Sistemas Digitais

- Análise, Síntese, Projecto

- Análise — Diagrama lógico => Descrição formal duma Função
- Síntese — Descrição formal duma Função => Diagrama lógico
- Projecto — Descrição informal dum circuito =>
  => Descrição formal duma Função
  => Diagrama lógico

- Em 1854, o matemático inglês George Boole inventou um sistema algébrico que atribui um valor de verdadeiro ou falso a proposições.

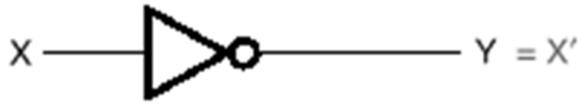
Álgebra de Boole

- Álgebra de Boole é a ferramenta matemática de suporte da análise e síntese de circuitos digitais.
- Os axiomas de um sistema matemático são um conjunto mínimo de definições básicas que assumimos como verdadeiras, a partir das quais quaisquer derivações podem ser efectuadas.
- Uma variável, X, só pode assumir um de dois valores: ”0” ou “1”
- **Axioma 1** **(A1)** $X = 0$ se $X \neq 1$ **(A1’)** $X = 1$ se $X \neq 0$

Álgebra de Boole

Denotando X’ como saída de um **inversor** cuja entrada é X (**Função Inversão**):

Figure 4–1
Signal naming and algebraic notation for an inverter.



- **(A2)** Se X = 0 então X’ = 1 (**A2’**) Se X = 1 então X’ = 0

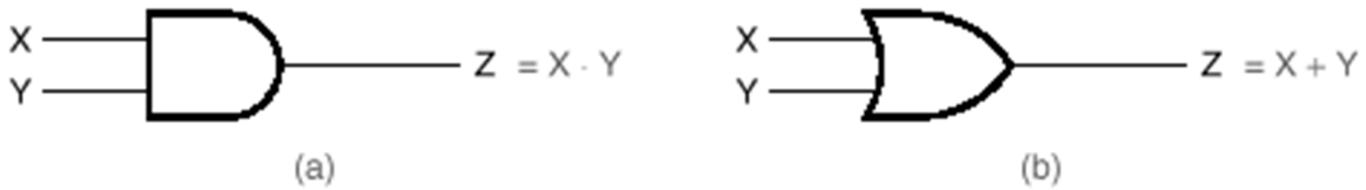


Figure 4–2 Signal naming and algebraic notation: (a) AND gate; (b) OR gate.

- Multiplicação Lógica – porta **AND** de 2 entradas: X.Y = X AND Y

- Adição Lógica - porta **OR** de 2 entradas: X + Y = X OR Y

Álgebra de Boole

(A1)	$X = 0$ se $X \neq 1$	(A1’)	$X = 1$ se $X \neq 0$
(A2)	Se $X = 0$ então $X' = 1$	(A2’)	Se $X = 1$ então $X' = 0$
(A3)	$0.0 = 0$	(A3’)	$1 + 1 = 1$
(A4)	$1.1 = 1$	(A4’)	$0 + 0 = 0$
(A5)	$0.1 = 1.0 = 0$	(A5’)	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$

- Estes axiomas definem completamente a álgebra comutada. Todos os outros factos sobre um sistema podem ser provados utilizando estes axiomas como condições de partida.

- Alguns teoremas e axiomas da Álgebra de Boole possuem um complementar (ex: A5’) que é obtido trocando os 0’s por 1’s, complementando as variáveis e trocando +’s por .’s.

Álgebra de Boole

- **Princípio da Dualidade**: Qualquer teorema ou identidade da Álgebra de Boole continua verdadeiro se trocarmos os 0's por 1's e os sinais . por +.

- Há apenas uma convenção na Álgebra de Boole onde isto não se aplica:

$X + X.Y = X$	T9 $(X.(1 + Y) = X.1 = X)$
$X.X + Y = X$	princípio da dualidade
$X + Y = X$	**o que é falso!**

- O problema reside na ordem das operações. Ao aplicarmos o teorema da dualidade temos de dar precedência à adição. Assim, o segundo passo seria:

$$X.(X + Y) = X.X + X.Y = X.(1 + Y) = X$$

Álgebra de Boole

- Teoremas de álgebra comutada 1 variável

Table 4–1
Switching-algebra theorems with one variable.

