一. （10%）求$C^{2\times 2}$的子空间V_1,V_2的交空间$V_1\cap V_2$及和空间V_1+V_2的基和维数，其

中，$V_1=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \mid x,y\in C\right\}, V_2=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix} \mid x,y\in C\right\}$.

二. （10%）欧氏空间$R[x]_3$中的内积定义为：对$\forall \varphi(x),\psi(x)\in R[x]_3$，

$<\varphi(x),\psi(x)>=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\psi(x)dx$。令$\alpha=1$，$\beta=x$，$\eta=x^2$， $W=L(\alpha,\beta)$。

求η在W中的正投影，即求$\eta_0\in W$，使得$\|\eta-\eta_0\|=\min\limits_{\xi\in W}\|\eta-\xi\|$.

三. （20%）在2×2矩阵空间$C^{2\times 2}$上定义线性变换f如下：对任意矩阵$X\in C^{2\times 2}$，

$f(X)=\begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix}$，其中，$a$为$X$的迹$tr(X)$。

1. 求f在$C^{2\times 2}$的基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵$M$；
2. 分别求f的值域$R(f)$及核子空间$K(f)$的基及维数；
3. 求f的特征值及相应的特征子空间的基；
4. 问：是否存在$C^{2\times 2}$的基，使得f在这组基下的矩阵为对角阵？为什么？

四. （10%）根据参数a,b不同的值，讨论矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 7 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的 Jordan 标准形，并求矩

阵$(A-I)^{100}$的秩。

五. （14%）假设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. 求A的广义逆矩阵A^+；
2. 求一个次数不超过 2 的多项式$f(\lambda)$，使得$f(A)=Ae^{At}$.

六. （10%）假设f是n维酉空间V上的线性变换，若对任意$\alpha,\beta\in V$，有

$(f(\alpha),\beta)=(\alpha,f(\beta))$。

1. 证明：在V的标准正交基下，f的矩阵为 Hermite 矩阵；
2. 证明：存在V的一组标准正交基，使得f的矩阵为对角阵。

七. （8%）假设$s\times n$矩阵A的秩为r，证明$\|A\|_2\le\|A\|_F\le\sqrt{r}\,\|A\|_2$。

八. （8%）假设 A^{+} 是 $A \in C^{s \times n}$ 的广义逆矩阵，证明：$C^{n} = K(A) \oplus R(A^{+})$，其中，$K(A), R(A^{+})$ 分别表示矩阵 A 的核空间和 A^{+} 的值域.

九. （12%）假设 A, B 都 n 阶 Hermite 矩阵.

1. 如果 A 是正定的，证明：存在可逆矩阵 C，使得 $C^{H}AC, C^{H}BC$ 都是对角阵；
2. 如果 A, B 都是半正定的，并且 A 的秩 $r(A) = n-1$，证明：存在可逆矩阵 C，使得 $C^{H}AC, C^{H}BC$ 都是对角阵。