Séries Numéricas

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Séries Numéricas

6. Séries Numéricas

Neste capítulo e no próximo vamos lidar com expressões envolvendo somas com um número infinito de parcelas. O objetivo é atribuir significado matemático a este tipo de somas, recorrendo ao conceito de limite. Vamos ver que apenas em alguns casos estas somas podem ser calculadas.

6.1 Introdução

Sabemos bem o que significa

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_p = \sum_{n=1}^{p} u_n$$

e conhecemos as propriedades desta operação - comutatividade, associatividade, etc..

Neste capítulo, vamos lidar com expressões do tipo

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \,,$$

no sentido de atribuir um significado matemático rigoroso à operação de adição com um número infinito de parcelas .

6.1 Introdução

Suponhamos que pretendemos calcular o valor da soma

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Associando as parcelas duas a duas, escreveríamos

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

e seríamos levados a concluir que $S = 0$.

Se agora destacarmos a primeira parcela e associarmos as restantes duas a duas, escrevemos

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots$$

e já somos levados a pensar que será $S = 1$.

E poderíamos ainda destacar simplesmente a primeira parcela, resultando

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S,$$

donde $S = 1/2$.

6.1 Introdução

É então claro que estas "manobras" não levaram a qualquer conclusão sobre o valor de S.

Somos levados a pensar que as propriedades da adição em $\mathbb{R}$, com um número finito de parcelas, em particular a propriedade associativa, não são válidas quando estendemos a adição a um número infinito de parcelas.

Para dar sentido à expressão

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \,,$$

iremos recorrer à noção de limite .

6.2 Definições e consequências

Definição

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de números reais.
Chama-se *série numérica de termo geral u_n* ou *série numérica gerada por u_n* à expressão da forma:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

que representa uma soma com um número infinito numerável de parcelas.

- Usamos as notações

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,, \qquad \sum_{n\geq 1} u_n\,, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\,, \qquad \sum_{n} u_n\,.$$

- A sucessão $(u_n)_n$ diz-se a *sucessão geradora* da série.

6.2 Definições e consequências

Definição

Dada uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, chama-se *sucessão das somas parciais* da série à sucessão $(s_n)_n$ construída da forma:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

ou seja, à sucessão cujo termo geral é a soma dos n primeiros termos da série.

6.2 Definições e consequências

Definição

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é **convergente** quando a correspondente **sucessão das somas parciais é convergente,** ou seja, quando

$$\exists\, S \in \mathbb{R} : \quad \lim_n s_n = S$$

e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S$$

e dizemos que

$$S \text{ é a } \textit{soma} \text{ da série } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Observação

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ **é divergente** no caso deste **limite não existir ou ser infinito**.

Exemplos

1. Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$.

   Neste caso, a correspondente sucessão geradora é

$$u_n = (-1)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

   e a sucessão das somas parciais é

$$s_n = 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Então $s_{2n} = 0$ e $s_{2n-1} = 1$, pelo que $(s_n)_n$ não tem limite .
   Logo, a série é divergente.

2. Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} n$.

   Neste caso, a correspondente sucessão geradora é

   $$u_n = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Como $u_{n+1} - u_n = (n+1) - n = 1$, $(u_n)_n$ é uma progressão aritmética de razão $r = 1$.

   A sucessão das somas parciais (soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética) é

   $$s_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{1+n}{2} \times n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Então $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$, pelo que $(s_n)_n$ não tem limite .
   Logo, a série é divergente.

3. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

   Neste caso, a correspondente sucessão geradora é

$$u_n = \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Como $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2}$, $(u_n)_n$ é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$.

   A sucessão das somas parciais (soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica) é

$$s_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Então $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}} = 1$.

   Logo, a série é convergente sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

6.2 Definições e consequências

Das definições apresentadas extraem-se as seguintes consequências.

Consequência 1

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ séries convergentes de somas s e t, respectivamente. Então:

(a) a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n \pm v_n)$ converge e tem soma $s \pm t$;

(b) a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha u_n$ converge e tem soma αs, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Consequência 2

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente então, dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha u_n$ também é divergente.

