试题一

一. (15%)填空题.

1. $\mathbb{R}^3$的子空间 $V = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$的一组基是__________________.

解: $(x, y, z) \in V \Leftrightarrow x + y - z = 0 \Leftrightarrow x = -y + z \Leftrightarrow (x, y, z) = (-y + z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$,

其中$(-1, 1, 0), (1, 0, 1)$是 V 中线性无关的向量, 可见 V 的一组基是$(-1, 1, 0), (1, 0, 1)$.

2. 若线性空间 V 的线性变换 f 在基α, β下的矩阵是$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 则 f 在基$\alpha+\beta, \alpha-\beta$下的矩阵是__________________.

解: $(\alpha+\beta, \alpha-\beta) = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $f(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$f(\alpha+\beta, \alpha-\beta) = f(\alpha, \beta)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta, \alpha-\beta)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (\alpha+\beta, \alpha-\beta)\begin{pmatrix} 9/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

可见则 f 在基$\alpha+\beta, \alpha-\beta$下的矩阵是$\begin{pmatrix} 9/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

3. 如果 $n\times n$ 矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 并且 A 的秩为 r, 则行列式$|A + 2I| =$______.

解: 如果 $n\times n$ 矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 即 $A(A - I) = O$,

可见 A 的极小多项式没有重根, 而且特征值只可能是 0 或 1.

又因为 A 的秩为 r, 所以 A 相似于对角阵$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix}$.

从而 $A + 2I$ 相似于对角阵$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix} + 2I = \begin{pmatrix} 3I_r & O \\ O & 2I_{n-r} \end{pmatrix}$.

故$|A + 2I| = \begin{vmatrix} 3I_r & O \\ O & 2I_{n-r} \end{vmatrix} = 3^r2^{n-r}$.

4. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$, 则矩阵函数 e^A 的行列式$|e^A| =$________________.

解: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -7 \\ -9 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 61 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, 其中$\lambda_1 \neq \lambda_2$,

故存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \Lambda$,

于是 $P^{-1}e^AP = e^\Lambda = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$, $|e^A| = |P^{-1}e^AP| = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\mathrm{tr}A} = e^3$.

5. 若α是 n 维单位列向量, $A = I + k\alpha\alpha^H$ 是正定的, 则参数 k 满足条件______.

解: 将α扩充成$\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基: $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 并且令 $Q = (\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,

则 $Q^HQ = I$, $\alpha^HQ = (1, 0, \dots, 0)$, $Q^H\alpha = (1, 0, \dots, 0)^H$,

$$Q^HAQ = Q^H(I + k\alpha\alpha^H)Q = I + kQ^H\alpha\alpha^HQ = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

故 A 正定$\Leftrightarrow$ Q^HAQ 正定$\Leftrightarrow$ $1+k > 0 \Leftrightarrow k > -1$.

二. (12%)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&\boldsymbol{a}&4\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&2&0\\6&\boldsymbol{c}&\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$. 讨论 $\boldsymbol{A}$ 的可能的Jordan标准形.并问：当参数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足什么条件时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的.

解：当 $\boldsymbol{a}=1$ 时, $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^3$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2$, 此时 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

当 $\boldsymbol{a}\neq 1$ 时, $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&\boldsymbol{a}-1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{a}=11/3;\\ 2, & \boldsymbol{a}\neq 11/3,\end{cases}$

当 $\boldsymbol{a}=8/3$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&8/3\end{pmatrix}$; 当 $\boldsymbol{a}\neq 8/3$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,
则由$(\lambda-1)^2(\lambda-\boldsymbol{a})=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-\boldsymbol{b})$可得 $\boldsymbol{a}=2$, $\boldsymbol{b}=1$.

此时 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&0&0\\5&1&0\\6&\boldsymbol{c}&0\end{pmatrix}$

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2$ 得 $\boldsymbol{c}\neq 6/5$. 此时 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准形也是 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}=2$, $\boldsymbol{b}=1$ 而且 $\boldsymbol{c}\neq 6/5$.

三. (20%)记 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的变换 $\boldsymbol{f}$ 定义为：对 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{2\times2}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XM}$.

1. 证明: $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换.

证明：对于任意的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\mathbb{C}$ 以及任意的 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\in\mathbb{C}^{2\times2}$, 有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{aX}+\boldsymbol{bY})=(\boldsymbol{aX}+\boldsymbol{bY})\boldsymbol{M}=\boldsymbol{aXM}+\boldsymbol{bYM}=\boldsymbol{af}(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{bf}(\boldsymbol{Y})\in\mathbb{C}^{2\times2}$.
故 $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换.

2. 求 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=1\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$;

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=1\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$;

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{21})=\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+1\boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22}$;

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{22})=\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+1\boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22}$,

由此可见 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$.

3. 求 $\boldsymbol{f}$ 的特征值及相应的特征子空间的基.

解: $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)^2$. 故 $\boldsymbol{f}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\lambda_4=3$.

$(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\xi_1=(-1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2=(0, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

由此可得对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征子空间的一组基: $-\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}$, $-\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}$.

$(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\xi_3=(1, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_4=(0, 0, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

由此可得对应于特征值 $\lambda_3=\lambda_4=3$ 的特征子空间的一组基: $\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{12}$, $\boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22}$.

4. 问: 是否存在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基, 使得 $\boldsymbol{f}$ 在这组基下的矩阵是对角阵? 如存在, 试给出这样的一组基及相应的对角阵; 如不存在, 请说明理由.

答: 令 $\boldsymbol{X}_1=-\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}$, $\boldsymbol{X}_2=-\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}$, $\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{12}$, $\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22}$.

由第 3 小题可知 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

四. (10%)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, 试将 $\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 表示成关于 $\boldsymbol{A}$ 的次数不超过 2 的多项式.

解: $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2$.

可见特征值 $\lambda=1$ 的代数重数为 2, 几何重数为 1. 从而可得 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $\lambda(\lambda-1)^2$.

设 $\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=c_0(t)\boldsymbol{I}+c_1(t)\boldsymbol{A}+c_2(t)\boldsymbol{A}^2$, $f(x)=x\mathrm{e}^{xt}$, $g(x)=c_0(t)+c_1(t)x+c_2(t)x^2$, 则 $0=f(0)=g(0)=c_0(t)$,

$\mathrm{e}^t=f(1)=g(1)=c_0(t)+c_1(t)+c_2(t)$, $(1+t)\mathrm{e}^t=f'(1)=g'(1)=c_1(t)+2c_2(t)$, 由此可得 $c_0(t)=0$, $c_1(t)=(1-t)\mathrm{e}^t$, $c_2(t)=t\mathrm{e}^t$,

于是有 $\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=(1-t)\mathrm{e}^t\boldsymbol{A}+t\mathrm{e}^t\boldsymbol{A}^2$.

五. (8%)求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 10\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$.

解: 令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}(1\quad 3)$, $\boldsymbol{B}^+=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\frac{1}{10}\frac{1}{2}(1\quad 1)=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$. $\boldsymbol{A}^+=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^+\\ 10^+ & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/20 & 1/20\\ 0 & 3/20 & 3/20\\ 1/10 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

六. (15%) 假设 $\boldsymbol{V}$ 是有限维欧氏空间, $\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{V}$ 是单位向量, $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换 $\boldsymbol{f}$ 定义如下: 对任意 $\eta\in\boldsymbol{V}$, $f(\eta)=\eta-2\langle\eta, \omega\rangle\omega$.

