

2003 年第二学期

工程矩阵理论期终考试试卷

(闭卷, 考试时间: 150 分钟)

系别 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

一. 填空题 (25%)

1. 设 $R[x]_3$ 的子空间 $W = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid p(0) = p(1)\}$, 则 W 的一组基为 _____;
2. 线性变换 f 在基 α_1, α_2 下矩阵为 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, 则 f 在基 $\alpha_1 + k\alpha_2, \alpha_2$ 下的矩阵为 _____;
3. 从 $R^{2 \times 2}$ 到 R 的线性映射 f 定义为: $f(A) = \text{tr}A$, $\forall A \in R^{2 \times 2}$, 则值域 $R(f)$ 的一组基为 _____, 核空间 $K(f)$ 的一组基为 _____;
4. 作为酉空间 C^6 的子空间, 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_5 - 2x_6 = 0 \end{cases}$ 的解空间 W 的正交补空间的一组标准正交基为 _____;
5. 已知 $\|A\|_F = a, \|B\|_F = b, \|A\|_2 = c, \|B\|_2 = d$, 作 $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 则 $\|M\|_f =$ _____, $\|M\|_2 =$ _____;
6. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, 则 $\sin A =$ _____。

二. (8%) 设 $A \in C^{2 \times 2}$ 满足 $A^2 = A + 6I$ 且 $r(A + 2I) = k$, 求 $\det A$ 。

三. (10%) 已知 $C^{2 \times 2}$ 的子空间 $V_1 = \{B \mid AB = BA\}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid z = x - y = 0 \right\}$ 。分别求 $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$ 的基。

四. (10%) 已知 $C^{2 \times 2}$ 上的线性变换 $f(X) = (a + b + c + d) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall X \in C^{2 \times 2}$ 。

1. 求 f 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵;

2. 求 f 的特征值及相应的特征子空间的基。

五. (8%) 已知矩阵 A 的最小多项式为 $\lambda(\lambda-1)^2$, t 为复数。试将 e^{At} 表示成 A 的次数不超过 2 的多项式。

六. (10%) 设 $\dim V = n$, $f \in \text{Hom}(V, V)$, 且 $R(f) = K(f)$ 。

1. 试证: $f^2 = O$, 且 n 是偶数;

2. 求 f 的矩阵的 Jordan 标准形。

七. (9%)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^+ ;

2. 设 $A \in C^{s \times n}$, $r(A) = r$ 。求 AA^+ 的 Jordan 标准形。

八. (20%) 证明下列命题:

1. 设 $f, g \in \text{Hom}(V, V)$, 且 $fg = f$, 则 $V = K(f) + R(g)$;

2. 若内积空间 V 中向量 $\alpha + \beta$ 与 $\alpha - \beta$ 的长度相等, 且 β 与 $\alpha + \beta$ 正交, 则 β 是零向量;

3. 若 A 是正规矩阵, 则 A 是酉矩阵的充要条件是 A 的特征值的模全为 1;

4. 若 n 阶 Hermite 矩阵 A 为正定阵, 又 B 是 n 阶方阵且 $A - B^H AB$ 也是正定阵, 则 B 的谱半径 $\rho(A) < 1$ 。