TRABALHO 1

March 9, 2020

Análise Numérica (M2018)

Francisco Gonçalves
201604505

Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências de Universide do Porto

0.1 Primeiro Exercício

0.1.1 Erro absoluto 1

Escrevam um programa que permita calcular um valor aproximado de

$$S = 18\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!^2}{k^2(2k)!} \tag{1}$$

com erro absoluto inferior a ϵ dado. O vosso programa deve imprimir o número n de termos somados na série e o valor aproximado de S. Usem o vosso programa para calcular valores aproximados de S com erro absoluto inferior a $\epsilon = 10^{-8}, 10^{-9}, ..., 10^{-15}$.

Listing 1: Programa (PYTHON)

```
import math

for i in range (-8, -16, -1):
    count = 0
    k = 1
    sum = 0

    while (True):
        x = abs(math.factorial(k)**2 / (k**2 * math.factorial(2 * k)))
        if (x >= 10**i):
            sum += x
            count = count + 1
            k = k + 1
        else:
            break

    y = 18 * sum
    print('Erro =', 10**i, '| Nmero de termos somados da srie:', count, '| Valor
        aproximado de S =', '%.16f' % y)
```

O programa calcula o valor de k de forma a que o erro absoluto não ultrapasse o valor de ϵ em causa.

O valor da variável x representa cada valor da expressão $\frac{k!^2}{k^2(2k)!}$ desde $k = 1$ até o valor encontrado. O ciclo pára quando o valor de x for inferior ao erro, ou seja, 10^i, sendo que $i \in [-15, 8]$ e vai percorrendo esse intervalo por cada interação do ciclo.

Posteriormente, basta multiplicar o valor do somatório que está representado através da variável sum por 18 e imprimir a resposta desejada.

O número de termos somados da série em cada iteração é contado através de variável $count$ que é incrementada sempre que, após um cálculo de x não é inferior ao erro especificado.

0.1.2 Resultados

⚠**NOTA: precisão usada neste exercício foi de 16 casas decimais**

Erro	Número de termos somados	Valor aproximado de S
10^{-8}	11	9.869604342
10^{-9}	12	9.8696043878
10^{-10}	14	9.86960440042
10^{-11}	15	9.869604400938
10^{-12}	17	9.8696044010814
10^{-13}	18	9.86960440108752
10^{-14}	20	9.869604401089258
10^{-15}	21	9.8696044010893349

0.2 Segundo Exercício

0.2.1 Erro absoluto 2

Escrevam um programa que permita calcular um valor aproximado de

$$S = 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \tag{2}$$

com erro absoluto inferior a ϵ dado. O vosso programa deve imprimir o número n de termos somados na série e o valor aproximado de S. Usem o vosso programa para calcular valores aproximados de S com erro absoluto inferior a $\epsilon = 10^{-8}, 10^{-9}, ..., 10^{-15}$.

Listing 2: Programa (PYTHON)

```
import math

for i in range (-8, -16, -1):
    count = 0
    k = 1
    sum = 0

    while (True):
        x = ((-1)**(k-1)) / (k**2)
        sum = sum + x
        if (abs(x) >= 10**i):
            count = count + 1
            k = k + 1
        else:
            break

    y = 12 * sum
    print('Erro =', 10**i, '| Nmero de termos somados da srie:', count, '| Valor
        aproximado de S =', '%.32f' % y)
```

Tal como no exercício anterior, o programa calcula o valor de k de forma a que o erro absoluto não ultrapasse o valor de ϵ em causa.

O valor da variável x representa cada valor da expressão $\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ desde $k = 1$ até o valor encontrado. O ciclo pára quando o valor de x for inferior ao erro, ou seja, 10^i, sendo que $i \in [-15, 8]$ e vai percorrendo esse intervalo por cada interação do ciclo.

Posteriormente, volta-se a multiplicar o valor do somatório que está representado através da variável sum por 12 desta vez e imprime-se a resposta desejada.

Tal como na implementação do exercício anterior, a variável $count$ representa o número de termos somados da série.

