工程矩阵理论:课程介绍，复习引申

东南大学· 数学系· 周建华

August 20, 2016

教材：**工程矩阵理论**，第2版，张明淳，东南大学出版社，2011

教材：**工程矩阵理论**，第2版，张明淳，东南大学出版社，2011
参考书：

教材：**工程矩阵理论**，第2版，张明淳，东南大学出版社，2011

参考书：

1. 北京大学，**高等代数**，第4版，高等教育出版社，2012

教材：**工程矩阵理论**，第2版，张明淳，东南大学出版社，2011
参考书：

1. 北京大学，**高等代数**，第4版，高等教育出版社，2012
2. R.A.Horn and C.R.Johnson,**Matrix Analysis**,Cambridge University Press, 2004

建议：

1. 重点是基本理论，基本方法

建议：

1. 重点是基本理论，基本方法
2. 结合授课内容，熟悉课本；

建议：

1. 重点是基本理论，基本方法
2. 结合授课内容，熟悉课本；
3. 通过例题，理解概念；

建议：

1. 重点是基本理论，基本方法
2. 结合授课内容，熟悉课本；
3. 通过例题，理解概念；
4. 通过练习题，熟悉理论和方法。

课程大致内容:

- 第0章：复习与引深

课程大致内容：

- 第0章：复习与引深
- 第1章：线性空间与线性变换

课程大致内容：

- 第0章：复习与引深
- 第1章：线性空间与线性变换
- 第2章：内积空间、等距变换

课程大致内容：

- 第0章：复习与引深
- 第1章：线性空间与线性变换
- 第2章：内积空间、等距变换
- 第3章：矩阵的相似标准形

课程大致内容：

- 第0章：复习与引深
- 第1章：线性空间与线性变换
- 第2章：内积空间、等距变换
- 第3章：矩阵的相似标准形
- 第4章：Hermite二次型

课程大致内容：

- 第0章：复习与引深
- 第1章：线性空间与线性变换
- 第2章：内积空间、等距变换
- 第3章：矩阵的相似标准形
- 第4章：Hermite二次型
- 第5章：范数及矩阵函数

课程大致内容：

- 第0章：复习与引深
- 第1章：线性空间与线性变换
- 第2章：内积空间、等距变换
- 第3章：矩阵的相似标准形
- 第4章：Hermite二次型
- 第5章：范数及矩阵函数
- 第6章：矩阵的广义逆

1. 计算A^k.

1. 计算A^k.
2. 讨论矩阵序列的极限

1. 计算A^k.
2. 讨论矩阵序列的极限
3. 求线性方程组$AX = b$的近似解

1. 计算A^k.
2. 讨论矩阵序列的极限
3. 求线性方程组$AX = b$ 的近似解

主要方面

1. 矩阵的代数运算

主要方面

1. 矩阵的代数运算
2. 线性方程组

主要方面

1. 矩阵的代数运算
2. 线性方程组
3. 向量

主要方面

1. 矩阵的代数运算
2. 线性方程组
3. 向量
4. 矩阵的秩

矩阵的乘法存在非零零因子

矩阵的乘法存在非零零因子

Example

$$N_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法存在非零零因子

Example

$$N_{n\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法不可交换

矩阵的乘法不可交换

Example

假设$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$, 其中，$d_1, d_2, \cdots, d_n$ 互异.什么样的矩阵与D 可交换？

由此导致的一些问题

由此导致的一些问题

1. 乘法消去律不成立

由此导致的一些问题

1. 乘法消去律不成立
2. 一些代数恒等式对矩阵不再成立

由此导致的一些问题

1. 乘法消去律不成立
2. 一些代数恒等式对矩阵不再成立

注意：当矩阵$AB = BA$ 时，相应的二项式定理成立，即,

由此导致的一些问题

1. 乘法消去律不成立
2. 一些代数恒等式对矩阵不再成立

注意：当矩阵$AB = BA$ 时，相应的二项式定理成立，即,

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^m \\
&= A^m + C_m^1 A^{m-1} B + C_m^2 A^{m-2} B^2 + \cdots + C_m^{m-1} A B^{m-1} + B^m.
\end{aligned}
$$

Example

计算下述n阶方阵A的k次幂，其中：

Example

计算下述n阶方阵A的k次幂，其中：

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

分块矩阵

设$A = (a_{ij})_{s\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times t}$

分块矩阵

设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$
将这两个矩阵分块：$A=(A_{ij})_{p\times q}$, $B=(B_{ij})_{q\times r}$.

分块矩阵

设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$
将这两个矩阵分块：$A=(A_{ij})_{p\times q}$, $B=(B_{ij})_{q\times r}$.
在一定条件下，$C=AB$ 也可以写成分块矩阵

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{pmatrix}.$$

其中，$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{iq}B_{qj}$.

