

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &< 1+2\,\frac{1}{2^r}+2^2\,\frac{1}{4^r}+2^3\,\frac{1}{8^r}+\cdots+2^{n-1}\,\frac{1}{(2^n-1)^r} \\ &= 1+\frac{2}{2^r}+\frac{2^2}{(2^2)^r}+\frac{2^3}{(2^3)^r}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^r} \\ &= 1+\frac{2}{2^r}+\left(\frac{2}{2^r}\right)^2+\left(\frac{2}{2^r}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{2^r}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\dfrac{2}{2^r}\right)^n}{1-\dfrac{2}{2^r}} \overset{\text{def}}{=} w_n. \end{aligned}$$

Como $r>1$, resulta que $\lim_n\left(\frac{2}{2^r}\right)^n=0$ e, portanto, $\lim_n w_n=1/(1-2/2^r)$. Consequentemente, $(w_n)_n$ é uma sucessão convergente sendo, em particular, uma sucessão limitada. Assim, serão também limitadas as sucessões $(s_{2^n-1})_n$ e $(s_n)_n$. Sendo monótona e limitada, a sucessão $(s_n)_n$ é convergente. Conclui-se, finalmente, que, para $r>1$, a correspondente série de Riemann é convergente (não determinamos a soma da série).

Conclusão D

A série de Riemann (de expoente $r>0$), definida pela expressão (133), é convergente se e só se $r>1$. ∎

Exemplo 6

(a) A série $\sum_{n\geq 1}\frac{2}{n^5}$ converge porque $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^5}$ é uma série de Riemann convergente.

(b) A série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge porque é uma série de Riemann de expoente $1/2$.

(c) A série $\sum_{n\geq 1}\frac{2\sqrt[3]{n^5}+3\sqrt{n}}{n^2}$ diverge, porque $\frac{2\sqrt[3]{n^5}+3\sqrt{n}}{n^2}=\frac{2}{n^{1/3}}+\frac{3}{n^{3/2}}$, sendo $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{1/3}}$ uma série de Riemann divergente e $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ uma série de Riemann convergente.

(d) A série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{8}{3n^5}+\frac{1}{4^n}\right)$ converge porque $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^5}$ é uma série de Riemann convergente e $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4^n}$ é uma série geométrica convergente. ■

4 Primeiros resultados sobre convergência

Começamos esta secção com um resultado fundamental, muito útil no estudo da convergência de séries. Em termos muito gerais, este resultado estabelece que, para que uma série possa ser convergente, é necessário que a parcela genérica – ou seja, o termo geral da série – tenda para zero. Se assim não for, o que acontece é que a soma que se obtém juntando sucessivamente mais uma parcela, e mais outra e mais outra ..., não converge para limite algum (real), eventualmente “explode” para ∞.

De facto, consideremos uma série $\sum u_n$, que supomos ser convergente. Significa que se $(s_n)_n$ for a correspondente sucessão das somas parciais, então existe $S\in\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_n s_n=\lim_n(u_1+u_2+\cdots+u_n)=S.$$

Como também $\lim_n s_{n-1}=\lim_n(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})=S$, vem $\lim_n u_n=\lim_n(s_n-s_{n-1})=S-S=0$. Podemos, assim, estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 1 [Condição necessária de convergência]
Se a série $\sum_{n\geq 1}u_n$ é convergente então $\lim_n u_n=0$. ■

Em geral, pretendemos estudar a natureza da série $\sum u_n$, pelo que o Teorema 1 é útil quando o passamos à seguinte forma equivalente.

Corolario 1 [Condição suficiente de divergência (ou teste da divergência)]
Se a sucessão $(u_n)_n$ não tem limite ou se $\lim_n u_n=\ell$, com $\ell\neq 0$, então a série $\sum_{n\geq 1}u_n$ é divergente. ■

Observação 3

O recíproco do Teorema 1 é obviamente falso. Isto é,

$$\lim_n u_n = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{n\geq 1} u_n \text{ convergente.} \tag{136}$$

Cf. o exemplo clássico do parágrafo 3 C, relativo à série harmónica (131). ■

Exemplo 7

(a) Relativamente à série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}$ Exemplo 1, tem-se que $\nexists \lim_n (-1)^{n-1}$.

(b) A série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ é divergente porque $\lim_n \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$.

(c) A série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \operatorname{sen} n$ é divergente porque $\nexists \lim_n (-1)^n \operatorname{sen} n$.

(d) A série $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2n+5}$ é divergente porque $\lim_n \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$.

(e) A série $\sum_{n\geq 1}\cos\frac{1}{n}$ é divergente porque $\lim_n \cos\frac{1}{n} = 1$.

