东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称	工程矩阵理论	考试学期	14-15-2	得分	
适用专业	工科研究生	考试形式	闭 卷	考试时间长度	150 分钟

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名 学号

线 封 密

一. （20%）设 $M=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$。在线性空间 $C^{2\times2}$ 上定义变换 f 如下：对任意 $X\in C^{2\times2}$，$f(X)=XM$。

1. 证明：f 是 $C^{2\times2}$ 上的线性变换。

2. 求 f 在 $C^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵 A。

3. 求 f 的特征值及各个特征子空间的基。

正确计算出特征多项式、特征值

特征值为零的特征子空间的基

特征值为零的特征子空间的基

4. 问：是否存在 $C^{2\times2}$ 的基，使得 f 的矩阵为对角阵？如存在，请给出这样的一组基及相应的对角阵；如不存在，请给出理由。

存在

基

二. （10%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$，$R^4$ 的子空间 $W=\{x\in R^4 \mid Ax=0\}$。

1. 求 W 在 R^4 中的正交补空间 $W^{\perp}$ 的一组基；

答：$K^{\perp}(A)=R(A^H)$

基

2. 求向量 $\eta=(1,0,0,0)^T$ 在 $W^{\perp}$ 中的正投影。

答：

三. （12%）设 V 是 n 维欧氏空间，$\eta\in V$ 且 $\|\eta\|=\sqrt{2}$，a,b 是实数。V 上的线性变换 f 定义如下：对任意 $x\in V$，$f(x)=ax-b<x,\eta>\eta$。问：当 a,b 取何值时 f 是 V 上的正交

变换？

解：方法一：将$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta$扩充成$V$的标准正交基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，

f在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵是$A=\begin{pmatrix} a-2b & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$

f是正交变换当且仅当A是正交阵，

即$\begin{cases} a=1 \\ b=0,1 \end{cases}$或$\begin{cases} a=-1 \\ b=0,-1 \end{cases}$

方法二：f是正交变换当且仅当对任意$x,y\in V$，

$<f(x),f(y)>=<x,y>$

$$\begin{aligned} &<f(x),f(y)> \\ \text{即} &=<ax-b<x,\eta>\eta,ay-b<y,\eta>\eta> \\ &=a^2<x,y>+\cdots=<x,y> \end{aligned}$$

从而$\begin{cases} a=1 \\ b=0,1 \end{cases}$或$\begin{cases} a=-1 \\ b=0,-1 \end{cases}$

四. （21%）设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a & b & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

1. 求A的若当标准形，并给出A的最小多项式。

解：$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-1)^3$

$r(A-I)=2$

所以，A的若当标准形是$J=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$。

A的最小多项式是$\lambda(\lambda-1)^2$。

2. 将Ae^{At}表示成关于A的次数不超过2的多项式。

解：记 $f(\lambda)=\lambda e^{t\lambda}$， $g(\lambda)=a+b\lambda+c\lambda^2$，

则 $g(A)=f(A)$ 当且仅当 $g(0)=f(0), g(1)=f(1), g'(1)=f'(1)$，

即 $a=0, a+b+c=e^t, b+2c=(1+t)e^t$，

所以： $a=0, b=(1-t)e^t, c=te^t$ 。

故 $Ae^{At}=(1-t)A+te^tA^2$

3. 问：若 A,B 相似，参数 a,b,c,d 该取什么值？

解： B 的特征值是： $0,1,a,c$，

如果 A,B 相似，则它们有相同的特征值，所以， $a=c=1$。

当 $a=c=1$ 时， A,B 相似当且仅当它们有相同的若当标准形，

即 $r(B-I)=2$，或者说 $\begin{pmatrix} 0 & b & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩等于 2；

故： $b=-2, d\neq 0$，或者 $b\neq -2, d=0$ 。

总之： $a=c=1$ 且 $b=-2, d\neq 0$，或者 $b\neq -2, d=0$ 。

五. （12%）求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 A^+ 。

答： A 的满秩分解为 $A=BC$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

$$CC^H=I_2, B^HB=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad (B^HB)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

所以， $A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

六.　（25%）证明题：------------------------每小题 5 分

1. 设 f 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$R(f), K(f)$ 分别表示 f 的值域和核子空间。证明：$R(f)=V$ 的充分必要条件是 $K(f)=\{\theta\}$。

证：维数公式

正确论证

2. 已知矩阵 A, B，分块矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$。若矩阵 2 范数 $\|M\|_F=\|A\|_F$，证明：$B=O$。

证：$\|M\|_F=\sqrt{trM^HM}=\sqrt{trA^HA+trB^HB}=\sqrt{\|A\|_F^2+\|B\|_F^2}$

如果 $\|M\|_F=\|A\|_F$，则 $\|B\|_F=0$，从而 $B=O$。

3. 设 n 维列向量 η_1, η_2 相互正交，且都是单位向量，矩阵 $A=\eta_1\eta_1^H+2\eta_2\eta_2^H$。证明：$A$ 的广义逆矩阵 $A^+=\eta_1\eta_1^H+\dfrac{1}{2}\eta_2\eta_2^H$。

证：法一：利用定义证明

法二：将 η_1, η_2 扩充成 C^n 的标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，

令 $U=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n), \Lambda=diag(1,2,0,\cdots,0)$，

则 U 是酉矩阵，且 $A=U\Lambda U^H$

于是，且 $\Lambda^+=diag(1,\frac{1}{2},0,\cdots,0)$

$$A^+=U\Lambda^+U^H=\eta_1\eta_1^H+\frac{1}{2}\eta_2\eta_2^H$$

4. 设 A, B 是同阶 $Hermite$ 矩阵，并且，$A+B, A-B$ 都是正定的，证明：分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 也是正定的。

证：由 $\begin{pmatrix} E & -\frac{1}{2}E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -\frac{1}{2}E & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A-B) & O \\ O & 2(A+B) \end{pmatrix}$

知 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A-B) & O \\ O & 2(A+B) \end{pmatrix}$ 共轭合同，因此

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 是正定的，当且仅当 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A-B) & O \\ O & 2(A+B) \end{pmatrix}$ 是正定的，

因为$A+B, A-B$都是正定的，所以$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A-B) & O \\ O & 2(A+B) \end{pmatrix}$是正定的，从而$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$是正定的

5. 设A,B都是$n\times n$矩阵，并且A是半正定的。若$A^2B=BA^2$。证明：$AB=BA$。

证：设U是酉矩阵，$U^HAU=\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，则$\lambda_k\ge 0, k=1,2,\cdots,n$；

由$A^2B=BA^2$，$A=U\Lambda U^H, A^2=U\Lambda^2U^H$得$\Lambda^2U^HBU=U^HBU\Lambda^2$。

记$U^HBU=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$，则对任意$i,j$，$\lambda_i^2b_{ij}=b_{ij}\lambda_j^2$。

因为$\lambda_k\ge 0, k=1,2,\cdots,n$，这意味着对任意$i,j$，$\lambda_i b_{ij}=b_{ij}\lambda_j$

此即$\Lambda U^HBU=U^HBU\Lambda$，或$U\Lambda U^HB=BU\Lambda U^H$，即$AB=BA$