工程矩阵理论试卷(A 卷)

2005 年 10 月（闭卷，150 分钟）

系别 ________ 学号________ 姓名__________ 成绩_____________

一． （20%）假设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$C^{2\times 2}$ 的子空间：

$$V_1=\left\{X\in C^{2\times 2}\mid AX=O\right\},\quad V_2=\left\{X\in C^{2\times 2}\mid XA=O\right\}$$

分别求 $V_1,V_2,V_1\cap V_2,V_1+V_2$ 的基及它们的维数。

二． （20%）定义 $C^{2\times 2}$ 上的线性变换 f 如下：

$$f(X)=\begin{pmatrix}a-b & c-d\\ a-b & c-d\end{pmatrix},\qquad \forall X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in C^{2\times 2}$$

1. 求 f 在 $C^{2\times 2}$ 的基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 下的矩阵 M；
2. 假设 $S=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，问：$a,b,c,d$ 满足什么条件时 $f(S)=O$？
3. 求 f 的核空间 $K(f)$ 的一组基及其维数；
4. 求 f 的值域 $R(f)$ 的一组基及其维数；
5. 问：是否有 $C^{2\times 2}=R(f)\oplus K(f)$？为什么？

三． (10%)假设 ω 是 n 维欧几里德空间 V 中的单位向量，V 上的映射 f 定义如下：对任意 $x\in V$，$f(x)=ax-b<x,\omega>\omega$。

1. 证明：f 是 V 上的线性变换；
2. 问：当参数 a,b 取什么值的时候，f 是 V 上的正交变换？说明你的理由。

四． （14%）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$。

1. 求 A 的特征多项式、最小多项式及 A 的 Jordan 标准形；
2. 求 $A^{100}-2A^{50}$；
3. 将矩阵函数 e^{At} 写成关于 A 的多项式。

五． （14%）已知矩阵 A 的特征多项式 $C_A(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda-3)^4$，$A$ 的最小多项式

$m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-3)^2$。

1．问：A是几阶矩阵？请写出A的所有可能的 Jordan 标准形；
2．如果矩阵$A-3I$的秩为3，写出A的 Jordan 标准形；
3．如果矩阵$A-3I$的秩为3，矩阵$B=\begin{pmatrix}-2&3&1&1&1&1\\0&-2&1&1&1&1\\0&0&3&0&0&0\\0&0&2&3&0&0\\0&0&1&2&3&0\\0&0&1&1&2&3\end{pmatrix}$，问：$A$与$B$是否相似？为什么？

六．（12%）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，求$A$的广义逆矩阵$A^+$。

七．（10%）叙述及证明题：

1．若A是n阶正规阵，Q是n阶酉矩阵，证明：矩阵$B=Q^HAQ$也是正规矩阵。

2．假设n阶方阵A,B满足$ABA=A$，且BA是 Hermite 矩阵。证明：$BA=A^+A$（请注明每一步的理由）。