Primitivas

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Primitivas

O problema central deste capítulo é o de, dada uma função real f, definida num intervalo I, encontrar uma nova função $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Trata-se do chamado problema da primitivação da função f no intervalo I.

1. Definição e Consequências
2. Primitivas imediatas
3. Regras de primitivação
   - A. Primitivação por decomposição
   - B. Primitivação por partes
   - C. Primitivação de potências de funções trigonométricas e hiperbólicas
   - D. Primitivação por substituição
4. Primitivação de funções racionais

1. Definição e Consequências

Definição: Primitiva de uma função
Seja $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função definida num intervalo I. Uma primitiva de f em I é uma função $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Existindo tal função, dizemos que f é *primitivável* em I e cada função F é chamada uma *primitiva* ou *antiderivada* de f em I.

Escrevemos

$$F(x) = P\Big(f(x)\Big) \qquad \text{ou} \qquad F(x) = \int f(x)dx.$$

Em particular, na segunda expressão acima, o símbolo $\int$ representa um "S" alongado e "dx" é uma partícula formal usada para denotar a variável independente em relação à qual se está a primitivar.

1. Definição e Consequências

Da definição, é imediato que

$$F(x) = \int f(x)\, dx, \ \forall x \in I \quad \text{sse} \quad F'(x) = f(x), \ \forall x \in I,$$

ou seja, que

$$F \text{ é uma primitiva de } f \quad \text{sse} \quad f \text{ é a derivada de } F.$$

Fica assim claro que a **primitivação é o processo inverso da derivação.**

Exemplos

(a) $F(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
De facto, basta atender a que $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $F(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$, é uma primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.
Basta recordar que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Definição e Consequências

Da definição de primitiva, extraem-se algumas consequências que passamos a enunciar.

Consequência 1

Se F é uma primitiva de f no intervalo I então toda a função

$$F(x) + \mathcal{C}, \quad x \in I,$$

com $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária, é também uma primitiva de f.

Basta notar que $[F(x) + \mathcal{C}]' = F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

Consequência 2

Se F_1 e F_2 são duas primitivas de f em I então

$$F_2(x) = F_1(x) + \mathcal{C},\ x \in I.$$

Basta notar que $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, $x \in I$, e usar o teorema do valor médio de Lagrange.

Observação

Das Consequências 1 e 2 sai que, quando o problema da primitivação de uma função num intervalo é possível, ele admite uma infinidade de soluções - todas as que se obtêm de uma primitiva conhecida adicionando uma constante real arbitrária. Assim, a expressão geral das primitivas de f é

$$F(x) + \mathcal{C}, \ \ \mathcal{C} \ \textit{constante},$$

onde F é uma primitiva conhecida.

Escrevemos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}.$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + \mathcal{C};$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx \ = \ \ln x + \mathcal{C}.$

1. Definição e Consequências

Observações

(a) O problema da primitivação de uma função num intervalo pode também não possuir solução. É o que se passa, por exemplo, com a função

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

no intervalo $[0, 4]$. A justificação é dada pelo teorema de Darboux que estabelece que a derivada de uma função num intervalo possui a propriedade do valor intermédio e, portanto, não pode apresentar descontinuidades de salto.

(b) Mais adiante vamos abordar algumas regras de primitivação muito úteis. Convém, no entanto, registar que estas regras não permitem determinar as primitivas de todas as funções primitiváveis. Um exemplo bem conhecido é o da função definida por

$$e^{-x^2}, \ x \in \mathbb{R},$$

que, como ficará claro mais adiante, é primitivável em qualquer intervalo I e, no entanto, as regras que iremos abordar não permitem determinar as primitivas desta função.

2. Primitivas imediatas

Chamamos **primitivas imediatas** àquelas primitivas que se obtêm por **simples reversão das regras de derivação**, recorrendo, eventualmente, a alguns artifícios de cálculo.

