Cálculo diferencial

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Cálculo diferencial

Este capítulo é dedicado ao estudo das derivadas de funções reais de uma variável real. A derivada e as suas aplicações desempenham um papel fundamental, tanto na própria Matemática, como noutros domínios aplicados, como a Física, a Economia, a Optimização, etc. Trata-se, portanto, de um tópico fundamental da Matemática.

1. Derivação e diferenciabilidade

Definição: Derivada

Seja f: $D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real, com domínio D_f , e x_0 um ponto interior a D_f . Chama-se **DERIVADA** de f em x_0 e representa-se por $f'(x_0)$ ao limite, se existir,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ter $x \to x_0$ equivale a ter $x = x_0 + h$, com $h \to 0$ e escrevemos, equivalentemente,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definição: Função diferenciável num ponto

Seja f: $D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real, com domínio D_f , e x_0 um ponto interior a D_f . Diz-se que a função f é **derivável** ou **diferenciável** no ponto x_0 se $f'(x_0)$ existir e for finita.

1. Derivação e diferenciabilidade

Quando o limite que define $f'(x_0)$ é estudado de um só lado somos conduzidos à noção de *derivada lateral.*

Definição: Derivadas laterais

Seja $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real, com domínio D_f , e x_0 um ponto interior a D_f .

Chama-se **derivada à esquerda** num ponto x_0 e representa-se por $f'(x_0^-)$ ao limite, se existir

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\text{ou } f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

Chama-se **derivada à direita** num ponto x_0 e representa-se por $f'(x_0^+)$ ao limite, se existir

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\text{ou } f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

Uma função f é derivável num ponto x_0 se só se existirem e forem iguais as derivadas laterais nesse ponto.

Exercício 1. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$.

Verfique se existe $f'(1)$.

1. Derivação e diferenciabilidade

Outras definições:

Sejam $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de domínio D_f e $A \subset D_f$. Dizemos que:

- f é derivável em A quando f é derivável em todo $x_0 \in A$;
- f é derivável se f é derivável em todo o domínio D_f .

Interpretação geométrica da derivada

Consideremos a curva $\mathcal{C}$ de equação $y = f(x)$ que passa pelo ponto $A = (a, f(a))$. Seja $X = (x, f(x))$ um ponto genérico da curva.
A razão incremental

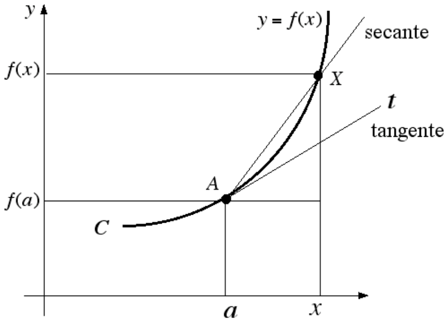
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dá o declive da recta que passa por A e X, que é secante à curva $\mathcal{C}$.

1. Derivação e diferenciabilidade

Interpretação geométrica da derivada

À medida que X se aproxima de A, a recta secante dá origem à recta t, que é tangente a $\mathcal{C}$ no ponto A. Tal recta t pode ser obtida como o limite, quando X se aproxima de A, das rectas secantes passando por A e X. Então, o declive m da recta tangente pode ser obtido como o limite dos declives das rectas secantes, à medida que X se aproxima de A.



Interpretação geométrica da derivada

Isto é,

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

onde, no segundo membro, o limite define $f'(a)$.

Isto justifica as seguintes **conclusões:**

- Quando f é derivável em a , a derivada $f'(a)$ dá o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a.
- Uma equação da **recta tangente** ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

1. Derivação e diferenciabilidade

Para x próximo de a, a função f pode ser aproximada pelo polinómio $f(a) + f'(a)(x - a)$, de grau não superior a 1.

Em torno do ponto a , a curva $y = f(x)$ confunde-se com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a , ou seja, é uma curva "suave" em torno do ponto a , ou localmente linearizável, e não apresenta um bico em $x = a$.

Observação

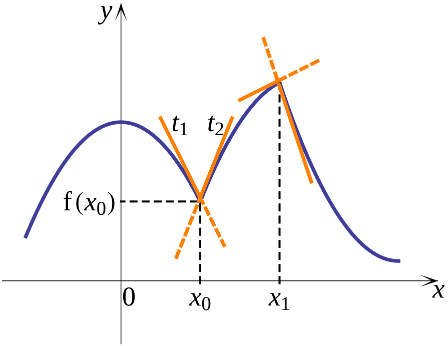
Se a razão incremental tender para infinito, não existindo $f'(a)$, isto é, se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \ \ ou \ \ \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty,$$

então a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a é a recta vertical de equação $x = a$.

1. Derivação e diferenciabilidade

De um modo geral, se uma função tem um gráfico como o da figura,



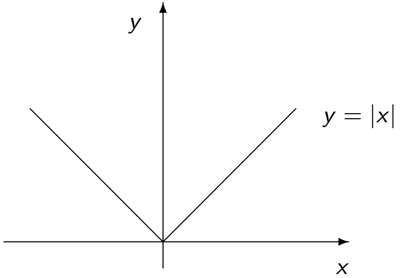
a função não é diferenciável em x_0 e x_1 . Por exemplo, no ponto $(x_0, f(x_0))$ a curva descrita não tem uma recta tangente mas duas rectas semitangentes, a semi-recta t_1 e a semi-recta t_2. Estas semi-rectas não estão no prolongamento uma da outra. O declive da semi-recta t_1 é a derivada de f à esquerda em x_0 e o declive da semi-recta t_2 é a derivada de f à direita em x_0.

