第一章

1.（20%）已知 $C^{2\times2}$ 的子空间

$$V_1=\left\{\begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x,y\in C\right\}，\quad V_2=\left\{\begin{bmatrix} x & -y \\ -x & y \end{bmatrix} \mid x,y\in C\right\}$$

分别求 V_1，V_2，$V_1\cap V_2$，V_1+V_2 的一组基及它们的维数。

2.（18%）设 $C^{2\times2}$ 上的线性变换 f 定义为：

$$f(X)=XM，\quad \forall X\in C^{2\times2}$$

其中，$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 求 f 在 V 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵 A；
(2) 分别求 f 的特征值及相应的特征子空间的一组基及它们的维数；
(3) 给出 f 的最小多项式；
(4) 问：是否存在 V 的基，使得 f 的矩阵为对角阵？为什么？

3.（20%）设 $C^{2\times2}$ 上的线性变换 f 定义为：

$$f(X)=\begin{bmatrix} t & t \\ t & t \end{bmatrix}，\quad \forall X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in C^{2\times2}$$

其中，t 表示矩阵 X 的迹 $tr(X)=a+d$。
(1) 求 f 在 V 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵 A；
(2) 求 f 的值域 $R(f)$ 及核子空间 $K(f)$ 的基及它们的维数；
(3) 问：$R(f)+K(f)$ 是否为直和？为什么？

4.（20%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，在 $C^{2\times2}$ 上定义映射 f 如下：

$$对任意\ X\in C^{2\times2}，\qquad f(X)=AXA$$

(1) 证明：f 是 $C^{2\times2}$ 上的线性变换；
(2) 求 f 在 $C^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵 M；
(3) 求 f 的值域 $R(f)$ 及核子空间 $K(f)$ 的各一组基及它们的维数；
(4) 问：$C^{2\times2}=R(f)\oplus K(f)$ 是否成立？为什么？
(5) 试求 M 的 Jordan 标准形，并写出 f 的最小多项式；
(6) 问：能否找到 $C^{2\times2}$ 的基，使得 f 的矩阵为对角阵？为什么？

5.（16%）$C^{2\times2}$ 上的线性变换 f 定义如下：$f(X)=\begin{pmatrix} a-b & c-d \\ c-d & a-b \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in C^{2\times2}$

(1) 求 f 在 $C^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵；
(2) 求 f 的值域 $R(f)$ 及核子空间 $K(f)$ 的各一组基及它们的维数；

(3) 问：$C^{2\times2}=R(f)\oplus K(f)$是否成立？为什么？

6. （8%）设 f,g 为线性空间V 上的线性变换，且 $fg=f$. 试证：$V=K(f)+R(g)$；

7. 若n阶方阵 A 与G 满足：①. $A^2=A$； ②. $GAG=G$； ③. $R(G)\subseteq R(A)$
则$G^2=G$（证明时请注明每一步的理由）.

第二章

1. （10%）设C^3的子空间$V=\{(x,y,z)\mid 2x+y-z=0\}$，$\eta=(1,1,1)$。试求$\eta_0\in V$，使得
$\|\eta-\eta_0\|=\min\limits_{\xi\in V}\|\eta-\xi\|$。

2. 在$R_3[x]$上定义内积$<f(x),g(x)>=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$。$R_3[x]$的子空间$W=span\{1,x^2\}$。
试求 $p(x)\in R_3[x]$，使得$\|p(x)-x\|=\min\limits_{h(x)\in W}\|h(x)-x\|$。

3. （10%）假设$\xi_1=(1,1,0),\ \xi_2=(1,0,-1)$，$R^3$的由$\xi_1,\ \xi_2$生成的子空间$V=L(\xi_1,\xi_2)$，
$\eta=(1,1,1)$。在V中求向量η_0，使得$\|\eta-\eta_0\|=\min\limits_{\xi\in V}\|\eta-\xi\|$。

4. （10%）设V是一n维欧氏空间，$\omega\in V$是一单位向量，k是一参数，V上的线性变换f定义为：

$$f(\eta)=\eta-k<\eta,\omega>\omega,\quad \forall\eta\in V$$

问：当k取何值时，f是正交变换？

5. 记$V=R^2$。$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$。定义$V$上先行变换如下：$f(\eta)=A\eta,\forall\eta\in V.$
(1) 求 f 的值域的一组基，并给出 V 的两个不同的子空间 U,W，使得 $V=\mathrm{Im}\,f\oplus U=\mathrm{Im}\,f\oplus W$；
(2) 问：f是否为正交变换？为什么？

第三章

1. 已知A的特征多项式与最小多项式都是λ^5，分别求A及A^2的 Jordan 标准形.

2. （8%）已知n阶方阵A满足$A^2=2A+8I$，且$A+2I$的秩是r，求$\det(A+I)$.