(T1)	$X + 0 = X$	(T1′)	$X \cdot 1 = X$	(Identities)
(T2)	$X + 1 = 1$	(T2′)	$X \cdot 0 = 0$	(Null elements)
(T3)	$X + X = X$	(T3′)	$X \cdot X = X$	(Idempotency)
(T4)	$(X')' = X$			(Involution)
(T5)	$X + X' = 1$	(T5′)	$X \cdot X' = 0$	(Complements)

- Teoremas de álgebra comutada 2 ou 3 variáveis

Table 4–2 Switching-algebra theorems with two or three variables.

(T6)	$X + Y = Y + X$	(T6′)	$X \cdot Y = Y \cdot X$	(Commutativity)
(T7)	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$	(T7′)	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$	(Associativity)
(T8)	$X \cdot Y + X \cdot Z = X \cdot (Y + Z)$	(T8′)	$(X + Y) \cdot (X + Z) = X + Y \cdot Z$	(Distributivity)
(T9)	$X + X \cdot Y = X$	(T9′)	$X \cdot (X + Y) = X$	(Covering)
(T10)	$X \cdot Y + X \cdot Y' = X$	(T10′)	$(X + Y) \cdot (X + Y') = X$	(Combining)
(T11)	$X \cdot Y + X' \cdot Z + Y \cdot Z = X \cdot Y + X' \cdot Z$			(Consensus)
(T11′)	$(X + Y) \cdot (X' + Z) \cdot (Y + Z) = (X + Y) \cdot (X' + Z)$			

Álgebra de Boole

- Teoremas de álgebra comutada **n** variáveis

Table 4–3 Switching-algebra theorems with n variables.

(T12)	$X + X + \cdots + X = X$	(Generalized idempotency)
(T12′)	$X \cdot X \cdot \cdots \cdot X = X$	
(T13)	$(X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n)' = X_1' + X_2' + \cdots + X_n'$	(DeMorgan's theorems)
(T13′)	$(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)' = X_1' \cdot X_2' \cdot \cdots \cdot X_n'$	
(T14)	$[F(X_1, X_2, \ldots, X_n, +, \cdot)]' = F(X_1', X_2', \ldots, X_n', \cdot, +)$	(Generalized DeMorgan's theorem)
(T15)	$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1 \cdot F(1, X_2, \ldots, X_n) + X_1' \cdot F(0, X_2, \ldots, X_n)$	(Shannon's expansion theorems)
(T15′)	$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = [X_1 + F(0, X_2, \ldots, X_n)] \cdot [X_1' + F(1, X_2, \ldots, X_n)]$	

- Os teoremas de DeMorgan (T13) e (T13**'**) são de todos os mais usados.
- Uma porta lógica AND de n entradas cuja saída é complementada (invertida) é equivalente a uma porta lógica OR cujas n entradas estejam complementadas