Exemplos

(a) Calculando a derivada das seguintes funções afim:

Função	*Derivada*
$7x+3$	7
$-4x+8$	-4
$ax+k$	a

então podemos concluir que,

$$\boxed{\int a\,dx = ax + \mathcal{C}, \quad \forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}}$$

(b) Calculando a derivada das seguintes funções:

Função	*Derivada*
$\dfrac{x^3}{3}$	x^2
$\dfrac{x^7}{7}$	x^6
$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \ (\alpha \neq -1)$	x^α

então podemos concluir que,

$$\boxed{\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}, \quad \alpha \neq -1}$$

Observação

Se $\alpha = -1,$ então

$$\boxed{\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + \mathcal{C}}$$

(c) Seja f uma função real de variável real x derivável no intervalo I. Calculando a derivada das seguintes funções:

Função	*Derivada*
$\dfrac{(5x+10)^{15}}{15}$	$5\,(5x+10)^{14}$
$\dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}, \ (\alpha \neq -1)$	$f'(x)f^{\alpha}(x)$

podemos concluir que

$$\boxed{\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + \mathcal{C}, \quad \alpha \neq -1}$$

Observação

Se $\alpha = -1,$ então

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + \mathcal{C}}$$

2. Primitivas imediatas

Exercício 1. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int x^2\,dx$ b) $\displaystyle\int y^7\,dy$ c) $\displaystyle\int (x+8)^5\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)\,dx$

g) $\displaystyle\int y^6\ \sqrt[10]{2y^7+3}\,dy$ h) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{3x^4+5}}\,dx$ i) $\displaystyle\int \frac{sen(2x)}{\sqrt[4]{\cos^2 x+9}}\,dx$

Exercício 2. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{3y+30}\,dy$ c) $\displaystyle\int \frac{5}{8x-5}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+4}\,dx$

2. Primitivas imediatas

(d) Seja f uma função real de variável real x derivável no intervalo I. Calculando a derivada das seguintes funções:

Função	*Derivada*
$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
$a^{f(x)},\ (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$	$f'(x)a^{f(x)} \ln a$

podemos concluir que

$$\boxed{\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + \mathcal{C}}$$

$$\boxed{\int f'(x)a^{f(x)} \ln a\,dx = a^{f(x)} + \mathcal{C}}$$

2. Primitivas imediatas

Exercício 3. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int e^{5x+7}\,dx$ b) $\int 3xe^{4x^2+5}\,dx$ c) $\int 6^{3y-9}\,dy$ d) $\int 3sen(2x)e^{sen^2 x+8}\,dx$

Outras primitivas imediatas:

Seja f uma função real de variável real x derivável no intervalo I.

$$\int -f'(x)\,\sin\,f(x)\,dx = \cos\,f(x) + \mathcal{C}$$

$$\int f'(x)\,\cos f(x)\,dx = \sin\,f(x) + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2\,f(x)}\,dx = tg\,f(x) + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\sin^2\,f(x)}\,dx = cotg\,f(x) + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \arcsin f(x) + \mathcal{C} \qquad \int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \arccos f(x) + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = arctg\,f(x) + \mathcal{C} \qquad \int \frac{-f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = arccotg\,f(x) + \mathcal{C}$$

2. Primitivas imediatas

Exercício 4. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{y\sqrt{1-\ln^2 y}}\,dy$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{7x}{16+9x^4}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$ g) $\displaystyle\int sen(3x)\,dx$

Outras primitivas imediatas:

$$\int f'(x)\, sh\, f(x)\, dx = ch\, f(x) + \mathcal{C}$$

$$\int f'(x)\, ch\, f(x)\, dx = sh\, f(x) + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{f'(x)}{ch^2 f(x)}\, dx = th\, f(x) + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{-f'(x)}{sh^2 f(x)}\, dx = \coth\, f(x) + \mathcal{C}$$

2. Primitivas imediatas

Outras primitivas imediatas:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}\,dx = argsh\, f(x) + \mathcal{C} \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}\,dx = argch\, f(x) + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}\,dx = argth\, f(x) + \mathcal{C} \qquad \int \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}\,dx = argcoth\, f(x) + \mathcal{C}$$