典型的分块方式1

设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$.
分成2×2的分块矩阵
假设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$:

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

典型的分块方式1

设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$.
分成2×2的分块矩阵
假设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$:

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Example

假设A，B 分别$m\times n$ 阶、$n\times m$ 阶方阵，构造矩阵$M=\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix}$.
(1), 计算MG 和GM;
(2), 证明: $|I_m-AB|=|I_n-BA|$.

典型的分块方式2

将A 视作一块，B 按列分块

假设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$:

$$AB=A(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_t)=(A\beta_1,\ A\beta_2,\ \cdots,\ A\beta_t).$$

典型的分块方式2

将A 视作一块，B 按列分块

假设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$:

$$AB=A(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\ ,\ \beta_t)=(A\beta_1,\ A\beta_2,\ \cdots\ ,\ A\beta_t).$$

由此可以推出

若$AB=O$, 则$r(A)+r(B)\le n$.

典型的分块方式3

将A 按列分块，B 不分块

假设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$:

$$
\begin{aligned}
AB &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nt} \end{pmatrix} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} b_{i1}\alpha_i, \sum_{i=1}^{n} b_{i2}\alpha_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} b_{it}\alpha_i).
\end{aligned}
$$

典型的分块方式3

将A 按列分块，B 不分块

假设$A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$:

$$
\begin{aligned}
AB &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nt} \end{pmatrix} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} b_{i1}\alpha_i, \sum_{i=1}^{n} b_{i2}\alpha_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} b_{it}\alpha_i).
\end{aligned}
$$

由此可以推出

$$r(AB) \leq r(A), r(B).$$

矩阵的相似对角化问题

如果$n \times n$ 矩阵A 相似于对角阵

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

其中

$$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n),\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ 则

$$Ap_i = \lambda_i p_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

线性方程组

设方程组$Ax=b$, $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $b=(b_1\,b_2\,\cdots\,b_s)^T$ 则有

1. 有解$\Leftrightarrow$ $r(A)=r(A,\,b)$.

线性方程组

设方程组$Ax = b$, $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $b = (b_1\, b_2\, \cdots\, b_s)^T$ 则有

1. 有解$\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A,\, b)$.
2. 若$r(A) = r(A,\, b) = r$, 则有唯一解$\Leftrightarrow$ $r = n$.

线性方程组

设方程组$Ax = b$, $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $b = (b_1\, b_2\, \cdots\, b_s)^T$ 则有

1. 有解$\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A,\, b)$.
2. 若$r(A) = r(A,\, b) = r$, 则有唯一解$\Leftrightarrow$ $r = n$.
3. 若$r(A) = r(A,\, b) = r < n$, 则通解中含有$n - r$ 个自由未知量.

齐次线性方程组的基础解系

对于齐次线性方程组 $Ax = 0,\ A = (a_{ij})_{s\times n}$ 则有

1. 有非零解$\Leftrightarrow r(A) < n$.

齐次线性方程组的基础解系

对于齐次线性方程组 $Ax = 0,\ A = (a_{ij})_{s\times n}$ 则有

1. 有非零解$\Leftrightarrow\ r(A) < n.$
2. 若$r(A) < n$, 则其基础解系中含$n - r$ 个解向量.

齐次线性方程组的基础解系

对于齐次线性方程组 $Ax = 0,\ A = (a_{ij})_{s\times n}$ 则有

1. 有非零解$\Leftrightarrow$ $r(A) < n$.
2. 若$r(A) < n$, 则其基础解系中含$n - r$ 个解向量.
3. 若$r(A) < n$, 则其任意$n - r$ 个线性无关的解向量是其基础解系.

齐次线性方程组的基础解系

对于齐次线性方程组 $Ax = 0$, $A = (a_{ij})_{s\times n}$ 则有

1. 有非零解$\Leftrightarrow$ $r(A) < n$.
2. 若$r(A) < n$, 则其基础解系中含$n - r$ 个解向量.
3. 若$r(A) < n$, 则其任意$n - r$ 个线性无关的解向量是其基础解系.

Example

求下列线性方程组的解：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

(简化)阶梯形矩阵

满足下列条件的矩阵称为阶梯形矩阵：

(简化)阶梯形矩阵

满足下列条件的矩阵称为阶梯形矩阵：

1. 元素全为零的行（称为零行）均在矩阵的下方.
2. 非零首元所在列的下标随着行标的增大而严格增大；

(简化)阶梯形矩阵

满足下列条件的矩阵称为阶梯形矩阵：

1. 元素全为零的行（称为零行）均在矩阵的下方.
2. 非零首元所在列的下标随着行标的增大而严格增大；

满足下述条件的阶梯形矩阵称为简化阶梯形矩阵：

(简化)阶梯形矩阵

满足下列条件的矩阵称为阶梯形矩阵：

1. 元素全为零的行（称为零行）均在矩阵的下方.
2. 非零首元所在列的下标随着行标的增大而严格增大；

满足下述条件的阶梯形矩阵称为简化阶梯形矩阵：

1. 各个非零行的非零首元均为1；
2. 除了非零首元外，非零首元所在的列其余元素都为零.