(f) Do Teorema 1, nada se pode concluir, por exemplo, sobre a natureza das séries $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ e $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, já que $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ e $\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$. ■

Outro resultado muito útil obtém-se da definição de convergência de uma série e do facto de o limite de uma sucessão não depender de um determinado número finito de termos, por muito grande que seja esse número de termos.

Teorema 2

Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sucessões que diferem, quando muito, num número finito de termos. Então as séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza. ■

Observação 4

O Teorema 2 estabelece que se uma das séries converge então a outra também converge e se uma diverge então a outra também diverge. Isto significa que a natureza de uma série não depende dos seus k primeiros termos, por maior que seja k . ■

Exemplo 8

(a) A série $\sum_{n\geq 1} u_n$ com $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 2008 \\ (3/2)^n & \text{se } n > 2008 \end{cases}$ é divergente.

De facto, pelo Teorema 2, conclui-se que a série proposta tem a mesma natureza que a série estudada no Exemplo 7 (b).

(b) A série $\sum_{n\geq 1} w_n$ com $w_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } n \leq 100 \\ (1/3)^n & \text{se } n > 100 \end{cases}$ é convergente.

Esta série é da mesma natureza (Teorema 2) que a série do Exemplo 1 (b). ■

5 Séries de termos não negativos

Neste parágrafo, vamos concentrar-nos num tipo particular de séries,

$$\sum_{n\geq 1} u_n\,, \quad \text{com} \quad u_n \geq 0\,, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \tag{137}$$

para as quais a sucessão $(s_n)_n$ das somas parciais é monótona crescente, já que

$$s_n \;=\; s_{n-1} + u_n \;\geq\; s_{n-1}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da definição de convergência de uma série e de alguns resultados sobre sucessões, mostra-se que uma série do tipo (137) é convergente se e só se a correspondente sucessão $(s_n)_n$ é majorada. De facto,

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} u_n \text{ convergente} &\iff (s_n)_n \text{ convergente} \\ &\iff (s_n)_n \text{ limitada} \quad [\text{porque } (s_n)_n \text{ é monótona}] \\ &\iff (s_n)_n \text{ majorada} \quad [\text{porque } (s_n)_n \text{ é crescente}] \end{aligned} \tag{138}$$

Apesar de a convergência de uma série de termos não negativos se poder traduzir pela majoração da correspondente sucessão das somas parciais, a tarefa de estudar a natureza de uma série não fica suficientemente simplificada, porque esta sucessão não tem uma definição nada simples. No entanto, pelo facto de estarmos perante séries de termos não negativos, vai ser possível estabelecer alguns resultados que permitirão averiguar a natureza da série a partir do estudo da sucessão geradora. Do ponto de vista intuitivo, alguns destes resultados podem ser explicados com base na representação gráfica da sucessão $(s_n)_n$ das somas parciais (Figura 50).

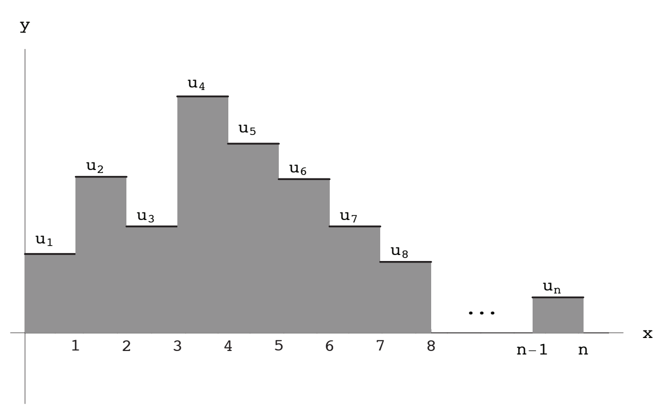

Figura 50: Sucessão das somas parciais de uma série de termos não negativos.

Cada termo u_n, sendo não negativo, pode ser interpretado como a área de uma região rectangular de largura unitária e altura u_n. O termo $s_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$ representa a área do domínio plano A constituído pela totalidade das regiões rectangulares indicadas na Figura 50. Dizer que a série com a expresssão (137) converge equivale a dizer que existe e é finito o limite

$$\lim_n s_n = \lim_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n), \tag{139}$$

ou seja, que é finita a área do domínio A. Analogamente, dizer que a série (137) diverge equivale a dizer que

$$\lim_n s_n = \lim_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = +\infty \tag{140}$$

e que, portanto, a área de A é infinita. Esta é a ideia intuitiva subjacente aos resultados de que falaremos a seguir.

A - Critérios de comparação

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ duas séries de termos não negativos para as quais existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ a partir da qual se tem $u_n \leq v_n$, ou seja,

$$u_n \leq v_n, \qquad \text{para todo} \quad n \geq p.$$

Graficamente, significa que se tem uma situação como a da Figura 51, ficando claro que:

- se a área total interior aos rectângulos de alturas $v_p,\, v_{p+1}, \ldots, v_n$ é finita, então também será finita a área total interior aos rectângulos de alturas $u_p,\, u_{p+1}, \ldots, u_n$;
- se a área total interior aos rectângulos de alturas $u_p,\, u_{p+1}, \ldots, u_n$ não é finita, então também não será finita a área total interior aos rectângulos de alturas $v_p,\, v_{p+1}, \ldots, v_n$.

