工程矩阵理论：矩阵的相似标准形

东南大学· 数学系· 周建华

August 20, 2016

本章的目的

- 对给定的矩阵，找一最简单的矩阵与之相似。

本章的目的

- 对给定的矩阵，找一最简单的矩阵与之相似。
- 对给定的线性空间上的线性变换，确定线性空间有一组基，使得线性变换的矩阵最简单。

矩阵的特征值与特征向量

假设 A 是 n 阶方阵，λ_0 是数，若存在 n 维列向量 η，使得

$$\eta \neq \theta\text{，且 } A\eta = \lambda_0\eta,$$

则称 λ_0 是 A 的特征值，η 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

矩阵的特征值与特征向量

假设 A 是 n 阶方阵，λ_0 是数，若存在 n 维列向量 η，使得

$$\eta \neq \theta\text{，且 } A\eta = \lambda_0\eta,$$

则称 λ_0 是 A 的特征值，η 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

Theorem

假设 A 是 n 阶方阵，则 A 相似于对角阵的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量特征向量。

线性变换的特征值与特征向量

Definition

设 f 是线性空间 V 上的线性变换，假设 $\lambda_0 \in F$，若存在$\eta \in V$使得

$$\theta \neq \eta \in V, \text{且 } f(\eta) = \lambda_0 \eta,$$

则称 λ_0 是线性变换 f 的特征值，η 是相应于 λ_0的特征向量。

线性变换的特征值与特征向量

Definition

设 f 是线性空间 V 上的线性变换，假设 $\lambda_0 \in F$，若存在$\eta \in V$使得

$$\theta \neq \eta \in V, \text{且 } f(\eta) = \lambda_0 \eta,$$

则称 λ_0 是线性变换 f 的特征值，η 是相应于 λ_0的特征向量。

线性变换的可对角化问题

Theorem

设 V 是 n 维线性空间，f是线性空间 V 上的线性变换，则存在 V 的基使得 f 的矩阵是对角阵当且仅当 f 有 n 个线性无关的特征向量。

Example

设 $f \in Hom(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ 定义为:

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad f(X) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 2z \end{pmatrix},$$

求 f的特征值、特征向量。

线性变换的特征值、特征向量的计算

设 f 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵是 A，
若 $\lambda_0 \in F$，$\eta \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标是 x_0，则 $f(\eta)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标是 Ax_0，故

$$f(\eta) = \lambda_0 \eta \Leftrightarrow Ax_0 = \lambda_0 x_0$$

即：η 是 f 的属于特征值 λ_0 的特征向量当且仅当 x_0 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

线性变换的特征值、特征向量的计算

设 f 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵是 A，
若 $\lambda_0 \in F$，$\eta \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标是 x_0，则 $f(\eta)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标是 Ax_0，故

$$f(\eta) = \lambda_0 \eta \Leftrightarrow Ax_0 = \lambda_0 x_0$$

即： η 是 f 的属于特征值 λ_0 的特征向量当且仅当 x_0 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

Example

设 $f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$ 定义为：

$$\forall X \in C^{2\times 2}, f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X.$$

求 f的特征值、特征向量。

Theorem

若 $A, B \in C^{n\times n}$ 是相似的，则 $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$.

Theorem

若 $A, B \in C^{n\times n}$ 是相似的，则 $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$.

注记：

1. 定理的逆命题不成立。
2. 可定义线性变换的特征多项式。

特征多项式的计算

Definition

假设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$，则 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$行，第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列交叉处的元素构成的 k 阶子式称为 A 的 k 阶主子式。

Example

矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

的3阶子式$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$,

3阶主子式$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$

Cauchy-Binet公式

Theorem

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\lambda I - A|$$
$$= \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots b_k\lambda^{n-k} +$$
$$\cdots + b_{n-1}\lambda + b_n,$$

Cauchy-Binet公式

Theorem

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\lambda I-A| = \lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\cdots b_k\lambda^{n-k}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n,$$

其中，$b_j=(-1)^j\sum(A$ 的所有 j 阶主子式)，特别地，

$$b_1=-\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\quad b_n=(-1)^n|A|.$$

矩阵的迹

Definition

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，称 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 为 A 的迹，记为 $tr(A)$.

矩阵的迹

Definition

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，称 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 为 A 的迹，记为 $tr(A)$.

1. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则
$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\quad |A|=\Pi_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

矩阵的迹

Definition

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，称 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ 为 A 的迹，记为 $tr(A)$.

1. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则
$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\quad |A|=\Pi_{i=1}^{n}\lambda_i.$$
2. 若 A,B 相似，则 $tr(A)=tr(B),|A|=|B|$.

Example

设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, A = \alpha\beta^H$.求$A$的特征值。

化零多项式

Lemma

设 $f(x)$ 是多项式. 若 $f(A)=0$,则 A 的特征值均是 $f(x)=0$ 的根.

化零多项式

Lemma

设 $f(x)$ 是多项式. 若 $f(A)=0$,则 A 的特征值均是 $f(x)=0$ 的根.

Example

已知 $A^2=A$, 证明：A 的特征值只能是0 或1.

Hamilton-Cayley定理

Lemma

$Schur$引理：对 $\forall A \in C^{n\times n}$，存在酉矩阵 U 使得 $U^H AU$是上三角矩阵。

Hamilton-Cayley定理

Lemma

$Schur$引理：对 $\forall A \in C^{n\times n}$，存在酉矩阵 U 使得 $U^H AU$是上三角矩阵。

Theorem

设 $A \in F^{n\times n}, C(\lambda) = |\lambda I - A|$，则 $C(A) = O$。

Hamilton-Cayley定理

Lemma

$Schur$引理：对 $\forall A \in C^{n\times n}$，存在酉矩阵 U 使得 $U^H AU$是上三角矩阵。

Theorem

设 $A \in F^{n\times n}, C(\lambda) = |\lambda I - A|$，则 $C(A) = O$。

Theorem

设 $f \in Hom(V, V), C(\lambda)$ 是 f的特征多项式，则 $C(f) = O$。

Example

设 $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -3 & 5\end{pmatrix}$，求 A^{100}。

Example

设 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^{100}。$C(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

Example

设 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^{100}。$C(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

Example

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$，求 A^{100}。

Example

设 $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -3 & 5\end{pmatrix}$，求 A^{100}。$C(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3$

Example

已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$，求 A^{100}。$C(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

矩阵的最小多项式

Definition

矩阵 A 的次数最低的、最高次项系数为一的化零多项式称为 A 的最小多项式.

矩阵的最小多项式

Definition

矩阵 A 的次数最低的、最高次项系数为一的化零多项式称为 A 的最小多项式.

性质：

1. 若 $m(x), \varphi(x)$ 分别是矩阵 A 的最小多项式、化零多项式，则 $m(x)|\varphi(x)$.

矩阵的最小多项式

Definition

矩阵 A 的次数最低的、最高次项系数为一的化零多项式称为 A 的最小多项式.

性质:

1. 若 $m(x), \varphi(x)$ 分别是矩阵 A 的最小多项式、化零多项式, 则 $m(x)|\varphi(x)$.
2. 任意矩阵的最小多项式是唯一的.

矩阵的最小多项式

Definition

矩阵 A 的次数最低的、最高次项系数为一的化零多项式称为 A 的最小多项式.

性质：

1. 若 $m(x), \varphi(x)$ 分别是矩阵 A 的最小多项式、化零多项式，则 $m(x)|\varphi(x)$.
2. 任意矩阵的最小多项式是唯一的.
3. 如果矩阵 A, B 相似，则 A, B有相同的最小多项式。

线性变换的最小多项式

Definition

设线性变换$f \in V$ 在V的一组基下的矩阵为A,A的最小多项式称为 f 的最小多项式.

线性变换的最小多项式

Definition

设线性变换$f \in V$ 在V的一组基下的矩阵为A,A的最小多项式称为 f 的最小多项式.

等价定义:

线性变换的最小多项式

Definition

设线性变换$f \in V$ 在V的一组基下的矩阵为A,A的最小多项式称为 f 的最小多项式.

等价定义：

Definition

线性变换f 的次数最低的、最高次项系数为一的化零多项式称为 f 的最小多项式.

Theorem

设 $m(x), C(x)$ 分别是矩阵 A 的最小多项式和特征多项式，则 $m(x)|C(x)$，并且，对 $\lambda_0 \in C, m(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow C(\lambda_0) = 0$。

Theorem

设 $m(x), C(x)$ 分别是矩阵 A 的最小多项式和特征多项式，则 $m(x)|C(x)$，并且，对 $\lambda_0 \in C, m(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow C(\lambda_0) = 0$。

Example

求下列矩阵的最小多项式：$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 0 \\ & & a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}$

Theorem

设 $m(x), C(x)$ 分别是矩阵 A 的最小多项式和特征多项式，则 $m(x)|C(x)$，并且，对 $\lambda_0 \in C, m(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow C(\lambda_0) = 0$。

Example

求下列矩阵的最小多项式：$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 0 \\ & & a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}$

Example

设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, A = \alpha\beta^H$,求 A的最小多项式。

Example

设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, A = \alpha\beta^H$,求 A的最小多项式。

Example

$f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$, 定义

为：$\forall X \in C^{2\times 2}$， $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$, 求 f 的最小多项式.

