工程矩阵理论：广义逆矩阵

东南大学· 数学系· 周建华

August 20, 2016

本章内容概要

1. 将"逆矩阵"推广到一般情形

本章内容概要

1. 将"逆矩阵"推广到一般情形
2. 广义逆矩阵的计算

本章内容概要

1. 将"逆矩阵"推广到一般情形
2. 广义逆矩阵的计算
3. 广义逆矩阵的性质

本章内容概要

1. 将”逆矩阵”推广到一般情形
2. 广义逆矩阵的计算
3. 广义逆矩阵的性质
4. 应用：不相容线性方程组的求解

1903年，Fredholm，积分算子的广义逆

1903年，Fredholm，积分算子的广义逆
1920年，Moore，矩阵的广义逆

1903年，Fredholm，积分算子的广义逆
1920年，Moore，矩阵的广义逆
1955年，Penrose，证明了唯一性

1903年，Fredholm，积分算子的广义逆
1920年，Moore，矩阵的广义逆
1955年，Penrose，证明了唯一性
所以，在下面的矩阵的广义逆的定义中的四个方程也称为Moore-Penrose方程，简称M-P方程。

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 满足下述四个条件，则称 G 是 A 的广义逆矩阵：

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 满足下述四个条件，则称 G 是 A 的广义逆矩阵：

1. $AGA = A$;

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 满足下述四个条件，则称 G 是 A 的广义逆矩阵：

1. $AGA = A$;
2. $GAG = G$;

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 满足下述四个条件，则称 G 是 A 的广义逆矩阵：

1. $AGA = A$;
2. $GAG = G$;
3. $(AG)^H = AG$;

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 满足下述四个条件，则称 G 是 A 的广义逆矩阵：

1. $AGA = A$;
2. $GAG = G$;
3. $(AG)^H = AG$;
4. $(GA)^H = GA$.

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 满足下述四个条件，则称 G 是 A 的广义逆矩阵：

1. $AGA = A$;
2. $GAG = G$;
3. $(AG)^H = AG$;
4. $(GA)^H = GA$.

这四个方程也称为M-P方程.

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 满足下述四个条件，则称 G 是 A 的广义逆矩阵：

1. $AGA = A$;
2. $GAG = G$;
3. $(AG)^H = AG$;
4. $(GA)^H = GA$.

这四个方程也称为M-P方程.

Example

1. 若A是可逆阵，则A^{-1}就是A的广义逆;

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 满足下述四个条件，则称 G 是 A 的广义逆矩阵：

1. $AGA = A$;
2. $GAG = G$;
3. $(AG)^H = AG$;
4. $(GA)^H = GA$.

这四个方程也称为M-P方程.

Example

1. 若A是可逆阵，则A^{-1}就是A的广义逆;

2. $A = O_{s\times n}, G = O_{n\times s}$.

广义逆矩阵的定义

Definition

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, 若 $G \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 满足下述四个条件，则称 G 是 A 的广义逆矩阵：

1. $AGA = A$;
2. $GAG = G$;
3. $(AG)^H = AG$;
4. $(GA)^H = GA$.

这四个方程也称为M-P方程.

Example

1. 若A是可逆阵，则A^{-1}就是A的广义逆;

2. $A = O_{s\times n}, G = O_{n\times s}$.

存在性和唯一性

Theorem

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$，则 A 的广义逆矩阵是存在的，且是唯一的. A 的广义逆记为 A^{+}.

存在性和唯一性

Theorem

设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$，则 A 的广义逆矩阵是存在的，且是唯一的. A 的广义逆记为 A^{+}.

由广义逆存在性的证明可知：如果矩阵A的满秩分解为$A = BC$,

由广义逆存在性的证明可知：如果矩阵A的满秩分解为$A = BC$,则

$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^H B)^{-1}B^H$$

由广义逆存在性的证明可知：如果矩阵A的满秩分解为$A = BC$,则

$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

Example

设 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，求 A^+.

由广义逆存在性的证明可知：如果矩阵A的满秩分解为$A = BC$,则

$$A^{+} = C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}$$

Example

设 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{+}.

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{+}.

由广义逆存在性的证明可知：如果矩阵A的满秩分解为$A = BC$,则

$$A^+ = C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H$$

Example

设 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，求 A^+.

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^+.

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{+}.

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^+.

Example

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^+.

广义逆矩阵的性质

Example

1. $O_{s\times n}^{+} = O_{n\times s}$.

广义逆矩阵的性质

Example

1. $O_{s\times n}^{+} = O_{n\times s}$.
2. $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} & O \\ O & B^{+} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} O & B^{+} \\ A^{+} & O \end{pmatrix}$.