Álgebra de Boole

- Teorema de DeMorgan

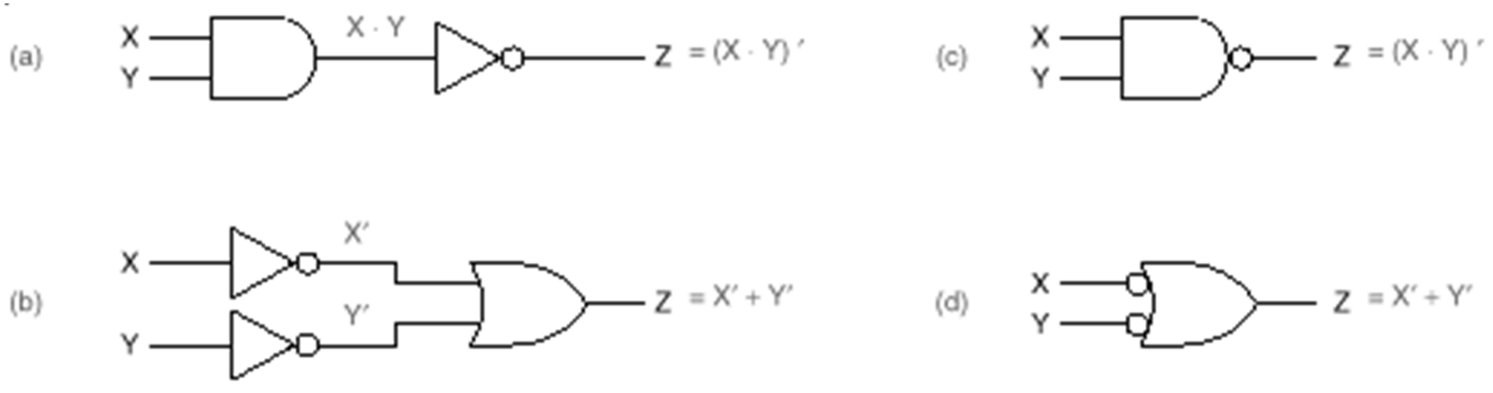


Figure 4–3 Equivalent circuits according to DeMorgan's theorem T13: (a) AND-NOT; (b) NOT-OR; (c) logic symbol for a NAND gate; (d) equivalent symbol for a NAND gate.

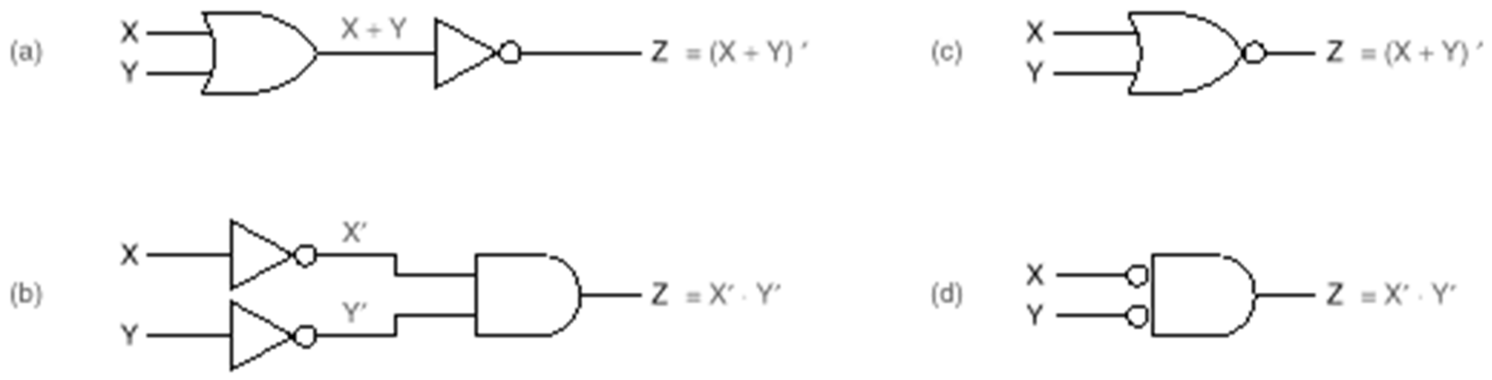


Figure 4–4 Equivalent circuits according to DeMorgan's theorem T13′: (a) OR-NOT; (b) NOT-AND; (c) logic symbol for a NOR gate; (d) equivalent symbol for a NOR gate.

Análise de Circuitos Combinacionais

- Da análise de circuitos combinacionais obtém-se a descrição formal das respectivas funções lógicas. Com estas é possível:
  – Determinar o comportamento do circuito para várias combinações das entradas,
  – Manipular a descrição algébrica e sugerir diferentes estruturas para o circuito,
  – Transformar a descrição algébrica numa forma normalizada que corresponde a uma estrutura fisicamente disponível.

Análise de Circuitos Combinacionais

- Há 5 formas de representar uma função lógica:
  - Uma tabela de verdade,
  - Uma soma algébrica dos termos mínimos, soma canónica,
  - Um somatório dos termos mínimos,
  - Um produto algébrico dos termos máximos, produto canónico,
  - Um produtório dos termos máximos.

Análise de Circuitos Combinacionais

Table 4–6
Minterms and maxterms for a 3-variable logic function, F(X,Y,Z).