Exercício 5. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+4x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{ch^2x\,(1-th^2x)}\,dx$ c) $\displaystyle\int sh(15x+3)\,dx$

d) $\displaystyle\int e^x\, cotg\,\left(e^x\right)\,dx$ e) $\displaystyle\int 3^x e^x\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{sh(2x)}{3sh^2x+7}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{th^2x}}{ch^2x}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$

3. Regras de Primitivação

O cálculo das primitivas de uma função baseia-se num conjunto de regras, as chamadas **regras de primitivação**, que se obtêm a partir das regras de derivação.

A. Regra de primitivação por decomposição

Resulta da regra da derivação da soma de funções e da regra de derivação do produto de uma função por uma constante.

Se u e v são funções deriváveis e α e β são constantes reais, então

$$[\alpha u(x) + \beta v(x)]' = \alpha u'(x) + \beta v'(x).$$

Em termos de primitivas, esta regra traduz-se por

$$\int [\alpha u'(x) + \beta v'(x)]\, dx = \alpha u(x) + \beta v(x) + \mathcal{C}$$

3. Regras de Primitivação

Pondo, mais em geral,

$$u'(x) = f(x),\;\; v'(x) = g(x) \text{ e } u(x) = F(x),\;\; v(x) = G(x),$$

com F e G primitivas de f e de g, respectivamente, e atendendo a que

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}, \quad \int g(x)dx = G(x) + \mathcal{C},$$

vem

$$\int \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + \mathcal{C}.$$

Podemos então estabelecer o seguinte resultado.

Conclusão A [Primitivação por decomposição]

Sejam f e g funções primitiváveis num intervalo I e α, β duas constantes reais. Então $\alpha f + \beta g$ é primitivável em I, tendo-se

$$\boxed{\int \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\,.}$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int \left(x^5 + 4x + 3\right) dx =$

$$= \int x^5\, dx + 4\int x\, dx + 3\int 1\, dx$$

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{4x^2}{2} + 3x + \mathcal{C}$$

2. $\displaystyle\int \left(5\cos x - \frac{2}{5}e^x + \frac{3\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right) dx =$

$$= 5\int \cos x\, dx - \frac{2}{5}\int e^x\, dx + 3\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

$$= 5\operatorname{sen} x - \frac{2}{5}e^x + 3\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + \mathcal{C}$$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$

$$= \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \int 2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + 3\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 3\,argsh\,x + \mathcal{C}$$

$$= 2\sqrt{1+x^2} + 3\,argsh\,x + \mathcal{C}$$

B. Regra de primitivação por partes

Resulta da regra de derivação de um produto de funções. Se u e v são funções deriváveis, então

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Em termos de primitivas, podemos traduzir esta igualdade por

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\, dx = u(x)v(x) + \mathcal{C}.$$

Numa forma mais útil, podemos escrever

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx + \mathcal{C}.$$

Pondo agora $u'(x) = f(x),\ v(x) = g(x),\ u(x) = F(x),$ onde F é uma primitiva de f, sai

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

3. Regras de Primitivação

Podemos então estabelecer a conclusão seguinte.

Conclusão B [Primitivação por partes]

Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivável, $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, tais que o produto Fg' é primitivável em I. Então fg é primitivável em I, tendo-se

$$\boxed{\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.}$$

A regra de primitivação expressa nesta fórmula evidencia que a primitiva de um produto pode ser calculada em dua partes: na primeira, primitiva-se apenas o primeiro factor, que depois é multiplicado pelo segundo; na segunda parte, primitiva-se o produto da função que já está primitivada pela derivada do segundo factor.

Observações

(a) Para que o método de primitivação por partes tenha sucesso, pelo menos um dos factores deve ter primitiva imediata; o método resulta quando se sabe primitivar o produto que aparece na segunda parte.

(b) Em geral, conhecendo a primitiva de ambos os factores, escolhe-se para segundo aquele que mais se simplifica a derivar.

