工程矩阵理论:Hermite二次型

东南大学· 数学系· 周建华

August 20, 2016

本章内容概要

1. Hermite二次型

本章内容概要

1. Hermite二次型
2. 标准形

本章内容概要

1. Hermite二次型
2. 标准形
3. 惯性定理

本章内容概要

1. Hermite二次型
2. 标准形
3. 惯性定理
4. 有定性

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义一复变量、复值函数

$$f(X) = X^H AX = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j,$$

其中, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义一复变量、复值函数

$$f(X) = X^H AX = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j,$$

其中, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.
可以证明：

$$\forall x_j \in \mathbb{C}, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A^H = A$$

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义一复变量、复值函数

$$f(X) = X^H AX = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j,$$

其中, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.
可以证明：

$$\forall x_j \in \mathbb{C}, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A^H = A$$

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若有 $A^H = A$, 则称矩阵为Hermite矩阵，简称为 H 阵. 这时的 $f(X)$ 称为是Hermite二次型。

实对称矩阵的性质:

1. 实对称矩阵的特征值都是实数.

实对称矩阵的性质:

1. 实对称矩阵的特征值都是实数.
2. 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.

实对称矩阵的性质:

1. 实对称矩阵的特征值都是实数.
2. 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.
3. 对任意实对称矩阵 A, 存在正交矩阵 Q, 使得 Q^TAQ 是对角阵.

实对称矩阵的性质:

1. 实对称矩阵的特征值都是实数.
2. 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.
3. 对任意实对称矩阵 A, 存在正交矩阵 Q, 使得 Q^TAQ 是对角阵.

H 阵的性质

Theorem

1. H 阵的特征值均是实数.

实对称矩阵的性质:

1. 实对称矩阵的特征值都是实数.
2. 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.
3. 对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 是对角阵.

H 阵的性质

Theorem

1. H 阵的特征值均是实数.
2. H 阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.

实对称矩阵的性质:

1. 实对称矩阵的特征值都是实数.
2. 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.
3. 对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q，使得 $Q^T AQ$ 是对角阵.

H 阵的性质

Theorem

1. H 阵的特征值均是实数.
2. H 阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.
3. 若 A 是 H 阵，则必存在酉矩阵 U，使得 $U^H AU$ 是对角阵.

正规阵

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若 $A^HA = AA^H$，则称 A 是正规阵.

正规阵

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若 $A^H A = AA^H$，则称 A 是正规阵.

Example

H 阵，酉矩阵，反 H 阵均是正规阵.

正规阵

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若 $A^HA = AA^H$，则称 A 是正规阵.

Example

H 阵，酉矩阵，反 H 阵均是正规阵.

Theorem

若 A 既是上三角的，又是正规的，则 A 必是对角阵.

正规阵

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若 $A^H A = AA^H$，则称 A 是正规阵.

Example

H 阵，酉矩阵，反 H 阵均是正规阵.

Theorem

若 A 既是上三角的，又是正规的，则 A 必是对角阵.

Theorem

$A \in C^{n\times n}$ 是正规阵 $\iff$ A 酉相似于对角阵.

正规阵

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若 $A^H A = AA^H$，则称 A 是正规阵.

Example

H 阵，酉矩阵，反 H 阵均是正规阵.

Theorem

若 A 既是上三角的，又是正规的，则 A 必是对角阵.

Theorem

$A \in C^{n\times n}$ 是正规阵 $\Longleftrightarrow$ A 酉相似于对角阵.

Corollary

$A \in C^{n\times n}$ 是正规阵 $\Leftrightarrow$ A有 n 个两两正交的单位特征向量.

Example

证明：正规阵 A，B 相似的充要条件是它们有相同的特征多项式.

Example

证明：正规阵 A，B 相似的充要条件是它们有相同的特征多项式.

Example

设 A 是正规阵.证明：

(1) $A^2 = A \Leftrightarrow A$ 的特征值是 0 或 1;

(2) A 是幂零阵 $\Leftrightarrow A = O$.

可逆线性变换

若 A，B 都是 H 阵，且对 $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $X^H A X = X^H B X$,
则 $A = B$.

可逆线性变换

若 A，B 都是 H 阵，且对 $\forall X\in\mathbb{C}^n$, $X^HAX=X^HBX$,
则 $A=B$.

设 $f(X)=X^HAX, g(Y)=Y^HBY, C$ 是可逆矩阵，若
在 $X=CY$ 下，$f(X)=g(Y)$，则 $B=C^HAC$.