Row	X	Y	Z	F	Minterm	Maxterm
0	0	0	0	F(0,0,0)	$X' \cdot Y' \cdot Z'$	$X + Y + Z$
1	0	0	1	F(0,0,1)	$X' \cdot Y' \cdot Z$	$X + Y + Z'$
2	0	1	0	F(0,1,0)	$X' \cdot Y \cdot Z'$	$X + Y' + Z$
3	0	1	1	F(0,1,1)	$X' \cdot Y \cdot Z$	$X + Y' + Z'$
4	1	0	0	F(1,0,0)	$X \cdot Y' \cdot Z'$	$X' + Y + Z$
5	1	0	1	F(1,0,1)	$X \cdot Y' \cdot Z$	$X' + Y + Z'$
6	1	1	0	F(1,1,0)	$X \cdot Y \cdot Z'$	$X' + Y' + Z$
7	1	1	1	F(1,1,1)	$X \cdot Y \cdot Z$	$X' + Y' + Z'$

- A função lógica F é dada por: X’.Y’.Z’+X’.Y.Z+X.Y’.Z’+X.Y.Z’+X.Y.Z que pode ser representada como um somatório:

$$F = \sum_{X,Y,Z}(0,3,4,6,7)$$

- Ou, usando a dualidade: (X+Y+Z’).(X+Y’+Z).(X’+Y+Z’) que pode ser representada utilizando um produtório:

$$F = \prod_{X,Y,Z}(1,2,5)$$

Análise de Circuitos Combinacionais

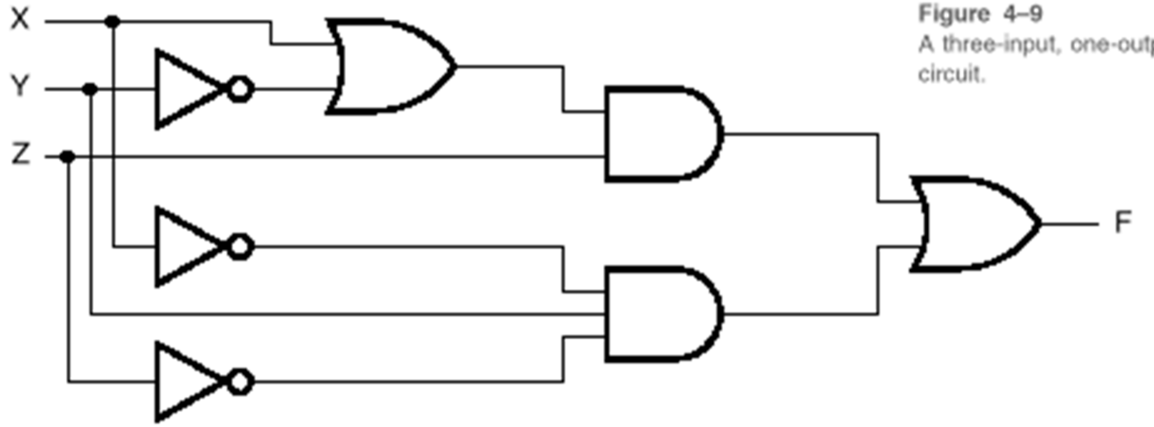


Figure 4–9
A three-input, one-output logic circuit.

- Como obter a função F(X,Y,Z)?