3. Regras de Primitivação

(c) O método de primitivação por partes pode ser aplicado com suceso para primitivar uma função que não tem primitiva imediata, digamos $f(x)$, interpretando-a como o produto $1f(x)$ e começando por primitivar o factor 1,

$$\int f(x)dx = \int 1f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx = \cdots$$

Este é o processo habitualmente utilizado para primitivar, por exemplo, logarítmos, arcos trigonométricos e argumentos hiperbólicos.

(d) Ao aplicar o método de primitivação por partes duas ou mais vezes sucessivas, é frequente reencontrarmos a primitiva inicial afectada de um certo coeficiente (diferente de 1). A primitiva proposta pode ser obtida como solução de uma equação cuja incógnita é precisamente essa primitiva.

Exemplos

$$\text{(a)} \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \mathcal{C}.$$

Repare-se que o factor $\ln x$ não possui primitiva imediata. Devemos, portanto, primitivar primeiro o factor x .

$$\text{(b)} \int xe^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + \mathcal{C}.$$

Aqui conhecemos a primitiva de ambos os factores. Mas o polinómio "complica-se" quando primitivado, porque aumenta de grau, e simplifica-se quando derivado. É então conveniente guardá-lo para segundo factor.

$$
\begin{aligned}
\text{(c)} \int \operatorname{arctg} x \, dx &= \int 1 \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x \, \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

O arco-tangente não tem primitiva imediata, mas foi muito simples usar o método de primitivação por partes para o primitivar.

$$\text{(d)} \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$
$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right)$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Então podemos escrever

$$\int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$$

e resolvendo esta última equação em relação à incógnita $\int e^x \sin x dx$, resulta

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \mathcal{C}.$$

3. Regras de Primitivação

Exercício 6. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int x^3 \ln x \, dx$ b) $\int x^2 sh\, x \, dx$ c) $\int e^{2x} \sin\, x \, dx$

d) $\int \left(x^2+1\right) e^x \, dx$ e) $\int x^2 \cos x \, dx$ f) $\int arcsen\, x \, dx$

g) $\int x \, argcoth\, x \, dx$ h) $\int \ln^2 x \, dx$

C. Primitivação de potências de funções trigonométricas e hiperbólicas
Há um conjunto de regras práticas para a primitivação de potências com expoente natural de funções trigonométricas e de funções hiperbólicas, que se baseiam em algumas propriedades destas funções. Passemos à apresentação destas regras.

C.1 - Potências pares de funções trigonométricas e hiperbólicas
Primitivas do tipo:

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2p} x \, dx \qquad \left[\text{ou} \int sh^{2k} x \, ch^{2p} x \, dx\right]$$

onde $k,\ p \in \mathbb{N}$.

No caso da primitivação de potências de expoente par de funções trigonométricas, é conveniente passar para o arco duplo, recorrendo às fórmulas:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}\,, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

3. Regras de Primitivação

Assim,

$$\begin{aligned}\int \sin^{2k} x \cos^{2p} x \, dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^k \left(\cos^2 x\right)^p \, dx \\ &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^p \, dx \\ &= \ldots\end{aligned}$$

De modo perfeitamente equivalente, no caso da primitivação de potências de expoente par de funções hiperbólicas, é conveniente passar para o argumento duplo, tendo em conta que:

$$sh^2 x = \frac{ch2x - 1}{2}, \qquad ch^2 x = \frac{ch2x + 1}{2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int sh^{2k} x \, ch^{2p} x \, dx &= \int \left(sh^2 x\right)^k \left(ch^2 x\right)^p \, dx \\ &= \int \left(\frac{ch2x-1}{2}\right)^k \left(\frac{ch2x+1}{2}\right)^p \, dx \\ &= \ldots\end{aligned}$$