可逆线性变换

若 A，B 都是 H 阵，且对 $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $X^H AX = X^H BX$,
则 $A = B$.

设 $f(X) = X^H AX$, $g(Y) = Y^H BY$, C 是可逆矩阵，若
在 $X = CY$ 下，$f(X) = g(Y)$，则 $B = C^H AC$.

Definition

设 A，B 是 H 阵，若有可逆阵 C，使得 $B = C^H AC$，则
称 A 与 B 是共轭合同的.

可逆线性变换

若 A，B 都是 H 阵，且对 $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $X^H AX = X^H BX$,
则 $A = B$.

设 $f(X) = X^H AX, g(Y) = Y^H BY, C$ 是可逆矩阵，若
在 $X = CY$ 下，$f(X) = g(Y)$，则 $B = C^H AC$.

Definition

设 A，B 是 H 阵，若有可逆阵 C，使得 $B = C^H AC$，则
称 A 与 B 是共轭合同的.

共轭合同关系满足：反身性，对称性，传递性.

标准形

Definition

假设 Hermite 二次型 $f(X)$ 在可逆线性变换下 $X = CY$ 变成只含"平方"项的形式

$$\begin{aligned} g(Y) &= d_1 y_1 \overline{y_1} + d_2 y_2 \overline{y_2} + \cdots + d_n y_n \overline{y_n} \\ &= d_1 |y_1|^2 + d_2 |y_2|^2 + \cdots + d_n |y_n|^2 \end{aligned}$$

则称 $g(Y)$ 是 $f(X)$ 的标准型.

标准形

Definition

假设 Hermite 二次型 $f(X)$ 在可逆线性变换下 $X = CY$ 变成只含"平方"项的形式

$$\begin{aligned} g(Y) &= d_1 y_1 \overline{y_1} + d_2 y_2 \overline{y_2} + \cdots + d_n y_n \overline{y_n} \\ &= d_1 |y_1|^2 + d_2 |y_2|^2 + \cdots + d_n |y_n|^2 \end{aligned}$$

则称 $g(Y)$ 是 $f(X)$ 的标准型.

标准形的计算:

1. 配方法(初等变换法)
2. 酉变换法

假设 Hermite 二次型 $f(X)=X^HAX$，A 是相应的Hermite矩阵，酉矩阵 U 满足

$$U^HAU == \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

令 $X=UY$, 则

$$f(X)=a_1\left|y_1\right|^2+a_2\left|y_p\right|^2+\cdots+a_n\left|y_n\right|^2$$

.

唯一性

Theorem

若 $f(X)$ 在可逆线性变换 $X = CY$ 下变成标准形

$$g(Y) = d_1 |y_1|^2 + \cdots + d_p |y_p|^2 - d_{p+1} |y_{p+1}|^2 \cdots - d_r |y_r|^2$$

在可逆线性变换 $X = DZ$下变成标准形：

$$h(Y) = k_1 |z_1|^2 + \cdots + k_q |z_q|^2 - k_{q+1} |z_{q+1}|^2 \cdots - k_r |z_r|^2$$

其中，d_i, k_i 均大于零.则 $p = q$.

唯一性

Theorem

若 $f(X)$ 在可逆线性变换 $X = CY$ 下变成标准形

$$g(Y) = d_1 |y_1|^2 + \cdots + d_p |y_p|^2 - d_{p+1} |y_{p+1}|^2 \cdots - d_r |y_r|^2$$

在可逆线性变换 $X = DZ$下变成标准形：

$$h(Y) = k_1 |z_1|^2 + \cdots + k_q |z_q|^2 - k_{q+1} |z_{q+1}|^2 \cdots - k_r |z_r|^2$$

其中，d_i, k_i 均大于零.则 $p = q$.

Definition

Hermite二次型标准形中的正项个数称为其正惯性指数，负项个数称为其负惯性指数.

惯性定理的矩阵形式:

若 H 阵 A 与

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

共轭合同，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中正、负项个数相同.

惯性定理的矩阵形式：

若 H 阵 A 与

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

共轭合同，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中正、负项个数相同.

Definition

与H 阵A 共轭合同的对角阵中的正项个数称为A 的正惯性指数，负项个数称为A 的负惯性指数.

规范形

如果 $n\times n$ Hermite矩阵 A 的正、负惯性指数分别是 p,q，则 A 必定与矩阵 $\begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$ 共轭合同.称此矩阵为 A 的规范形.

规范形

如果 $n \times n$ Hermite矩阵 A 的正、负惯性指数分别是 p, q，则 A 必定与矩阵 $\begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$ 共轭合同.称此矩阵为 A 的规范形.