可对角化的条件

目的：对给定的矩阵，判断其是否相似于对角阵;
对给定的线性空间上的线性变换，判断是否存在空间的一组基，使得其矩阵是对角阵.

Theorem

1. $n \times n$ 矩阵 A相似于对角阵 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

Theorem

1. $n\times n$ 矩阵 A相似于对角阵 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.
2. 矩阵的属于不同特征值的特征向量线性无关.

Theorem

1. $n\times n$ 矩阵 A相似于对角阵 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.
2. 矩阵的属于不同特征值的特征向量线性无关.
3. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是矩阵$A$ 的互不相同的特征值，$\eta_{1i},\eta_{2i},\cdots,\eta_{t_i i}$ 是A相应于特征值λ_i 的线性无关的特征向量，则

$$\eta_{11},\eta_{21},\cdots,\eta_{t_1 1},\eta_{12},\eta_{22},\cdots,\eta_{t_2 2},\cdots\eta_{1s},\eta_{2s},\cdots,\eta_{t_s s}$$

线性无关.

线性变换的可对角化问题

Theorem

假设 V 是 n 维线性空间，$f \in Hom(V, V)$.则，

线性变换的可对角化问题

Theorem

假设 V 是 n 维线性空间，$f \in Hom(V, V)$.则，

1. f 可对角化当且仅当 f 有 n个线性无关的特征向量.

线性变换的可对角化问题

Theorem

假设 V 是 n 维线性空间，$f \in Hom(V,V)$.则，

1. f 可对角化当且仅当 f 有 n个线性无关的特征向量.
2. f 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

线性变换的可对角化问题

Theorem

假设 V 是 n 维线性空间，$f \in Hom(V,V)$.则，

1. f 可对角化当且仅当 f 有 n个线性无关的特征向量.
2. f 的属于不同特征值的特征向量线性无关.
3. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 f 的互不相同的特征值，$\eta_{1i}, \eta_{2i}, \cdots, \eta_{t_i i}$ 是f相应于特征值λ_i 的线性无关的特征向量，则

$$\eta_{11}, \eta_{21}, \cdots, \eta_{t_1 1}, \eta_{12}, \eta_{22}, \cdots, \eta_{t_2 2}, \cdots \eta_{1s}, \eta_{2s}, \cdots, \eta_{t_s s}$$

线性无关.

特征子空间

Definition

设 $f \in Hom(V, V)$, λ_0 是 f的特征值, 称

$$V_{\lambda_0} = \{\eta \in V | f(\eta) = \lambda_0 \eta\}$$

为 f 的相应于特征值 λ_0 的特征子空间.

特征子空间

Definition

设 $f \in Hom(V, V)$, λ_0 是 f的特征值, 称

$$V_{\lambda_0} = \{\eta \in V | f(\eta) = \lambda_0 \eta\}$$

为 f 的相应于特征值 λ_0 的特征子空间.

显然有:

特征子空间

Definition

设 $f \in Hom(V,V)$, λ_0 是 f的特征值, 称

$$V_{\lambda_0} = \{\eta \in V | f(\eta) = \lambda_0 \eta\}$$

为 f 的相应于特征值 λ_0 的特征子空间.

显然有:

相应于特征值λ_0 , f 刚好有$\dim V_{\lambda_0}$个线性无关的特征向量.

Theorem

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为 f 的相异特征值，则和$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_s}$ 是直和.

Theorem

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为 f 的相异特征值，则和$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_s}$ 是直和.

Theorem

假设 $\dim V = n$， $f \in Hom(V, V)$ 的特征多项式为

$$C(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{c_1}(\lambda - \lambda_2)^{c_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{c_s}$$

则存在V 的基使得f 的矩阵是对角阵的充分必要条件是

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} = n.$$

Example

$f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$ 定义

为 $\forall X \in C^{2\times 2}$,, $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$, 求 f 的特征值及相应的特征子空间的基.

几何重数

Theorem

设 $f \in Hom(V, V)$ 的特征多项式是 $C(\lambda) = \Pi_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$,则$\dim V_{\lambda_i} \leq c_i$.

几何重数

Theorem

设 $f \in Hom(V, V)$ 的特征多项式是 $C(\lambda) = \Pi_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$,则$\dim V_{\lambda_i} \leq c_i$.