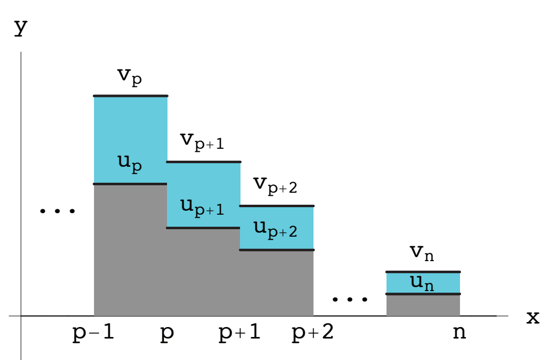

Figura 51: Comparação entre as sucessões das somas parciais de duas séries.

Assim, se $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ forem as sucessões das somas parciais das séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$, respectivamente, para $n > p$, tem-se

$$s_n = \underbrace{(u_1 + \cdots + u_p)}_{s_p} + (u_{p+1} + \cdots + u_n) \leq s_p + \underbrace{(v_{p+1} + \cdots + v_n)}_{t_n - t_p} = s_p + t_n - t_p,$$

donde

$$s_n \leq s_p + t_n. \tag{141}$$

Consequentemente, se $\sum v_n$ é convergente então $(t_n)_n$ é majorada e, por (141), também $(s_n)_n$ é majorada, sendo a correspondente série, $\sum u_n$, uma série convergente. Por outro lado, se $\sum u_n$ for agora divergente, supondo que $\sum v_n$ seria convergente, concluir-se-ia que também $\sum u_n$ seria convergente, o que é absurdo. Logo, a série $\sum v_n$ é divergente. Pelo que acabamos de ver, vale o seguinte resultado.

Teorema 3 [Primeiro Critério de Comparação]
Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos não negativos tais que

$$\exists p \in \mathbb{N} : \ n \geq p \implies u_n \leq v_n.$$

(a) Se $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também converge.

(b) Equivalentemente, se $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge então $\sum_{n\geq 1} v_n$ também diverge. ■

Recorrendo a uma comparação com o termo geral de uma série conhecida, a aplicação do primeiro critério permite concluir, de forma muito simples, a natureza de uma vasta classe de séries numéricas.

Exemplo 9

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n + 1}$ é convergente, porque:

- $\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ é uma série gemétrica de razão 1/2, logo convergente.

(b) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$ é divergente, porque:

- $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 2;$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ é uma série divergente (harmónica).

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2+(-1)^n}{n^3}$ é convergente, porque:

- $\displaystyle\frac{2+(-1)^n}{n^3} \leq \frac{3}{n^3}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n^3}$ é convergente (série de Riemann de expoente 3).

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3n}{n^3+1}$ é convergente, porque:

- $\displaystyle\frac{3n}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ é convergente (série de Riemann de expoente 2).

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\log\sqrt{n}}{n}$ é divergente, porque:

- $\displaystyle\frac{\log\sqrt{n}}{n} > \frac{1}{n}$, para $n \geq 8$, e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ é divergente (série harmónica).

(f) Sobre a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$, fazendo a comparação $\displaystyle\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o primeiro critério de comparação não permite estabelecer qualquer conclusão, uma vez que a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ é divergente. O mesmo se passa, por exemplo, com a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, fazendo a comparação $\displaystyle\frac{1}{1+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, uma vez que a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente, já que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Na prática, nem sempre é fácil usar o primeiro critério de comparação (Teorema 3) porque ele depende fortemente de uma comparação da do tipo apresentado no enunciado. É o caso dos Exemplos 9 (f). Por esta razão, resulta muito útil a sua formulação em termos de limite.

Teorema 4 [Segundo Critério de Comparação]

Sejam $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos positivos tais que $\displaystyle\ell = \lim_n \frac{u_n}{v_n}$, onde $\ell \in [0, +\infty]$.

(a) Se $\ell \neq 0$ e $\ell \neq +\infty$ então as séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza.

(b) Se $\ell = 0$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também converge.

Equivalentemente, se $\ell = 0$ e $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge então $\sum_{n\geq 1} v_n$ também diverge.

(c) Se $\ell = +\infty$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também diverge.

Equivalentemente, se $\ell = +\infty$ e $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge então $\sum_{n\geq 1} v_n$ também converge.

■

Exemplo 10

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ é divergente.

Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ é uma série divergente e $\lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$, o segundo critério de comparação permite concluir que a série apresentada é divergente.