1. 证明: $\boldsymbol{f}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 上的正交变换.

证明: 将 ω 扩充成 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基: $\omega, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

则 $f(\omega)=\omega-2\langle\omega, \omega\rangle\omega=-\omega$, $f(\alpha_i)=\alpha_i-2\langle\alpha_i, \omega\rangle\omega=\alpha_i$, $i=2, \ldots, n$.

可见 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的标准正交基 $\omega, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵为正交矩阵 $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$, 故 $\boldsymbol{f}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 上的正交变换.

2. 在 $\mathbb{R}[x]_3$ 中定义内积: 对 $\varphi(x), \psi(x)\in\mathbb{R}[x]_3$, $\langle\varphi(x), \psi(x)\rangle=\int_0^1\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x$. 于是, $\mathbb{R}[x]_3$ 成为欧氏空间. 分别求 $\mathbb{R}[x]_3$ 中向量 $\alpha=1$ 及 $\beta=x$ 的长度, 并求正实数 k 及单位向量 $\omega\in\mathbb{R}[x]_3$, 使得如上的正交变换 $\boldsymbol{f}$ 将 α 变成 $k\beta$.

解: $\|\alpha\|^2=\langle\alpha, \alpha\rangle=\langle 1, 1\rangle=\int_0^1\mathrm{d}x=1$, 故 $\|\alpha\|=1$. $\|\beta\|^2=\langle\beta, \beta\rangle=\langle x, x\rangle=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$, 故 $\|\beta\|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

令 $k=\sqrt{3}$, 则 $\|k\beta\|=1=\|\alpha\|$. $\|1-\sqrt{3}x\|^2=\langle 1-\sqrt{3}x, 1-\sqrt{3}x\rangle=\int_0^1(1-\sqrt{3}x)^2\mathrm{d}x=2-\sqrt{3}$.

$\|1-\sqrt{3}x\|=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. 令 $\omega=\frac{1-\sqrt{3}x}{\|1-\sqrt{3}x\|}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(1-\sqrt{3}x)}{2}$, 则 $f(\alpha)=k\beta$.

七. (20%)证明题.

1. 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}$ 矩阵, $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ 分别是 $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ 酉矩阵. 证明: $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \|\boldsymbol{UAV}\|_2$.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}$ 矩阵, $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ 分别是 $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ 酉矩阵,

所以$(\boldsymbol{UAV})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{UAV}) = (\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{UAV}) = \boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AV}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 相似,

因而$\rho[(\boldsymbol{UAV})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{UAV})] = \rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$,

$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} = \sqrt{\rho[(\boldsymbol{UAV})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{UAV})]} = \|\boldsymbol{UAV}\|_2$.

2. 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ 正规矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模都等于 1, 证明: $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ 正规矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵,

即存在酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AQ} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\boldsymbol{n}}) = \Lambda$,

其中$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\boldsymbol{n}}$为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又因为$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_{\boldsymbol{n}}| = 1$,

所以$\Lambda^{\mathrm{H}}\Lambda = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_{\boldsymbol{n}}|^2) = \boldsymbol{I}$.

于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}) = (\boldsymbol{Q}\Lambda^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}) = \boldsymbol{Q}\Lambda^{\mathrm{H}}\Lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{QQ}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{I}$,

可见 $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵.

3. 假设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$ 是 Hermite 矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{ij}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵, 并且 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}$ 都是方阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定的. 证明关于行列式的不等式: $|\boldsymbol{A}| \le |\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22}|$.

证明: 因为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$ 是 Hermite 矩阵, $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}$ 都是方阵,

所以 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}$ 都是 Hermite 矩阵, 而且 $\boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}_{12}$.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 所以 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}$ 都是正定的, 从而 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆.

设 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}$ 的阶数分别为 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m}} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix}$,

其中 $\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 正定, $\boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 半正定.

于是存在 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\boldsymbol{n}}) = \Lambda$,

$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}} - \Lambda = \mathrm{diag}(1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \dots, 1-\lambda_{\boldsymbol{n}})$,

其中 $1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \dots, 1-\lambda_{\boldsymbol{n}} > 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\boldsymbol{n}} \ge 0$,

因而 $0 \le \lambda_{\boldsymbol{i}} < 1$, $0 < 1-\lambda_{\boldsymbol{i}} \le 1$, $\boldsymbol{i} = 1, 2, \dots, \boldsymbol{n}$.

由此可得$|\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}} - \Lambda| = \prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}(1-\lambda_{\boldsymbol{i}}) \le 1 = |\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{C}|$,

从而有$|\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}| \le |\boldsymbol{A}_{22}|$,

$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AP}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}| \le |\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22}|$.

试题二

一. (10%)求 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的子空间 V_1, V_2 的交空间 $V_1\cap V_2$ 及和空间 V_1+V_2 的基和维数,

其中 $V_1=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ x & y\end{pmatrix} \middle| x, y\in\mathbb{C}\right\}$, $V_2=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x\end{pmatrix} \middle| x, y\in\mathbb{C}\right\}$.

解: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in V_1\cap V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \\ a=-d \\ b=-c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$,

其中 $O\neq\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\in V_1\cap V_2$. 可见 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 为 $V_1\cap V_2$ 的基, $\dim(V_1\cap V_2)=1$.

容易看出 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 为 V_1 的基, $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 为 V_2 的基.

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 可见 A_1, A_2, A_3 为 V_1+V_2 的基, $\dim(V_1+V_2)=3$.

二. (10%)欧氏空间 $\mathbb{R}[x]_3$ 中的内积定义为: 对 $\forall\varphi(x), \psi(x)\in\mathbb{R}[x]_3$, $\langle\varphi(x), \psi(x)\rangle=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x$. 令 $\alpha=1$, $\beta=x$, $\eta=x^2$, $W=L(\alpha, \beta)$. 求 η 在 W 中的正投影,即求 $\eta_0\in W$, 使得 $\|\eta-\eta_0\|=\min_{\xi\in W}\|\eta-\xi\|$.

解: η_0 为 η 在 W 中的正投影 $\Leftrightarrow\langle\eta-\eta_0, \alpha\rangle=\langle\eta-\eta_0, \beta\rangle=0$.

设 $\eta_0=a+bx$, 则 $\langle\eta-\eta_0, \alpha\rangle=\int_{-1}^{1}(-a-bx+x^2)\mathrm{d}x=-2a+\frac{2}{3}$, $\langle\eta-\eta_0, \beta\rangle=\int_{-1}^{1}(-ax-bx^2+x^3)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}b$,

故 η_0 为 η 在 W 中的正投影 $\Leftrightarrow a=1/3, b=0 \Leftrightarrow \eta_0=1/3$.

三. (20%)在 2×2 矩阵空间 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上定义线性变换 f 如下: 对任意矩阵 $X\in\mathbb{C}^{2\times2}$, $f(X)=\begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a\end{pmatrix}$, 其中 a 为 X 的迹 $\mathrm{tr}(X)$.

1. 求 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵 M.

解: $f(E_{11})=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}=1E_{11}+2E_{12}+3E_{21}+4E_{22}$; $f(E_{12})=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=0E_{11}+0E_{12}+0E_{21}+0E_{22}$;

$f(E_{21})=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=0E_{11}+0E_{12}+0E_{21}+0E_{22}$; $f(E_{22})=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}=1E_{11}+2E_{12}+3E_{21}+4E_{22}$,

由此可见 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵 $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

2. 分别求 f 的值域 $\mathrm{R}(f)$及核子空间 $\mathrm{K}(f)$的基及维数.

