Cálculo EE

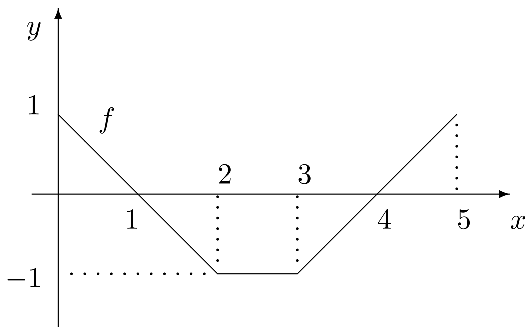
Integral definido

1. Sabendo que $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = 3$ e que $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx = 5$, determine:

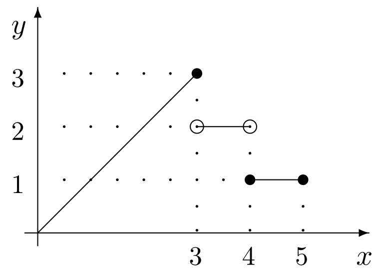
   (a) $\displaystyle\int_1^4 f(t)\,dt$; (b) $\displaystyle\int_4^2 f(t)\,dt$; (c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{1/2}^2 f(2x)\,dx$.

2. Seja $f\colon [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função representada na figura ao lado. Recorrendo ao significado geométrico do integral em termos de área, calcule

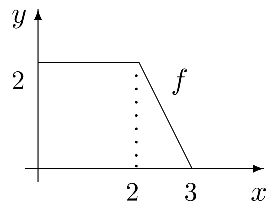
$$\int_0^1 f(x)dx,\ \int_1^2 f(x)dx,\ \int_0^5 f(x)dx.$$



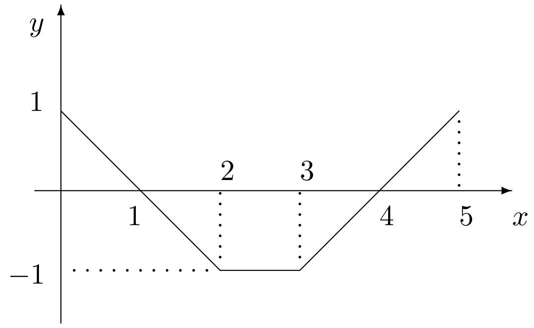
3. Sem recorrer ao Teorema Fundamental do Cálculo, determine $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$, sendo f a função representada na figura. Justifique convenientemente a sua resposta.



4. Sejam $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função representada na figura e $F\colon [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sua primitiva. Sem calcular qualquer integral, determine $F(3) - F(0)$.



5. Seja $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função representada na figura e seja $F\colon [0,\sqrt{5}] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$. Sem calcular qualquer integral, determine $F(\sqrt{3})$ e $F'(\sqrt{3})$.



6. Apresente um exemplo de:

   (a) uma função $f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 0$ e $f(x) \neq 0, \forall x \in [0,2]$;

(b) duas funções $f, g\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 g(x)\,dx$ e $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in [0,2]$.

7. Calcule os seguintes integrais definidos:

(a) $\int_0^2 (x+1)^2\ dx$;

(b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx$;

(c) $\int_{-3}^2 \sqrt{|x|}\ dx$;

(d) $\int_0^3 2-|x|\ dx$;

(e) $\int_{-1}^2 x|x|\ dx$;

(f) $\int_0^{2\pi} |\cos x|\ dx$;

(g) $\int_3^4 \frac{1-4x^3}{x-x^4}\ dx$;

(h) $\int_0^{\pi} x\ \sin x\ dx$;

(i) $\int_0^1 x \arctan x^2\ dx$;

(j) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x\ dx$;

(k) $\int_0^2 \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)}\ dx$;

(l) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x^2)}{x}\ dx$;

(m) $\int_0^1 \ln(x^2+1) dx$;

(n) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 5x\ dx$;

(o) $\int_0^1 g(x)\ dx$, com $g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -x & \text{se} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$

8. Determine todos os valores reais c tais que $\int_0^c x(1-x)\ dx = 0$.

9. Determine um polinómio quadrático $p(x)$ tal que $p(0) = p(1) = 0$ e $\int_0^1 p(t)\ dt = 1$.

10. Sem calcular os integrais $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ e $J = \int_{2\pi}^{3\pi/2} \sin^2 x\,dx$, justifique que $I > 0$ e $J < 0$.

11. Comparando o integral dado com um integral mais fácil de calcular, verifique as seguintes estimativas:

(a) $\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < 1$;

(b) $0 < \int_0^{\pi} \sin^2 x\ dx < 2$;

12. Seja f uma função contínua tal que se verifica a igualdade seguinte para todo o número real x:

$$\int_0^x f(t)\ dt = \frac{4}{3} + 3x^2 + \sin(2x).$$

Calcule $f(\frac{\pi}{2})$ e $f'(\frac{\pi}{4})$.

13. Mostre que a função $y = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt$ satisfaz a equação diferencial $y'y'' = -x$ e a condição inicial $y(0) = 0$.

14. Efetuando a mudança de variável adequada, determine os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\, dx$;

(b) $\displaystyle\int_{-5}^0 2x\sqrt{4-x}dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{3x}}\, dx$;

(e) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$;

(f) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, dx$;

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$;

(h) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\, dx$;

(i) $\displaystyle\int_0^{3/8} \sqrt{1+4x^2}\, dx$;

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx$;

(k) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{2+\cos x}$;

15. Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que:

(a) se f é par então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$;

(b) se f é ímpar então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$.

16. Considere a função $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

Mostre que:

(a) se f é par então $F(x)$ é ímpar.

(b) se f é ímpar então $F(x)$ é par.

17. Sabendo que $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \pi/2$, deduza qual o valor de $\displaystyle\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$, usando a mudança de variável $x = ct$, para c constante e conveniente.