0.2.2 Resultados

⚠**NOTA: precisão usada neste exercício foi de 32 casas decimais**

Erro	Número de termos somados	Valor aproximado de S
10^{-8}	10000	9.8696044610
10^{-9}	31622	9.86960440708
10^{-10}	100000	9.869604401689
10^{-11}	316227	9.8696044010292
10^{-12}	1000000	9.86960440109500
10^{-13}	3162277	9.869604401088312
10^{-14}	10000000	9.8696044010890009
10^{-15}	31622776	9.86960440108894765

0.3 Terceiro Exercício

0.3.1 Erro cometido 1

Sabendo que nos dois exercícios anteriores $S = \pi^2$, alterem os programas para imprimirem também o erro absoluto efetivamente cometido no cálculo de π^2, $E = |\pi^2 - S|$. Comparem, interpretem e justifiquem os resultados.

Listing 3: Programa do exercício 1 (PYTHON)

```python
import math

for i in range (-8, -16, -1):
    count = 0
    k = 1
    sum = 0

    while (True):
        x = abs(math.factorial(k)**2 / (k**2 * math.factorial(2 * k)))
        sum += x
        y = 18 * sum
        if (abs(math.pi**2 - y) >= 10**i):
            count = count + 1
            k = k + 1
        else:
            break

    z = abs(math.pi**2 - y)
    print('Erro =', 10**i, '| Nmero de termos somados da srie:', count, '| Valor
        aproximado de S =', '%.16f' % z)
```

Após as modificações pedidas no exercício 3, o programa compara o valor da série para cada valor de k e verifica se o valor do erro absoluto é menor que o ϵ escolhido, que corresponde a $|\pi^2 - y|$, visto que a variável y corresponde ao valor de S até ao valor de k da iteração atual.

Caso essa condição se verifique, o ciclo termina e imprime o erro absoluto calculado assim como o número de termos somados da série.

0.3.2 Resultados

⚠**NOTA: precisão usada neste exercício foi de 16 casas decimais**

Erro	**Número de termos somados**	**Valor aproximado de S**
10^{-8}	12	0.000000003
10^{-9}	13	0.0000000007
10^{-10}	15	0.00000000003
10^{-11}	16	0.000000000008
10^{-12}	18	0.0000000000004
10^{-13}	19	0.00000000000010
10^{-14}	21	0.000000000000005
10^{-15}	-	-

Não foi possível obter resultados para um erro de $\epsilon = 10^{-15}$ devido a restrições de tempo ao correr o programa.

0.3.3 Erro cometido 2

Listing 4: Programa do exercício 2 (PYTHON)

```
import math

for i in range (-8, -16, -1):
    count = 0
    k = 1
    sum = 0

    while (True):
        x = ((-1)**(k-1)) / (k**2)
        sum = sum + x
        y = 12 * sum
        if (abs(math.pi**2 - abs(y)) >= 10**i):
            count = count + 1
            k = k + 1
        else:
            break

    z = abs(math.pi**2 - y)
    print('Erro =', 10**i, '| Nmero de termos somados da srie:', count, '| Valor
        aproximado de S =', '%.16f' % z)
```

O programa para o exercício 2 sofreu exatamente as mesmas modificações que o exercício anterior logo a explicação é a mesma.

0.3.4 Resultados

⚠**NOTA: precisão usada neste exercício foi de 16 casas decimais**

Erro	Número de termos somados	Valor aproximado de S
10^{-8}	24494	0.000000010
10^{-9}	77450	0.0000000010
10^{-10}	244692	0.00000000010
10^{-11}	760944	0.000000000010
10^{-12}	2039462	0.0000000000010
10^{-13}	3323402	0.00000000000010
10^{-14}	3690030	0.000000000000009
10^{-15}	3718242	0.0000000000000000

Os programas aqui exibidos assim como os reusltados obtidos podem ser consultados em detalhe aqui: `https://github.com/1Skkar1/Numerical-Analysis/tree/master/Trabalho1`