解: 由第 1 小题可见 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 为 f 的值域 $\mathrm{R}(f)$基, $\dim\mathrm{R}(f)=1$.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由此可得 $Mx=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为: $\xi_1=(0, 1, 0, 0)^T$, $\xi_2=(0, 0, 1, 0)^T$, $\xi_3=(-1, 0, 0, 1)^T$.

因而 $E_{12}, E_{21}, -E_{21}+E_{22}$ 为 f 的核子空间 $\mathrm{K}(f)$的基, $\dim\mathrm{K}(f)=3$.

3. 求 $\boldsymbol{f}$ 的特征值及相应的特征子空间的基.

解: $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda & 0 & -2 \\ -3 & 0 & \lambda & -3 \\ -4 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda-5)$. 可见 $\boldsymbol{f}$ 的特征值为 0(三重)和 5.

对应于 0 的特征子空间即 $\boldsymbol{f}$ 的核子空间 K($\boldsymbol{f}$),

由第 2 小题可知 $\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, -\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}$ 为对应于 0 的特征子空间的基.

$$5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可得 $(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系: $\xi = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$.

可见 $\boldsymbol{E}_{11} + 2\boldsymbol{E}_{12} + 3\boldsymbol{E}_{21} + 4\boldsymbol{E}_{22}$ 为对应于 5 的特征子空间的基.

4. 问: 是否存在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基, 使得 $\boldsymbol{f}$ 在这组基下的矩阵为对角阵? 为什么?

答: 因为 $\boldsymbol{f}$ 的各特征值的几何重数与代数重数相等,

故存在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基, 使得 $\boldsymbol{f}$ 在这组基下的矩阵为对角阵,

事实上 $\boldsymbol{f}$ 在基 $\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, -\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{11} + 2\boldsymbol{E}_{12} + 3\boldsymbol{E}_{21} + 4\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为对角阵 diag(0, 0, 0, 5).

四. (10%)根据参数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不同的值, 讨论矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 7 \\ 0 & 2 & \boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形, 并求矩阵 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{100}$ 的秩.

解: $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$. 可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1(二重)和 2.

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{a} & -7 \\ 0 & -1 & -\boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{ab} = 7, \\ 2, & \boldsymbol{ab} \neq 7. \end{cases}$$

可见 $\boldsymbol{ab} = 7$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{100}] = 1$;

$\boldsymbol{ab} \neq 7$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{100}] = 1$.

五. (14%)假设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$.

解: $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$, 其中 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \ (\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 求一个次数不超过 2 的多项式 $f(\lambda)$, 使得 $f(A) = Ae^{At}$.

解: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -2 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-2)$.

又因为 $r(A) = 2$, 所以 A 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, A 的最小多项式为$\lambda^2(\lambda-2)$.

设 $Ae^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + c_2(t)A^2$, $f(x) = xe^{xt}$, $g(x) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2$,

则 $0 = f(0) = g(0) = c_0(t)$, $1 = f'(0) = g'(0) = c_1(t)$, $2e^{2t} = f(2) = g(2) = c_0(t) + 2c_1(t) + 4c_2(t)$,

由此可得 $c_0(t) = 0$, $c_1(t) = 1$, $c_2(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)$,

于是有 $Ae^{At} = A + \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)A^2$.

六. (10%)假设 f 是 n 维酉空间 V 上的线性变换, 若对任意$\alpha, \beta \in V$, 有$\langle f(\alpha), \beta\rangle = \langle \alpha, f(\beta)\rangle$.

1. 证明: 在 V 的标准正交基下, f 的矩阵为 Hermite 矩阵.

证明: 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$为 V 的一组标准正交基,

f 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$,

则 $\overline{a_{ij}} = A_j^H e_i = \langle \varepsilon_i, f(\varepsilon_j)\rangle = \langle f(\varepsilon_i), \varepsilon_j\rangle = e_j^H A_i = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$,

可见 $A^H = A$, 即 A 为 Hermite 矩阵.

2. 证明: 存在 V 的一组标准正交基, 使得 f 的矩阵为对角阵.

证明: 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$为 V 的一组标准正交基,

f 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵为 A,

由第 1 小题可知存在酉矩阵 U 使得 $U^HAU = \Lambda$为对角阵.

令$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)U$,

则$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$为 V 的标准正交基,

而且 f 在基$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$下的矩阵为$\Lambda$.

七. (8%)假设 $s\times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 证明$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{r}\,\|A\|_2$.

证明: 当 $r = 0$ 时, $\|A\|_2 = \|A\|_F = 0$, 故$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{r}\,\|A\|_2$成立.

当 $r > 0$ 时, 因为 A^HA 是 n 阶半正定阵, 而且 $r(A^HA) = r(A) = r$,

所以 A^HA 的特征值为非负实数,

而且可设 A^HA 的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$满足

$$\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_r > 0,\ \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0.$$

于是$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^HA)} = \sqrt{\lambda_1}$,

$\|A\|_F = (\mathrm{tr}A^HA)^{1/2} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^{1/2} \le (r\lambda_1)^{1/2}$,

因此$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$.

八. (8%)假设 A^+是 $A\in \mathbb{C}^{s\times n}$ 的广义逆矩阵, 证明: $\mathbb{C}^n = K(A)\oplus R(A^+)$, 其中 $K(A)$, $R(A^+)$分别表示矩阵 A 的核空间和 A^+的值域.

证明: $\forall\alpha\in \mathbb{C}^n$, 有 $A^+A\alpha \in R(A^+)$, $A(\alpha - A^+A\alpha) = A\alpha - AA^+A\alpha = A\alpha - A\alpha = \mathbf{0}$,

可见 $\alpha = (\alpha - A^+A\alpha) + A^+A\alpha \in K(A) + R(A^+)$.

故 $\mathbb{C}^n \subseteq K(A) + R(A^+) \subseteq \mathbb{C}^n$, 由此可得 $\mathbb{C}^n = K(A) + R(A^+)$.

另一方面, 若$\beta \in K(A) \cap R(A^+)$, 则存在$\gamma \in \mathbb{C}^s$ 使得$\beta = A^+\gamma$而且 $A\beta = \mathbf{0}$,

于是$\beta = A^+\gamma = A^+AA^+\gamma = A^+A\beta = A^+\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

故 $K(A) \cap R(A^+) = \{\mathbf{0}\}$.

综上可得 $\mathbb{C}^n = K(A)\oplus R(A^+)$.

九. (12%)假设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都 $\boldsymbol{n}$ 阶 Hermite 矩阵.

1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 证明: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BC}$ 都是对角阵.

证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶正定阵, 则存在 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{I}$.

设 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶 Hermite 阵, 则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BP}$ 也是 $\boldsymbol{n}$ 阶 Hermite 阵,

故存在 $\boldsymbol{n}$ 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BP})\boldsymbol{U}$ 为对角阵.

令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{PU}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆阵, 而且

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AC} = (\boldsymbol{PU})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PU}) = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{APU} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{IU} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BC} = (\boldsymbol{PU})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{PU}) = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BP})\boldsymbol{U}$$

均为对角阵.

2. 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是半正定的, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}-1$, 证明: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BC}$ 都是对角阵.