6.2 Definições e consequências

Consequência 3

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ divergente. Então $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + v_n)$ é divergente.

Observação

Se as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ forem divergentes , nada se pode concluir, em geral, sobre a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + v_n)$.

6.3 Primeiros resultados sobre convergência

Começamos com um resultado fundamental, muito útil no estudo da convergência de séries.

Teorema
[Condição necessária de convergência]

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ **é convergente** então $\lim_n u_n = 0$.

Corolário
[Condição suficiente de divergência (ou **teste da divergência**)]

Se a sucessão $(u_n)_n$ não tem limite ou se $\lim_n u_n = \ell$, com $\ell \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ **é divergente**.

6.3 Primeiros resultados sobre convergência

Observação

O recíproco do Teorema anterior é obviamente falso.

Se $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ não podemos concluir que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ seja convergente.

Pensar no exemplo clássico da *série harmónica*,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Exemplos

1. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3+n+4}{n^3+3}$.

   Neste caso, a correspondente sucessão geradora é

   $$u_n = \frac{5n^3+n+4}{n^3+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3+n+4}{n^3+3} = 5 \neq 0,$ pelo teste para a divergência, a série é divergente.

2. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$.

   Neste caso, a correspondente sucessão geradora é $u_n = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$, pelo teste para a divergência, a série é divergente.

6.3 Primeiros resultados sobre convergência

Teorema

Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sucessões que diferem, quando muito, num número finito de termos. Então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ têm a mesma natureza.

Observação

Este teorema estabelece que se uma das séries converge então a outra também converge e se uma das séries diverge então a outra também diverge.

Equivalentemente, significa que a natureza de uma série não depende dos seus k primeiros termos, por maior que seja k.

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

Vamos agora estudar, a partir da definição, algumas séries clássicas de relevo. O conhecimento da natureza destas séries será muito útil no estudo de outras séries.

A - Série geométrica

Definição

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diz-se *série geométrica* se e só se

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r, \quad r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

sendo r uma constante, que se designa por razão da série. A série geométrica pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}, \quad a, r \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

onde $u_1 = a$ é primeiro termo da série.

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

A sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, é definida por

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

Para $r = 1$ tem-se $s_n = a \times n$ e para $r \neq 1$, como também

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n,$$

sai que

$$s_n - rs_n = a - ar^n,$$

ou seja,

$$s_n - rs_n = u_1 - u_1 r^n$$

donde

$$s_n = \begin{cases} a \times n & se \quad r = 1 \\ u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r} & se \quad r \neq 1. \end{cases}$$

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

Da definição de convergência de uma série e da condição suficiente de divergência, sai que:

$r = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ série divergente,

porque $u_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim_n u_n = a \neq 0$
(além disso, tem-se $\lim_n s_n = \lim_n a \times n = +\infty$);

$r > 1 \quad \Longrightarrow \quad$ série divergente,

porque $\lim_n u_n = \lim_n ar^{n-1} = +\infty$
(além disso, como $\lim_n r^n = +\infty$, vem $\lim_n s_n = +\infty$);

$r \leq -1 \quad \Longrightarrow \quad$ série divergente,

porque $\nexists \lim_n u_n = \lim_n ar^{n-1}$
(neste caso, também não existe $\lim_n s_n$);

$$-1 < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{série convergente com soma } s = u_1 \times \frac{1}{1-r},$$

$$\text{porque } \lim_n s_n = u_1 \times \frac{1}{1-r}$$

(repare-se que $\lim_n r^n = 0$);

Conclusão

A série geométrica de razão r,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1},$$

é convergente se e só se $|r| < 1$. Neste caso a sua soma é $s = u_1 \times \dfrac{1}{1-r}$.

Observação

Mais em geral, uma série geométrica de razão r apresenta a forma

$$\sum_{n=p}^{+\infty} ar^{n+k}\,, \quad a, r \in \mathbb{R}\,,\ \ a \neq 0\,,\ \ p \in \mathbb{N}\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,,$$

onde o primeiro termo da série é $u_p = ar^{p+k}$.