3. Regras de Primitivação

C.2 - Potências ímpares de funções trigonométricas e hiperbólicas

Primitivas do tipo:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x \, dx \quad \text{ou} \quad \int \sin^n x \cos^{2k+1} x \, dx$$

$$\left[\int sh^{2k+1} x \, ch^n x \, dx \quad \text{ou} \quad \int sh^n x \, ch^{2k+1} x \, dx \right]$$

onde k, $n \in \mathbb{N}$. No caso da primitivação de potências de expoente ímpar de funções trigonométricas ou hiperbólicas, é conveniente destacar uma unidade à potência ímpar e passar o outro factor para a co-função, através das fórmulas:

$$cos^2 x + sen^2 x = 1 \,, \qquad ch^2 x - sh^2 x = 1.$$

Assim, por exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int \sin^{2k+1} x \cos^n x \, dx &= \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x \, dx \\
&= \int \left(\sin^2 x\right)^k \sin x \cos^n x \, dx \\
&= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^n x \sin x \, dx \\
&= \ldots \text{ (o cálculo desta primtiva será efectuado recorrendo à fórmula } \int f'(x) \, f^{\alpha}(x) \text{)}
\end{aligned}$$

C.3 - Potências de funções trigonométricas e hiperbólicas

Primitivas do tipo:

$$\int tg^m x\, dx \text{ ou } \int cotg^m x\, dx \qquad \left[\int th^m x\, dx \text{ ou } \int coth^m x\, dx\right]$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $m > 2$. Neste tipo de primitivas, é conveniente destacar duas unidades à potência e passar o outro factor para a co-função, através das fórmulas:

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \text{ ou } cotg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \quad \left[th^2 x = 1 - \frac{1}{ch^2 x} \text{ ou } coth^2 x = 1 + \frac{1}{sh^2 x}\right]$$

Assim, por exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int cotg^m x\, dx &= \int cotg^{m-2} x\, cotg^2 x\, dx \\
&= \int cotg^{m-2} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx \\
&= -\int -\frac{1}{\sin^2 x} cotg^{m-2} x\, dx - \int cotg^{m-2} x\, dx \\
&= -\frac{cotg^{m-1} x}{m-1} - \int cotg^{m-2} x\, dx \\
&= \ldots \text{ (ao cálculo da primtiva } \int cotg^{m-2} x\, dx \text{ volta-se a aplicar o mesmo procedimento)}
\end{aligned}$$

Exercício 7. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int \cos^2 x \, dx$ b) $\int ch^4 x \, dx$ c) $\int \cos^3 x \, dx$

d) $\int \sin^3 x \cos^{12} x \, dx$ e) $\int ch^5 x \, dx$ f) $\int th^3 x \, dx$

g) $\int coth^4 x \, dx$ h) $\int tg^5 x \, dx$

D. Regra de primitivação por substituição

Resulta da regra de derivação de uma função composta. Se u e v são funções deriváveis e a composta $u \circ v$ está bem definida, então

$$[u\,(v(t))]' = u'\,(v(t))\,v'(t).$$

Em termos de primitivas, podemos escrever

$$\int u'\,(v(t))\,v'(t)\,dt = u\,(v(t)) + \mathcal{C}.$$

Pondo $u'(x) = f(x)$, $u(x) = F(x)$, $v(x) = g(x)$ e $v'(x) = g'(x)$, onde F é uma primitiva de f, vem

$$\int f\,(g(t))\,g'(t)\,dt = F\,(g(t)) + \mathcal{C}.$$

3. Regras de Primitivação

A expressão anterior pode adquirir uma forma mais útil, atendendo a que $F(g(t)) + \mathcal{C}$ indica uma primitiva genérica de $f(x)$ calculada em $x = g(t)$. De facto, podemos escrever

$$\int f\left(g(t)\right) g'(t)\, dt = \left[\int f(x)\, dx\right]_{x=g(t)},$$

mas esta expressão ainda não é bem o que nos interessa.

No entanto, tendo em conta que, em geral, o problema que nos é proposto é o de calcular $\displaystyle\int f(x)\, dx$, basta então desfazer a substituição $x = g(t)$ através de $t = g^{-1}(x)$.

Legitimando as "manobras" anteriores, a conclusão é a seguinte.