证明: 设 $\boldsymbol{t} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$, 则存在可逆阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_t & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BQ}$ 分块为 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} \\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{P}_{11}$ 为 $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t}$ 矩阵,

则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_t & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AQ} + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BQ} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AQ} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} \\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22} \end{pmatrix}$,

由 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_t & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} \\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_t - \boldsymbol{P}_{11} & -\boldsymbol{P}_{12} \\ -\boldsymbol{P}_{21} & -\boldsymbol{P}_{22} \end{pmatrix}$ 半正定可知

$\boldsymbol{P}_{12} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{P}_{21} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{P}_{22} = \boldsymbol{O}$.

(可以先证 $\boldsymbol{P}_{22} = \boldsymbol{O}$, 然后考察 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_t - \boldsymbol{P}_{11} & -\boldsymbol{P}_{12} \\ -\boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的二阶子式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_{ii} & \boldsymbol{x}_{ij} \\ \boldsymbol{x}_{ji} & 0 \end{vmatrix}$)

因为 $\boldsymbol{P}_{11}$ 仍为 Hermite 矩阵, 故存在 $\boldsymbol{t}$ 阶酉矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, 使得

$$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{Q}_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t),$$

令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-t} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 为一个可逆方阵, 而且

$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AC} = \mathrm{diag}(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_t, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BC} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_t, 0, \ldots, 0)$.

试题三

一. (40%)计算题.

1. (8%)设$\mathbb{C}^{2\times 2}$的子空间 $\boldsymbol{V}_1 = \left\{\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}\right\}$, $\boldsymbol{V}_2 = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}\right\}$.

分别求 $\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$ 的一组基.

解: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=d \\ a=c \\ b=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{O} \ne \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2$. 可见$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$为 $\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2$ 的基.

容易看出 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{V}_1$ 的基, $\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{V}_2$ 的基.

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可见 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ 为 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$ 的基.

2. (8%)设$\mathbb{R}^3$的子空间 $\boldsymbol{V} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = 0\}$, $\eta = (1, 0, 0)$.

求$\eta_0 \in \boldsymbol{V}$ 使得$\|\eta_0 - \eta\| = \min_{\xi\in V}\|\xi - \eta\|$.

解: $\boldsymbol{V}$ 的一组基为$\xi_1 = (1, 0, 1)$, $\xi_2 = (0, 1, -1)$.

设$\eta_0 = \boldsymbol{a}(1, 0, 1)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{b}(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 则$\|\eta_0 - \eta\| = \min_{\xi\in V}\|\xi - \eta\| \Leftrightarrow \langle\eta-\eta_0, \xi_1\rangle = 0 = \langle\eta-\eta_0, \xi_2\rangle$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=1 \\ \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{2}{3}, \boldsymbol{b} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \eta_0 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

解: 令$\beta_1 = \xi_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = \xi_2 - \frac{\langle\xi_2, \beta_1\rangle}{\langle\beta_1, \beta_1\rangle}\beta_1 = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$, 再单位化得

$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

于是$\|\eta_0 - \eta\| = \min_{\xi\in V}\|\xi - \eta\| \Leftrightarrow \eta_0 = \langle\eta, \eta_1\rangle\eta_1 + \langle\eta, \eta_2\rangle\eta_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

3. (5%)设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶酉矩阵, 分别求$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$和$\|\boldsymbol{A}\|_2$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶酉矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$. 于是可得$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} = \sqrt{\boldsymbol{n}}$, $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} = 1$.

4. (8%)设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ 0 & \boldsymbol{a} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 问: 当参数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 满足什么条件时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似?

解: $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - 1)^2(\lambda - \boldsymbol{a})$, $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - \boldsymbol{x})$,

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则$(\lambda - 1)^2(\lambda - \boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - \boldsymbol{x})$,

由此可得 $\boldsymbol{a} = 2, \boldsymbol{x} = 1$. 此时 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{b} & -\boldsymbol{c} \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\boldsymbol{y} & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

由此可知 $\boldsymbol{A} \sim \mathrm{diag}\{1, 1, 2\} \Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{c} \ne 2\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{B} \sim \mathrm{diag}\{1, 1, 2\} \Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = 0$. $\boldsymbol{B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \ne 0$.

于是, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的 Jordan 标准形

$\Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 2, \boldsymbol{x} = 1, \boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} = 0$ 或者 $\boldsymbol{a} = 2, \boldsymbol{x} = 1, \boldsymbol{c} \ne 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \ne 0$.

5. (5%)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^+$.

解: 令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}=(1, 2)$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{CD}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的满秩分解.

$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}=2$, $(\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C})^{-1}=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{DD}^{\mathrm{H}}=5$, $(\boldsymbol{DD}^{\mathrm{H}})^{-1}=\frac{1}{5}$, $\boldsymbol{B}^+=\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{DD}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot(1, 1)=\begin{pmatrix}1/10&1/10\\1/5&1/5\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{A}^+=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^+&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/10&1/10&0\\1/5&1/5&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$.

6. (6%)设 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}$, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 的秩为 $\boldsymbol{r}$, 求行列式$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}|$.

解: $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$

$\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 的最小多项式没有重根, 而且可能的特征值只有–1 和 2

$\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵, 其对角线上只可能为–1 和 2.

又因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 的秩为 $\boldsymbol{r}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于$\begin{pmatrix}2\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$, 因而 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 相似于$\begin{pmatrix}4\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$, 故$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}|=4^{\boldsymbol{r}}$.

二. (20%)在线性空间 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上定义线性变换 $\boldsymbol{f}$ 如下:

对任意矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}&\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}&\boldsymbol{d}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}&2\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{d}\end{pmatrix}$.

1. (4%)求 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

解: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=1\boldsymbol{E}_{11}+1\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix}=(-1)\boldsymbol{E}_{11}+(-1)\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$.

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+1\boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22}$. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+1\boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22}$.

由此可得 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$.

2. (6%)分别求 $\boldsymbol{f}$ 的值域 R($\boldsymbol{f}$)及核子空间 K($\boldsymbol{f}$)的一组基.

解: $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 由此可得 $\boldsymbol{f}$ 的值域 R($\boldsymbol{f}$)的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22}$.

$\boldsymbol{f}$ 的值域 K($\boldsymbol{f}$)的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}-\boldsymbol{E}_{22}$.

3. (6%)求 $\boldsymbol{f}$ 的特征值及各个特征子空间的基.

解: $\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0&0\\-1&\lambda+1&0&0\\0&0&\lambda-1&-1\\0&0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda-3)$. 由此可得 $\boldsymbol{f}$ 的特征值为 0(三重), 3(一重).

由第 2 小题可知对应于 0 的特征子空间的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}-\boldsymbol{E}_{22}$.

$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\-1&4&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

由此可知对应于 3 的特征子空间的一组基为 $\boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22}$.

4. (4%)求 f 的最小多项式.

解: 由第 3 小题可知 f 的最小多项式为$\lambda^2(\lambda-3)$.

三. (8%)设ω是 n 维欧氏空间 V 中的单位向量, V 上的线性变换 f 定义如下:

对任意$\eta \in V$, $f(\eta) = a\eta + b\langle \eta, \omega\rangle\omega$. 问: 当参数 a, b 取什么值的时候, f 是 V 上的正交变换?