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ é divergente.

Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é uma série divergente e $\lim_n \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_n \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1$,

conclui-se (segundo critério de comparação) que a série apresentada é divergente.

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+1}{3^n-1}$ é convergente.

Basta notar que $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é uma série geométrica convergente e que

$$\lim_n \frac{\frac{2^n+1}{3^n-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_n \frac{3^n(2^n+1)}{2^n(3^n-1)} = \lim_n \frac{6^n+3^n}{6^n-2^n} = \lim_n \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n} = 1.$$

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{1+n^3}$ é convergente.

Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Riemann convergente e $\lim_n \frac{\frac{n}{1+n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^3}{1+n^3} = 1$,

o segundo critério de comparação permite concluir que a série dada é convergente.

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\sqrt{1+n^5}}$ é convergente.

Vamos comparar com a série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$, que é convergente.

Tem-se

$$\lim_n \frac{\dfrac{n}{\sqrt{1+n^5}}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_n \frac{n^{5/2}}{\sqrt{1+n^5}} = \lim_n \sqrt{\frac{n^5}{1+n^5}} = 1,$$

donde, pelo segundo critério de comparação, sai que a série dada é convergente.

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ é divergente, porque: $\displaystyle\lim_n \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = 1$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ é divergente.

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n^2}$ é convergente.

• Por ser $\displaystyle\lim_n \frac{\dfrac{\log n}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_n \log n = +\infty$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ uma série de Riemann convergente, o segundo critério de comparação não permite estabelecer conclusões sobre a natureza da série dada.

• Analogamente, por ser $\displaystyle\lim_n \frac{\dfrac{\log n}{n^2}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_n \frac{\log n}{n} = 0$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ uma série divergente, o segundo critério de comparação também nada permite concluir.

• Mas $\displaystyle\lim_n \frac{\dfrac{\log n}{n^2}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_n \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ é uma série convergente.

Logo, pelo segundo critério de comparação, caso (b), conclui-se que a série proposta é convergente. ■

B - Critério de D'Alembert (ou da razão)

Este critério é motivado pela simplicidade das séries geométricas, digamos $\sum a_n$ com $a_n = r^{n-1}$, que apresentam a propriedade de a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ser constantemente igual a r e que convergem quando e só quando $|r| < 1$. Mostra-se que, dada uma série arbitrária de termos positivos, digamos $\sum u_n$, ainda que a razão $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ não seja constante, se ela tender para certo $\ell < 1$, então essa série será convergente. Analogamente, se a razão $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tender para uma constante $\ell > 1$, então a série será divergente.

Teorema 5 [Critério de D'Alembert (ou da razão)]
Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos positivos e suponha-se que existe $\ell = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(a) Se $\ell < 1$ então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\ell > 1$ então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) Se $\ell = 1$ nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum_{n\geq 1} u_n$. ■

Observação 5
O caso referido na línea (c) do teorema não é conclusivo, porque há casos em que $\ell = 1$ e a série converge e casos em que $\ell = 1$ e a série diverge. Basta pensar na série gerada por $(u_n)_n$ com $u_n = 1/n$, que é divergente, e na série gerada por $(w_n)_n$ com $w_n = 1/n^2$, que é convergente, para as quais se tem $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1$. ■

Exemplo 11

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ é convergente. De facto,

$$\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)\,n!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 \,<\, 1\,.$$

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ é convergente. De facto,

$$\lim_n \frac{\frac{[(n+1)!\,]^2}{[2(n+1)]!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_n \frac{(n+1)^2\,(n!)^2\,(2n)!}{2(n+1)\,(2n+1)\,(2n)!\,(n!)^2} = \lim_n \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} \,<\, 1\,.$$

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$ é divergente. Basta ter em conta que

$$\lim_n \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_n \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n^n(n+1)n!} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

(d) Por aplicação do Crtitério de D'Alembert, seria imediato concluir que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ é convergente e que $\sum_{n\geq 1} 2^n$ é divergente. ■

C - Critério de Cauchy (ou da raíz)

Outro critério de aplicação muito frequente, motivado também pela simplicidade das séries geométricas, é o que passaremos a apresentar neste parágrafo. Para tal, repare-se que dada uma série geométrica convergente, de termos positivos, digamos

$$\sum_n r^n, \qquad \text{com} \quad r \in [0,1[\,,$$

também será convergente toda a série $\sum_n u_n$ tal que $u_n \leq r^n$, ou equivalentemente, tal que $\sqrt[n]{u_n} \leq r < 1$. Por outro lado, se acontecer que para uma dada série $\sum_n u_n$, se tem $\sqrt[n]{u_n} > 1$, então $u_n > 1$ e não se poderá ter-se $u_n \longrightarrow 0$, pelo que a série diverge.