A série $\sum_{n=p}^{+\infty} ar^{n+k}$ converge se e só se $|r|<1$. Em caso de convergência, a sua soma é

$$s = ar^{p+k}\frac{1}{1-r}\,.$$

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

Exemplos

Verifique que as seguintes séries são geométricas e, se possível, calcule a sua soma.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n}$

   Como

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{4^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}} = \frac{(-1)^{n+2}4^n}{(-1)^n 4^{n+1}} = -\frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

n+1

   a série é geométrica de razão $r = -\frac{1}{4}$.

   Como $|r| = |-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} < 1$, a série é convergente e a sua soma é

$$s = u_1 \times \frac{1}{1-r} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}.$$

   Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n} = \frac{1}{5}$.

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

Exemplos

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n-1}}{2^{3n+1}}$

Como

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{2(n+1)-1}}{2^{3(n+1)+1}}}{\frac{3^{2n-1}}{2^{3n+1}}} = \frac{\frac{3^{2n+1}}{2^{3n+4}}}{\frac{3^{2n-1}}{2^{3n+1}}} = \frac{3^{2n+1}2^{3n+1}}{3^{2n-1}2^{3n+4}} = \frac{3^2}{2^8} = \frac{9}{8}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$\boxed{3}$

a série é geométrica de razão $r = \frac{9}{8}$.

Como $|r| = |\frac{9}{8}| = \frac{9}{8} > 1$, a série é divergente.

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

Exercício 1

Verifique que as seguintes séries são geométricas e, se possível, calcule a sua soma.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{3^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{3^{n+1}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 5^n}{7^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n}{2^{2n+1}}$

B - Série harmónica

Definição

Chama-se série harmónica a uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

cuja sucessão geradora, $(u_n)_n$, é definida por

$$u_n = \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

A correspondente sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, é dada por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

A **séria harmónica é divergente.**

Demonstração

Vejamos que $(s_n)_n$ é divergente , analisando a subsucessão constituída pelos termos

$$s_2\ ,\ s_4\ ,\ s_8\ ,\ s_{16}\ ,\ s_{32}\ ,\ \ldots\ ,\ s_{2^n}\ ,\ \ldots$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+ \\ &\quad +\left(\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{32}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} \\ &= 1+n\cdot\frac{1}{2}\ , \end{aligned}$$

conclui-se que

$$\lim_n s_{2^n} = +\infty\ ,$$

pelo que $(s_n)_n$ é divergente.

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

C - Série de Riemann

Definição

Chama-se série de Riemann a uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

cuja sucessão geradora é definida por $u_n = \frac{1}{n^{\alpha}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

A correspondente sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, é dada por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Prova-se que (ver Calculus - Robert A. Adams):

(i) Se $\alpha > 1$ então a **série de Riemann é convergente**.

(ii) Se $\alpha \leq 1$ então a **série de Riemann é divergente**.

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

Exemplos

Determine a natureza das seguintes séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

   Trata-se de uma série de Riemann, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}$, com $\alpha = \frac{1}{5} \leq 1$.

   Logo a série é divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt[4]{n^7}} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^7}}$

   Trata-se de uma série de Riemann, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{4}}}$, com $\alpha = \frac{7}{4} > 1$.

   Logo a série é convergente.

D - Série de Mengoli (ou telescópica)

Definição

Chama-se série de Mengoli a uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k}), \quad k \geq 1,$$

onde $(a_n)_n$ é uma sucessão qualquer .

Para estas séries, é possível estudar a sucessão das somas parciais de uma forma muito simples.

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

Exemplo

Consideremos a seguinte série de Mengoli

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots \\ &\qquad + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right), \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \\ &\qquad - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\,,$$

donde

$$\lim_n s_n = 3/2$$

e conclui-se que a série de Mengoli apresentada é convergente e tem soma $S = 3/2$.

Todas as séries de Mengoli se estudam desta forma.