Conclusão D [Primitivação por substituição]

Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável no intervalo I, F uma primitiva de f em I, e $g : J \longrightarrow I$ uma função bijectiva com derivada não nula em cada ponto de J. Então $F \circ g$ é uma primitiva de $(f \circ g)\, g'$ em J, tendo-se

$$\int f(x)\, dx = \left[\int f\left(g(t)\right) g'(t)\, dt \right]_{t=g^{-1}(x)} .$$

Esta expressão exprime a regra de primitivação por substituição de variável. Mais concretamente, ela indica que o cálculo da primitiva de $f(x)$ pode ser efectuado da seguinte forma:

- faz-se a substituição $x = g(t)$;
- calcula-se depois a nova primitiva $\displaystyle\int f(g(t))\, g'(t)\, dt$;
- desfaz-se a substituição, regressando à variável inicial x, através de $t = g^{-1}(x)$.

Observações

(a) Em geral, aplica-se o método de primitivação por substituição quando não se sabe primitivar a função dada por outro processo ou ainda quando o cálculo da primitiva dada se simplifica significativamente.

(b) O sucesso do método depende, obviamente, da substituição adoptada. A dificuldade está em intuir uma substituição adequada para a primitiva que nos é proposta. Para a escolha da substituição, podemos recorrer a uma tabela onde se listam substituições de sucesso para os casos mais importantes.

(c) O método pode ser usado sempre que se queira, claro, mas a sua verdadeira utilidade revela-se nos casos em que não conseguimos calcular a primitiva que nos é proposta. O seu sucesso depende grandemente da experiência.

3. Regras de Primitivação

Exemplos

(a) Para calcular $\int x\sqrt{x-1}\,dx,$ faça-se a substituição definida por $x = t^2+1,\ t \geq 0.$

No âmbito da fórmula apresentada, tem-se $g(t) = 1 + t^2.$ Então $g'(t) = 2t$ e somos conduzidos ao cálculo da nova primitiva,

$$\int (1+t^2)\sqrt{t^2}\,2t\,dt = 2\int (t^2+t^4)\,dt = \frac{2}{3}\,t^3 + \frac{2}{5}\,t^5 + \mathcal{C}.$$

Para regressar à variável x, desfaz-se a substituição, notando que $t = \sqrt{x-1}$ com $x \geq 1,$ uma vez que $t \geq 0.$ Resulta finalmente

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \mathcal{C}.$$

(b) Para calcular $\displaystyle\int x\sqrt[4]{1+x}$, faça-se $1+x=t^4$, $t\geq 0$.

Tem-se que $g(t)=t^4-1$. Então $g'(t)=4t^3$ e somos conduzidos ao cálculo da nova primitiva,

$$\int (t^4-1)\sqrt[4]{t^4}\,4t^3\,dt = 4\int (t^8-t^4)\,dt = \frac{4}{9}\,t^9-\frac{4}{5}\,t^5+\mathcal{C}.$$

Para regressar à variável x, desfaz-se a substituição, notando que $t=\sqrt[4]{x+1}$ com $x\geq -1$, uma vez que $t\geq 0$. Resulta finalmente

$$\int x\sqrt[4]{1+x} = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(1+x)^9}-\frac{4}{5}\sqrt[4]{(1+x)^5}+\mathcal{C}.$$

Exercício 8. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; subst. $x=\cos t$, $t\in[0,\pi]$

b) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; subst. $x=t^2$, $t>0$

4. Primitivação de funções Racionais

Considere as funções racionais $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios em x com coeficientes reais. Como já se viu, algumas destas funções têm primitiva imediata.

Exemplos

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + \mathcal{C}$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \mathcal{C}$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2} + \mathcal{C}$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)^2} + \mathcal{C}$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\, x + \mathcal{C}$

Vamos agora ver como calcular a primitiva de funções racionais em casos mais gerais.