Theorem

设 $f \in Hom(V, V)$ 的特征多项式是 $C(\lambda) = \Pi_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$, 则下述条件是等价的:

几何重数

Theorem

设 $f \in Hom(V, V)$ 的特征多项式
是 $C(\lambda) = \Pi_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$,则$\dim V_{\lambda_i} \leq c_i$.

Theorem

设 $f \in Hom(V, V)$ 的特征多项式是 $C(\lambda) = \Pi_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$, 则下述条件是等价的：

1. f 是可对角化的;

几何重数

Theorem

设 $f \in Hom(V, V)$ 的特征多项式
是 $C(\lambda) = \Pi_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$,则$\dim V_{\lambda_i} \leq c_i$.

Theorem

设 $f \in Hom(V,V)$ 的特征多项式是 $C(\lambda) = \Pi_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$, 则下述条件是等价的：

1. f 是可对角化的;
2. $\forall i, \quad \dim V_{\lambda_i} = c_i$;

几何重数

Theorem

设 $f \in Hom(V, V)$ 的特征多项式是 $C(\lambda) = \Pi_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$,则$\dim V_{\lambda_i} \leq c_i$.

Theorem

设 $f \in Hom(V, V)$ 的特征多项式是 $C(\lambda) = \Pi_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$, 则下述条件是等价的:

1. f 是可对角化的;
2. $\forall i, \quad \dim V_{\lambda_i} = c_i$;
3. $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$

Example

$f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$ 定义为: $\forall X \in C^{2\times 2}$， $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$

1. 求 f在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵：

Example

$f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$ 定义为: $\forall X \in C^{2\times 2}$, $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$

1. 求 f在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵:
2. 求 f 的特征值及相应的特征子空间的基;

Example

$f \in Hom(C^{2\times 2}, C^{2\times 2})$ 定义为: $\forall X \in C^{2\times 2}$，$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$

1. 求 f在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵：
2. 求 f 的特征值及相应的特征子空间的基;
3. 问：是否存在 $C^{2\times 2}$ 的基，使得 f 的矩阵为对角阵?为什么?

最小多项式与可对角化

Lemma

若 n 阶矩阵 M_i 满足 $M_1M_2\cdots M_s=O$, 则 $\sum_{i=1}^{s} r(M_i)\le(s-1)n$.

最小多项式与可对角化

Lemma

若 n 阶矩阵 M_i 满足 $M_1M_2\cdots M_s=O$, 则 $\sum_{i=1}^{s} r(M_i)\le (s-1)n$.

Theorem

$n\times n$ 矩阵 A 相似于对角阵当且仅当 A 的最小多项式无重根.

最小多项式与可对角化

Lemma

若 n 阶矩阵 M_i 满足 $M_1M_2\cdots M_s=O$, 则 $\sum_{i=1}^{s} r(M_i)\le (s-1)n$.

Theorem

$n\times n$ 矩阵 A 相似于对角阵当且仅当 A 的最小多项式无重根.

Example

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$，则 A 相似于对角阵.

Example

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$，则 A 相似于对角阵.

Example

已知 $A \in C^{n\times n}$ 满足 $A^2 = 3A + 10I$，并且，$r(A - 5I) = r$. 求行列式$|A + 3I|$.

如果给定的矩阵(不一定与对角阵相似），如何找一最简单的矩阵与之相似？

如果给定的矩阵(不一定与对角阵相似），如何找一最简单的矩阵与之相似？

等价的问题：

如果给定的矩阵(不一定与对角阵相似），如何找一最简单的矩阵与之相似？

等价的问题：

若线性空间上给定的线性变换（不一定可对角化），能否找线性空间有一组基，使线性变换的矩阵最简单？

Jordan形矩阵

Definition

1. 形如 $\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$ 的矩阵称为Jordan块

Jordan形矩阵

Definition

1. 形如 $\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$ 的矩阵称为Jordan块
2. 形如 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ (其中，J_i均是Jordan块)的矩阵称为Jordan形矩阵.

Jordan形矩阵

Definition

1. 形如 $\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$ 的矩阵称为Jordan块

2. 形如 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ (其中，J_i均是Jordan块)的矩阵称为Jordan形矩阵.

Example

下列矩阵是否为Jordan形矩阵？

Example

下列矩阵是否为Jordan形矩阵？

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Example

下列矩阵是否为Jordan形矩阵？

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Example

下列矩阵是否为Jordan形矩阵？

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Example

下列矩阵是否为Jordan形矩阵？

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Example

下列矩阵是否为Jordan形矩阵？

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Example

下列矩阵是否为Jordan形矩阵？

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Example

下列矩阵是否为Jordan形矩阵？

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition

若矩阵A与J相似，且J是J若当形矩阵，则称J是A的若当标准形.