解: 将ω扩充成 V 的一组标准正交基$\omega, \omega_2, \ldots, \omega_n$, 则 $f(\omega) = a\omega + b\langle\omega, \omega\rangle\omega = (a+b)\omega$, $f(\omega_i) = a\omega_i$, $\forall i = 2, 3, \ldots, n$.

可见 f 在标准正交基$\omega, \omega_2, \ldots, \omega_n$ 下的矩阵为 $A = \mathrm{diag}\{a+b, a, ..., a\}$.

因此 f 是 V 上的正交变换 $\Leftrightarrow A$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow a^2 = (a+b)^2 = 1$.

四. (12%)已知矩阵 A 的特征多项式是$\lambda^2(\lambda-1)^3$, 并且 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A-I) = 3$, 求 A 的最小多项式, 并求一次数不超过 2 的多项式 $f(\lambda)$, 使得 $Ae^{At} = f(A)$.

解: 因为 A 的特征多项式是$\lambda^2(\lambda-1)^3$, 并且 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A-I) = 3$,

所以 A 的 Jordan 标准形为$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, 因而 A 的最小多项式为$\lambda(\lambda-1)^2$.

设 $Ae^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + c_2(t)A^2$, $f(x) = xe^{xt}$, $g(x) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2$, 则 $0 = f(0) = g(0) = c_0(t)$,

$e^t = f(1) = g(1) = c_0(t) + c_1(t) + c_2(t)$, $(1+t)e^t = f'(1) = g'(1) = c_1(t) + 2c_2(t)$,

由此可得 $c_0(t) = 0$, $c_1(t) = (1-t)e^t$, $c_2(t) = te^t$, 于是有 $Ae^{At} = (1-t)e^tA + te^tA^2$.

五. (20%)证明下列命题.

1. (5%)假设线性空间 V 上的线性变换 f, g 满足 $fgf = f$, $gfg = g$,

证明: $V = \mathrm{K}(f)\oplus\mathrm{R}(g)$.

证明: 对于任意的$\alpha \in V$, 由 $fgf = f$ 可知 $f[\alpha - gf(\alpha)] = f(\alpha) - fgf(\alpha) = \mathbf{0}$,

即$\alpha - gf(\alpha) \in \mathrm{K}(f)$, 因而$\alpha = [\alpha - gf(\alpha)] + gf(\alpha) \in \mathrm{K}(f) + \mathrm{R}(g)$.

可见 $V \subseteq \mathrm{K}(f) + \mathrm{R}(g) \subseteq V$. 故 $V = \mathrm{K}(f) + \mathrm{R}(g)$.

另一方面, 若$\eta \in \mathrm{K}(f) \cap \mathrm{R}(g)$, 即 $f(\eta) = \mathbf{0}$ 而且存在$\xi \in V$ 使得$\eta = g(\xi)$,

于是由 $gfg = g$ 可得$\eta = g(\xi) = gfg(\xi) = gf(\eta) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 可见 $\mathrm{K}(f) \cap \mathrm{R}(g) = \{\mathbf{0}\}$.

综上可得 $V = \mathrm{K}(f)\oplus\mathrm{R}(g)$.

2. (5%)假设 A 是正规矩阵, 证明: 关于矩阵的秩有 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^+)$.

证明: 因为 $A = AA^+A$, 所以 $\mathrm{r}(A) \le \mathrm{r}(A^+)$. 因为 $A^+ = A^+AA^+$, 所以 $\mathrm{r}(A^+) \le \mathrm{r}(A)$. 综上可得 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^+)$.

3. (5%)假设α, β是两个 n 维相互正交的单位列向量, 实数 p, q 均小于 1.

证明: 矩阵 $A = I - p\alpha\alpha^H - q\beta\beta^H$ 是正定的.

证明: 将α, β扩充成 V 的一组标准正交基$\alpha, \beta, \omega_3, \ldots, \omega_n$.

对于任意的 n 维非零列向量 x, 设 $x = x_1\alpha + x_2\beta + x_3\omega_3 + \ldots + x_n\omega_n$, 则 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 不全为零, 于是

$x^HAx = x^Hx - px_1^Hx_1 - qx_2^Hx_2 = (1-p)|x_1|^2 + (1-q)|x_2|^2 + |x_3|^2 + \ldots + |x_n|^2 > 0$.

可见矩阵 $A = I - p\alpha\alpha^H - q\beta\beta^H$ 是正定的.

4. (5%)设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, k 是正整数. 证明存在矩阵 B, 使得 $B^k = A$.

证明: 令 $C = \begin{pmatrix} \sqrt[k]{2} & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt[k]{2} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt[k]{2} \end{pmatrix}$, 则 $C^k = \begin{pmatrix} 2 & k\sqrt[k]{2^{k-1}} & \frac{k(k-1)}{2}\sqrt[k]{2^{k-2}} \\ 0 & 2 & k\sqrt[k]{2^{k-1}} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

由 $\mathrm{r}(2I - C^k) = 2$ 可见存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}C^kP = A$.

于是令 $B = P^{-1}CP$, 则 $B^k = P^{-1}C^kP = A$.

试题四

一. (20%, 第 1、3 小题各 5 分, 第 2 小题 10 分)

线性空间 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 上线性变换 $\boldsymbol{f}$ 定义如下: 对任意 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}$, $f(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix} b-c+d & a+c-d \\ d & c \end{pmatrix}$.

1. 求 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

解: $f(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+1\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$, $\quad f(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=1\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$,

$f(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(-1)\boldsymbol{E}_{11}+1\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+1\boldsymbol{E}_{22}$, $\quad f(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=1\boldsymbol{E}_{11}+(-1)\boldsymbol{E}_{12}+1\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$.

由此可得 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 求 $\boldsymbol{f}$ 的特征值及各个特征子空间的基.

解: $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$. 由此可得 $\boldsymbol{f}$ 的特征值为 1(二重), –1(二重).

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可知对应于 1 的特征子空间的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}$.

$$-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可知对应于–1 的特征子空间的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{12}$.

3. 问: 是否存在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基, 使得 $\boldsymbol{f}$ 的矩阵为对角阵? 给出理由.

答: 由第 2 小题可知 $\boldsymbol{f}$ 的特征值–1 的代数重数为 2, 几何重数为 1,
所以不存在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基, 使得 $\boldsymbol{f}$ 的矩阵为对角阵.

二. (12%)多项式空间 $\mathbb{R}[x]_3$ 中的内积定义如下:

对任意 $f(x), g(x)\in\mathbb{R}[x]_3$, $\langle f(x), g(x)\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 于是 $\mathbb{R}[x]_3$ 成为欧氏空间. 假设 $\boldsymbol{V}$ 是由 $1, x$ 生成的 $\mathbb{R}[x]_3$ 的子空间. 在 $\boldsymbol{V}$ 中求一向量使之与 x^2 的距离最小.

解: $a+bx$ 为 $\boldsymbol{V}$ 中与 x^2 的距离最小的向量

$\Leftrightarrow \langle a+bx-x^2, 1\rangle=\langle a+bx-x^2, x\rangle=0$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(a+bx-x^2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(ax+bx^2-x^3)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow 2a-\dfrac{2}{3}\ =\ \dfrac{2}{3}b=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}, b=0.$

故 $\boldsymbol{V}$ 中与 x^2 的距离最小的向量为 $\dfrac{1}{3}$.

三. (20%, 每小题 10 分)假设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$.

1. 求矩阵函数 $e^{\boldsymbol{A}t}$, 并求 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的行列式的值.