Exemplos

Do ponto de vista geométrico, estudemos a existência de derivada das seguintes funções no ponto indicado.

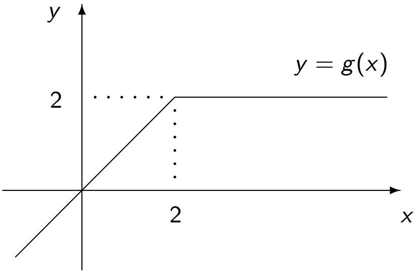
(a) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, ponto $a = 0$.

A curva $y = |x|$ apresenta um bico na origem, pelo que a função não é linearizável em torno da origem. Logo f não é derivável em $x = 0$.

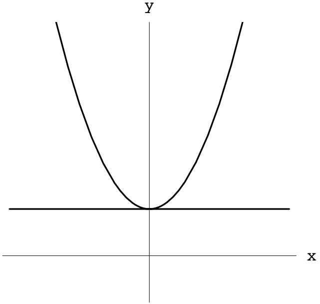


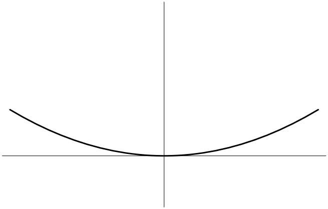
(b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 2, \\ 2 & \text{se} \quad x > 2, \end{cases}$ ponto $a = 2$.

A curva $y = g(x)$ apresenta um bico no ponto $(2, g(2))$, pelo que a função não é linearizável em torno desse ponto, ou seja, g não é derivável em $a = 2$.



(c) $k(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ponto $a = 0$.



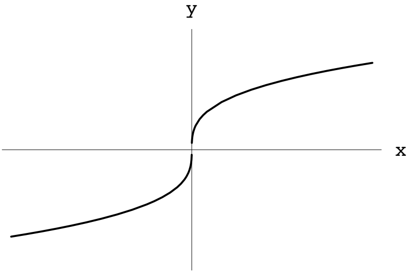


Ampliação em torno de $(0, 1)$.

A função k é derivável em $a = 0$. A curva não apresenta bico no ponto $(0, 1)$ e em torno de $(0, 1)$ a recta tangente à curva confunde-se com a própria curva.

(d) $j(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, ponto $a = 0$.

A função não é derivável em $a = 0$, pois a tangente ao gráfico de j em $a = 0$ é vertical, com a correspondente razão incremental a tender para $+\infty$.



2. Resultados sobre derivação pontual

Vamos agora apresentar alguns dos resultados mais importantes sobre uma função derivável num ponto.

Teorema

Seja f uma função real de variável real, com domínio D_f, e x_0 um ponto interior a D_f. Se f é derivável no ponto x_0, então f é contínua em x_0.

Observação:

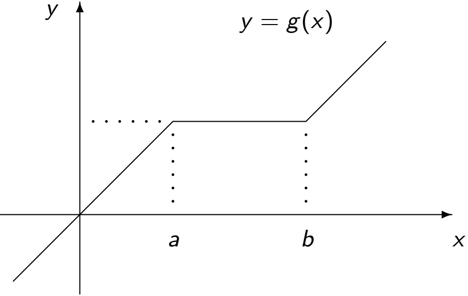
- O recíproco deste teorema é falso, isto é:
$$f \text{ é contínua em } a \not\Longrightarrow f \text{ é derivável em } a\,.$$
Basta pensar em $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, *e no ponto* $a = 0$.

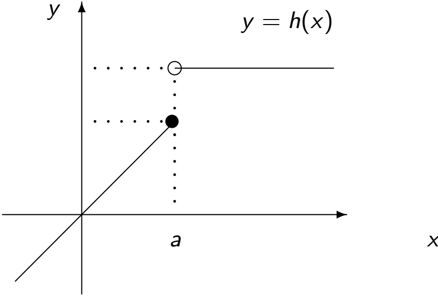
- Deste teorema sai, equivalentemente, que:
$$f \text{ é descontínua em } a \Longrightarrow f \text{ não é derivável em } a\,.$$
De facto, se f fosse derivável em a, pelo teorema, f seria também contínua em a.

- Com uma demonstração análoga à deste teorema, sai ainda que:
$$\text{existe } f'(a^+) \Longrightarrow f \text{ é contínua à direita em } a\,;$$
$$\text{existe } f'(a^-) \Longrightarrow f \text{ é contínua à esquerda em } a\,.$$

Exemplo

Considere as funções $g, h\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representadas na figura a seguir.
É simples constatar que g é contínua em D e derivável, apenas, em $D \backslash \{a, b\}$, enquanto que h é contínua em $D\backslash\{a\}$ e derivável em $D\backslash\{a\}$.





Exercício 2.

1. Faça a demostração do Teorema enunciado.
2. Considere a função definida por $f(x) = |x - 1|$.
   2.1 Mostre que f é contínua em $x = 1$.
   2.2 Calcule $f'(1^+)$ e $f'(1^-)$ para concluir que f não é derivável em $x = 1$.

2. Resultados sobre derivação pontual

Teorema: Aritmética da derivação pontual
Se f e g são duas funções deriváveis em a , então:

(a) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

(b) $(f \times g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g^2(a)}$, desde que $g(a) \neq 0$.

