东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 工程矩阵理论 考试时间 10-11-2 得分

适用专业 工科研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

一. （40%）计算题

1. （8%）假设$C^{2\times 2}$的子空间$V_1=\left\{\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \mid x,y\in C\right\}$，$V_2=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \mid x,y\in C\right\}$。

分别求$V_1\cap V_2$，V_1+V_2的一组基。

2. （8%）设R^3的子空间$V=\left\{(x,y,z)\in R^3 \mid x-y-z=0\right\}$，$\eta=(1,0,0)$。求$\eta_0\in V$使得$\|\eta_0-\eta\|=\min\limits_{\xi\in V}\|\xi-\eta\|$。

3. （5%）设A是n阶酉矩阵，分别求$\|A\|_F$和$\|A\|_2$。

姓名________ 学号________

线 封 密

4. （8%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & b & c\\0 & a & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\y & x & 0\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$。问：当参数 a,b,c,x,y 满足什么条件时，矩阵 A 与 B 相似？

5. （5%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求 A^{+}。

6. （6%）设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-A=2E$，且 $A+I$ 的秩为 r，求行列式 $\left|A+2I\right|$。

二. （20%）在线性空间$C^{2\times 2}$上定义线性变换f如下：对任意矩阵$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，

$$f(X)=\begin{pmatrix} a-b & a-b \\ c+d & 2c+2d \end{pmatrix}。$$

1. （4%）求f在$C^{2\times 2}$的基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵；

2. （6%）分别求f的值域$R(f)$及核子空间$K(f)$的一组基；

3. （6%）求f的特征值及各个特征子空间的基；

4. （4%）求f的最小多项式。

三. （8%）设ω是n维欧氏空间V中的单位向量，V上的线性变换f定义如下：对任意$\eta \in V$，$f(\eta) = a\eta + b < \eta, \omega > \omega$。问：当参数$a, b$取什么值的时候，$f$是$V$上的正交变换？

四. （12%）已知矩阵A的特征多项式是$\lambda^2(\lambda - 1)^3$，并且$r(A) = r(A - I) = 3$，求A的最小多项式，并求一次数不超过2的多项式$f(\lambda)$，使得$Ae^{At} = f(A)$。

五. （20%）证明下列命题：

1. （5%）假设线性空间V上的线性变换 f, g 满足 $fgf = f, gfg = g$，证明：$V = K(f) \oplus R(g)$。

2. （5%）假设A是正规矩阵，证明：关于矩阵的秩有$r(A) = r(A^+)$。

3. （5%）假设α,β是两个n维相互正交的单位列向量，实数p,q均小于1。证明：矩阵$A=I-p\alpha\alpha^H-q\beta\beta^H$是正定的。

4. （5%）设n阶矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，$k$是正整数。证明存在矩阵$B$，使得$B^k=A$。