东南大学考试卷

课程名称	工程矩阵理论	考试学期	12-13-2	得　分	
适用专业	工科研究生	考试形式	闭　卷	考试时间长度	150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一、（20%）记 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$C^{2\times 2}$ 上的变换 f 定义如下：对任意 $X\in C^{2\times 2}$，$f(X)=AX$。

1. 证明：f 是 $C^{2\times 2}$ 上的线性变换；

2. 分别求 f 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 和基 $E_{11},E_{21},E_{12},E_{22}$ 下的矩阵 A,B；

3. 给出一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$；

4. 给出 $C^{2\times 2}$ 的两个 2 维不变子空间 V_1,V_2 使得 $C^{2\times 2}=V_1\oplus V_2$。

姓名＿＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿＿

密…………封…………线

二、（12%）假设V是数域F上n维线性空间，f,g是V上的线性变换，且$fg=0, g^2=g$。$K(f),K(g)$分别表示f,g的核空间，$R(f),R(g)$分别表示f,g的值域。

1. 证明：$V=K(f)+K(g)$。

2. 证明：$V=K(f)\oplus K(g)$当且仅当$\dim R(f)+\dim R(g)=n$。

三、（10%）假设V是n维欧氏空间，$\eta\in V$且$\|\eta\|=\sqrt{2}$，k是实数。V上的线性变换f定义如下：对任意$x\in V$，$f(x)=x-k<x,\eta>\eta$。问：当k取什么值时f是V上的正交变换？

四、（15%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a & 1 & 3\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$。

1. 求 A 的 Jordan 标准形。

2. 若 A 与 B 相似，问参数 a,b 应满足什么条件？

3. 假设复数域 C 上线性空间 $C^{3\times 3}$ 的子空间 $V=\{p(A)\mid \forall p(x)\in C[x]\}$（即 V 是关于 A 的复系数多项式全体所构成的 $C^{3\times 3}$ 的子空间）。求 V 的一组基及维数。

五、（10%）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 8 & 6 & -5\end{pmatrix}$。试将矩阵$e^{At}$表示成关于$A$的多项式，并求行列式$\det e^{At}$的值。

六、（10%）假设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$。求$A$的广义逆矩阵$A^{+}$。

七、（23%）证明下列命题：

1. （5%）设 A 是正规矩阵，证明：$\|A\|_2 = \rho(A)$。

2. （5%）假设 A 是 $s\times n$ 矩阵，A^+ 是 A 的广义逆矩阵。证明：$R(I - AA^+) = K(A^+)$。

3. （5%）假设 A 是 $n\times n$ 矩阵。若 A 不与任何对角阵相似，证明：存在多项式 $f(x)$ 及正整数 k，使得 $f(A)\neq O$ 但 $(f(A))^k=O$。

4. （8%）假设 Hermite 矩阵 A 是正定的，m 是正整数。证明：存在唯一正定矩阵 B 使得 $A=B^m$。