Consequências:

1) Da regra (b) do teorema sai, em particular, que se k for uma constante então
$$(kf(x))' = k\, f'(x).$$

2) Da regra (b), para $n \in \mathbb{N}$, sai também que
$$\big(f(x)^n\big)' = n\big(f(x)\big)^{n-1} f'(x).$$

3) Da regra (c), desde que $f(x) \neq 0$, sai que $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$.

2. Resultados sobre derivação pontual

Exemplos

1. $(kx)' = k(x)' = k, \quad k \in \mathbb{R}$.

2. $(x^n)' = nx^{n-1}(x)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$.

3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{(x)'}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

4. $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = -\dfrac{(x^2)'}{(x^2)^2} = -\dfrac{2x}{x^4} = -\dfrac{2}{x^3}$.

5. $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\dfrac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

6. $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.

   Logo, fazendo $m = -n$, podemos escrever $(x^m)' = mx^{m-1}$, para m inteiro negativo. Ou seja, a fórmula em 2) é válida para $n \in \mathbb{Z}$.

2. Resultados sobre derivação pontual

Proposição: Derivadas das funções trigonométricas

1. $(\text{sen}\, x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
4. $(cotg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Exemplos

1. $\left(x^2 + \text{sen}\, x\right)' = (x^2)' + (\text{sen}\, x)' = 2x + \cos x;$
2. $\left(x^3 \cos x\right)' = (x^3)' \cos x + x^3(\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3\, \text{sen}\, x.$
3. $(\text{sen}\, x \cos x)' = (\text{sen}\, x)' \cos x + \text{sen}\, x(\cos x)' = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x.$

4.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)' &= \frac{(\cos x)'(1-\operatorname{sen} x)-\cos x(1-\operatorname{sen} x)'}{(1-\operatorname{sen} x)^2}\\
&= \frac{-\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2}\\
&= \frac{-\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}\\
&= \frac{1-\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}\\
&= \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}
\end{aligned}
$$

Teorema: Derivada da função composta / Regra da Cadeia
Dadas duas funções f e g tais que $D_f \subseteq D'_g$. Se g é derivável em x_0 e f é derivável em $g(x_0)$, então, a função composta fog é derivável em x_0 e tem-se:

$$(fog)'(x_0) = (f(g(x_0)))' = g'(x_0)f'(g(x_0))$$

Exemplos

1. $\left(\operatorname{sen}(3x^2)\right)' = (3x^2)' \operatorname{sen}'(3x^2) = (6x)\cos(3x^2) = 6x\cos(3x^2)$
2. $$\begin{aligned} \left((1+\cos x)^4\right)' &= 4(1+\cos x)^3(1+\cos x)' \\ &= 4(1+\cos x)^3(0-\operatorname{sen} x) \\ &= -4\operatorname{sen} x(1+\cos x)^3 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}^3(9x+1))' &= 3\operatorname{sen}^2(9x+1)(\operatorname{sen}(9x+1))' \\ &= 3\operatorname{sen}^2(9x+1)((9x+1)'\operatorname{sen}'(9x+1)) \\ &= 3\operatorname{sen}^2(9x+1)9\cos(9x+1) \\ &= 27\operatorname{sen}^2(9x+1)\cos(9x+1)\end{aligned}$$

Exercício 3.

1. Considere a função definida por $f(x) = g(\sin^2 x) - g(\cos^2 x)$. Determine a derivada da função f no ponto 0, sabendo que g é também derivável no ponto 0.
2. Supondo que f é uma função derivável, exprimir as derivadas de
   2.1 $f(3x)$,
   2.2 $f(x^2)$
   2.3 $f(5f(x))$

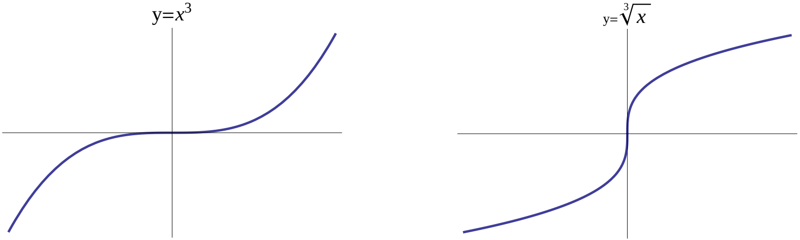
   em função de f'.

Derivada da função inversa

Quanto à derivação da função inversa, repare-se que:

Se $f: A \longrightarrow B$ for bijectiva e derivável em $a \in A$, a sua inversa, $f^{-1}: B \longrightarrow A$, pode não ser derivável em $b = f(a)$.

Veja-se o caso de $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, que é claramente derivável e, no entanto, a sua inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, não é derivável em $0 = f(0)$.



2. Resultados sobre derivação pontual

Derivada da função inversa

Nos casos em que a inversa é derivável, de

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall x \in A,$$

a regra da cadeia dá

$$f'(x)(f^{-1})'(f(x)) = 1, \ \forall x \in A,$$

donde $f'(x) \neq 0$ e

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \, .$$

O problema surge quando se tem precisamente $f'(x) = 0$, que é o que acontece no caso citado anteriormente.

Derivada da função inversa

O Teorema seguinte dá-nos a relação entre as derivadas de f e f^{-1} em pontos correspondentes.