解: $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-2\\0&\lambda&0\\-1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)$, $r(\boldsymbol{A})=1$, 故 $\boldsymbol{A}\sim\mathrm{diag}\{0,0,-3\}$, $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为$\lambda(\lambda+3)$.

设 $e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{c}_0(\boldsymbol{t})\boldsymbol{I}+\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{t})\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=e^{\boldsymbol{x}t}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}_0(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}$,

则 $1=\boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{g}(0)=\boldsymbol{c}_0(\boldsymbol{t})$, $e^{-3t}=\boldsymbol{f}(-3)=\boldsymbol{g}(-3)=\boldsymbol{c}_0(\boldsymbol{t})-3\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{t})$,

由此可得 $\boldsymbol{c}_0(\boldsymbol{t})=1$, $\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{t})=\frac{1}{3}(1-e^{-3t})$. 于是有 $e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{3}(1-e^{-3t})\boldsymbol{A}$.

设可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{0,0,-3\}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}t\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{0,0,-3t\}$,
于是 $\boldsymbol{P}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{1,1,e^{-3t}\}$, $|e^{\boldsymbol{A}t}|=e^{-3t}$. ($|e^{\boldsymbol{A}t}|=e^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}t)}=e^{-3t}$.)

2. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$.

解: $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=(1,0,-2)$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}=2$, $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}=5$, $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}})^{-1}=\frac{1}{5}$,

$$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot(-1,0,1)=\begin{pmatrix}-1/10&0&1/10\\0&0&0\\1/5&0&-1/5\end{pmatrix}.$$

四. (8%)假设 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=10\boldsymbol{I}$, 并且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的秩为 $\boldsymbol{r}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似, 并求矩阵 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}|$的值.

解: $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=10\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$

$\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 的极小多项式没有重根, 而且特征值只可能是 5 或−2.

又因为 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的秩为 $\boldsymbol{r}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵$\begin{pmatrix}5\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-2\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$.

从而 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 相似于对角阵$\begin{pmatrix}5\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-2\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}-4\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-6\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$.

故$|\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-6\boldsymbol{I}_{n-r}\end{vmatrix}=(-6)^{n-r}$.

五. (8%)设 $\boldsymbol{V}$ 是齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_4=0\\x_1+3x_3-x_4=0\end{cases}$的解空间, 求 $\boldsymbol{V}$ 在 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补空间 $\boldsymbol{V}^{\perp}$的标准正交基.

解: 该齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&0&3&-1\end{pmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{V}=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, 所以 $\boldsymbol{V}^{\perp}=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$.

令$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,3,-1)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$且$\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle=0$.

令$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=(\frac{1}{\sqrt{11}},0,\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}})^{\mathrm{T}}$,

则$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 为 $\boldsymbol{V}^{\perp}$的标准正交基.

六. (12%, 每小题 4 分)假设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1&-1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}$.

1. 计算 $\boldsymbol{A}^2$, 并求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形.

解: $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1&0&-1&-1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-1&-1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&1&1\\-1&\lambda-1&0&-1\\-1&-1&\lambda&-1\\0&1&-1&\lambda\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&1&1\\0&\lambda&-\lambda&0\\-1&-1&\lambda&-1\\0&1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda+1&0&1&1\\0&1&-1&0\\-1&-1&\lambda&-1\\0&1&-1&\lambda\end{vmatrix}\times(-1)=\lambda\begin{vmatrix}\lambda+1&0&1&1\\0&1&-1&0\\-1&-1&\lambda&-1\\0&0&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2\begin{vmatrix}\lambda+1&0&1\\0&1&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}\lambda+1&0&1\\0&1&-1\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}\lambda+1&1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^4.$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1&-1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$ 可见 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,

又因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

2. 求$(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100}$ 的 Jordan 标准形, 其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵.

解: 因为 $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 所以$(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100}\sim\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{100}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{100}\end{pmatrix}$,

其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{100}=2^{100}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}_{100}^{99}2^{99}\boldsymbol{N}$. 可见 $\boldsymbol{B}^{100}\sim\begin{pmatrix}2^{100}&1\\0&2^{100}\end{pmatrix}$.

故$(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}2^{100}&1&0&0\\0&2^{100}&0&0\\0&0&2^{100}&1\\0&0&0&2^{100}\end{pmatrix}$.

3. 求 $\mathbb{C}^{4\times4}$ 的子空间 $\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\}$的维数 $\dim\boldsymbol{V}$.

解: 设可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{N}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{N}\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{XP}\mid\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{V}\}$, $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}; \boldsymbol{X}\mapsto\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{XP}$,

则 $\boldsymbol{W}$ 也是 $\mathbb{C}^{4\times4}$ 的子空间, 而且 $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ 为同构映射, 因而 $\dim\boldsymbol{V}=\dim\boldsymbol{W}$.

$\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{V}\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\Leftrightarrow\boldsymbol{PJP}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{XPJP}^{-1}\Leftrightarrow\boldsymbol{JP}^{-1}\boldsymbol{XP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{XPJ}$.

令 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{XP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1&\boldsymbol{Y}_2\\\boldsymbol{Y}_3&\boldsymbol{Y}_4\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{JP}^{-1}\boldsymbol{XP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{NY}_1&\boldsymbol{NY}_2\\\boldsymbol{NY}_3&\boldsymbol{NY}_4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{XPJ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{N}&\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{N}\\\boldsymbol{Y}_3\boldsymbol{N}&\boldsymbol{Y}_4\boldsymbol{N}\end{pmatrix}$,

故 $\boldsymbol{JP}^{-1}\boldsymbol{XP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{XPJ}\Leftrightarrow\boldsymbol{NY}_i=\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{i}=1, 2, 3, 4$).

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & y_{11} \\ 0 & y_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{21} & y_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ 0 & y_{11} \end{pmatrix}.$$

由此可得 $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{W} \Leftrightarrow \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_4 & b_4 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$, 可见 $\dim \boldsymbol{V} = \dim \boldsymbol{W} = 8$.

七. (20%, 每小题 5 分)

1. 假设 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2$ 是 $\boldsymbol{n}$ 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的子空间, 如果 $\dim \boldsymbol{W}_1 + \dim \boldsymbol{W}_2 > \boldsymbol{n}$,
   证明: $\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$.

证明: 因为 $\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2 \le \boldsymbol{V}$, 所以 $\dim(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2) \le \dim \boldsymbol{V} = \boldsymbol{n}$.
又因为 $\dim(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2) + \dim(\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2) = \dim \boldsymbol{W}_1 + \dim \boldsymbol{W}_2 > \boldsymbol{n}$,
所以 $\dim(\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2) > \boldsymbol{n} - \dim(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2) \ge 0$, 因而 $\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$.

2. 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 证明: 若$\|\boldsymbol{A}\|_F = \|\boldsymbol{A}\|_2$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \le 1$.

证明: 因为$\|\boldsymbol{A}\|_F = \|\boldsymbol{A}\|_2$, 所以 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_F^2 = \|\boldsymbol{A}\|_2^2 = \rho(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$.
又因为 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 是半正定的 Hermite 阵,
所以可设 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值由大到小依次为$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_{\boldsymbol{n}} \ge 0$.
于是$\lambda_1 = \rho(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{\boldsymbol{n}}$,

由此可得$\lambda_2 = \ldots = \lambda_{\boldsymbol{n}} = 0$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \le 1$.

