自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名____________ 学号____________

密……封……线

东 南 大 学 考 试 卷(A 卷)

课程名称	工程矩阵理论	考试学期	11-12-2	得　分	
适用专业	工科研究生	考试形式	闭　卷	考试时间长度	150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一、（20%，第 1、3 小题各 5 分，第 2 小题 10 分）线性空间 $C^{2\times2}$ 上线性变换 f 定义如下：对任意 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in C^{2\times2}$，$f(X)=\begin{pmatrix} b-c+d & a+c-d \\ d & c \end{pmatrix}$。

1. 求 f 在 $C^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵；

2. 求 f 的特征值及各个特征子空间的基；

3. 问：是否存在 $C^{2\times2}$ 的基，使得 f 的矩阵为对角阵？给出理由。

二、（12%）多项式空间 $R[x]_3$ 中的内积定义如下：对任意 $f(x),g(x)\in R[x]_3$，

$<f(x),g(x)>=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$。于是，$R[x]_3$ 成为欧氏空间。假设 V 是由

$1,x$ 生成的 $R[x]_3$ 的子空间。在 V 中求一向量使之与 x^2 的距离最小。

三、（20%，每小题 10 分）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$。

1. 求矩阵函数 e^{At}，并求 e^{At} 的行列式的值。

2. 求 A 的广义逆矩阵 A^{+}。

四、（8%）假设$n\times n$矩阵A满足$A^2-3A=10I$，并且$A+2I$的秩为r。证明A与对角阵相似，并求矩阵$A-4I$的行列式$|A-4I|$的值。

五、（8%）设V是齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_4=0 \\ x_1+3x_3-x_4=0 \end{cases}$的解空间，求$V$在$R^4$中的正交补空间$V^{\perp}$的标准正交基。

六、（12%，每小题 4 分）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

1. 计算 A^2，并求 A 的 Jordan 标准形。

2. 求 $(2I+A)^{100}$ 的 Jordan 标准形，其中，I 是单位矩阵。

3. 求 $C^{4\times4}$ 的子空间 $V=\{X \mid AX=XA\}$ 的维数 $\dim V$。

七、（20%，每小题 5 分）

1. 假设 W_1,W_2 是 n 维线性空间 V 的子空间，如果 $\dim W_1+\dim W_2>n$，证明：$W_1\cap W_2\neq\{\theta\}$。

2. 对任意矩阵 A，证明：若 $\|A\|_F=\|A\|_2$，则 $r(A)\le 1$。

3. 对任意矩阵 A，证明：AA^+ 必定与对角阵 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & O \end{pmatrix}$ 相似，其中 r 为 A 的秩。

4. 设 A,B 是阶数相同的 $Hermite$ 矩阵，且 A 是正定的。若 $A^{-1}B$ 的特征值均大于 -1，证明：$A+B$ 是正定的。