Theorem

$n \times n$ Hermite矩阵 A，B共轭合同 $\Leftrightarrow$ A, B 有相同的正、负惯性指数.

规范形

如果 $n\times n$ Hermite矩阵 A 的正、负惯性指数分别是 p,q，则 A 必定与矩阵 $\begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$ 共轭合同.称此矩阵为 A 的规范形.

Theorem

*$n\times n$ Hermite*矩阵 A，B共轭合同 $\Leftrightarrow$ A,B 有相同的正、负惯性指数.

问：按共轭合同关系，n 阶*Hermite* 矩阵共可分成多少个共轭合同类?

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X) = X^H AX$, 若对 $\forall X_0 \neq \theta$, $f(X_0) > 0$, 则称 f 是正定的， A 是正定的 H 阵.

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X)=X^HAX$, 若对 $\forall X_0\neq\theta$, $f(X_0)>0$, 则称 f 是正定的， A 是正定的 H 阵.

如何建立判别方法

1. 设 $= \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$，则 D 是正定的 $\Leftrightarrow \forall d_i>0$；

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X)=X^HAX$, 若对 $\forall X_0\neq\theta$, $f(X_0)>0$, 则称 f 是正定的， A 是正定的 H 阵.

如何建立判别方法

1. 设 $=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$，则 D 是正定的 $\Leftrightarrow \forall d_i>0$;
2. 若 H 阵 A,B 共轭合同，则 A 正定 $\Leftrightarrow$ B 正定.

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X) = X^H AX$, 若对 $\forall X_0 \neq \theta$, $f(X_0) > 0$, 则称 f 是正定的， A 是正定的 H 阵.

如何建立判别方法

1. 设 $= \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$，则 D 是正定的 $\Leftrightarrow \forall d_i > 0$;
2. 若 H 阵 A, B 共轭合同，则 A 正定 $\Leftrightarrow$ B 正定.
3. 若 H 阵 A 与 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 共轭合同，则 A 正定 $\Leftrightarrow \forall d_i > 0$.

正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite* 阵，则下述条件等价：

正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite* 阵，则下述条件等价：

1. A 是正定的;

正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite* 阵，则下述条件等价：

1. A 是正定的;
2. A 的特征值均大于零;

正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite* 阵，则下述条件等价：

1. A 是正定的;
2. A 的特征值均大于零;
3. A 与 I 共轭合同;

正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite* 阵，则下述条件等价：

1. A 是正定的;
2. A 的特征值均大于零;
3. A 与 I 共轭合同;
4. 存在可逆阵 P 使得 $A = P^H P$;

正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite* 阵，则下述条件等价：

1. A 是正定的;
2. A 的特征值均大于零;
3. A 与 I 共轭合同;
4. 存在可逆阵 P 使得 $A = P^H P$;
5. A 的各顺序主子式均大于零.

Example

假设 α 是 n 维列向量，且 $\|\alpha\| = 1$. 问：当 k 为何值时，矩阵 $A = I - k\alpha\alpha^H$ 是正定的.

Example

假设 α 是 n 维列向量，且 $\|\alpha\| = 1$. 问：当 k 为何值时，矩阵 $A = I - k\alpha\alpha^H$ 是正定的.

Example

设 A 是正定的Hermite 矩阵，证明：存在正定的Hermite 矩阵 S 使得 $A = S^2$.

Example

假设 α 是 n 维列向量，且 $\|\alpha\| = 1$. 问：当 k 为何值时，矩阵 $A = I - k\alpha\alpha^H$ 是正定的.

Example

设 A 是正定的Hermite 矩阵，证明：存在正定的Hermite 矩阵 S 使得 $A = S^2$.

Example

证明：若酉矩阵 A 是正定的，则 $A = I$.

其它有定性

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X) = X^H AX$.

其它有定性

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X) = X^H AX$.

1. 若对 $\forall X_0 \neq \theta, f(X_0) < 0$, 则称 f 是负定的，A 是负定的 H阵;

其它有定性

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X)=X^HAX$.

1. 若对 $\forall X_0\neq\theta, f(X_0)<0$, 则称 f 是负定的，A 是负定的 H阵;
2. 若对 $\forall X, f(X_0)\geq 0$，则称 f 是半正定的， A 是半正定的 H 阵;

其它有定性

Definition

设 A 是 H 阵，$f(X) = X^H AX$.