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

Em geral, para série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k}), \quad k \geq 1,$$

vem

$$\begin{aligned} s_n \;&=\; (a_1 - a_{k+1}) + (a_2 - a_{k+2}) + (a_3 - a_{k+3}) + \cdots \\ &\quad + (a_k - a_{2k}) + (a_{k+1} - a_{2k+1}) + (a_{k+2} - a_{2k+2}) + \cdots \\ &\quad + (a_{n-2} - a_{n+k-2}) + (a_{n-1} - a_{n+k-1}) + (a_n - a_{n+k}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}),$$

pelo que,

$$\text{existe} \quad \lim_n s_n$$

se e só se

$$\text{existe} \quad \lim_n (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+k}),$$

ou seja, se e só se

$$\text{existe} \quad \lim_n a_n .$$

Conclusão

A série de Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k}), \quad k \geq 1,$$

é convergente se e só se a correspondente sucessão $(a_n)_n$ também é convergente .
Em caso de convergência, a soma da série é precisamente

$$\begin{aligned} S &= \lim_n \left[a_1 + a_2 + \cdots + a_k - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+k})\right] \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k - k \lim_n a_n. \end{aligned}$$

Exemplo

Mostre que é uma série de Mengoli e, se possível, calcule a sua soma:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$

   Dado que $u_n = \dfrac{1}{n^2+n} = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1}$

   Determinar as constantes A e B (**método dos coeficientes indeterminados**):

   Reduzir tudo ao mesmo denominador

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$$

   Daqui tira-se a igualdade de polinómios: $1 = (A+B)n + A,$ tendo-se

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

   É uma série de Mengoli, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, com $a_n = \dfrac{1}{n}$ e $k=1.$

   Como a_n é convergente , a série é convergente e a sua soma é

$$s = a_1 - k \times \lim_{n\to+\infty} a_n = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

6.4 Resultados sobre algumas séries particulares

Exercício 2
Mostre que as séries seguintes são séries de Mengoli e, se possível, calcule a sua soma:

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-3}$
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{(n^2-1)(n+3)}$
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{(n+1)^2}{n} \right)$

Quadro resumo

	Converge	Diverge
Série geométrica de razão r, $r \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$	$\lvert r\rvert < 1$ $S = u_1 \times \dfrac{1}{1-r}$	$\lvert r\rvert \geq 1$
Série harmónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$		divergente
Série de Riemann de expoente α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$	$\alpha > 1$	$\alpha \leq 1$
Série de Mengoli $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k}),\quad k \geq 1$	se $(a_n)_n$ converge $S = a_1 + \cdots + a_k - k \lim_n a_n$	se $(a_n)_n$ diverge

6.5 Séries de termos não negativos

Em geral, não é possível estudar a convergência duma série calculando o limite da sucessão das somas parciais. Por isso teremos de recorrer a outros métodos que, embora não permitam saber o valor da soma, quando existe, pelo menos permitam saber se a série é convergente ou não.

Estes critérios aplicar-se-ão a tipos particulares de séries. Estudaremos em primeiro lugar as séries de termos não negativos, isto é, da forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,, \quad \text{com} \quad u_n \geq 0\,, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

para as quais a sucessão $(s_n)_n$ das somas parciais é monótona crescente, já que

$$s_n = s_{n-1} + u_n \geq s_{n-1}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observação

Na verdade estes critérios também se podem aplicar às séries de termos negativos, pois, pela Consequência 1, $\sum_{n=1}^{+\infty} -u_n = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for convergente!

A - Critérios de comparação

Recorrendo a uma comparação com o termo geral de uma série conhecida, a aplicação de um dos seguintes critérios permite concluir, de forma muito simples, a natureza de uma vasta classe de séries numéricas.

Teorema

[Primeiro Critério de Comparação]

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ séries de termos não negativos tais que

$$0 \leq u_n \leq v_n,$$

a partir de uma certa ordem.

(i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também converge .

(ii) Equivalentemente, se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ também diverge.

6.5 Séries de termos não negativos

Exemplos

Estude a natureza das seguintes séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$

   Observe que
   $$\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2n^2}$$

   Assim, usamos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{2n^2}$ nesta comparação.

   Sabe-se que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (série de Riemann com $\alpha = 2 > 1.$)

   Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ é convergente por (i) do primeiro critério de comparação.

Exemplos

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+\cos n}{n^2}$

   Observe que

   $$-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 5+\cos n \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{n^2} \leq \frac{5+\cos n}{n^2} \leq \frac{6}{n^2}$$

   Assim, usamos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n^2}$ nesta comparação.