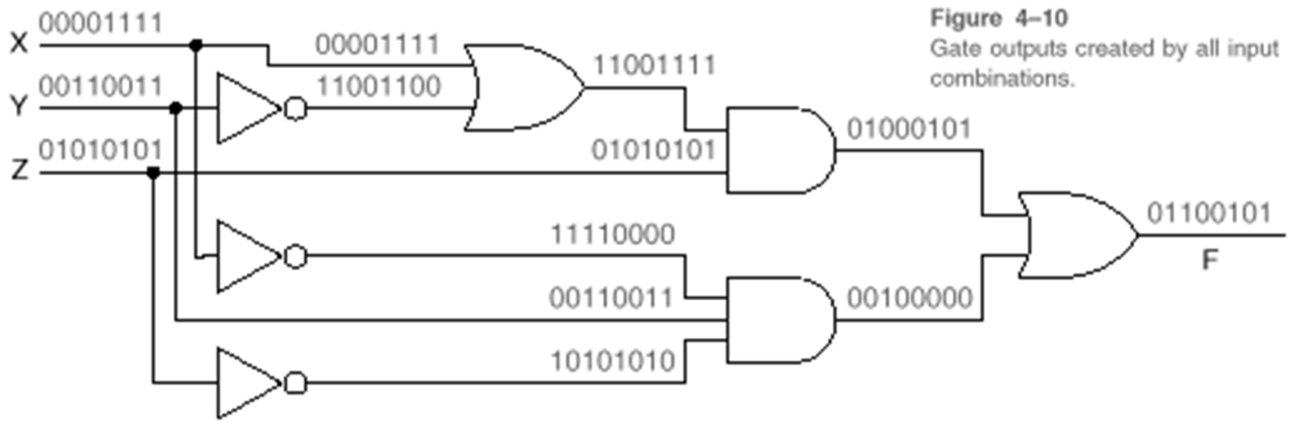


Figure 4–10
Gate outputs created by all input combinations.

- Construir Tabela de Verdade.

Análise de Circuitos Combinacionais

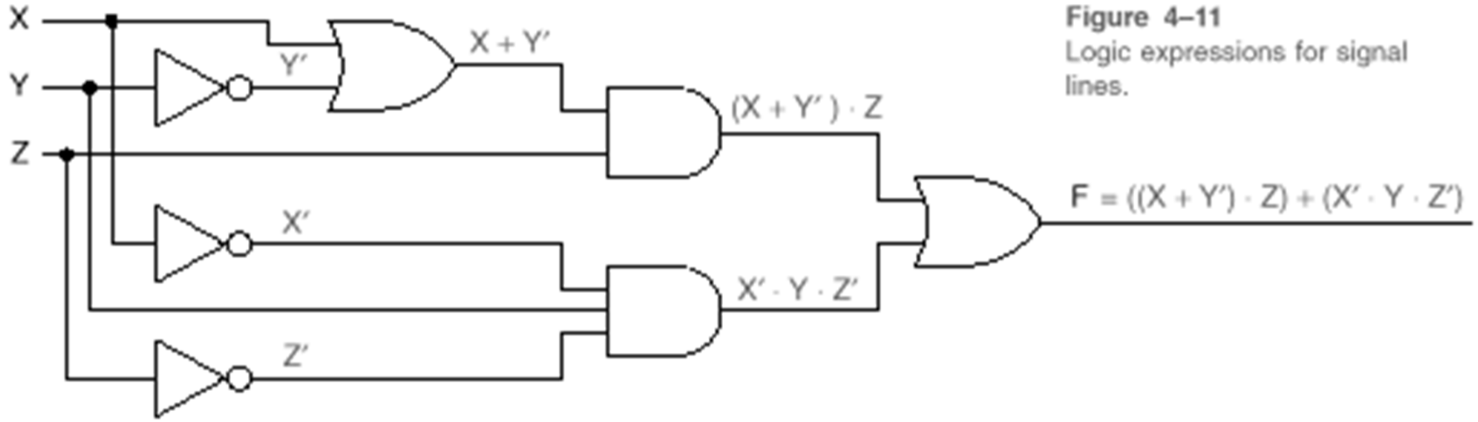


Figure 4–11
Logic expressions for signal lines.

- Obter expressão lógica.