3. 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 证明: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$必定与对角阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$相似, 其中 $\boldsymbol{r}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

证明: 首先, 由$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^H = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$为 Hermite 矩阵, 因而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$酉相似于实对角阵.
其次, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ 可得$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$, 因而 $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$的化零多项式,
故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$的特征值只能为 1 或 0.
最后, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ 可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \le \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+) \le \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,
故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}$.

综上可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$相似于对角阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是阶数相同的 Hermite 矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.
   若 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于-1, 证明: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 是正定的.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P}$.
于是 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{P}^H)^{-1}\boldsymbol{B}]\boldsymbol{P}^{-1} = (\boldsymbol{P}^{-1})^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$,
$(\boldsymbol{P}^{-1})^H(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^{-1} = (\boldsymbol{P}^{-1})^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} + (\boldsymbol{P}^{-1})^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{P}^{-1})^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$.
由于 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于-1, 而且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 与$(\boldsymbol{P}^{-1})^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$ 相似,
所以$(\boldsymbol{P}^{-1})^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$ 的特征值均大于-1,
从而 $\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{P}^{-1})^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$ 的特征值均大于 0, 即 $\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{P}^{-1})^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$ 是正定的.
又因为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{P}^{-1})^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$ 共轭合同, 所以 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 是正定的.

试题五

一. (20%)记 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的变换 $\boldsymbol{f}$ 定义如下: 对任意 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{2\times2}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{MX}$,

1. 证明: $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换.

证明: 对于任意的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}$ 以及任意的 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{2\times2}$, 有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{aX} + \boldsymbol{bY}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{aX} + \boldsymbol{bY}) = \boldsymbol{aMX} + \boldsymbol{bMY} = \boldsymbol{af}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{bf}(\boldsymbol{Y}) \in \mathbb{C}^{2\times2}$.
故 $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换.

2. 分别求 $\boldsymbol{f}$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 和基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.

解: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{11}) = \boldsymbol{ME}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 3\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$;

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{12}) = \boldsymbol{ME}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 1\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 3\boldsymbol{E}_{22}$;

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{21}) = \boldsymbol{ME}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 4\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$;

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{22}) = \boldsymbol{ME}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 2\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 4\boldsymbol{E}_{22}$,

由此可见 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. 给出一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$.

解: 因为$(\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}) = (\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

所以由第 2 小题可知 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$.

4. 给出 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的两个 2 维不变子空间 $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ 使得 $\mathbb{C}^{2\times2} = \boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_2$.

解: 由第 2 小题可知

$\boldsymbol{V}_1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}\}$, $\boldsymbol{V}_2 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}\}$是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的两个 2 维不变子空间,
而且 $\mathbb{C}^{2\times2} = \boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_2$.

二. (12%)假设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{F}$ 上 $\boldsymbol{n}$ 维线性空间, $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换, 且 $\boldsymbol{fg} = 0$, $\boldsymbol{g}^2 = \boldsymbol{g}$. $\mathrm{K}(\boldsymbol{f})$, $\mathrm{K}(\boldsymbol{g})$分别表示 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ 的核空间, $\mathrm{R}(\boldsymbol{f})$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{g})$分别表示 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ 的值域.

1. 证明: $\boldsymbol{V} = \mathrm{K}(\boldsymbol{f}) + \mathrm{K}(\boldsymbol{g})$.

证明: 对于任意的$\alpha \in \boldsymbol{V}$, 由 $\boldsymbol{fg} = 0$ 得 $\boldsymbol{fg}(\alpha) = \boldsymbol{0}$, 因而 $\boldsymbol{g}(\alpha) \in \mathrm{K}(\boldsymbol{f})$;
由 $\boldsymbol{g}^2 = \boldsymbol{g}$ 得 $\boldsymbol{g}[\alpha - \boldsymbol{g}(\alpha)] = \boldsymbol{g}(\alpha) - \boldsymbol{g}^2(\alpha) = \boldsymbol{0}$, 因而$\alpha - \boldsymbol{g}(\alpha) \in \mathrm{K}(\boldsymbol{g})$,
于是$\alpha = \boldsymbol{g}(\alpha) + [\alpha - \boldsymbol{g}(\alpha)] \in \mathrm{K}(\boldsymbol{f}) + \mathrm{K}(\boldsymbol{g})$.
由此可见 $\boldsymbol{V} \subseteq \mathrm{K}(\boldsymbol{f}) + \mathrm{K}(\boldsymbol{g}) \subseteq \boldsymbol{V}$, 故 $\boldsymbol{V} = \mathrm{K}(\boldsymbol{f}) + \mathrm{K}(\boldsymbol{g})$.

2. 证明: $\boldsymbol{V} = \mathrm{K}(\boldsymbol{f}) \oplus \mathrm{K}(\boldsymbol{g})$当且仅当 $\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{f}) + \dim\mathrm{R}(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{n}$.

证明: 对于任意的$\alpha \in \boldsymbol{V}$, 由 $\boldsymbol{fg} = 0$ 得 $\boldsymbol{fg}(\alpha) = \boldsymbol{0}$, 因而 $\boldsymbol{g}(\alpha) \in \mathrm{K}(\boldsymbol{f})$. 由此可见 $\mathrm{R}(\boldsymbol{g}) \subseteq \mathrm{K}(\boldsymbol{f})$.

($\Rightarrow$)若 $\boldsymbol{V} = \mathrm{K}(\boldsymbol{f}) \oplus \mathrm{K}(\boldsymbol{g})$, 则 $\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{g}) + \dim\mathrm{K}(\boldsymbol{g}) = \dim\boldsymbol{V} = \dim\mathrm{K}(\boldsymbol{f}) + \dim\mathrm{K}(\boldsymbol{g})$,

因而 $\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{g}) = \dim\mathrm{K}(\boldsymbol{f})$, 故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{g}) = \mathrm{K}(\boldsymbol{f})$,

于是 $\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{f}) + \dim\mathrm{R}(\boldsymbol{g}) = \dim\mathrm{R}(\boldsymbol{f}) + \dim\mathrm{K}(\boldsymbol{f}) = \dim\boldsymbol{V} = \boldsymbol{n}$.

($\Leftarrow$)若 $\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{f}) + \dim\mathrm{R}(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{n}$, 则由 $\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{f}) + \dim\mathrm{K}(\boldsymbol{f}) = \dim\boldsymbol{V} = \boldsymbol{n}$ 可得 $\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{g}) = \dim\mathrm{K}(\boldsymbol{f})$,

因而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{g}) = \mathrm{K}(\boldsymbol{f})$.

若$\alpha \in \mathrm{K}(\boldsymbol{f}) \cap \mathrm{K}(\boldsymbol{g}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{g}) \cap \mathrm{K}(\boldsymbol{g})$, 则存在$\beta \in \boldsymbol{V}$使得$\alpha = \boldsymbol{g}(\beta) = \boldsymbol{g}^2(\beta) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{g}(\beta)] = \boldsymbol{g}(\alpha) = \boldsymbol{0}$.

可见 $\mathrm{K}(\boldsymbol{f}) \cap \mathrm{K}(\boldsymbol{g}) = \{\boldsymbol{0}\}$.

故由第 1 小题可知 $\boldsymbol{V} = \mathrm{K}(\boldsymbol{f}) \oplus \mathrm{K}(\boldsymbol{g})$.