Teorema: Derivada da função inversa
Seja $f\colon A \longrightarrow B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$, uma função bijectiva. Se f é derivável em a, $f'(a) \neq 0$ e f^{-1} é contínua em $b = f(a)$, então f^{-1} é derivável em b, tendo-se

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Exemplo

Seja $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Temos $f'(x) = 3x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Para $x \neq 0$, vem

$$(\sqrt[3]{x})' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

2. Resultados sobre derivação pontual

Proposição: Derivadas das funções exponenciais e logarítmicas

1. $(e^x)' = e^x$
2. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Demonstração:

1. Usando a definição de derivada e o resultado

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

   tem-se que $(e^x)' = e^x$.

2. Sendo $f^{-1}(x) = \ln x,\ x > 0,$ usando a regra da derivação da função inversa, tem-se que

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Proposição: Derivadas das funções hiperbólicas

1. $(ch\,x)' = sh\,x$
2. $(sh\,x)' = ch\,x$
3. $(th\,x)' = \dfrac{1}{ch^2\,x}$
4. $(coth\,x)' = -\dfrac{1}{sh^2\,x}$

Demonstração:

1.

$$\begin{aligned} ch'(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left((e^x)' + (e^{-x})'\right) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = shx \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} sh'(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) = \left(\frac{e^x - (-e^{-x})}{2}\right) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = chx \end{aligned}$$

2. Resultados sobre derivação pontual

3.

$$th'(x) = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)'chx - shx(chx)'}{(chx)^2}$$
$$= \frac{chxchx - shxshx}{(chx)^2} = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$$

4.

$$coth'(x) = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{(chx)'shx - \operatorname{ch} x(shx)'}{(shx)^2}$$
$$= \frac{shxshx - chxchx}{(shx)^2} = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}$$

2. Resultados sobre derivação pontual

Proposição: Derivadas das funções trigonométricas inversas

1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
4. $(arccotg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Exercício 4.
Usando o teorema da derivada da função inversa, faça a demonstração desta Proposição.

2. Resultados sobre derivação pontual

Proposição: Derivadas das funções hiperbólicas inversas

1. $(argsh\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $(argch\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $(arcth\, x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$
4. $(arccoth\, x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

Exercício 5.
Usando regras de derivação, faça a demonstração desta Proposição.

Nota. A generalização das regras de derivação é dada no formulárioA.

Exercício 6. Determine a expressão das derivadas das funções:

a) $f(x) = x \arcsin(4x)$

b) $g(t) = \operatorname{arctg}^2(7t)$

c) $h(y) = \sqrt{\sin y} + \arccos\left(\dfrac{1}{y}\right)$

d) $i(x) = \cos\left(\operatorname{arctg}(3x)\right)$

e) $j(t) = 3t \arcsin\left(\sqrt{t^2 - 1}\right)$

f) $m(y) = \dfrac{1}{\cos y} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{2}\right)$

3. Funções deriváveis num intervalo

Vamos agora abordar resultados fundamentais sobre o comportamento de uma função que possui derivada num intervalo.

3.1 Teorema do valor intermédio para a derivada

Nesta subsecção vamos apresentar um dos resultados mais notáveis deste curso. Trata-se do resultado que estabelece que, embora não tenha de ser contínua, uma função derivada definida num intervalo possui sempre a propriedade do valor intermédio, tal como uma função contínua, isto é, não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

Teorema do Valor intermédio para a derivada (Darboux)
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que $f'(a) \neq f'(b)$. Então, dado $k \in \mathbb{R}$ estritamente compreendido entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = k$.

3.2 Teoremas de Rolle e de Lagrange

Vamos apresentar agora mais dois resultados importantes sobre funções deriváveis em intervalos, bem como algumas consequências que deles se extraem.

Teorema de Rolle

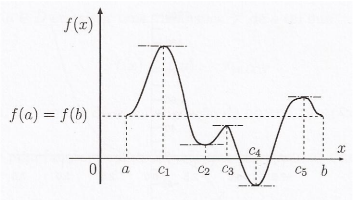
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe (pelo menos um) $c \in\ ]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Interpretação geométrica do teorema de Rolle

Geometricamente, o teorema de Rolle estabelece que, estando f nas condições indicadas no enunciado do teorema, existe algum ponto $c \in\ ]a, b[$ tal que a tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $(c, f(c))$ é horizontal e, portanto, paralela à recta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

3.2 Teoremas de Rolle e de Lagrange

Gráfico ilustrativo do Teorema de Rolle:
O gráfico mostra a recta horizontal que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e cinco pontos c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 em $]a, b[$ para os quais a tangente à curva é horizontal.



Do teorema de Rolle extraem-se as seguintes consequências muito úteis no tratamento numérico de equações algébricas.

Corolários do Teorema de Rolle

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a, b[$.

1. Entre dois zeros de f existe (pelo menos) um zero de f'.
2. Entre dois zeros consecutivos de f', existe, no máximo, um zero de f.
3. Não há mais do que um zero de f inferior ao menor zero de f', nem mais do que um zero de f superior ao maior zero de f'.

Exemplo

Mostrar que a equação $x^3 + x + 1 = 0$ tem, quanto muito, uma raíz real.

Resolução:

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 + x + 1$.

Trata-se de uma função derivável em $\mathbb{R}$. Se a equação dada tivesse duas raízes reais então a função f possuiria dois zeros reais, pelo que f' possuiria, pelo menos, um zero real. Mas

$$f'(x) = 3x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

que nunca se anula em $\mathbb{R}$. Portanto, a equação dada possui, quanto muito, uma raíz real.