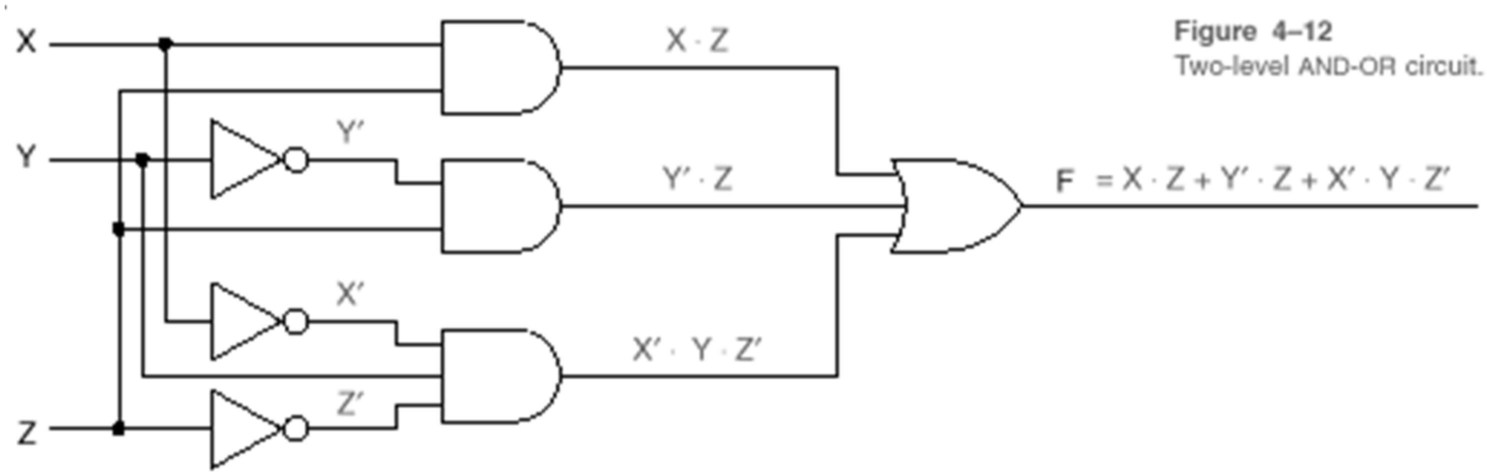


Figure 4–12
Two-level AND-OR circuit.

- Mesma função lógica (implementação diferente). Soma de produtos.

Análise de Circuitos Combinacionais

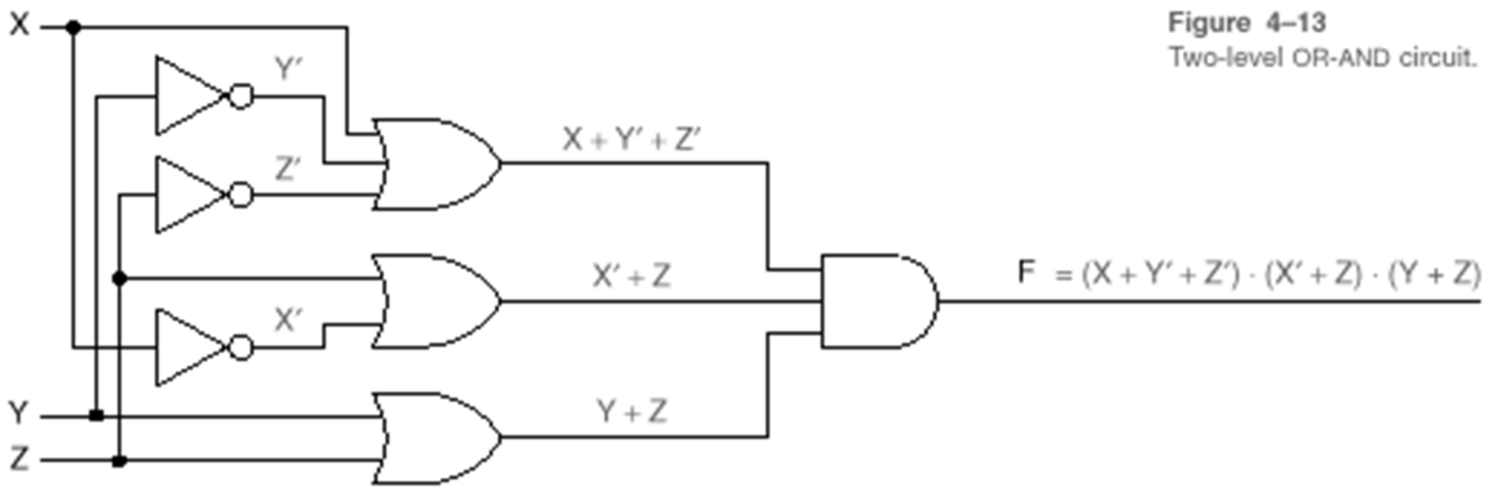


Figure 4–13
Two-level OR-AND circuit.