广义逆矩阵的性质

Example

1. $O_{s\times n}^{+} = O_{n\times s}$.
2. $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} & O \\ O & B^{+} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} O & B^{+} \\ A^{+} & O \end{pmatrix}.$
3. $\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & O \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} \\ O \end{pmatrix}.$

广义逆矩阵的性质

Example

1. $O^+_{s\times n} = O_{n\times s}$.
2. $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ & O \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ \\ O \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^+ & & & \\ & \lambda_2^+ & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^+ \end{pmatrix}$,

其中，$\lambda_j^+ = \begin{cases} \lambda_j^{-1}, & \lambda_j \neq 0 \\ 0, & \lambda_j = 0 \end{cases}$

注意:

$(AB)^+$ 与 B^+A^+ 一般不相等!

注意:

$(AB)^+$ 与 B^+A^+ 一般不相等!

例: $A = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^+ = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^{+})^{+} = A$;

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^+)^+ = A$;

2, $(A^H)^+ = (A^+)^H$;

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^{+})^{+} = A$;

2, $(A^{H})^{+} = (A^{+})^{H}$;

3, $(A^{T})^{+} = (A^{+})^{T}$;

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^{+})^{+} = A$;

2, $(A^{H})^{+} = (A^{+})^{H}$;

3, $(A^{T})^{+} = (A^{+})^{T}$;

4, 若 k 为实数，则 $(kA)^{+} = k^{+}A^{+}$, $k^{+} = \begin{cases} k^{-1}, \text{若} k \neq 0 \\ 0, \text{若} k = 0 \end{cases}$;

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^+)^+ = A$;

2, $(A^H)^+ = (A^+)^H$;

3, $(A^T)^+ = (A^+)^T$;

4, 若 k 为实数，则 $(kA)^+ = k^+A^+$, $k^+ = \begin{cases} k^{-1}, 若 k \neq 0 \\ 0, 若 k = 0 \end{cases}$;

5, $A^H = A^HAA^+ = A^+AA^H$;

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^+)^+ = A$;

2, $(A^H)^+ = (A^+)^H$;

3, $(A^T)^+ = (A^+)^T$;

4, 若 k 为实数，则 $(kA)^+ = k^+A^+$, $k^+ = \begin{cases} k^{-1}, 若 k \neq 0 \\ 0, 若 k = 0 \end{cases}$;

5, $A^H = A^HAA^+ = A^+AA^H$;

6, $(A^HA)^+ = A^+(A^H)^+$; $(AA^H)^+ = (A^H)^+A^+$;

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^+)^+ = A$;

2, $(A^H)^+ = (A^+)^H$;

3, $(A^T)^+ = (A^+)^T$;

4, 若 k 为实数，则 $(kA)^+ = k^+A^+$, $k^+ = \begin{cases} k^{-1}, \text{若} k \neq 0 \\ 0, \text{若} k = 0 \end{cases}$;

5, $A^H = A^HAA^+ = A^+AA^H$;

6, $(A^HA)^+ = A^+(A^H)^+$; $(AA^H)^+ = (A^H)^+A^+$;

7, $A^+ = (A^HA)^+A^H = A^H(AA^H)^+$;

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^+)^+ = A$;

2, $(A^H)^+ = (A^+)^H$;

3, $(A^T)^+ = (A^+)^T$;

4, 若 k 为实数，则 $(kA)^+ = k^+A^+$, $k^+ = \begin{cases} k^{-1}, 若 k \neq 0 \\ 0, 若 k = 0 \end{cases}$;

5, $A^H = A^H AA^+ = A^+AA^H$;

6, $(A^HA)^+ = A^+(A^H)^+$; $(AA^H)^+ = (A^H)^+A^+$;

7, $A^+ = (A^HA)^+A^H = A^H(AA^H)^+$;

8, 若 U, V 是酉矩阵，则 $(UAV)^+ = V^HA^+U^H$;

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^+)^+ = A$;

2, $(A^H)^+ = (A^+)^H$;

3, $(A^T)^+ = (A^+)^T$;

4, 若 k 为实数，则 $(kA)^+ = k^+A^+$， $k^+ = \begin{cases} k^{-1}, \text{若} k \neq 0 \\ 0, \text{若} k = 0 \end{cases}$;

5, $A^H = A^H AA^+ = A^+AA^H$;

6, $(A^HA)^+ = A^+(A^H)^+$; $(AA^H)^+ = (A^H)^+A^+$;

7, $A^+ = (A^HA)^+A^H = A^H(AA^H)^+$;

8, 若 U, V 是酉矩阵，则 $(UAV)^+ = V^HA^+U^H$;

9, $A^+AB = A^+AC \Leftrightarrow AB = AC$.

