# 东南大学考试卷（A）

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 课程名称 | 工程矩阵理论 | 考试学期 | 08-09-2 | 得　分 | |
| 适用范围 | 工科硕士研究生 | 考试形式 | 闭　卷 | 考试时间长度 | 150分钟 |

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

一．（15%）填空题

1．$R^3$ 的子空间 $V=\{(x,y,z)\mid x+y-z=0=0\}$ 的一组基是________________；

2．若线性空间 $V$ 的线性变换 $f$ 在基 $\alpha,\beta$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$，则 $f$ 在基 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 下的矩阵是________________________________；

3．如果 $n\times n$ 矩阵 $A$ 满足 $A^2=A$，并且 $A$ 的秩为 $r$，则行列式 $|A+2I|=$________；

4．若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&7\\9&2\end{pmatrix}$，则矩阵函数 $e^A$ 的行列式 $|e^A|=$________________；

5．若 $\alpha$ 是 $n$ 维单位列向量，$A=I+k\alpha\alpha^H$ 是正定的，则参数 $k$ 满足条件________。

二．（12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&a&4\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&2&0\\6&c&b\end{pmatrix}$。讨论 $A$ 的可能的 Jordan 标准形。

问：当参数 $a,b,c$ 满足什么条件时，矩阵 $A$ 与 $B$ 是相似的。

三．（20%）记 $M=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$，$C^{2\times2}$ 上的变换 $f$ 定义为：对 $X\in C^{2\times2}$，$f(X)=XM$

1．证明：$f$ 是 $C^{2\times2}$ 上的线性变换；

2．求 $f$ 在 $C^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵 $A$；

姓名________　学号________

线　封　密

3．求 $f$ 的特征值及相应的特征子空间的基；

4．问：是否存在 $C^{2\times 2}$ 的基，使得 $f$ 在这组基下的矩阵是对角阵？如存在，试给出这样的一组基及相应的对角阵；如不存在，请说明理由。

四．（10%）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$。试将 $Ae^{At}$ 表示成关于 $A$ 的次数不超过 2 的多项式。

五．（8%）求 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 $A^+$。

六．（15%）假设 $V$ 是有限维欧氏空间，$\omega \in V$ 是单位向量，$V$ 上的线性变换 $f$ 定义如下：对任意 $\eta \in V$，$f(\eta)=\eta-2<\eta,\omega>\omega$。

1. 证明：$f$ 是 $V$ 上的正交变换。
2. 在 $R[x]_3$ 中定义内积：对 $\varphi(x),\psi(x)\in R[x]_3$，$<\varphi(x),\psi(x)>=\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx$。于是，$R[x]_3$ 成为欧氏空间。分别求 $R[x]_3$ 中向量 $\alpha=1$ 及 $\beta=x$ 的长度，并求正实数 $k$ 及单位向量 $\omega\in R[x]_3$，使得如上的正交变换 $f$ 将 $\alpha$ 变成 $k\beta$。

七．证明题（20%）

1. 假设 $A$ 是 $s\times n$ 矩阵，$U,V$ 分别是 $s\times s$、$n\times n$ 酉矩阵。证明：$\|A\|_2=\|UAV\|_2$。
2. 假设 $A$ 是 $n\times n$ 正规矩阵。若 $A$ 的特征值的模都等于 1，证明：$A$ 是酉矩阵。
3. 假设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 是 Hermite 矩阵，其中，$A_{ij}$ 是 $A$ 的子矩阵，并且 $A_{11},A_{22}$ 都是方阵。若 $A$ 是正定的。证明关于行列式的不等式：$|A|\le|A_{11}||A_{22}|$。