Exercício 7.

1. Prove que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exactamente uma raíz real.
2. Mostre que, independentemente do valor de a, a equação $x^3 + 3x + a = 0$ tem, quanto muito, uma raiz no intervalo $[-1, 1]$.

3.2 Teoremas de Rolle e de Lagrange

Um dos resultados mais importantes do cálculo diferencial é o que se exprime no seguinte teorema e que constitui uma extensão do Teorema de Rolle.

Teorema do valor médio de Lagrange
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então, existe $c \in]a, b[$ tal que

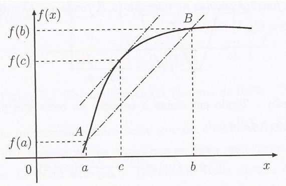
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretação geométrica do teorema de Lagrange
O Teorema de Lagrange estabelece que, estando f nas condições indicadas no enunciado, existe algum ponto $c \in]a, b[$ tal que a a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é paralela à recta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (dado que estas rectas têm declives iguais).

Observar que o Teorema de Rolle é meramente um caso particular do Teorema de Lagrange em que $f(a) = f(b)$.

3.2 Teoremas de Rolle e de Lagrange

Gráfico ilustrativo do Teorema de Lagrange:



Exemplo

Seja $f(x) = x^3 + 1$ e $[a, b] = [1, 2]$.
Uma vez que f, sendo um polinómio, é contínua e derivável para todo o $x \in \mathbb{R}$, satisfaz as condições do Teorema de Lagrange. Neste caso tem-se

$$f(a) = f(1) = 2, \quad f(b) = f(2) = 9 \quad \text{e} \quad f'(x) = 3x^2.$$

Então, o ponto c é tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \iff 3c^2 = \frac{9 - 2}{2 - 1} \iff 3c^2 = 7,$$

e as soluções são $c = \sqrt{7/3}$ e $c = -\sqrt{7/3}$. Destes dois valores apenas o primeiro está em $]1, 2[$. Portanto, $c = \sqrt{7/3}$ é o ponto cuja existência o Teorema do valor médio de Lagrange garante.

3.2 Teoremas de Rolle e de Lagrange

Exercício 8.

1. Verificar a conclusão do Teorema de Lagrange para a função $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo $[a, b]$, onde $0 \leq a < b$.
2. Verificar a conclusão do Teorema de Lagrange para a função $f(x) = x^3 - x$ no intervalo $[0, 2]$.
3. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
4. Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x. Qual é o maior valor possível para $f(2)$?
5. Supor que sabemos que f é uma função diferenciável (pelo menos) em [0,2], que a sua derivada f' é também contínua e que $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ e $f(2) = 0$. O que é possível saber sobre o conjunto das imagens de f'?

Vejamos agora algumas consequências importantes do teorema de Lagrange.

Corolário do Teorema de Lagrange

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. f é uma **função constante** se e só se $f'(x) = 0, \ \forall x \in [a, b]$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Supor que f é constante. Então, pela definiçaõ de derivada, é imediato que $f' = 0$ no intervalo $[a, b]$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in]a, b]$. Pelo Teorema de Lagrange, existe um $c \in]a, x[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Como por hipótese $f'(c) = 0$, tem-se que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0,$$

ou seja,

$$f(x) = f(a), \forall x \in]a, b].$$

Portanto f é constante no intervalo $[a, b]$

Corolário do Teorema de Lagrange

Sejam f e g duas funções diferenciáveis num intervalo $\mathbb{I}$. Se $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{I}$, então a função $f - g$ é constante em $\mathbb{I}$.

Demonstração.

Considere-se $h = f - g$. Como por hipótese $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{I}$, então pelo Corolário anterior concluí-se que h é constante em $\mathbb{I}$, ou seja, $f - g$ é constante em $\mathbb{I}$.

Exercício 9.

1. Mostre que $2 \arcsin x = \arccos(1 - 2x^2)$, para $0 \leq x \leq 1$.
2. Mostre que $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \dfrac{\pi}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

Corolário do Teorema de Lagrange

Seja f uma função real de variável real e diferenciável num intervalo $\mathbb{I}$.

(i) Se $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, então f é crescente em $\mathbb{I}$

(ii) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente crescente em $\mathbb{I}$

(iii) Se $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, então f é decrescente em $\mathbb{I}$

(iv) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em $\mathbb{I}$

Demonstração. Vai-se demonstrar apenas a proposição (iv). Pretende-se em (iv) provar que se $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$. Aplicando o Teorema de Lagrange a f em $[x_1, x_2]$, concluí-se que existe um $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ ou seja,} f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como por hipótese $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, então tem-se que $f(x_2) - f(x_1) < 0$, ou seja, $f(x_1) > f(x_2)$. Logo f é estritamente decrescente.
A demonstração das outras proposições faz-se de forma análoga à efectuada para (iv).

4. Aplicação da derivada ao cálculo de limites

A derivada pode ser usada com sucesso no **cálculo de limites**, nomeadamente no levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Trata-se da técnica conhecida por **regra de L'Hôpital** que passamos a apresentar.