As ideias que acabamos de expor conduzem a um resultado importante no capítulo das séries, que quando formulado em termos de limite, apresenta a seguinte forma.

Teorema 6 [Critério de Cauchy (ou da raíz)]
Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos e suponha-se que existe $\ell = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$.

(a) Se $\ell < 1$ então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\ell > 1$ então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum_{n\geq 1} u_n$. ■

Observação 6
Novamente no teorema anterior, o caso referido na línea (c) não é conclusivo, porque há casos em que $\ell = 1$ e a série converge e casos em que $\ell = 1$ e a série diverge. Basta pensar na série gerada por $(u_n)_n$ com $u_n = 1/n$, que é divergente, e na série gerada por $(w_n)_n$ com $w_n = 1/n^2$, que é convergente, para as quais se tem $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \sqrt[n]{w_n} = 1$.
■

Exemplo 12

(a) A série $\sum_{n\geq 1} \left(\dfrac{n^2}{n^3+3n}\right)^n$ é convergente. Basta atender a que

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n^2}{n^3+3n}\right)^n} = \lim_n \frac{n^2}{n^3+3n} = 0 < 1\,.$$

(b) $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{n^2}$ é divergente, porque

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} > 1\,.$$

(c) Por aplicação do Crtitério de Cauchy, seria imediato concluir que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ é convergente e que $\sum_{n\geq 1} 2^n$ é divergente. ∎

6 Convergência absoluta e convergência simples.

Consideremos uma série $\sum u_n$ cujos termos têm sinal arbitrário. Formemos a correspondente série dos módulos, $\sum |u_n|$, que é obviamente uma série de termos não negativos, para a qual valem todos os resultados apresentados na Secção 5. Vejamos que a convergência de $\sum |u_n|$ implica a convergência de $\sum u_n$. Não podemos aplicar o primeiro critério de comparação à série $\sum u_n$, mas se separarmos os seus termos numa parte positiva e numa parte negativa, podemos contornar este problema. Assim, definimos duas novas séries de termos não negativos:

- a série dos termos positivos, $\sum p_n$, pondo

$$p_n = u_n, \;\text{ se }\; u_n \geq 0, \qquad \text{e} \qquad p_n = 0, \;\text{ se }\; u_n < 0; \tag{142}$$

- a série dos simétricos dos termos negativos, $\sum q_n$, pondo

$$q_n = -u_n, \;\text{ se }\; u_n \leq 0, \qquad \text{e} \qquad q_n = 0, \;\text{ se }\; u_n > 0. \tag{143}$$

Exemplo 13
Consideremos a série

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\cdots$$

A série dos módulos é

$$\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Formamos a série da parte positiva usando os termos positivos e substituindo os negativos por zero,

$$\sum_{n\geq 1} p_n = 0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0+\frac{1}{8}+\cdots \tag{144a}$$

e formamos a série da parte negativa usando os simétricos dos termos negativos e substituindo os positivos por zero,

$$\sum_{n\geq 1} q_n = 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} + 0 + \cdots \qquad (144b)$$

■

Das definições, bem como do Exemplo 13, vemos que $p_n \leq |u_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que $q_n \leq |u_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e ainda que (*cf.* as expressões (144a) e (144b))

$$u_n = p_n - q_n, \qquad |u_n| = p_n + q_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (145)$$

Então, se $\sum |u_n|$ for convergente, também convergem as séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ (primeiro critério de comparação), convergindo também a série $\sum u_n = \sum (p_n - q_n)$. Isto justifica o seguinte resultado.

Teorema 7
Se a série $\sum |u_n|$ é convergente então a série $\sum u_n$ também é convergente. ■

O teorema anterior estabelece que uma série não pode ser divergente se a sua série dos módulos for convergente, facto que motiva as seguintes definições.

Dizemos que uma série $\sum u_n$ é *absolutamente convergente* quando a correspondente série dos módulos, $\sum |u_n|$, é convergente. Quando uma série é convergente mas não é absolutamente convergente, dizemos que ela é *simplesmente convergente*.

Exemplo 14

(a) Uma série convergente com termos de sinal constante é absolutamente convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ é absolutamente convergente, porque a correspondente série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, é uma série de Riemann convergente.

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} n}{n^7}$ é absolutamente convergente, porque $\displaystyle\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^7}\right| \leq \frac{1}{n^7}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^7}$ é uma série de Riemann convergente.

(d) A série harmónica alternada, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, não é absolutamente convergente porque a sua série dos módulos é a série harmónica, que é divergente. Na próxima secção veremos que esta série é simplesmente convergente. ■

7 Séries alternadas

Entre as séries com termos de sinal variável, destacam-se aquelas cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Estas séries apresentam a forma geral

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\,a_n = \; a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

ou (146)

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n}\,a_n = \; -a_1 + a_2 - +a_3 + a_4 - a_5 + \cdots$$

onde $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e designam-se por *séries alternadas*. Quanto à natureza de uma série alternada, pode acontecer que $\sum (-1)^{n+1}\,a_n$ seja absolutamente convergente, quando a corespondente série dos módulos é convergente, seja simplesmente convergente, quando a série dos módulos é divergente mas a série alternada converge, ou seja divergente. Um resultado muito útil para estudar séries alternadas, sobretudo quando a correspondente série dos módulos é divergente, é o seguinte.