4. Primitivação de funções Racionais

Primitivas do tipo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

1º Passo: Divisão dos polinómios (nem sempre é necessário)

Se grau $P \geq$ grau Q então efectua-se a divisão dos dois polinómios:

$$\begin{array}{c|c} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & S(x) \end{array}$$

A divisão pára quando o grau $R <$ grau Q. E tem-se

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,.$$

Exemplos

a) $\dfrac{x^2+3}{x^2+1} = 1 + \dfrac{2}{x^2+1}$

b) $\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = x + 1 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$

4. Primitivação de funções Racionais

2º Passo: Decomposição de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ em fracções simples.

(A) Decompor Q em factores irredutíveis, para isso é necessário determinar os zeros de Q :

- se Q é um polinómio de grau n então Q possui exactamente n zeros, que podem ser reais ou complexos;
- os zeros complexos ocorrem sempre aos pares de conjugados, isto é, se $a+bi$ é um zero de Q então $a-bi$ também é um zero de Q;
- cada zero de Q pode ser *simples* ou pode ser *múltiplo* com *multiplicidade* $k>1$, quando anula Q e todas as suas derivadas até à ordem $k-1$ mas não anula a derivada de ordem k.

Exemplos

a) $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

b) $\dfrac{1}{(x^2-2x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}$

c) $\dfrac{1}{5x^2-5x-30}=\dfrac{1}{5(x-3)(x+2)}$

d) $\dfrac{1}{(x^3+4x)}=\dfrac{1}{x(x^2+4)}$

e) $\dfrac{1}{(x^4-9x^2)}=\dfrac{1}{x^2(x-3)(x+3)}$

(B) Decompor $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ numa soma de fracções simples, com base nos factores de Q encontrados em (A):

- cada zero real $x = a$, com multiplicidade k, contribui com k fracções simples da forma
$$\frac{A_1}{(x-a)^k}, \quad \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}, \quad \dots, \quad \frac{A_k}{x-a},$$
onde $A_1, A_2, \dots, A_k$ são constantes reais a determinar;

- cada par de zeros complexos conjugados $x = a \pm bi$, com multiplicidade k, contribui com k fracções simples da forma
$$\frac{B_1x + C_1}{[(x-a)^2+b^2]^k}, \quad \frac{B_2x + C_2}{[(x-a)^2+b^2]^{k-1}}, \quad \dots, \frac{B_kx + C_k}{(x-a)^2+b^2}$$
onde $B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_k, C_k$ são constantes reais a determinar.

Exemplos

a) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$

b) $\dfrac{1}{(x^2-2x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x+2}$

4. Primitivação de funções Racionais

c) $\dfrac{1}{5x^2-5x-30}=\dfrac{1}{5(x-3)(x+2)}=\dfrac{A}{5(x-3)}+\dfrac{B}{x+2}$

d) $\dfrac{1}{(x^3+4x)}=\dfrac{1}{x(x^2+4)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

e) $\dfrac{1}{(x^4-9x^2)}=\dfrac{1}{x^2(x-3)(x+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-3}+\dfrac{D}{x+3}$

(C) Determinar as constantes que figuram nos numerados das fracções simples, recorrendo ao chamado método dos *coeficientes indeterminados* , o qual vem exposto no exemplo que se apresenta a seguir.

Exemplo:

$$\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

Determinar as constantes A, B :
Reduzir tudo ao mesmo denominador

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Daqui tira-se a igualdade de polinómios:

$$x+2=(A+B)x+A-B$$

4. Primitivação de funções Racionais

Pela igualdade de polinómios, tem-se:

$$\begin{cases} A+B &= 1 \\ A-B &= 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações lineares, obtém-se $A = \frac{3}{2}, \; B = -\frac{1}{2}$.

Assim,

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

Exercício 9. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+7}{2+x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+4}{1+x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{4y^4+y+1}{4y^4+1}\,dy$

d) $\displaystyle\int \frac{18}{x\,(x^2-9)}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{t^2+1}{t^3+t^4}\,dt$ f) $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Exercício 10. Determine a única função F que verifica as seguintes condições:

$F'(x) = \dfrac{1}{(x-2)\,(x-1)}$ e $F(0)=0$.