A versão mais simples desta regra refere-se ao caso em que pretendemos calcular

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \, ,$$

onde f e g são deriváveis em a, com $g'(a) \neq 0$ e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = g(a) = 0$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

4. Aplicação da derivada ao cálculo de limites

No entanto, escrevendo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \, ,$$

conclui-se que o limite do quociente das funções é dado pelo quociente das correspondentes derivadas em a.

Em casos mais gerais, mantém-se esta coincidência de comportamento entre o quociente das funções e o quociente das correspondentes derivadas.

4. Aplicação da derivada ao cálculo de limites

Teorema Regra de L'Hôpital
Sejam $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $]a, b[$, com $a < b$ e possivelmente infinitos. Seja x_0 um dos extremos do intervalo $]a, b[$. Se

- $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o limite do lado direito exista (finito ou infinito).

Nota. Sendo x_0 um dos extremos do intervalo $]a, b[$, os limites da Regra de L'Hôpital são, na verdade, limites laterais. Notar ainda que, como x_0 pode eventualmente ser infinito ($+\infty$ ou $-\infty$), a Regra L'Hôpital permanece ainda válida no caso de

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

Observação

A regra de L'Hôpital constitui uma "ferramenta" extremamente útil no cálculo de limites provenientes de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, ou outras quaisquer que se reduzam a uma destas formas.

Claro que a regra pode ser usada sucessivamente, desde que a indeterminação permaneça em cada "etapa". Ocorre frequentemente o erro de "continuar a aplicar a regra" quando a indeterminação já não existe.

4. Aplicação da derivada ao cálculo de limites

Exemplos

(a) Verificar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Como $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1,$ conclui-se que o limite proposto também vale 1.

(b) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - 1 + 4,5x^2}{x^3}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Derivando uma vez, vem $\lim_{x\to 0} \dfrac{-3\sin(3x) + 9x}{3x^2}$ e a indeterminação permanece.

Derivando mais uma vez e calculando agora $\lim_{x\to 0} \dfrac{-9\cos(3x) + 9}{6x}$, a indeterminação ainda permanece. Mas derivando uma terceira vez, vem $\lim_{x\to 0} \dfrac{18\sin(3x)}{6} = 0,$ pelo que todos os limites anteriores, incluindo o limite proposto, valem 0.

(c) Calcular $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Derivando uma vez e calculando $\lim_{x\to 1} \dfrac{4x^3 - 4}{2(x-1)}$, a indeterminação permanece.

Derivando novamente vem $\lim_{x\to 1} \dfrac{12x^2}{2} = 6$, pelo que o limite proposto vale 6.

(d) Calcular $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{7x^2 - 2x + 3}{5x^2 + x - 5}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Derivando uma vez obtém-se o limite $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{14x - 2}{10x + 1}$ e a indeterminação permanece.

Mas derivando novamente, vem $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$, e o limite proposto vale $\dfrac{7}{5}$.

(e) Calcular $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - x - 3}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Derivando uma vez a indeterminação desaparece porque $\lim_{x\to 1} \dfrac{4x-1}{8x-1} = \dfrac{3}{7}$, pelo que o limite proposto vale também $\dfrac{3}{7}$. Uma resposta errada muito frequente é

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{4x-1}{8x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\,.$$

(f) Calcular $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{x + 2\sin x}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. O limite do quociente das derivadas é $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3}{1 + 2\cos x}$, que não existe, pelo que a regra de L'Hôpital não é aplicável. No entanto,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x + 2\sin x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{1 + 2\dfrac{1}{x}\,\sin x} = 3.$$

(g) Calcular $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Derivando uma vez obtém-se o limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, que não existe, logo a regra de L'Hôpital não é aplicável. Mas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x}\ \sin x}{1+\dfrac{1}{x}\ \sin x} = 1.$$

Exercício 10. Calcular os limites seguintes:

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$
2. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{1-\cos x}$
5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$
6. $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$ ´(indet. $0\times\infty$: fazer $fg = \frac{f}{1/g}$ ou $fg = \frac{g}{1/f}$ para obter indet. $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$)
7. $\lim_{x\to (\pi/2)^-}\ \sec x - \operatorname{tg} x$

   (indet. $\infty - \infty$: converter a diferença, por ex., num quociente usando ou um denominador comum ou racionalização ou pondo em evidência um factor comum, para obter indet. $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$)
8. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

   (indets. do tipo 0^0 ou ∞^0 ou 1^∞ podem surgir do $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$. Seja $y=[f(x)]^{g(x)}$. Então $\ln y = g(x)\ln f(x)$, e calcula-se $\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a} g(x)\ln f(x) = \ldots = L$. Portanto, $\lim_{x\to a}\ [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a}\ y = \lim_{x\to a}\ e^{\ln y} = e^L$)
9. $\lim_{x\to 0^+}\ (1+\operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$

5. Fórmula de Taylor

Uma das aplicações mais notáveis da derivada está ligada à aproximação de funções por polinómios. Em particular, a fórmula de Taylor estabelece que uma função f com boas propriedades de derivabilidade pode ser aproximada, em torno de cada ponto, por um polinómio p, que pode ser escolhido de tal modo que f e p, juntamente com as respectivas derivadas até certa ordem, assumam o mesmo valor em determinado ponto $x = a$, fixado *a priori*.

É assim possível, sobretudo no campo das aplicações, usar o polinómio aproximador em lugar da função original, podendo usufruir da simplicidade numérica das funções polinomiais para lidar com outro tipo de funções, como exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas.