Teorema 8 [Critério de Leibnitz (condição suficiente de convergência das séries alternadas)]
Seja $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente e tal que $\lim\limits_n a_n = 0$. Então a série $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\,a_n$ é convergente. ■

Para justificarmos o teorema anterior, consideremos a sucessão $(s_n)_n$ das somas parciais da série $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$,

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como a sucessão $(a_n)_n$, de termos positivos, é decrescente, não é difícil reconhecer (Figura 52) que os termos de $(s_n)_n$ avançam e recuam, mas a diferença entre eles é cada vez menor. Isto leva a concluir, por um lado, que $0 \leq s_2 \leq s_n \leq s_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e, por outro lado, que a sucessão $(s_{2n})_n$ dos termos de ordem par é monótona crescente e que a sucessão $(s_{2n-1})_n$ dos termos de ordem ímpar é monótona decrescente.

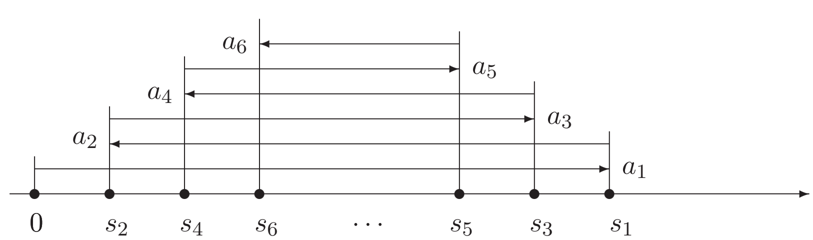

Figura 2: Comportamento da sucessão das somas paraciais da série alternada do Teorema 8.

Então $(s_{2n})_n$ e $(s_{2n-1})_n$ são limitadas e monótonas, logo convergentes. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 os respectivos limites. Como $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$, vem que $\lim\limits_n (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim\limits_n a_{2n}$, ou seja $\ell_1 - \ell_2 = \lim_n a_{2n}$. Mas $\lim\limits_n a_{2n} = 0$, pelo que $\ell_1 = \ell_2$. Assim, $(s_{2n})_n$ e $(s_{2n-1})_n$ convergem para um mesmo limite, resultando que $(s_n)_n$ também converge para esse limite comum. Consequentemente, a série $\sum\limits_n (-1)^{n+1}\, a_n$ é convergente. ■

Observação 7

O resultado enunciado no Teorema 8 continua válido quando a sucessão $(a_n)_n$ é decrescente apenas a partir de uma certa ordem $p \in \mathbb{N}$. Basta atender ao Teorema 2 e à correspondente Observação 4.

Observação 8

Para estudar uma série alternada, $\sum (-1)^{n+1} a_n$, recomenda-se, em geral, que sejam percorridos os passos seguintes.

(i) Começa-se com o teste da divergência, Corolário 1 do Teorema 1, calculando

$$\lim_n \left[(-1)^{n+1}\, a_n\right],$$

que poderá não existir ou então, existindo, seré nulo, uma vez que $\left((-1)^{n+1} a_n\right)_n$ é uma sucessão alternada. No primeiro caso, a série diverge. No segundo caso, é necessário continuar o estudo da série.

(ii) Estuda-se a série dos módulos, $\sum |(-1)^{n+1} a_n| = \sum\limits_n a_n$, podendo recorrer-se aos resultados da Secção 5. Se a série dos módulos for convergente, então a série alternada é absolutamente convergente (Teorema 7). Se a série dos módulos for divvergente, então nada se pode concluir sobre a série alternada. É necessário prolongar o estudo.

(iii) Estuda-se a série alternada, recorrendo ao critério de Leibnitz (Teorema 8). Neste caso, havendo convergência, ela será simples.

Exemplo 15

(a) A série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ é simplesmente convergente.

O passo (i) não conduz a conclusão alguma. O passo (ii) foi cumprido no Exemplo 14 (d) e não foi conclusivo. Passamos ao passo (iii) e aplicamos o critério de Leibnitz, sendo imediato que $\lim\limits_n \dfrac{1}{n} = 0$ e que $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ é uma sucessão decrescente, já que o denominador é crescente. Logo, a série é convergente (simplesmente).

(b) A série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ é simplesmente convergente.

Os passos (i) e (ii) não são conclusivos. Aplicamos o critério de Leibnitz, passo (iii), e a conclusão é imediata (semelhante ao exemplo anterior).

