Cálculo

Ficha 7

Integrais impróprios

1. Para os integrais impróprios dados seguidamente, investigue se são convergentes ou divergentes e calcule o seu valor, no caso de serem convergentes.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx;$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx;$

c) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\, dx;$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\, dx;$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x-1}\, dx.$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx;$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\, dt;$

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx;$

i) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx;$

2. Determine a área da região dada em cada uma das alíneas seguintes:

1. região definida por $y \geq 0$, $x \geq 1$ e situada abaixo da curva $y = \dfrac{4}{2x+1} - \dfrac{2}{x+2}$.
2. região situada abaixo da recta $y = 0$, acima da curva $y = \ln x$ e à direita da recta $x = 0$;
3. região situada abaixo da curva $y = e^{-x}$, acima da curva $y = e^{-2x}$ e à direita da recta $x = 0$.

3. Uma substância radioactiva decai exponencialmente ao longo do tempo t de acordo com a lei $m(t) = m(0)e^{ct}$, com c uma constante negativa e $m(t)$ a massa da substância no instante t. A duração média M de um átomo dessa substância vale

$$M = -c \int_0^{+\infty} te^{ct}\, dt.$$

Calcule a duração média de um átomo de carbono 14, para o qual $c = -0.000121$.

4. A velocidade média das moléculas de um gás perfeito é dada por

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{M}{2RT}\Big)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\ dv,$$

representando M o peso molecular do gás, R uma constante que varia com o gás que se considera, T a temperatura e v a velocidade molecular. Mostre que $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$.