5.1 Definições e nomenclatura

Para facilitar a exposição, vamos introduzir algumas definições muito úteis e algumas notações comuns. Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, a um ponto interior do domínio de f e $n \in \mathbb{N}$. A *derivada de ordem n* da função f no ponto a define-se indutivamente por

$$\begin{array}{rcl} f^{(2)}(a) & = & f''(a) \;=\; (f')'(a) \\ f^{(3)}(a) & = & f'''(a) \;=\; (f'')'(a) \\ \dots & & \dots \qquad\qquad \dots \\ f^{(n)}(a) & = & (f^{(n-1)})'(a). \end{array}$$

Convencionamos que a derivada de ordem 0 coincide com a própria função,

$$f^{(0)}(a) = f(a).$$

Sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo contendo o ponto a, dizemos que a função $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é:

- *n vezes derivável* no intervalo I se existe $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$;
- *infinitamente derivável* em I se existem, em cada $x \in I$, as derivadas de qualquer ordem da função f;
- *n vezes derivável* em a quando existe um intervalo J contendo a tal que f é $n-1$ vezes derivável em $I \cap J$ e, além disso, existe $f^{(n)}(a)$;
- *infinitamente derivável* em a se existe um intervalo J contendo a tal que f é infinitamente derivável em $I \cap J$;
- *de classe C^n em I*, e escrevemos $f \in C^n(I)$, quando f é n vezes derivável em I e $f^{(n)}$ é contínua em I (o que acarreta a continuidade de todas sa derivadas de f até à ordem $n-1$);
- *de classe C^∞ em I*, e escrevemos $f \in C^\infty(I)$, quando $f \in C^k(I), \forall k \in \mathbb{N}$ (e significa que f possui derivadas de todas as ordens, que são contínuas em I);
- *de classe C^0 em I*, e escrevemos $f \in C^0(I)$, quando f é contínua em I.

5.2 Polinómio de Taylor

Dada uma função $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo I, que é n vezes derivável no ponto $a \in I$, existem as constantes

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \cdots,\ f^{(n)}(a)$$

com as quais podemos construir o polinómio

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

ou ainda

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

a que se chama *polinómio de Taylor de ordem n da função f em torno do ponto a.*

5.2 Polinómio de Taylor

Derivando sucessivamente, vem

$$P'_{n,a}(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)}$$

$$P''_{n,a}(x) = f''(a) + f'''(a)(x-a) + \frac{f^{(4)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{(n-2)}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$P^{(n-1)}_{n,a}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a)$$

$$P^{(n)}_{n,a}(x) = f^{(n)}(a)$$

e as restantes derivadas são identicamente nulas.

Em particular, no ponto a tem-se

$$P_{n,a}(a) = f(a), \quad P'_{n,a}(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad P^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a).$$

Dizemos que f e $P_{n,a}$ possuem um *contacto de ordem n no ponto a*.

5.2 Polinómio de Taylor

Pode mostrar-se que não existe outro polinómio de grau $\leq n$ que, juntamente com as suas derivadas até à ordem n, verifique condições como as que figuram acima. De facto, vale o seguinte resultado.

Teorema da Unicidade do Polinómio de Taylor
O polinómio $P_{n,a}(x)$ é o único polinómio de grau não superior a n cujas derivadas no ponto a, desde a ordem 0 até à ordem n, coincidem com as correspondentes derivadas de f no ponto a.

Exemplos

Determinar o polinómio de Taylor com a ordem indicada, em torno do ponto $a = 0$, para cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ (ordem n);

Como

$$f^{(k)}(x) = e^x, \forall k \in \mathbb{N}_0, \forall x \in \mathbb{R},$$

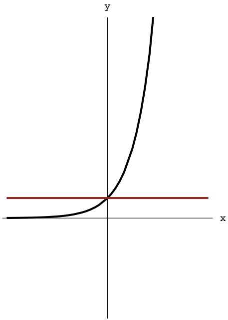
vem em particular

$$f^{(k)}(0) = 1, \forall k \in \mathbb{N}_0\,,$$

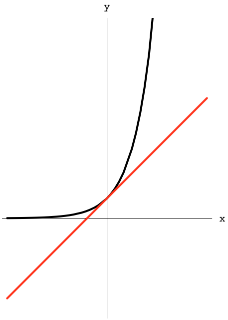
donde

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

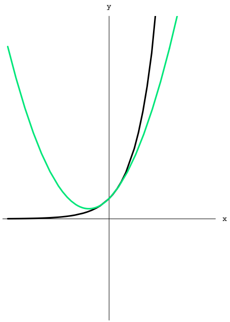
Nas figuras seguintes estão representados os polinómios de ordens $0, 1, 2, 3, 4, 5$.