Definition

若矩阵A与J相似，且J是J若当形矩阵，则称J是A的若当标准形.

若当标准形的唯一性

若$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$是矩阵$A$的$Jordan$标准形，

若当标准形的唯一性

若$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$是矩阵$A$的$Jordan$标准形，

$K = \begin{pmatrix} J_{i_1} & & & \\ & J_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_s} \end{pmatrix}$,

其中，$J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, J_{i_s}$是$J_1, J_2, \cdots, J_s$的一个排列，则$K$ 也是A的$Jordan$标准形.

若当标准形的唯一性

若$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$是矩阵$A$的$Jordan$标准形，

$K=\begin{pmatrix} J_{i_1} & & & \\ & J_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_s} \end{pmatrix}$，

其中，$J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, J_{i_s}$是$J_1, J_2, \cdots, J_s$的一个排列，则$K$ 也是A的$Jordan$标准形.

下面的定理表明：在承认存在性的前提下，除了相差Jordan块的次序外，每个矩阵的Jordan标准形是唯一的.

下面的定理表明：在承认存在性的前提下，除了相差Jordan块的次序外，每个矩阵的Jordan标准形是唯一的.

Theorem

（假设矩阵的$Jordan$标准形是存在的）设λ_0 是n 阶方阵A 的特征值，则对任意一正整数k. A 的$Jordan$ 标准形中主对角元为λ_0 且阶数为k 的$Jordan$ 块的块数等于

$$r(B^{k-1}) - 2r(B^k) + r(B^{k+1})$$

其中，$B = A - \lambda_0 I$.

唯一性的证明思路:

唯一性的证明思路：

1. 若A与J相似，λ_0是数，则对一切正整数$k, r(A-\lambda_0 I)^k = r(J-\lambda_0 I)^k$；

唯一性的证明思路：

1. 若A与J相似，λ_0是数，则对一切正整数$k, r(A-\lambda_0 I)^k = r(J-\lambda_0 I)^k$；
2. 若$n\times n$矩阵$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，

唯一性的证明思路：

1. 若A与J相似，λ_0是数，则对一切正整数$k, r(A-\lambda_0 I)^k = r(J-\lambda_0 I)^k$；
2. 若$n \times n$矩阵$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，

   则$r(N^{k-1}) - r(N^k) = \begin{cases} 1, k \leq n \\ 0, k > n \end{cases}$

唯一性的证明思路：

1. 若A与J相似，λ_0是数，则对一切正整数$k, r(A-\lambda_0 I)^k = r(J-\lambda_0 I)^k$；
2. 若$n \times n$矩阵$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，则$r(N^{k-1}) - r(N^k) = \begin{cases} 1, k \le n \\ 0, k > n \end{cases}$
3. 若J是Jordan矩阵，则$r(J-\lambda_0 I)^{k-1} - r(J-\lambda_0 I)^k$等于$J$中以$\lambda_0$为主对角元，阶数$\ge k$ 的Jordan块的块数.

Example

已知矩阵A的特征多项式是$C(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^4$,
且$r(A - 2I) = 4$,求A的Jordan标准形.

Example

已知矩阵A的特征多项式是$C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4$,
且$r(A-2I)=4$,求A的Jordan标准形.

Example

已知矩阵A的特征多项式是$C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4$,
且$r(A-2I)=4, r(A-2I)^2=3$,求A的Jordan标准形.

Example

已知矩阵A的特征多项式是$C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4$,
且$r(A-2I)=4$,求A的Jordan标准形.

Example

已知矩阵A的特征多项式是$C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4$,
且$r(A-2I)=4, r(A-2I)^2=3$,求A的Jordan标准形.

Example

求下列矩阵的Jordan标准形：

Example

求下列矩阵的Jordan标准形：

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix},$$

Example

求下列矩阵的Jordan标准形：

$$A=\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}, C_A(x)=(x+3)(x-1)^2.$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

Example

求下列矩阵的Jordan标准形：

$$A=\begin{pmatrix}13&16&16\\-5&-7&-6\\-6&-8&-7\end{pmatrix}, C_A(x)=(x+3)(x-1)^2.$$

$$B=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}, C_B(x)=(x-1)^3.$$

Example

求下列矩阵的Jordan标准形：

$$A=\begin{pmatrix}13&16&16\\-5&-7&-6\\-6&-8&-7\end{pmatrix}, C_A(x)=(x+3)(x-1)^2.$$

$$B=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}, C_B(x)=(x-1)^3.$$

Jordan标准形与最小多项式

Theorem

若$M=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则矩阵$M, A, B$的最小多项式间有关系：$m_M(\lambda)=[m_A(\lambda), m_B(\lambda)]$.

