工程矩阵理论考卷（01-02 学年）

一．（12%）在 $C^{2\times 2}$ 中，已知

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix} x & -2x \\ y & -2y \end{pmatrix} \mid \forall x,y\in C\right\},\quad V_2=\left\{\begin{pmatrix} -x & -y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \mid \forall x,y\in C\right\}$$

分别求 V_1，V_2，$V_1\cap V_2$ 及 V_1+V_2 的基.

二．（8%）设 f,g 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，且 $\boldsymbol{fg}=\boldsymbol{f}$．试证：

1． $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{f})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{g})$；

2． 若 $\dim\boldsymbol{V}=\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{f})\oplus\boldsymbol{R}(\boldsymbol{g})$ 的充要条件是 $\dim\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f})=\dim\boldsymbol{R}(\boldsymbol{g})$.

三．（16%）

1. 在 $\boldsymbol{C}^{2\times 2}$ 上已知线性变换

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{c} \\ 0 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix},\quad \forall \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\in\boldsymbol{C}^{2\times 2}$$

求 $\boldsymbol{f}$ 在基 $\{\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}\}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$；并求 $\boldsymbol{A}$ 的 **Jordan** 标准形.

2． 已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式与最小多项式都是 λ^5，分别求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^2$ 的 **Jordan** 标准形.

四．（8%）设 α,β 为欧氏空间 $\boldsymbol{V}$（未必是有限维的）上两正交的单位向量，作线性变换：

$$\boldsymbol{f}(\xi)=\xi-\boldsymbol{a}<\xi,\alpha>\alpha-\boldsymbol{b}<\xi,\beta>\beta,\quad \forall\xi\in\boldsymbol{V}$$

求使 $\boldsymbol{f}$ 为正交变换的实数 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之一切值.

五．（8%）已知 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{I}$，且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的秩是 $\boldsymbol{r}$，求 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$.

六．（10%）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵，作 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$，设 $\boldsymbol{t}$ 是参数.

1． 试证：$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}t}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}t} \end{pmatrix}$；

2． 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}t}$.

七．（10%）设 α 为 $\boldsymbol{n}\times 1$ 矩阵，β 为 $\boldsymbol{s}\times 1$ 矩阵，作 $\boldsymbol{A}=\alpha\beta^{\boldsymbol{H}}$.

1． 求 $\boldsymbol{A}^+$（用 α,β 表示）；

2． 试证：$\|\boldsymbol{A}\|_F=\|\alpha\|_2\|\beta\|_2$.

八．（**10%**）试证：若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正规矩阵，则

$$\max_{\theta\neq x\in C^n}\frac{\left|\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right|}{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}}=\rho(\boldsymbol{A})=\left\|\boldsymbol{A}\right\|_2$$

九．（**18%**）证明下列命题：

1. 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零，则必存在正整数 $\boldsymbol{k}$，使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{n}$ 维非零列向量．若当 $\boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}$ 时，总有 $\boldsymbol{\alpha}_i^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 必线性无关.

3. 若 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 满足：

①. $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$； ②. $\boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G}$； ③. $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{G})\subseteq\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$

则 $\boldsymbol{G}^2=\boldsymbol{G}$（证明时请注明每一步的理由）.