东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 工程矩阵理论 考试学期 13-14-2 得 分

适用专业 工科硕士研究生 考试形式 闭 卷 考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

$C^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 复矩阵全体在矩阵加法、数乘下所构成的复数域上的线性空间。

一、（18%）设 $M\in C^{n\times n}$，记 $V(M)=\left\{X\in C^{n\times n}\mid MX=XM\right\}$。

1. 证明：$V(M)$ 是 $C^{n\times n}$ 的子空间。

2. 若 $n=2$，$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，分别求 $V(A)$，$V(B)$，$V(A)\cap V(B)$ 以及 $V(A)+V(B)$ 的各一组基及它们的维数。

姓名______ 学号______

线 封 密

二、（18%）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，线性空间 $C^{2\times 2}$ 上的变换 f 定义如下：对任意 $X\in C^{2\times 2}$， $f(X)=AXB$。

1. 证明 f 是 $C^{2\times 2}$ 上的线性变换。

2. 求 f 在 $C^{2\times 2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵。

3. 问：是否存在 $C^{2\times 2}$ 的一组基，使得 f 在此基下的矩阵是对角阵？如存在，试给出这样的一组基；若不存在，请给出理由。

三、（14%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$，$R^4$ 的子空间 $W=\left\{x\in R^4 \mid Ax=0\right\}$。

1. 求 W 在 R^4 中的正交补空间 $W^{\perp}$ 的一组基；

2. 求 $\eta=(1,1,1,1)^T$ 在 $W^{\perp}$ 中的正投影。

四、（24%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$。

1. 求 A 的若当标准形；

2. 求矩阵函数e^{At}；

3. 求A的广义逆矩阵A^{+}。

五、（10%）已知α,β都是n维列向量，$\|\alpha\|,\|\beta\|$分别表示在C^n的标准内积下向量α,β的长度，矩阵$A=\alpha\beta^H$。

1. 证明：关于范数，有$\|A\|_2=\|A\|_F=\|\alpha\|\|\beta\|$。

2. 若$\|\alpha\|=\|\beta\|=1$，证明：关于广义逆，有$A^{+}=A^H$。

六、（8%）设V是n维欧氏空间，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$是$V$的一个标准正交基，向量$\delta=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n$。对非零实数$k$，定义$V$上的线性变换$f$如下：对任意$x\in V$，$f(x)=x+k<x,\delta>\delta$。证明：$f$是$V$上的正交变换当且仅当$k=-\frac{2}{n}$。

七、（8%）已知A,B都是n阶 Hermite 矩阵，且A是正定的。设AB的特征值全为1。

1. 证明：$AB=I$。

2. 证明：存在次数小于n的多项式$f(x)$，使得$B=f(A)$。