Jordan标准形与最小多项式

Theorem

若$M=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则矩阵$M,A,B$的最小多项式间有关系：$m_M(\lambda)=[m_A(\lambda),m_B(\lambda)]$.

Theorem

假设矩阵A的最小多项式是$m(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{r_i},$，则$r_i$即是$A$的$Jordan$标准形中以$\lambda_i$为主对角元的$Jordan$块的最高阶数.

Jordan标准形与最小多项式

Theorem

若$M=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则矩阵$M,A,B$的最小多项式间有关系：$m_M(\lambda)=[m_A(\lambda),m_B(\lambda)]$.

Theorem

假设矩阵A的最小多项式是$m(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$,,
则r_i即是A的$Jordan$标准形中以λ_i为主对角元的$Jordan$块的最高阶数·特别地，A相似于对角阵$\Leftrightarrow A$的最小多项式无重根.

Example

已知 A 的特征多项式和最小多项式分别是 $C(x)=(x-1)^2(x-2)^5, m(x)=(x-1)(x-2)^2$，求 A 的可能的Jordan形.

Example

已知 A 的特征多项式和最小多项式分别是 $C(x)=(x-1)^2(x-2)^5, m(x)=(x-1)(x-2)^2$，求 A 的可能的Jordan形.

Example

已知 A 的特征多项式和最小多项式均是 $C(x)=m(x)=x^4$，求 A 及 A^2 的Jordan标准形.

Example

已知 A 的特征多项式和最小多项式分别是 $C(x)=(x-1)^2(x-2)^5, m(x)=(x-1)(x-2)^2$，求 A 的可能的Jordan形.

Example

已知 A 的特征多项式和最小多项式均是 $C(x)=m(x)=x^4$，求 A 及 A^2 的Jordan标准形.

Example

设$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, A=\alpha\beta^H$.求$A$的Jordan标准形.

Example

已知$tr(A) = r(A) = 1$,证明：$A^2 = A$.

Example

已知$tr(A) = r(A) = 1$,证明：$A^2 = A$.

Example

求相似变换矩阵P，将下列矩阵变成其Jordan标准形：$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$,

Example

已知$tr(A)=r(A)=1$,证明：$A^2=A$.

Example

求相似变换矩阵P，将下列矩阵变成其Jordan标准形：$A=\begin{pmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{pmatrix}$,

$C_A(x)=(x+3)(x-1)^2$

Example

已知$tr(A) = r(A) = 1$,证明：$A^2 = A$.

Example

求相似变换矩阵P，将下列矩阵变成其Jordan标准形：$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$,

$C_A(x) = (x+3)(x-1)^2$

$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

Example

已知$tr(A) = r(A) = 1$,证明：$A^2 = A$.

Example

求相似变换矩阵P，将下列矩阵变成其Jordan标准形：$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$,

$C_A(x) = (x+3)(x-1)^2$

$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

$C_B(x) = (x-1)^3$.

若当标准形的存在性

存在性的证明思路:

若当标准形的存在性

存在性的证明思路:

假设V假设V是复数域上n维线性空间，$f \in Hom(V, V)$的特征多项式为$C(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$，记$V_i = K(f - \lambda_i I)^{c_i}$. 可以证明：

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

若当标准形的存在性

存在性的证明思路:

假设V假设V是复数域上n维线性空间，$f \in Hom(V,V)$的特征多项式为$C(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$，记$V_i = K(f - \lambda_i I)^{c_i}$. 可以证明：

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

于是，取适当的基，可以使f的矩阵为分块对角阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

并且，A_i只有一个特征值.

若当标准形的存在性

存在性的证明思路:

假设V假设V是复数域上n维线性空间，$f \in Hom(V,V)$的特征多项式为$C(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{c_i}$，记$V_i = K(f - \lambda_i I)^{c_i}$. 可以证明：

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

于是，取适当的基，可以使f的矩阵为分块对角阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

并且，A_i只有一个特征值.

因此，只需处理只有一个特征值的线性变换.
设$f \in Hom(V, V)$只有一个特征值，比如，全为a，
令$g = f - aI$，则g的特征值全为零，并且，在V的一组基
下，f的矩阵是Jordan形矩阵当且仅当g的矩阵是Jordan形矩阵.

