Ch 6 矩阵的广义逆

广义逆源于研究 $AX=b$ 的解. 最早于1920年 Moore 提出, Penrose 于1955年论证现在的定义, 故现称之为 MP-逆, 即 A^+。

一. 定义及性质

定义6.1. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $\exists G\in\mathbb{C}^{n\times s}$ 满足:

① $AGA=A$, ② $GAG=G$, ③ $(AG)^H=AG$, ④ $(GA)^H=GA$

则称 G 为 A 的广义逆 或 Moore-Penrose 逆, 以上四方程称为 Penrose 方程.

存在唯一性: 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 则 A 的广义逆存在且唯一.

证明: A 的奇值分解: $A=U\begin{bmatrix}D & \\ & 0\end{bmatrix}V^H$, $D=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_r}\end{bmatrix}$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为 A^HA 的正特征值, 取 $G=V\begin{bmatrix}D^{-1} & \\ & 0\end{bmatrix}U^H$

可验证其满足 Penrose 四方程. 存在性得证.

唯一性: 设 G_1, G_2 均为 A 的广义逆, 则

$$G_1 \overset{②}{=} G_1AG_1 \underset{①}{=} G_1AG_2AG_1 \underset{④}{\overset{④}{=}} A^HG_1^HA^HG_2^HG_1 \overset{①}{=} A^HG_2^HG_1$$

$$\underset{④}{=} G_2AG_1 \overset{②}{=} G_2G_1^HA^H \underset{①}{=} G_2G_1^HA^HG_2^HA^H \underset{③}{\overset{③}{=}} G_2AG_1AG_2$$

$$\overset{①}{=} G_2AG_2 \underset{②}{=} G_2.\ \#$$

注. 1° 记 G 为 A^+, 则 AA^+ 与 A^+A 都是 H 阵;

$r(AA^+)=r(A)$
$(AA^+)^2=AA^+$
幂等阵
特征值为0或1

2° A 可逆则 $A^+=A^{-1}$, $O_{s\times n}^+=O_{n\times s}$

$$\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}A^+ & 0\\ 0 & B^+\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}0 & B^+\\ A^+ & 0\end{bmatrix}$$

特别地, $[A,0]^+=\begin{bmatrix}A^+\\ 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A\\ 0\end{bmatrix}^+=[A^+,0]$.

A^+ 的性质:

1° $(A^+)^+=A$; 2° $(A^H)^+=(A^+)^H$; 3° $(A^T)^+=(A^+)^T$;

4° $(kA)^+ = k^+ A^+$, $k^+ = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k\neq 0 \\ 0, & k=0 \end{cases}$;

5° $A^H = A^H A A^+ = A^+ A A^H$

6° $(A^H A)^+ = A^+ (A^H)^+$, $(AA^H)^+ = (A^H)^+ A^+$

7° $A^+ = (A^H A)^+ A^H = A^H (AA^H)^+$

8° $R(A^+) = R(A^H)$, $K(A^+) = K(A^H)$

证明：略.

二. A^+的求法

方法一. 设$A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, $r(A) = r \geq 1$且$A = \overset{s\times r}{B}\overset{r\times n}{C}$为满秩分解，则

$$A^+ = C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H$$

特别地，若$r(A) = n$，则$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$

若$r(A) = s$，则$A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$.

方法二. 设$A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, $r(A) = r \geq 1$，则 (略)

$$A^+ = (X_1, \cdots, X_r, 0, \cdots, 0)_{n\times s} (AX_1, \cdots, AX_r, Y_{r+1}, \cdots, Y_s)^{-1},$$

其中$X_1, \cdots, X_r$为$R(A^H)$的一组基；$Y_{r+1}, \cdots, Y_s$为$K(A^H)$的一组基.

例1. 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，求$A^+$

方法一：解. $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore A = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，即$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^+ = C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

方法二. $A = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$ $\therefore A^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ & \\ & A_2^+ \end{bmatrix}$

$A_1^+ = \frac{1}{2}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}(1, 0, 1)$ $\therefore A_2^+ = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 故$A^+ = ??$ #

例2. 设$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&-1&1\\0&2&0&0&0\\3&0&0&0&0\end{bmatrix}$，求$A^+$.

