Premières S Contrôle Commun mai-14

Nom et classe : ....

Exercice 1 **6,5 pts.**

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

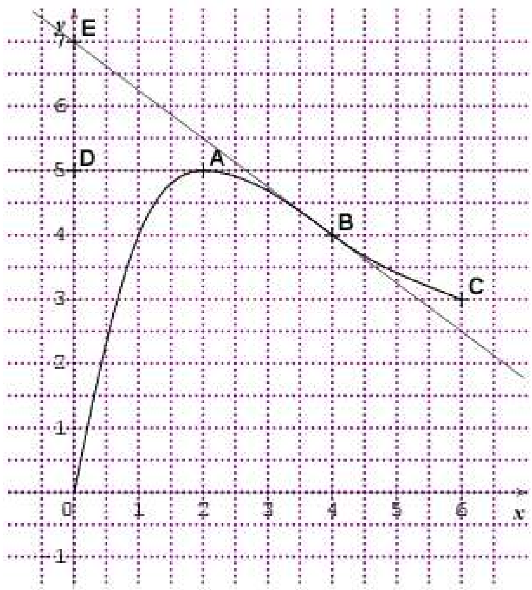
- Le joueur mise 1€ et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre.
2. Soient E et F les évènements :
   E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
   F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
   Montrer que $p(\mathrm{E}) = 0{,}02$ et $p(\mathrm{F}) = 0{,}17$.
3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 €; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 €; sinon il ne reçoit rien.
   X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.
4. Le joueur décide de jouer 5 parties consécutives et indépendantes.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de fois sur les 5 où le joueur lance la roue B.
   a. Y suit une loi binomiale ; donner ses paramètres et son espérance.
   b. Calculer $p(Y = 3)$.

Exercice 2 **7,5 pts.**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A



La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation sur $[0 ; 6]$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Les points O, A, B, C, D, E sont à coordonnées entières.
Les points O, A, B, C appartiennent à $\mathcal{C}$. Les droites (AD) et (BE) sont tangentes à $\mathcal{C}$.
Par lecture graphique :

1. Donner les valeurs de $f(2)$, $f(4)$, $f'(2)$, $f'(4)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 4$.
3. Établir le tableau de signe de f' sur $[0 ; 6]$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur R par $g(x) = \dfrac{20x}{x^2+4}$.

On note $\mathcal{C}g$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les réels dont l'image par g est 4.
2. Montrer que $g'(x) = \dfrac{20(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de g. Préciser $g'(4)$.

Partie C

Au vu des parties A et B la courbe $\mathcal{C}$ peut-elle être une partie de la courbe $\mathcal{C}g$?

Exercice 3 **6 pts.**

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a omis de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur .... Affecter à n la valeur .... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que $v_{n+1} = 0{,}5v_n$. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1+(0{,}5)^n}{n}$.
4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1+(1+0{,}5n)(0{,}5)^n}{n(n+1)}$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).