(c) A série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+5}$ é simplesmente convergente.

O passo (i) não é conclusivo, porque $\lim_n \frac{\sqrt{n}}{n+5} = 0$.

Vamos para o passo (ii) e estudamos a série dos módulos, que é divergente, como se conclui do segundo critério de comparação recorrendo à série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vamos para o passo (iii) e aplicamos o critério de Leibnitz, com $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+5}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se $\lim_n a_n = 0$. Além disso, $(a_n)_n$ é decrescente para $n \geq 5$, já que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+6} \, \frac{n+5}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \, \frac{n+5}{n+6}$$

e, portanto,

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \frac{(n+1)(n+5)^2}{n(n+6)^2} = \frac{n^3+11n^2+35n+25}{n^3+12n^2+36n} = \frac{n^3+11n^2+35n+25}{(n^3+11n^2+35n)+(n^2+n)}$$

resultando $a_{n+1}^2/a_n^2 < 1$ desde que $25 < n^2+n$, o que acontece para todo $n \geq 5$. Logo, a série dada é simplesmente convergente.

(d) A série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\log^n(n\pi)}$ converge absolutamente.

Mais uma vez, o passo (i) não é conclusivo, porque $\lim_n \frac{\cos(n\pi)}{\log^n(n\pi)} = 0$, já que o numerador se mantém limitado entre -1 e 1 e o denominador tende para $+\infty$.

Vamos para o passo (ii) e estudamos a série dos módulos, $\sum_n \frac{1}{\log^n(n\pi)}$, pois $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Usamos o critério de Cauchy (Teorema 6) e sai que

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{\log^n(n\pi)}} = \lim_n \frac{1}{\log(n\pi)} = 0 < 1,$$

pelo que a série dos módulos é convergente. Logo a série proposta é absolutamente convergente. ■

Observação 9

O resultado do Teorema 8 é uma condição suficiente de convergência, pelo que nada se poderá concluir quando falha alguma das hipóteses. Saliente-se, no entanto, que quando

$a_n \not\longrightarrow 0$, a série alternada é divergente (Corolário 1 do Teorema 1), já que também $(-1)^{n+1}a_n \not\longrightarrow 0$. Ver o Exemplo 16 (a). Os casos mais complexos são aqueles em que $a_n \longrightarrow 0$ mas não é decrescente. Ver os Exemplos 16 (b) e (c).

Exemplo 16

(a) A série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\dfrac{n+5}{n}$ é divergente, porque não existe $\lim_n (-1)^{n+1}\dfrac{n+5}{n}$.

(b) A série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$, com $a_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{se } n \text{ par,} \\ 1/n^3 & \text{se } n \text{ ímpar,} \end{cases}$ converge absolutamente.

Basta atender a que a série dos módulos é convergente, uma vez que $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ é uma série de Riemann convergente. A conclusão segue do primeiro critério de comparação,Teorema 3. Repare-se que o critério de Leibnitz não é aplicável à série proposta, uma vez que a sucessão $(a_n)_n$ não é decrescente a partir de ordem alguma.

(c) A série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}b_n$, com $b_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{se } n \text{ par,} \\ 1/n & \text{se } n \text{ ímpar,} \end{cases}$ é divergente.

• Em primeiro lugar, vejamos que a série dos módulos, $\sum_{n\geq 1} b_n$, é divergente.

De facto, podemos escrever

$$\sum_{n\geq 1} b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n)^2}\right)$$

e como $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{2n-1}$ é uma série divergente (comparar com a série harmónica através do segundo critério de comparação, Teorema 4) e $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{(2n)^2} = \sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{4n^2}$ é uma série convergente, a conclusão segue da Propriedade 3 apresentada na Secção 2.

• O critério de Leibnitz, Teorema 8, não é aplicável à série alternada porque a sucessão $(b_n)_n$ não é decresente a partir de ordem alguma.

• No entanto, atendendo a que

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} b_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7} - \cdots = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^2}\right),$$

conclui-se, novamente pela Consequêncuia 3, que a série alternada é divergente. ■

8 Comutatividade de séries

A comutatividade da adição com um número finito de parcelas não é preservada, como veremos a seguir, quando passamos a considerar um número infinto de parcelas. Veremos, em particular, que podemos perder a convergência de uma série se tomarmos as suas parcelas por uma ordem diferente da inicial.