因此，只需处理只有一个特征值的线性变换.
设$f \in Hom(V,V)$只有一个特征值，比如，全为a，
令$g = f - aI$，则g的特征值全为零，并且，在V的一组基下，f的矩阵是Jordan形矩阵当且仅当g的矩阵是Jordan形矩阵.
问题转化为：只需讨论特征值全为零的线性变换.

因此，只需处理只有一个特征值的线性变换.
设$f \in Hom(V,V)$只有一个特征值，比如，全为a，
令$g = f - aI$，则g的特征值全为零，并且，在V的一组基下，f的矩阵是Jordan形矩阵当且仅当g的矩阵是Jordan形矩阵.
问题转化为：只需讨论特征值全为零的线性变换.

设$g \in Hom(W,W)$的特征值全为0.

设$g \in Hom(W, W)$的特征值全为0.需证明：W可以分解成关于g的不变子空间的直和：

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

并且，对其中的直和项，比如W_0，存在基，使得$g|_{W_0}$在这组基下的矩阵可以写成形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}"$$

这等价于说，W_0有一组基

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$$

使得$g(\xi_1) = \theta, g(\xi_2) = \xi_1, g(\xi_3) = \xi_2, \cdots, g(\xi_t) = \xi_{t-1}$特别地，$W_i{=}L(g^{t-1}(\xi_t), g^{t-2}(\xi_t), \cdots, g(\xi_t), \xi_t)$

这等价于说，W_0有一组基

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$$

使得$g(\xi_1) = \theta, g(\xi_2) = \xi_1, g(\xi_3) = \xi_2, \cdots, g(\xi_t) = \xi_{t-1}$特别地，$W_i = L(g^{t-1}(\xi_t), g^{t-2}(\xi_t), \cdots, g(\xi_t), \xi_t)$

Theorem

假设$g \in Hom(W, W)$是幂零线性变换，$\alpha \in W$.
则$W_0 = L(g^{t-1}(\alpha), g^{t-2}(\alpha), \cdots, g(\alpha), \alpha)$是关于$g$的不变子空间当且仅当$g^t(\alpha) = \theta$.称形如$W_0$的不变子空间为循环不变子空间.

这等价于说，W_0有一组基

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$$

使得$g(\xi_1) = \theta, g(\xi_2) = \xi_1, g(\xi_3) = \xi_2, \cdots, g(\xi_t) = \xi_{t-1}$特别地，$W_i = L(g^{t-1}(\xi_t), g^{t-2}(\xi_t), \cdots, g(\xi_t), \xi_t)$

Theorem

假设$g \in Hom(W, W)$是幂零线性变换，$\alpha \in W$.
则$W_0 = L(g^{t-1}(\alpha), g^{t-2}(\alpha), \cdots, g(\alpha), \alpha)$是关于$g$的不变子空间当且仅当$g^t(\alpha) = \theta$.称形如$W_0$的不变子空间为循环不变子空间.

Theorem

假设$g \in Hom(W, W)$是幂零线性变换，则W可以分解成循环不变子空间的直和.

盖尔圆

Definition

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 称 A 的特征值的集合为 A 的谱.
称 A 的特征值的模的最大值为 A 的谱半径，记为 $\rho(A)$.
记

$$R_i = |a_{i1}| + \cdots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \cdots + |a_{in}|,$$

$$C_i = \{z \mid |z-a_{ii}| \leq R_i\},$$

称之为 A 的第i个盖尔圆;
称 $G=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ 为 A 的盖尔圆系.

盖尔圆

Definition

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 称 A 的特征值的集合为 A 的谱.
称 A 的特征值的模的最大值为 A 的谱半径，记为 $\rho(A)$.
记

$$R_i=|a_{i1}|+\cdots+|a_{ii-1}|+|a_{ii+1}|+\cdots+|a_{in}|,$$

$$C_i=\{z|\,|z-a_{ii}|\leq R_i\},$$

称之为 A 的第i个盖尔圆;
称 $G=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$ 为 A 的盖尔圆系.

特征值的估计

Theorem

矩阵 A 的特征值必定在 A 的盖尔圆系中.

特征值的估计

Theorem

矩阵 A 的特征值必定在 A 的盖尔圆系中.

注意：并不是每个盖尔圆上都有特征值，但是在盖尔圆之外没有特征值.

特征值的估计

Theorem

矩阵 A 的特征值必定在 A 的盖尔圆系中.