- Mesma função lógica (implementação diferente). Produto de Somas.

$$
\begin{aligned}
F &= ((X+Y').Z) + (X'.Y.Z') \\
&= (X+Y'+X') . (X+Y'+Y) . (X+Y'+Z') . (Z+X') . (Z+Y) . (Z+Z') \\
&= 1 . 1 . (X+Y'+Z') . (X'+Z) . (Y+Z) . 1 \\
&= (X+Y'+Z') . (X'+Z) . (Y+Z)
\end{aligned}
$$

Análise de Circuitos Combinacionais

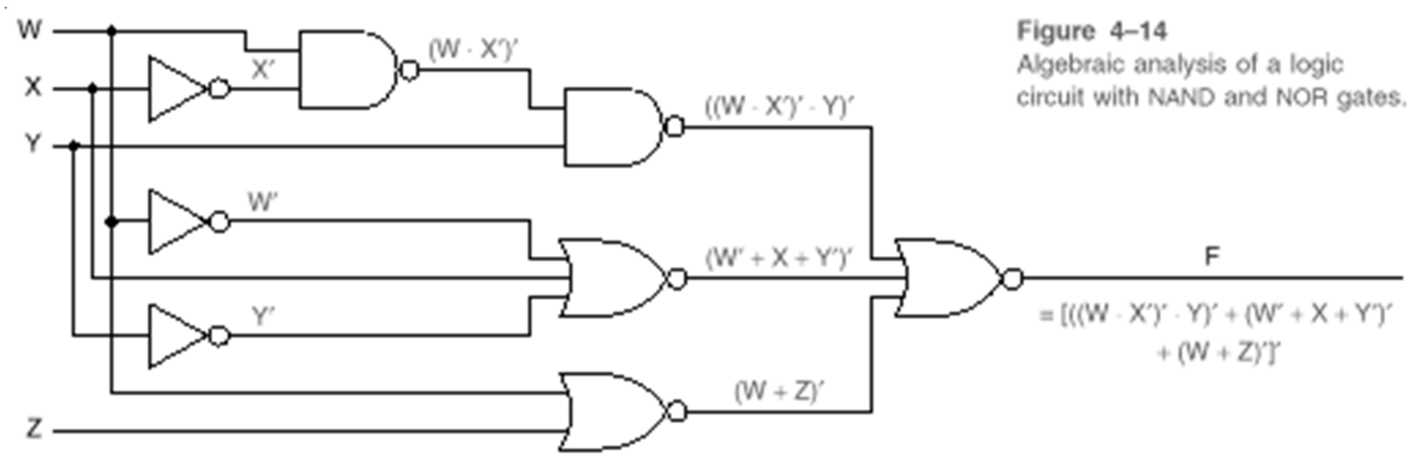


Figure 4–14
Algebraic analysis of a logic circuit with NAND and NOR gates.

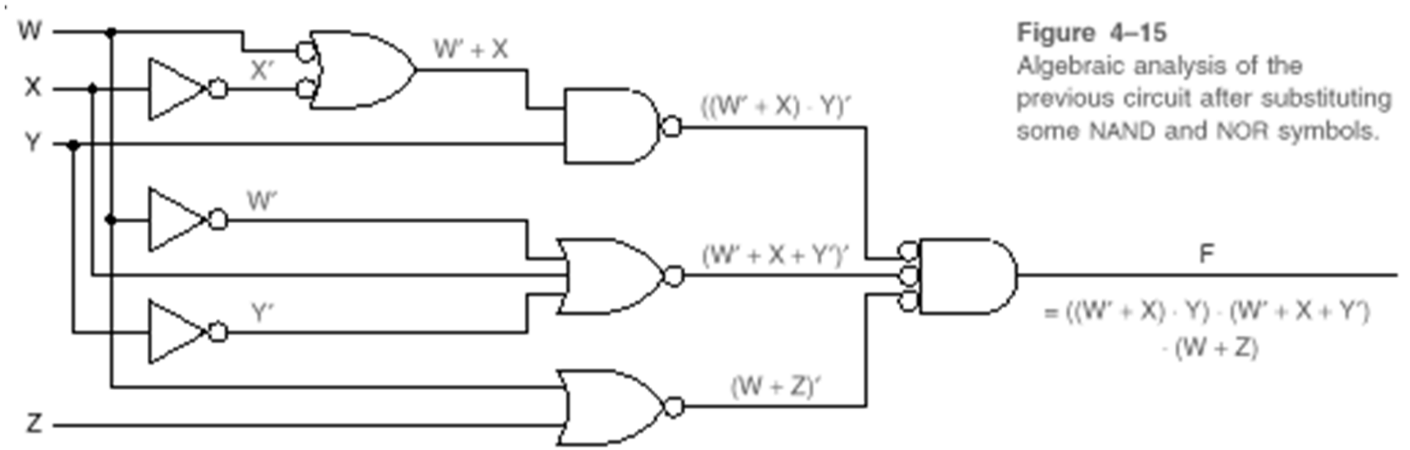


Figure 4–15
Algebraic analysis of the previous circuit after substituting some NAND and NOR symbols.