解：记$A=\begin{bmatrix}&A_1\\A_2&\end{bmatrix}$，则$A^+=\begin{bmatrix}&A_2^+\\A_1^+&\end{bmatrix}$

$A_2^+=A_2^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$，$r(A_1)=2$ 则

$A_1^+=A_1^H(A_1A_1^H)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\2&-2\\1&1\end{bmatrix}$，故$A^+=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0&0\end{bmatrix}$ #

例3. 设α,β为n维非零列向量，$A=\alpha\beta^H$，求A^+

解. 易见$A=\alpha\beta^H$为A的满秩分解

故 $A^+=\beta(\beta^H\beta)^{-1}(\alpha^H\alpha)^{-1}\alpha^H=(\beta^H\beta)^{-1}(\alpha^H\alpha)^{-1}\beta\alpha^H$. #

三. 广义逆的应用

定义6.2 设$A\in\mathbb{C}^{s\times n}$，若$X_0$满足$\|AX_0-b\|_2=\min\limits_{X\in\mathbb{C}^n}\|AX-b\|_2$

则称$X=X_0$是$AX=b$的最小二乘解，其中~~长度最小~~长度最小的叫 极小最小二乘解。

定理6.3.1 设$A\in\mathbb{C}^{s\times n}$，$b\in\mathbb{C}^s$，则$X=X_0$是$AX=b$的最小二乘解$\Leftrightarrow AX_0-b\in[R(A)]^\perp\Leftrightarrow A^HAX_0=A^Hb$.

定理6.3.2 设$A\in\mathbb{C}^{s\times n}$，则$AX=b$的最小二乘解的通解为$X=A^+b+(I-A^+A)Y$，$\forall Y\in\mathbb{C}^n$

且极小最小二乘解为$X=A^+b$ (唯一).

定理6.3.1的证明：记$W=R(A)$ 则$\mathbb{C}^s=W\oplus W^\perp$ 故$\exists Y_0\in\mathbb{C}^n$

使得 $b=AY_0+(b-AY_0)$ 且$b-AY_0\in W^\perp$. $\forall X\in\mathbb{C}^n$有

$$\begin{aligned}\|AX-b\|_2^2&=\|AX-AY_0+AY_0-b\|_2^2\\&=\|AX-AY_0\|_2^2+\|AY_0-b\|_2^2\\&\geq\|AY_0-b\|_2^2\end{aligned}$$

证 $\|AX_0-b\|_2=\min\limits_{X\in\mathbb{C}^n}\|AX-b\|_2 \Leftrightarrow AX_0=AY_0$

$\Leftrightarrow AX_0-b\in W^{\perp}=[R(A)]^{\perp}=K(A^H)$

$\Leftrightarrow A^HAX_0=A^Hb$.

\#

补一：P_{64} 性质部分证明：

5° $A^H=(AA^+A)^H=A^H(AA^+)^H=A^HAA^+$

$=(A^+A)^HA^H=A^+AA^H$

6° $(A^HA)A^+(A^H)^+(A^HA)=(A^+AA^+)(A^+)^H(A^HA)$

$=A^H(A^+)^HA^HA=(A^+A)^HA^HA=(A^+AA^H)A=A^HA$

……

7° $(A^HA)^+A^H=A^+(A^+)^HA^H=A^+(AA^+)^H=A^+AA^+=A^+$, …

8° $X\in R(A^+)\Rightarrow\exists Y$ 使 $X=A^+Y=A^H(AA^H)^+Y\in R(A^H)$

$X\in R(A^H)\Rightarrow\exists Y$ 使 $X=A^HY=A^+AA^HY\in R(A^+)$.

∴ $R(A^+)=R(A^H)$

设 $A^+X=0$ 则 $\underset{\displaystyle A^+(A^+)^HA^HX\;\cancel{=A^+AA^+X=A^+X}}{\underset{\|}{(A^HA)^+}}A^HX=0$

∴ $0=(A^HAA^+)(A^+)^HA^HX$

$=A^H(A^+)^HA^HX=A^HX$ ∴ $K(A^+)\subseteq K(A^H)$

类似地有，$K(A^H)\subseteq K(A^+)$，得证. \#

补二、例、设 $A_{s\times n}$，$r(A)=r$. 证明：$\|AA^+\|_F=\sqrt{r}\,\|AA^+\|_2$

证明、AA^+ 的特征值为1或0.

AA^+ 是H阵 ∴ 相似于对角阵

$r(AA^+)=r(A)=r$

∴ $AA^+\sim\begin{bmatrix}E_r & \\ & 0\end{bmatrix}$

∴ $\|AA^+\|_F=\sqrt{tr((AA^+)^H(AA^+))}=\sqrt{r}$

$\|AA^+\|_2=\sqrt{\rho((AA^+)^H(AA^+))}=1$

课程结束！

2015年12月24日

五四楼办公室.