注意：并不是每个盖尔圆上都有特征值，但是在盖尔圆之外没有特征值.

Example

设$A = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ C_1中有两个特征值，但C_2中没有特征值.

Definition

设 $A \in C^{n\times n}$，在 A 的 n 个盖尔圆中，有 k 个圆构成一连通区域，但与其余 $n-k$ 个圆不相交，则称这个连通区域为 k-区.

Definition

设 $A \in C^{n\times n}$，在 A 的 n 个盖尔圆中，有 k 个圆构成一连通区域，但与其余 $n-k$ 个圆不相交，则称这个连通区域为 k-区.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition

设 $A \in C^{n\times n}$，在 A 的 n 个盖尔圆中，有 k 个圆构成一连通区域，但与其余 $n-k$ 个圆不相交，则称这个连通区域为 k-区.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem

A 的盖尔圆的 k-区中有且仅有 A 的 k 个特征值.

Definition

设 $A \in C^{n\times n}$，在 A 的 n 个盖尔圆中，有 k 个圆构成一连通区域，但与其余 $n-k$ 个圆不相交，则称这个连通区域为 k-区.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem

A 的盖尔圆的 k-区中有且仅有 A 的 k 个特征值.

Corollary

如果 A 的 n 个盖尔圆互不相交，则 A 有 n 个互不相等的特征值.

Corollary

如果 A 的 n 个盖尔圆互不相交，则 A 有 n 个互不相等的特征值.

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.02 & 0.11 \\ 0.01 & 0.9 & 0.14 \\ 0.02 & 0.01 & 0.5 \end{pmatrix}$

讨论 A 和 A^T 的盖尔圆 k-区.

谱半径的估计

Theorem

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，

$$\rho_1 = \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\},\quad \rho_2 = \max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$$

则 $\rho(A)\le \rho_1, \rho_2$.

谱半径的估计

Theorem

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，

$$\rho_1=\max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\},\quad \rho_2=\max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$$

则 $\rho(A)\le\rho_1,\rho_2$.

Example

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.02 & 0.11 \\ 0.01 & 0.9 & 0.14 \\ 0.02 & 0.01 & 0.5 \end{pmatrix}$

Example

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.02 & 0.11 \\ 0.01 & 0.9 & 0.14 \\ 0.02 & 0.01 & 0.5 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，证明 $\rho(A) < 6$.

应用

Corollary

1. 如果 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 n 个盖尔圆互不相交，则 A 一定与对角阵相似.

应用

Corollary

1. 如果 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 n 个盖尔圆互不相交，则 A 一定与对角阵相似.
2. 如果 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的 n 个盖尔圆互不相交，则 A 的特征值全是实数.

Definition

假设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 若对 $1\le i\le n$

$$|a_{ii}|>|a_{i1}|+\cdots+|a_{ii-1}|+|a_{ii+1}|+\cdots|a_{in}|$$

则称 A 是行对角占优的.

Definition

假设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 若对 $1\le i\le n$

$$|a_{ii}|>|a_{i1}|+\cdots+|a_{ii-1}|+|a_{ii+1}|+\cdots|a_{in}|$$

则称 A 是行对角占优的.

如果对 $1\le i\le n$

$$|a_{ii}|>|a_{1i}|+\cdots+|a_{i-1i}|+|a_{i+1i}|+\cdots|a_{ni}|$$

则称 A 是列对角占优的.

Definition

假设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 若对 $1\leq i\leq n$

$$|a_{ii}|>|a_{i1}|+\cdots+|a_{ii-1}|+|a_{ii+1}|+\cdots|a_{in}|$$

则称 A 是行对角占优的.

如果对 $1\leq i\leq n$

$$|a_{ii}|>|a_{1i}|+\cdots+|a_{i-1i}|+|a_{i+1i}|+\cdots|a_{ni}|$$

则称 A 是列对角占优的.

Definition

行对角占优矩阵和列对角占优矩阵统称为对角占优矩阵.

Corollary

假设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是对角占优矩阵，则

Corollary

假设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是对角占优矩阵，则

(1) A 是可逆矩阵；

Corollary

假设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是对角占优矩阵，则

(1) A 是可逆矩阵；

(2) $\rho(A)\leq\max\limits_{1\leq i\leq n}\{2\,|a_{ii}|\}$；

Corollary

假设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是对角占优矩阵，则

(1) A 是可逆矩阵；

(2) $\rho(A)\le \max\limits_{1\le i\le n}\{2\,|a_{ii}|\}$；

(3) 若 $a_{ii}>0$，则 A 的特征值的实部全都大于零.