(简化)阶梯形矩阵

满足下列条件的矩阵称为阶梯形矩阵：

1. 元素全为零的行（称为零行）均在矩阵的下方.
2. 非零首元所在列的下标随着行标的增大而严格增大；

满足下述条件的阶梯形矩阵称为简化阶梯形矩阵：

1. 各个非零行的非零首元均为1；
2. 除了非零首元外，非零首元所在的列其余元素都为零.

Gauss 消元法

1. 用初等行变换将增广矩阵化成阶梯形矩阵;

Gauss 消元法

1. 用初等行变换将增广矩阵化成阶梯形矩阵;
2. 确定自由未知量;

Gauss 消元法

1. 用初等行变换将增广矩阵化成阶梯形矩阵;
2. 确定自由未知量;
3. 用回代法找出通解.

Gauss 消元法

1. 用初等行变换将增广矩阵化成阶梯形矩阵;
2. 确定自由未知量;
3. 用回代法找出通解.

Example

求下列线性方程组的解:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases}$$

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的部分组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足

1. $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的部分组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足

1. $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中每个向量均可由$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示，则称$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大无关组.

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的部分组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足

1. $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中每个向量均可由$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示，则称$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大无关组.

1. 如果一向量组的极大无关组中含r个向量，则称这个向量组的秩为r.

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的部分组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足

1. $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中每个向量均可由$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示，则称$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大无关组.

1. 如果一向量组的极大无关组中含r个向量，则称这个向量组的秩为r.
2. 若向量组的秩为r, 则该向量组中任意r 个线性无关的向量均是其极大无关组.

极大无关组的计算

Example

求向量组

$$\alpha_1 = (1, -2, 0, 2), \alpha_2 = (2, 1, 1, -1),$$

$$\alpha_3 = (1, 2, 1, -3), \alpha_4 = (1, 1, 2, 2),$$

$$\alpha_5 = (1, 0, 1, 2)$$

的秩和一个极大无关组,并将其余的向量用此极大无关组线性表出.

有关矩阵的秩的不等式

1. $r(A+B) \le r(A)+r(B)$;

有关矩阵的秩的不等式

1. $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$;
2. $r(AB) \leq r(A),\ r(B)$;

有关矩阵的秩的不等式

1. $r(A+B) \le r(A)+r(B)$;
2. $r(AB) \le r(A),\ r(B)$;
3. 若$A_{s\times n}B_{n\times t}=O$, 则$r(A)+r(B)\le n$;

有关矩阵的秩的不等式

1. $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$;
2. $r(AB) \leq r(A),\ r(B)$;
3. 若$A_{s\times n}B_{n\times t}=O$, 则$r(A)+r(B)\leq n$;
4. $r(A_{s\times n}B_{n\times t}) \geq r(A)+r(B)-n$.

Example

证明：若P, Q 都是可逆矩阵，则

$$r(PAQ) = r(A).$$

矩阵的秩

Example

证明：若P, Q 都是可逆矩阵，则

$$r(PAQ) = r(A).$$

Example

证明：若n 阶方阵A 满足$A^2 = A$, 则

$$r(A) + r(I - A) = n.$$

Example

设A 是$s \times n$ 矩阵，b 是s 维列向量，证明：

Example

设A 是$s \times n$ 矩阵，b 是s 维列向量，证明：

1. $r(A) = r(A^H A)$;

Example

设A 是$s \times n$ 矩阵，b 是s 维列向量，证明：

1. $r(A) = r(A^H A)$;
2. 线性方程组$A^H Ax = A^H b$ 恒有解.

矩阵的等价标准形

$s \times n$ 矩阵A 的秩等于r

$\Leftrightarrow A$ 与矩阵$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 等价

矩阵的等价标准形

$s \times n$ 矩阵A 的秩等于r

$\Leftrightarrow$ A 与矩阵$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 等价

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P_{s\times s}$, $Q_{n\times n}$ 使得$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$.

Example

假设$s \times n$ 矩阵A 的秩为r, 证明：存在$s \times r$ 矩阵B 及$r \times n$ 矩阵C, 使得$A = BC$.(矩阵的满秩分解)

Example

假设$s\times n$ 矩阵A 的秩为r, 证明：存在$s\times r$ 矩阵B 及$r\times n$ 矩阵C, 使得$A=BC$.(矩阵的满秩分解)

Example

求$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$的满秩分解.