广义逆矩阵的性质

Theorem

设 $A \in C^{s\times n}$，则：

1, $(A^{+})^{+} = A$;

2, $(A^{H})^{+} = (A^{+})^{H}$;

3, $(A^{T})^{+} = (A^{+})^{T}$;

4, 若 k 为实数，则 $(kA)^{+} = k^{+}A^{+}$，$k^{+} = \begin{cases} k^{-1}, 若 k \neq 0 \\ 0, 若 k = 0 \end{cases}$;

5, $A^{H} = A^{H}AA^{+} = A^{+}AA^{H}$;

6, $(A^{H}A)^{+} = A^{+}(A^{H})^{+}$; $(AA^{H})^{+} = (A^{H})^{+}A^{+}$;

7, $A^{+} = (A^{H}A)^{+}A^{H} = A^{H}(AA^{H})^{+}$;

8, 若 U, V 是酉矩阵，则 $(UAV)^{+} = V^{H}A^{+}U^{H}$;

9, $A^{+}AB = A^{+}AC \Leftrightarrow AB = AC$.

Example

证明：若 A 是Hermite矩阵，则 A^{+} 也是Hermite矩阵.

Example

证明：若 A 是Hermite矩阵，则 A^+ 也是Hermite矩阵.

Example

设 A 是正规矩阵，证明：$(A^2)^+ = (A^+)^2$.

广义逆的值域与核

Theorem

1. $AA^+x = \begin{cases} x, 若 x \in R(A) \\ \theta, 若 x \in K(A^H) \end{cases}$;

广义逆的值域与核

Theorem

1. $AA^+x = \begin{cases} x, 若 x \in R(A) \\ \theta, 若 x \in K(A^H) \end{cases};$
2. $A^+Ax = \begin{cases} x, 若 x \in R(A^H) \\ \theta, 若 x \in K(A) \end{cases};$

广义逆的值域与核

Theorem

1. $AA^+x = \begin{cases} x, 若 x \in R(A) \\ \theta, 若 x \in K(A^H) \end{cases}$;
2. $A^+Ax = \begin{cases} x, 若 x \in R(A^H) \\ \theta, 若 x \in K(A) \end{cases}$;
3. $R(A^+) = R(A^H) = R(A^H A) = R(A^+ A) = K(I - A^+ A)$;

广义逆的值域与核

Theorem

1. $AA^+x = \begin{cases} x, 若x \in R(A) \\ \theta, 若x \in K(A^H) \end{cases};$
2. $A^+Ax = \begin{cases} x, 若x \in R(A^H) \\ \theta, 若x \in K(A) \end{cases};$
3. $R(A^+) = R(A^H) = R(A^H A) = R(A^+ A) = K(I - A^+ A);$
4. $R(A)^\perp = K(A^H) = K(A^+) = R(I - AA^+);$

广义逆的值域与核

Theorem

1. $AA^+x = \begin{cases} x, \text{若} x \in R(A) \\ \theta, \text{若} x \in K(A^H) \end{cases};$
2. $A^+Ax = \begin{cases} x, \text{若} x \in R(A^H) \\ \theta, \text{若} x \in K(A) \end{cases};$
3. $R(A^+) = R(A^H) = R(A^H A) = R(A^+ A) = K(I - A^+ A);$
4. $R(A)^\perp = K(A^H) = K(A^+) = R(I - AA^+);$
5. $R(A^+)^\perp = K(A) = K(A^H A) = R(I - A^+ A)$

广义逆的值域与核

Theorem

1. $AA^+x=\begin{cases} x,若x\in R(A) \\ \theta,若x\in K(A^H)\end{cases};$
2. $A^+Ax=\begin{cases} x,若x\in R(A^H) \\ \theta,若x\in K(A)\end{cases};$
3. $R(A^+)=R(A^H)=R(A^HA)=R(A^+A)=K(I-A^+A);$
4. $R(A)^\perp=K(A^H)=K(A^+)=R(I-AA^+);$
5. $R(A^+)^\perp=K(A)=K(A^HA)=R(I-A^+A)$

最小二乘解

当线性方程组 $Ax = b$ 无解时，如何求最好的近似解，即求 x 使得 $\|Ax - b\|_2$ 最小?

最小二乘解

当线性方程组 $Ax=b$ 无解时，如何求最好的近似解，即求 x 使得 $\|Ax-b\|_2$ 最小?

Definition

设 $A\in C^{s\times n}, x_0\in C^n$，若

$$\|b-Ax_0\|=\min_{x\in C^n}\|b-Ax\|$$

则称 x_0 是线性方程组 $Ax=b$的最小二乘解. 长度最小的最小二乘解称为极小最小二乘解.

Theorem

η 是 $Ax = b$ 的最小二乘解 $\Leftrightarrow \eta$ 是 $A^H Ax = A^H b$ 的解.

Theorem

η 是 $Ax=b$ 的最小二乘解 $\Leftrightarrow \eta$ 是 $A^HAx=A^Hb$ 的解.

Theorem

$Ax=b$ 的最小二乘解的通解为：$x=A^+b+(I-A^+A)y, \forall\, y\in C^n$, 其中，$A^+b$ 是唯一的极小最小二乘解.