工程矩阵理论试卷

一、已知$\boldsymbol{C}^{2\times2}$的子空间

$$\boldsymbol{V}_1=\left\{\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \middle| x,y\in \boldsymbol{C}\right\},\quad \boldsymbol{V}_2=\left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ -x & y \end{pmatrix} \middle| x,y\in \boldsymbol{C}\right\}$$，分别求$\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$的一组基及它们的维数。

解：$\boldsymbol{V}_1$的基为：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，2 维。

$\boldsymbol{V}_2$的基为：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，2 维。

设$\boldsymbol{\eta}\in\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2$，比较$\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$，则$y=-x$，$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix}$，所以基为$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，1 维。

$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$为由$\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$生成的空间，$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$，其极大线性无关组为：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，即为$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$的基，3 维。

二、设$\boldsymbol{C}^{2\times2}$上的线性变换$\boldsymbol{f}$定义为：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix} t & t \\ t & t \end{pmatrix},\quad \forall \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \boldsymbol{C}^{2\times2}$$，其中，t表示矩阵 X 的迹$tr(\boldsymbol{X})=a+d$。

1、求$\boldsymbol{f}$在 V 的基$\boldsymbol{E}_{11}$，$\boldsymbol{E}_{12}$，$\boldsymbol{E}_{21}$，$\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵 A;

2、求$\boldsymbol{f}$的值域$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f})$及核子空间$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{f})$的基及它们的维数;

3、问：$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f})+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{f})$是否为直和？为什么？

解：1、$tr(\boldsymbol{E}_{11})=tr(\boldsymbol{E}_{22})=1\qquad tr(\boldsymbol{E}_{12})=tr(\boldsymbol{E}_{21})=0$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{22})=(\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}，\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

2、 f 的值域 $\boldsymbol{R}(f)$：

$\because \boldsymbol{X}$ 的基为 $\boldsymbol{E}_{11}$， $\boldsymbol{E}_{12}$， $\boldsymbol{E}_{21}$， $\boldsymbol{E}_{22}$，故 $\boldsymbol{R}(f)=\boldsymbol{L}(f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{12}), f(\boldsymbol{E}_{21}), f(\boldsymbol{E}_{22}))$

故 $\boldsymbol{R}(f)$ 的基即为 $f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{12}), f(\boldsymbol{E}_{21}), f(\boldsymbol{E}_{22})$ 的极大线性无关组：$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{R}(f)$ 为 1 维。

核子空间 $\boldsymbol{K}(f)$：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{X}$ 的基础解系：$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{K}(f)$ 为 3 维。

3、观察得： $\boldsymbol{R}(f)$ 的基与 $\boldsymbol{K}(f)$ 线性无关，维数的和为 4，故 $\boldsymbol{R}(f)+\boldsymbol{K}(f)$ 是直和。

三、已知矩阵 A 的特征多项式 $\boldsymbol{C_A}(\lambda)$ 及最小多项式 $\boldsymbol{m_A}(\lambda)$ 相等，均等于 $(\lambda-1)\lambda^2$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$。分别求 A 和 B 的 jordan 标准形；问：A 与 B 是否相似？为什么？

解：由矩阵 A 的特征多项式 $\boldsymbol{C_A}(\lambda)$ 及最小多项式 $\boldsymbol{m_A}(\lambda)$ 相等，均等于 $(\lambda-1)\lambda^2$，得 $\boldsymbol{J_A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)，\quad \boldsymbol{J_B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

。A 与 B 相似，因为它们有相同的 jordan 标准形。

四、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}_{3\times 4}$ ，求 A 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$

解：对 A 进行满秩分解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$\therefore r(A)=3$，A 应该分解为 $A_{3\times4}=B_{3\times3}\cdot C_{3\times4}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$$A^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}$$

$$\therefore \quad =\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}^{H}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}^{H}\right)^{-1}\left(\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{H}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{H}$$

$$=\begin{pmatrix}0&&\\&&\\&&\\&&\end{pmatrix}_{4\times3}$$

五、已知矩阵 $M=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$，其中，矩阵 A, B 的 F 范数及算子 2 范数分别是 $\|A\|_F=5$，$\|B\|_F=4$，$\|A\|_2=3$，$\|B\|_2=2$，试求 $\|M\|_F$ 和 $\|M\|_2$。

解：F 范数定义为 $\|\cdot\|_F=\sqrt{\sum|a_{ij}|^2}$，$\|M\|_F=\sqrt{(\|A\|_F)^2+(\|B\|_F)^2}=\sqrt{41}$

算子 2 范数定义为 $\|\cdot\|_2=\sqrt{\rho(M^HM)}$，$\|A\|_2=3$ 表示 A 中特征值最大为 3，$\|B\|_2=2$ 表示 B 中特征值最大为 2，M 的特征值即为 A、B 全部特征值，故 $\|M\|_2$ 为 A、B 中特征值的最大值，$\|M\|_2=3$。

六、设 V 是一 n 维欧氏空间，$\omega\in V$ 是一单位向量，a,b 是一参数，V 上的线性变换 f 定义为：$f(\eta)=a\eta-b<\eta,\omega>\omega,\forall\eta\in V$，问：当 a,b 取何值时，f 是正交变换？

解：扩充 ω 为 V 的一组标准正交基 $\omega,\omega_1,\cdots\cdots,\omega_n$，则：

$$f(\omega)=a\omega-b<\omega,\omega>\omega=a\omega-b\omega=(a-b)\omega$$

$$f(\omega_1)=a\omega_1-b<\omega_1,\omega>\omega=a\omega_1$$

……

$$f(\omega_n)=a\omega_n-b<\omega_n,\omega>\omega=a\omega_n$$

$$f(\omega,\omega_2,\cdots\omega_n)=(\omega,\omega_2,\cdots\omega_n)\begin{pmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}=(\omega,\omega_2,\cdots\omega_n)A$$

若 f 是正交变换，则 A 必须为正交矩阵，A 的行向量或列向量必须为标准正交基。

$\therefore\ a=\pm 1, b=0$

七、证明题：

1、假如 A 是 H 阵，证明：e^{iA} 是酉矩阵。

证明：要证 e^{iA} 是酉矩阵，即证 $e^{iA}\cdot(e^{iA})^H=I$

根据矩阵多项式的性质，$e^{iA}\cdot e^{-iA^H}=e^{iA-iA^H}=e^O=I$　（$\because\ iA$ 与 $-iA^H$ 可交换）

$\therefore\ e^{iA}$ 是酉矩阵

2、设 $\|\cdot\|$ 是相容矩阵范数，证明：对任意方阵 A，A 的谱半径 $\rho(A)\le\|A\|$。

证明：设 A 的特征值 λ，η 为与 λ 对应的 $\neq\theta$ 的特征向量，有 $A\eta=\lambda\eta$

两边取范数，$\|A\eta\|=\|\lambda\eta\|$

$\because\ \|\cdot\|$ 是相容范数，$\therefore\ \|\lambda\eta\|=|\lambda|\cdot\|\eta\|=\|A\eta\|\le\|A\|\cdot\|\eta\|$

$\because\ \eta\neq\theta$，$\therefore\ \|\eta\|>0$，$|\lambda|\le\|A\|$，$\therefore\ \rho(A)\le\|A\|$

（若考虑 $\|\cdot\|$ 仅为方阵上的相容矩阵范数，则只需将 η 扩充为 $\begin{pmatrix}\eta & \theta & \cdots & \theta\end{pmatrix}$ 的方阵即可）