1. 若对 $\forall X_0 \neq \theta, f(X_0) < 0$, 则称 f 是负定的，A 是负定的 H阵;
2. 若对 $\forall X, f(X_0) \geq 0$，则称 f 是半正定的， A 是半正定的 H 阵;
3. 若对 $\forall X, f(X_0) \leq 0$，则称 f 是半负定的，A 是半负定的 H 阵.

如何建立判别方法

如何建立判别H阵是不是半正定的:

1. 设 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$, 则 D 是半正定的 $\Leftrightarrow \forall d_i \geq 0;$

如何建立判别方法

如何建立判别H阵是不是半正定的：

1. 设 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$，则 D 是半正定的 $\Leftrightarrow \forall d_i \geq 0$;
2. 若 H 阵 A，B 共轭合同，则 A 半正定 $\Leftrightarrow B$ 半正定：

如何建立判别方法

如何建立判别H阵是不是半正定的：

1. 设 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$，则 D 是半正定的 $\Leftrightarrow \forall d_i \geq 0$;
2. 若 H 阵 A，B 共轭合同，则 A 半正定 $\Leftrightarrow B$ 半正定：
3. 若 H 阵 A 与 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 共轭合同，则 A 半正定 $\Leftrightarrow \forall d_i \geq 0$.

半正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite*阵，则下述条件等价：

半正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite*阵，则下述条件等价：

1. A 是半正定的;

半正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ $Hermite$阵，则下述条件等价：

1. A 是半正定的;
2. A 的特征值均大于或等于零;

半正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ $Hermite$阵，则下述条件等价：

1. A 是半正定的;
2. A 的特征值均大于或等于零;
3. A 与 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & O \end{pmatrix}$共轭合同;

半正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ *Hermite*阵，则下述条件等价：

1. A 是半正定的；
2. A 的特征值均大于或等于零；
3. A 与 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & O \end{pmatrix}$ 共轭合同；
4. 存在矩阵 P 使得 $A = P^H P$；

半正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ $Hermite$阵，则下述条件等价：

1. A 是半正定的;
2. A 的特征值均大于或等于零;
3. A 与 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & O \end{pmatrix}$ 共轭合同;
4. 存在矩阵 P 使得 $A = P^H P$；
5. A 的各主子式均大于或等于零.

半正定的充要条件

Theorem

设 A 是 $n \times n$ $Hermite$阵，则下述条件等价：

1. A 是半正定的;
2. A 的特征值均大于或等于零;
3. A 与 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & O \end{pmatrix}$ 共轭合同;
4. 存在矩阵 P 使得 $A = P^H P$;
5. A 的各主子式均大于或等于零.

Example

证明：正定矩阵与半正定矩阵的和一定是正定矩阵.

奇值分解定理

Theorem

假设 A 是秩为 r 的 $s\times n$ 矩阵，则 A^HA 是秩为 r 的半正定矩阵.设其非零特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，
令 $d_i=\sqrt{\lambda_i}$，$D=diag\{d_1,d_2,\cdots,d_r\}$，则一定存在 s 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，使得

$$A=U\begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}V$$

奇值分解定理的证明

假设 $A^H A$ 特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1} = 0, \cdots \lambda_n = 0$，

奇值分解定理的证明

假设 A^HA 特征值为$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\lambda_r,\ \lambda_{r+1}=0,\ \cdots\lambda_n=0$，相应的标准正交特征向量组是 $x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n$，

奇值分解定理的证明

假设 A^HA 特征值为$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\lambda_r,\ \lambda_{r+1}=0,\ \cdots\lambda_n=0$，
相应的标准正交特征向量组是 $x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n$，
即,$A^HAx_j=\lambda_jx_j, j=1,2,\cdots,n$，

奇值分解定理的证明

假设 A^HA 特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1}=0, \cdots \lambda_n=0$,
相应的标准正交特征向量组是 $x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n$,
即,$A^HAx_j=\lambda_j x_j, j=1,2,\cdots,n$,
所以,

$$< Ax_i, Ax_j >= x_j^H A^H Ax_i = \lambda_i x_j^H x_i = \begin{cases} \lambda_i, & 1 \le i = j \le r, \\ 0, & i \ne j,\ or\ i = j > r \end{cases},$$

奇值分解定理的证明

假设 A^HA 特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1}=0, \cdots \lambda_n=0$，
相应的标准正交特征向量组是 $x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n$，
即,$A^HAx_j=\lambda_j x_j, j=1,2,\cdots,n$，
所以，

$$< Ax_i, Ax_j >= x_j^HA^HAx_i=\lambda_i x_j^H x_i=\begin{cases}\lambda_i, & 1\le i=j\le r,\\ 0, & i\ne j,\ or\ i=j>r\end{cases},$$