Análise de Circuitos Combinacionais

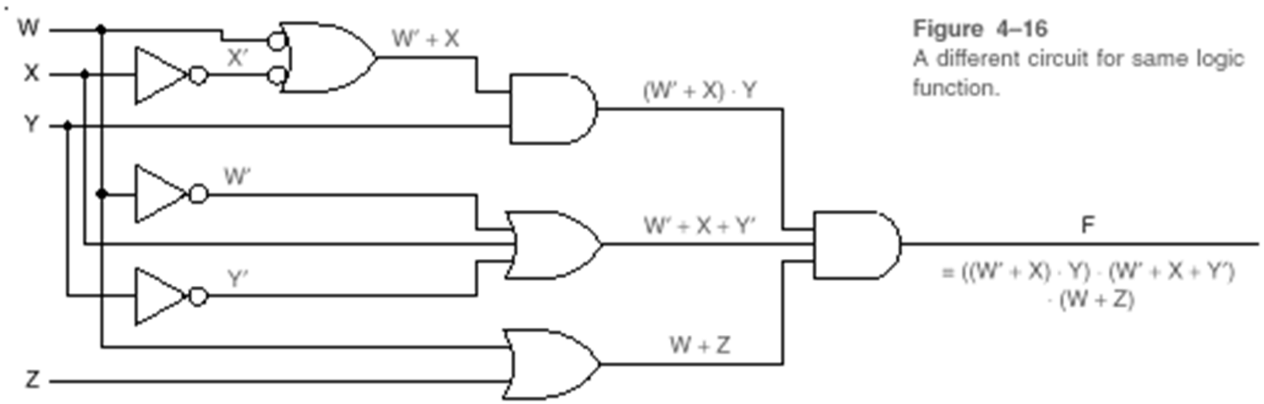


Figure 4–16
A different circuit for same logic function.

- 3 implementações para G(W,X,Y,Z) = W.X.Y + Y.Z

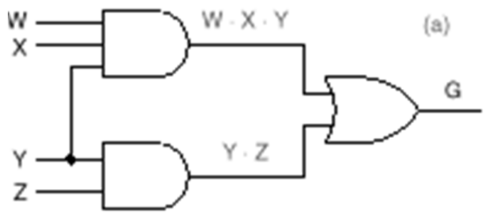
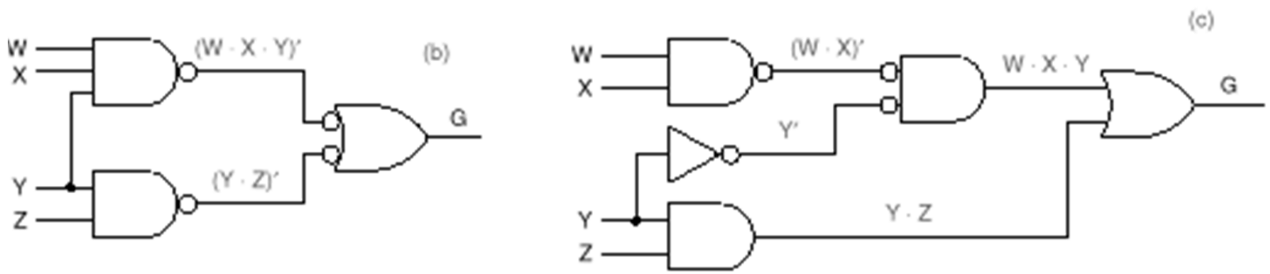


Figure 4–17
Three circuits for G(W,X,Y,Z) = W · X · Y + Y · Z: (a) two-level AND-OR; (b) two-level NAND-NAND; (c) ad hoc.



Análise de Circuitos Combinacionais

- Exercícios:

Construa a tabela de verdade das funções:

i) $F = W.X.Y.Z.(W.X.Y.Z' + W.X'.Y.Z + W'.X.Y.Z + W.X.Y'.Z)$

ii) $F = X'.Y'.Z' + X.Y.Z + X.Y'.Z$