   Sabe-se que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n^2} = 6\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (série de Riemann com $\alpha = 2 > 1.$)

   Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+\cos n}{n^2}$ é convergente por (i) do primeiro critério de comparação.

Exercício 3

Estude a natureza das seguintes séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^4 + 3n^2 + 1}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sin(n+5)}{9^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 + \sin^2 n}{\sqrt[5]{n^3}}$

6.5 Séries de termos não negativos

Teorema
[Segundo Critério de Comparação (ou critério de comparação do limite)]

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ séries de termos positivos tais que $\ell = \lim_n \frac{u_n}{v_n}$, onde $\ell \in [0, +\infty[$.

(i) Se $\ell \neq 0$ e $\ell \neq +\infty$ então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ têm a mesma natureza.

(se $\sum_n v_n$ é convergente então $\sum_n u_n$ é convergente; se $\sum_n v_n$ é divergente então $\sum_n u_n$ é divergente)

(ii) Se $\ell = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também converge.

Equivalentemente, se $\ell = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ também diverge.

(iii) Se $\ell = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também diverge.

Equivalentemente, se $\ell = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ também converge.

Exemplos

Estude a natureza das seguintes séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5+5n+3n^3}{n^4+4}$

   Observe que, a parte dominante do dominador é $3n^3$ e a parte dominante do denominador é n^4. Isto sugere tomar

$$u_n = \frac{5+5n+3n^3}{n^4+4} \text{ e } v_n = \frac{3n^3}{n^4} = \frac{3}{n}.$$

   Assim, usamos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n}$ nesta comparação.

   Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{5+5n+3n^3}{n^4+4}}{\frac{3}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n+5n^2+3n^4}{3n^4+12} = 1 \neq 0.$

   Por (i) do segundo critério de comparação **as séries são da mesma natureza.**

   Como a série $\displaystyle 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente (série harmónica)

   então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5+5n+3n^3}{n^4+4}$ é divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

   Observe que, a parte dominante do dominador é 1 e a parte dominante do denominador é 2^n. Isto sugere tomar

$$u_n = \frac{1}{2^n - 1} \text{ e } v_n = \frac{1}{2^n}.$$

   Assim, usamos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ nesta comparação.

   Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1 \neq 0.$

   Por (i) do segundo critério de comparação **as séries são da mesma natureza.**

   Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente (série geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$)

   então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ é convergente.

Exercício 4

Estude a natureza das seguintes séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{\sqrt[3]{n^7+3n^2+1}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+5n+3}{n^4+3n^2+1}$

B - Critério de D'Alembert (ou da razão)

Teorema

[Critério de D'Alembert (ou da razão)]

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos positivos e suponha-se que existe

$$\ell = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

(*i*) Se $\ell < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

(*ii*) Se $\ell > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

(*iii*) Se $\ell = 1$ nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

6.5 Séries de termos não negativos

Exemplos

Estude a natureza das seguintes séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{e^{3n}}$

   Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+2)!}{e^{3(n+1)}}}{\frac{(n+1)!}{e^{3n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!e^{3n}}{(n+1)!e^{3n+3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)}{e^3} = +\infty > 1$$

   Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{e^{3n}}$ é divergente, por (ii) do critério da razão.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+3)!}$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+4)!}}{\frac{2^n}{(n+3)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}(n+3)!}{2^n(n+4)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(n+4)} = 0 < 1$$

Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+3)!}$ é convergente, por (i) do critério da razão.

Exercício 5

Estude a natureza das seguintes séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!7^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+5n}{7^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

C - Critério de Cauchy (ou da raíz)

Teorema
[Critério de Cauchy (ou da raíz)]

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos não negativos e suponha-se que existe

$$\ell = \lim_n \sqrt[n]{u_n}\,.$$

(a) Se $\ell < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

(b) Se $\ell > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

(c) Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exemplo

Estude a natureza da série.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n^n}{(3+9n)^n}$

   Como

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n^n}{(3+9n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3+9n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3+9n} = \frac{2}{9} < 1$$

   Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n^n}{(3+9n)^n}$ é convergente, por (i) do critério da raíz.