3. （12%）设矩阵$A=\begin{pmatrix}x&0&0\\1&5&0\\4&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}5&y&2\\0&2&t\\0&0&5\end{pmatrix}$。

(1) 根据x的不同的值，讨论矩阵A的所有可能的 Jordan 标准形；
(2) 若A与B是相似的，问：参数x,y,t应满足什么条件？试说明你的理由。

4. 假设矩阵 A 的特征多项式及最小多项式都等于 $(\lambda-3)(\lambda+4)^2$，并且 $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 0 & -4 & 5\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$。

(1) 分别给出 A 和 B 的 Jordan 标准形；

(2) 问：A 与 B 是否相似？为什么？

5. 证明：若方阵 B 的特征值全为零，则必存在正整数 k，使 $B^k=O$。

6. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$。

(1) 试写出矩阵 A 的特征多项式，最小多项式，及矩阵 $A-3I$ 的秩；

(2) 如果矩阵 B 与 A 有相同的特征多项式，有相同最小多项式，并且 $B-3I$ 与 $A-3I$ 的秩也相同，问：与 A 是否一定相似？说明你的理由。

7. (12%) 已知矩阵 A 的特征多项式 $C_A(\lambda)$ 及最小多项式 $m_A(\lambda)$ 相等，均等于 $(\lambda-1)\lambda^2$，矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$。

(1) 分别给出 A 和 B 的 Jordan 标准形；

(2) 问：A 与 B 是否相似？为什么？

8. (16%) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$。

(1) 试分别求 A 的特征多项式和最小多项式；

(2) 写出 A 的 Jordan 标准型；

(3) 求 A^{100}；

第四章

1. 假设 A 是正规矩阵。若 A 的特征值全是实数，证明：A 是 Hermite 矩阵。

2. 假设 A、B 都是 $n\times n$ Hermite 矩阵。证明 AB 是 Hermite 矩阵当且仅当 $AB=BA$。

3. 假设 A 是 Hermite 矩阵，证明：e^{iA} 是酉矩阵。

4. 证明：Hermite 阵和酉矩阵都是正规阵。试举一例说明存在这样的正规阵，它既不是 Hermite

矩阵，也不是酉矩阵。

5. 若n维列向量$\alpha \in C^n$的长度小于 2，证明：$4I-\alpha\alpha^H$是正定矩阵。

6. 假设A是$n\times n$酉矩阵, B是$n\times n$矩阵。证明：AB是酉矩阵当且仅当B是酉矩阵。

7. 假设A是$n\times n$酉矩阵, B 是$n\times n$Hermite 矩阵，并且$AB=BA$。记$M=AB$。证明：存在酉矩阵U，使得U^HMU是对角阵。

8. 若A是正规矩阵，则A是酉矩阵的充要条件是A的特征值的模全为 1；

9. 若n阶 Hermite 矩阵A为正定阵，又B是n阶方阵且$A-B^HAB$也是正定阵，则B的谱半径$\rho(A)<1$。

10. 若方阵$\boldsymbol{A}$的特征值全为零，则必存在正整数$\boldsymbol{k}$，使$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$.

11. 设$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}$阶正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\Lambda,\boldsymbol{\alpha}_n$是$\boldsymbol{n}$维非零列向量. 若当$\boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}$时，总有
$\boldsymbol{\alpha}_i^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\Lambda,\boldsymbol{\alpha}_n$必线性无关

第五章

1. （10%）设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为方阵，作$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，设$\boldsymbol{t}$是参数.

（1）试证：$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}t}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}t}\end{pmatrix}$；

（2）已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}t}$.

2. （15%）设$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求$A$的特征多项式、最小多项式，并求矩阵函数$e^{At}$。

3. 设$\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{\beta}^H$，试证：$\|\boldsymbol{A}\|_F=\|\boldsymbol{\alpha}\|_2\|\boldsymbol{\beta}\|_2$.

4. （10%）试证：若$\boldsymbol{A}$为n阶正规矩阵，则

$$\max_{\theta\neq x\in C^n}\frac{|\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|}{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}}=\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

5. 设$\|\cdot\|$是相容矩阵范数。证明：对任意方阵A，A的谱半径$\rho(A)\le\|A\|$；

6. 证明：对任意方阵A，$\det e^A=e^{trA}$（这里，$\det$表示矩阵的行列式，tr表示矩阵的迹）；

第六章

1. （10%）设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{n}\times 1$ 矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{s}\times 1$ 矩阵，作 $\boldsymbol{A}=\alpha\beta^{H}$. 求 $\boldsymbol{A}^{+}$（用 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 表示）；

2. （12%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，试求 A 的广义逆矩阵 A^{+}。

3. 假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A 的广义逆矩阵 A^{+}。

4. （15%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的广义逆矩阵 A^{+}。

5. （15%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的广义逆矩阵 A^{+}。

6. （15%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的广义逆矩阵 A^{+}。

7. 设 $A\in C^{s\times n}$， $r(A)=r$ 。求 AA^{+} 的 Jordan 标准形。

8. 设 A 是正规阵，证明：$(A^{2})^{+}=(A^{+})^{2}$。