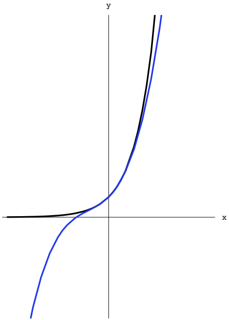
função f
polinómio $P_{0,0}$



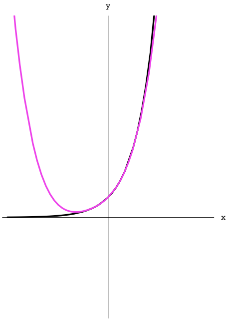
função f
polinómio $P_{1,0}$



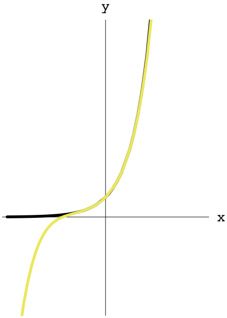
função f
polinómio $P_{2,0}$



função f
polinómio $P_{3,0}$



função f
polinómio $P_{4,0}$



função f
polinómio $P_{5,0}$

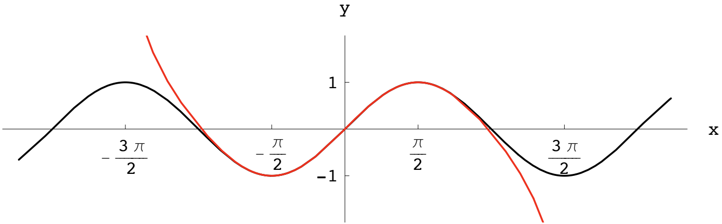
(b) $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ (ordem $2n+1$);

tem-se

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad k = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots \\ 1 & \text{para} \quad k = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ -1 & \text{para} \quad k = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}$$

e consequentemente

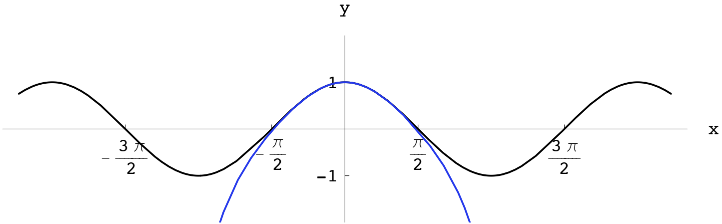
$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ;$$



Função seno (preto) e polinómio de Taylor de grau 3 (vermelho).

(c) $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ (ordem $2n$);
com uma resolução muito semelhante à do exemplo da alínea (b), sai

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ ;$$



Função cosseno (preto) e polinómio de Taylor de grau 2 (azul).

5.3 Aproximação de funções

Já sabemos que, sendo f derivável num ponto a, então para x próximo de a, a função f pode ser aproximada pelo polinómio de grau ≤ 1 que define a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, ou seja, pelo polinómio $f(a) + f'(a)(x - a)$. Vamos agora melhorar esta aproximação; mais concretamente, vamos ver que uma função f que é n vezes derivável em a pode ser aproximada, numa vizinhança de a, pelo seu polinómio de Taylor de ordem n à volta do ponto a.

O resultado fundamental sobre a aproximação de funções por intermédio do polinómio de Taylor é apresentado no teorema seguinte.

5.3 Aproximação de funções

Teorema. Fórmula de Taylor infinitesimal

Seja f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto $a \in I$. Então:

(i) para todo $x \in I$, tem-se

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x),$$

onde $P_{n,a}$ é o polinómio de Taylor de ordem n da função f à volta do ponto a e $R_{n,a}$ é uma função tal que

$$lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0;$$

(ii) $P_{n,a}$ é o único polinómio de grau não superior a n que obedece a uma decomposição como a de (i) para $f(x)$, com $R_{n,a}(x)$ verificando a condição em (i) de pequenez.

5.3 Aproximação de funções

A função $R_{n,a}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$$

designa-se por *resto de Taylor* de ordem n da função f em torno do ponto a . À expressão

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \qquad \text{com} \qquad \lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

chama-se *fórmula de Taylor* de ordem n para a função f em torno do ponto a .

Observação

A segunda condição acima exprime o facto de o resto de Taylor tender para 0 mais rapidamente do que $(x-a)^n$ tende para 0 e, portanto, muito mais rapidamente do que x tende para a.

O polinómio de Taylor $P_{n,a}$ pode ser utilizado para aproximar a função f nas vizinhanças do ponto a. A precisão de tal aproximação depende da ordem n do polinómio: *quanto mais elevada for a ordem do polinómio melhor será a aproximação considerada*.

Para cada x numa vizinhança de a, ao tomarmos $f(x)$ aproximado pelo correspondente valor $P_{n,a}(x)$, o erro cometido é dado pela diferença entre o valor exacto e o valor aproximado, ou seja por

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x),$$

que é pequeno no sentido da segunda condição acima.

Estimativa do erro

No contexto da aproximação de funções por polinómios através da fórmula de Taylor, torna-se fundamental fornecer uma estimativa para o erro cometido. Ter-se-á $R_{n,a}(x)$ positivo ou negativo, consoante o valor aproximado é menor ou maior do que o valor exacto mas, em geral, apenas nos interessa estimar a grandeza

$$|R_{n,a}(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|\,.$$

Teorema. Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função $n+1$ vezes derivável no intervalo aberto I e a um ponto de I. Então, para cada $x \in I \setminus \{a\}$, existe $c_x \in \,]a, x[$ ou $c_x \in \,]x, a[$ tal que

$$f(x) = P_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Observação

A última parcela da fórmula no teorema define o chamado *resto de Lagrange*. A equação é conhecida por *fórmula de Taylor com resto de Lagrange*.

A fórmula apresentada é essencial para controlar a precisão de qualquer aproximação polinomial através da fórmula de Taylor, porque permite obter uma estimativa para o erro cometido ao aproximar uma função pelo correspondente polinómio de Taylor com uma certa ordem. De facto,

$$|R_{n,a}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1},$$

onde M representa o máximo de $|f^{(n+1)}|$ no intervalo de extremos a e x, desde que exista.