Exercício 6

Estude a natureza das seguintes séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+5n}{n+4}\right)^{2n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n(n)$

6.6 Convergência absoluta e convergência simples

Consideremos uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cujos termos têm sinal arbitrário.

Formemos a correspondente série dos módulos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \,,$$

que é obviamente uma série de termos não negativos, para a qual valem todos os resultados apresentados na secção anterior.

Teorema

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também é convergente.

6.6 Convergência absoluta e convergência simples

- Dizemos que uma série $\sum_n u_n$ é *absolutamente convergente* quando a correspondente série dos módulos, $\sum_n |u_n|$, é convergente.
- Quando uma série é convergente mas não é absolutamente convergente, dizemos que é *simplesmente convergente*.

Observação

Se uma série é absolutamente convergente então é convergente.

O recíproco é falso. Há séries convergentes que não são absolutamente convergentes. Veremos que a série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

é convergente mas não é absolutamente convergente. A correspondente série dos módulos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{é a série harmónica que é divergente.}$$

6.6 Convergência absoluta e convergência simples

Exemplo

1. Uma série convergente com termos de sinal constante é absolutamente convergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{1}{n^2}$ é absolutamente convergente.

   De facto, a sua série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, é uma série de Riemann convergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^7}$ é absolutamente convergente.

   Como
   $$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n^7}\right| \leq \frac{1}{n^7}\,,\ \forall n\in\mathbb{N},$$
   e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^7}$ é uma série de Riemann convergente, por comparação conclui-se que a série dos módulos da série dada é convergente.

6.7 Séries alternadas

Entre as séries com termos de sinal variável, destacam-se aquelas cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Estas séries apresentam a forma geral

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - +a_3 + a_4 - a_5 + \cdots$$

onde $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N},$ e designam-se por *séries alternadas*.

Quanto à natureza de uma série alternada , pode acontecer que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ seja absolutamente convergente, quando a correspondente série dos módulos é convergente, seja simplesmente convergente, quando a série dos módulos é divergente mas a série alternada converge.

6.7 Séries alternadas

Um resultado muito útil para estudar séries alternadas, sobretudo quando a correspondente série dos módulos é divergente, é o seguinte.

Teorema

[Critério de Leibnitz (condição suficiente de convergência das séries alternadas)]

Seja $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente , isto é,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots a_n \geq \cdots ,$$

e tal que

$$\lim_n a_n = 0.$$

Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é convergente.

Observação

O resultado enunciado neste teorema continua válido quando a sucessão $(a_n)_n$ é decrescente apenas a partir de uma certa ordem $p \in \mathbb{N}$.

6.7 Séries alternadas

Exemplo

1. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é simplesmente convergente.
   A série dos módulos é a série harmónica, logo divergente.
   Como
   $$\lim_n \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{n}\right)_n \text{ é decrescente,}$$
   usando o critério de Leibnitz, concluímos que esta série é convergente.

2. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ é simplesmente convergente.
   Semelhante ao exemplo anterior.

3. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ é absolutamente convergente.

   A série dos módulos é a série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ convergente.

Observação

O critério de Leibnitz é uma condição suficiente de convergência, pelo que nada se poderá concluir quando falha alguma das hipóteses.

Saliente-se, no entanto, que quando

$$a_n \not\longrightarrow 0, \quad \text{a série alternada é divergente,}$$

já que também $(-1)^{n+1} a_n \not\longrightarrow 0$ (condição suficiente de divergência).

Os casos mais complexos são aqueles em que

$$a_n \longrightarrow 0 \text{ mas } (a_n)_n \text{ não é decrescente.}$$

6.7 Séries alternadas

Exemplo

1. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{n+5}{n}$ é divergente.

   Basta atender a que não existe $\displaystyle\lim_{n}(-1)^{n+1}\,\frac{n+5}{n}$.

2. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$, com $a_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{se } n \text{ par} \\ 1/n^3 & \text{se } n \text{ ímpar,} \end{cases}$

   converge absolutamente.

   Basta atender a que a série dos módulos, por comparação, é convergente, uma vez que

$$0 < a_n \leq \frac{1}{n^2},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

   e que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ é uma série de Riemann convergente.