Exemplo 17
Consideremos a série harmónica alternada (Exemplo 15 (a)), que sabemos ser simplesmente convergente. Seja S a soma desta série. Então

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{147}$$

e também (Propriedade 1(b), Secção 2)

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \tag{148}$$

pelo que, acrescentando parcelas nulas na série de (148), vem ainda (Propriedade 1(a), Secção 2)

$$\frac{S}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} - \cdots = \sum_{n \geq 1} \left(0 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \right). \tag{149}$$

Adicionando ordenadamente as séries das expressões (147) e (149), resulta

$$\frac{3S}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \cdots \tag{150}$$

que representa uma série com os mesmos termos da série harmónica alternada da expressão (147), tomados desta vez por outra ordem, com soma diferente da inicial. ■

O Exemplo 17 mostra que uma reordenação nos termos de uma série simplesmente convergente pode conduzir a uma série com soma diferente da inicial. Mais em geral, vale o seguinte resultado.

Teorema 9 [Riemann]
Seja $\sum_{n \geq 1} u_n$ uma série simplesmente convergente. Então:

(a) fixado arbitrariamente um número real $s \in \mathbb{R}$, é possível reordenar os termos da série dada de modo a que a série resultante seja convergente e possua soma s;

(b) é possível reordenar os termos da série dada, de modo a que a série resultante seja divergente com a correspondente sucessão das somas parciais

(i) a tender para $+\infty$;

(ii) a tender para $-\infty$;

(iii) a ser divergente oscilante. ■

O procedimento que, a partir de uma série simplesmente convergente, permite obter uma série com uma soma diferente, ou mesmo uma série divergente, assenta na separação dos termos da série dada nas suas partes positiva e negativa, definidas em (142) e (143). Consideremos então uma série $\sum u_n$, simplesmente convergente. Temos $\lim_n u_n = 0$.

Além disso, as séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ também são divergentes. De facto, se assim não fosse, então pelo menos uma delas seria convergente, por exemplo $\sum p_n$. Da primeira igualdade em (145) sairia a convergência da outra (Propriedade 1(a), Secção 2) e da segunda igualdade em (145) sairia a convergência de $\sum |u_n|$, o que é absurdo, uma vez que a convergência de $\sum u_n$ é apenas simples. Assim sendo, tem-se

$$\lim_n (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = +\infty\,, \qquad \lim_n (-q_1 - q_2 - \cdots - q_n) = -\infty, \tag{151}$$

o que significa que é possível somar um número finito de parcelas da série $\sum p_n$ e da série $\sum q_n$ até obter uma soma qualquer positiva.

(a) Fixemos um número real positivo s, qualquer. Reordenemos os termos da série dada procedendo da seguinte forma:

• começamos por somar os primeiros termos de $(p_n)_n$ até à menor ordem, digamos k_1, para a qual se tem, pela primeira vez,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > s,$$

o que é possível pela primeira condição de (151);

• em seguida, somamos os termos de $(-q_n)_n$ até à menor ordem, digamos k_2, para a qual se tem, pela primeira vez,

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1}) + (-q_1 - q_2 - \cdots - q_{k_2}) < s,$$

o que é possível pela segunda condição de (151);

• somamos novamente os termos de $(p_n)_n$, desde a ordem $k_1{+}1$ até à menor ordem k_3, para a qual se tem, pela segunda vez,

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1}) + (-q_1 - q_2 - \cdots - q_{k_2}) + (p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_3}) > s.$$

Prolongando este raciocínio, obtém-se a reordenação procurada. Para a série assim obtida, a sucessão $(s_n)_n$ das somas parciais oscila em torno de s, com oscilações de amplitude cada vez menor, convergindo para s.

(b) Para (i), por exemplo, somamos primeiro termos positivos até à ordem k_1 para a qual se tem, pela primeira vez,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > 1.$$

De seguida, somamos apenas o primeiro termo negativo, $-q_1$. Agora, somamos novamente termos positivos até à ordem k_2 até obter, pela primeira vez,

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1}) - q_1 + (p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2}) > 2.$$

Somamos apenas o segundo termo negativo, $-q_2$, e outra vez termos positivos até obter

$$(p_1 + \cdots + p_{k_1}) - q_1 + (p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2}) - q_2 + (p_{k_2+1} + \cdots + p_{k_3}) > 3.$$

E assim sucessivamente. Como $q_n \longrightarrow 0$, conclui-se que a sucessão das somas parciais da série resultante desta reordenação itá tender para $+\infty$.

(ii) De maneira semelhante, podemos reordenar os termos da série de modo a que a correspondente sucessão das somas parciais tenda para $-\infty$.

(iii) Para obter uma série cuja sucessão das somas parciais oscile em torno de dois números reais, o raciocínio é semelhante. ■

Por outro lado, o Teorema 10 que iremos enunciar garante que uma reordenação nos termos de uma série absolutamente convergente não modifica a natureza nem a soma da série.

Teorema 10 [Dirichlet]
Seja $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série absolutamente convergente de soma s. Então qualquer reordenação desta série conduz a uma série absolutamente convergente com a mesma soma s. ■

O Teorema 10 legitima a propriedade comutativa no contexto das somas com um número infito de parcelas. Com ele terminamos este capítulo.

FIM