因此， $Ax_1, \cdots, Ax_r$ 是一正交向量组，

奇值分解定理的证明

假设 A^HA 特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1}=0, \cdots \lambda_n=0$,
相应的标准正交特征向量组是 $x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n$,
即,$A^HAx_j=\lambda_j x_j, j=1,2,\cdots,n$,
所以,

$$< Ax_i, Ax_j >= x_j^H A^H Ax_i = \lambda_i x_j^H x_i = \begin{cases} \lambda_i, & 1 \le i = j \le r, \\ 0, & i \ne j, \ or \ i = j > r \end{cases},$$

因此, $Ax_1, \cdots, Ax_r$ 是一正交向量组,
并且,

$$\|Ax_i\| = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, \cdots, r, \quad Ax_{r+1} = \cdots = Ax_n = \theta$$

令 $y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A x_i,\ i = 1, 2, \cdots, r$,

令 $y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A x_i,\ i = 1, 2, \cdots, r$，
则 $y_1, \cdots, y_r$ 是 C^s 中的一标准正交向量组，

令 $y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A x_i,\ i = 1, 2, \cdots, r$，
则 $y_1, \cdots, y_r$ 是 C^s中的一标准正交向量组，
将之扩充成 C^s 的标准正交基：$y_1, \cdots, y_r, y_{r+1}, \cdots, y_s$，

令 $y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Ax_i,\ i = 1, 2, \cdots, r$，
则 $y_1, \cdots, y_r$ 是 C^s中的一标准正交向量组，
将之扩充成 C^s 的标准正交基：$y_1, \cdots, y_r, y_{r+1}, \cdots, y_s$，
则有

$$A(x_1, \cdots, x_n) = (\sqrt{\lambda_1} y_1, \sqrt{\lambda_2} y_2, \cdots, \sqrt{\lambda_r} y_r, \theta, \cdots, \theta)$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_s) \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ & O & & O \end{pmatrix}$$

于是，若令

$$D = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_r\},$$

于是，若令

$$D = diag\left\{d_1, d_2, \cdots, d_r\right\},$$

$$U = (y_1, y_2, \cdots, y_s), \quad V = (x_1, y_2, \cdots, x_n)^H$$

于是，若令

$$D = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_r\},$$

$$U = (y_1, y_2, \cdots, y_s), \quad V = (x_1, y_2, \cdots, x_n)^H$$

则,U,V都是酉矩阵，且

$$A = U \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} V$$

Rayleigh 商

设 A 是 n 阶 H 阵，则 $\forall X \in C^n, X^H AX \in R$, 于是, 可以定义一复变量的实值函数

$$R(X) = \frac{X^H AX}{X^H X}, \forall \theta \neq X \in C^n,$$

称此函数为 A 的Rayleigh 商.

Theorem

假设 H 阵 $A \in C^{n\times n}$，A 的特征值 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$，则

$$\lambda_1 = \min_{\theta \neq X \in C^n} R(X), \qquad \lambda_n = \max_{\theta \neq X \in C^n} R(X).$$

Theorem

假设 H 阵 $A \in C^{n\times n}$，A 的特征值 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$，则

$$\lambda_1 = \min_{\theta \ne X \in C^n} R(X), \qquad \lambda_n = \max_{\theta \ne X \in C^n} R(X).$$

Example

假设 A 是酉矩阵，证明：

$$\max_{\theta \ne X \in C^n} \frac{|X^H A X|}{X^H X} = 1.$$

Theorem

假设 H 阵 $A \in C^{n\times n}$，A 的特征值 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$，相应的标准正交特征向量组是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，

令$S_i = L(x_1,\ x_2,\ \cdots x_{i-1}),\quad T_i = L(x_i,\ x_{i+1}\cdots x_n)$,则

$$\lambda_i = \min_{\theta\neq x\in S_i^{\perp}} R(X) = \max_{\theta\neq x\in T_{i+1}^{\perp}} R(X).$$

Theorem

(Courant极大极小原理) 假设 H 阵 $A \in C^{n\times n}$ 的特征值是 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$，则

$$\lambda_i = \max_{\dim S=i} \left\{ \min_{\theta\neq x\in S} R(x) \right\} = \min_{\dim S=n-i+1} \left\{ \max_{\theta\neq x\in S} R(x) \right\}.$$