三. (10%)假设 $\boldsymbol{V}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 维欧氏空间, $\eta \in \boldsymbol{V}$ 且$\|\eta\| = \sqrt{2}$, $\boldsymbol{k}$ 是实数.

$\boldsymbol{V}$ 上的线性变换 $\boldsymbol{f}$ 定义如下: 对任意 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}\langle \boldsymbol{x}, \eta\rangle\eta$.

问: 当 $\boldsymbol{k}$ 取什么值时 $\boldsymbol{f}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 上的正交变换?

解: 令$\varepsilon_1 = \dfrac{\eta}{\|\eta\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta$, 并把$\varepsilon_1$扩充为 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$,

则 $\boldsymbol{f}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 - \boldsymbol{k}\langle\varepsilon_1, \eta\rangle\eta = \varepsilon_1 - \boldsymbol{k}\langle\varepsilon_1, \sqrt{2}\,\varepsilon_1\rangle\sqrt{2}\,\varepsilon_1 = (1-2\boldsymbol{k})\varepsilon_1$, $\boldsymbol{f}(\varepsilon_i) = \varepsilon_i - \boldsymbol{k}\langle\varepsilon_i, \eta\rangle\eta = \varepsilon_i$, $\forall \boldsymbol{i} = 2, 3, \dots, \boldsymbol{n}$.

可见 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$下的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\{1-2\boldsymbol{k}, 1, \dots, 1\}$.

故 $\boldsymbol{f}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 上的正交变换 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow 1-2\boldsymbol{k} = \pm 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = 0$ 或 1.

四. (15%)假设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形.

解: $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$.

$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 问参数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 应满足什么条件?

解: 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则 $5 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{a} + 3$, 故 $\boldsymbol{a} = 2$.

此时 $2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似可知 $\mathrm{r}(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$,

故 $\boldsymbol{b} \neq -3$. 此时 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准形也是$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 2$ 而且 $\boldsymbol{b} \neq -3$.

3. 假设复数域$\mathbb{C}$上线性空间$\mathbb{C}^{3\times3}$的子空间 $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) \mid \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}]\}$ (即 $\boldsymbol{V}$ 是关于 $\boldsymbol{A}$ 的复系数多项式全体所构成的$\mathbb{C}^{3\times3}$的子空间)。求 $\boldsymbol{V}$ 的一组基及维数.

解: 由第 1 小题可知 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}-2)^2$.

对于任意的 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$, 存在 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{cx}^2 \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$使得 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{cx}^2$.

于是 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{aI} + \boldsymbol{bA} + \boldsymbol{cA}^2 = \boldsymbol{aI} + \boldsymbol{bA} + \boldsymbol{cA}^2$.

另一方面, 若 $\boldsymbol{aI} + \boldsymbol{bA} + \boldsymbol{cA}^2 = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = 0$

(否则 $\boldsymbol{A}$ 有次数低于 3 的化零多项式, 这与 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})$矛盾!)

可见 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一组基, $\dim\boldsymbol{V} = 3$.

五. (10%)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&3&-2\\0&-1&0\\8&6&-5\end{pmatrix}$. 试将矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 表示成关于 $\boldsymbol{A}$ 的多项式，并求行列式 $\det(e^{\boldsymbol{A}t})$的值.

解: $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-3&2\\0&\lambda+1&0\\-8&-6&\lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&2\\-8&\lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$

$-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&-3&2\\0&0&0\\-8&-6&4\end{pmatrix}$, $r(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

可见 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}+1)^2$.

设 $e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{c}_0(\boldsymbol{t})\boldsymbol{I}+\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{t})\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=e^{xt}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}_0(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}$,

则 $e^{-t}=\boldsymbol{f}(-1)=\boldsymbol{g}(-1)=\boldsymbol{c}_0(\boldsymbol{t})-\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{t})$, $te^{-t}=\boldsymbol{f}'(-1)=\boldsymbol{g}'(-1)=\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{t})$,

由此可得 $\boldsymbol{c}_0(\boldsymbol{t})=(\boldsymbol{t}+1)e^{-t}$, $\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{t})=te^{-t}$. 于是有 $e^{\boldsymbol{A}t}=(\boldsymbol{t}+1)e^{-t}\boldsymbol{I}+te^{-t}\boldsymbol{A}$.

设可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{t}+1)e^{-t}\boldsymbol{I}+te^{-t}\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{-t}&te^{-t}\\0&0&e^{-t}\end{pmatrix}$, 于是$|e^{\boldsymbol{A}t}|=e^{-3t}$.

($|e^{\boldsymbol{A}t}|=e^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}t)}=e^{-3t}$.)

六. (10%)假设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&0&2&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$.

解: $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\ (\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4\\4&3\end{pmatrix},\ (\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-4\\-4&6\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-4\\-4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&0&0\\-1&2&-1\\4&-4&4\end{pmatrix}.$$

七. (23%)证明下列命题.

1. (5%)设 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵，证明: $\|\boldsymbol{A}\|_2=\rho(\boldsymbol{A})$.

证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶正规矩阵，

则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$，其中$|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\ldots\ge|\lambda_n|$.

于是$|\lambda_1|=\rho(\boldsymbol{A})$，而且 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})=\mathrm{diag}\{|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\ldots,|\lambda_n|^2\}$.

由此可得$\|\boldsymbol{A}\|_2^2=\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=|\lambda_1|^2=\rho(\boldsymbol{A})^2$，故$\|\boldsymbol{A}\|_2=\rho(\boldsymbol{A})$.

2. (5%)假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}^+$是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵. 证明: $\mathrm{R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+) = \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+)$.

证明: 对于任意的$\alpha \in \mathrm{R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+)$, 存在$\beta \in \mathbb{C}^s$ 使得$\alpha = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+)\beta$.

于是 $\boldsymbol{A}^+\alpha = \boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+)\beta = (\boldsymbol{A}^+ - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{AA}^+)\beta = (\boldsymbol{A}^+ - \boldsymbol{A}^+)\beta = \boldsymbol{0}$,

故$\alpha \in \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+)$.

由此可见 $\mathrm{R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+) \subseteq \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+)$.

另一方面, 对于任意的$\alpha \in \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+)$, 有 $\boldsymbol{A}^+\alpha = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{AA}^+\alpha = \boldsymbol{0}$,

于是$\alpha = \alpha - \boldsymbol{AA}^+\alpha = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+)\alpha \in \mathrm{R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+)$,

由此可见 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+) \subseteq \mathrm{R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+)$.

综上可得 $\mathrm{R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+) = \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+)$.

3. (5%)假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 不与任何对角阵相似, 证明: 存在多项式 $f(x)$及正整数 k, 使得 $f(\boldsymbol{A}) \neq \boldsymbol{O}$ 但$[f(\boldsymbol{A})]^k = \boldsymbol{O}$.

证明: 设 $c(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{r}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$, 其中$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$为 $\boldsymbol{A}$ 的互异的特征值.

若 $\boldsymbol{A}$ 不与任何对角阵相似, 则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式有重根.

令 $f(x) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_r)$, 则 $f(\boldsymbol{A}) \neq \boldsymbol{O}$,

但 $c(\lambda) \mid [f(\lambda)]^n$, 于是$[f(\boldsymbol{A})]^n = \boldsymbol{O}$.

4. (8%)设 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, m 是正整数. 证明: 存在唯一正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^m$.

证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定的 Hermite 矩阵,

则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AU} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$,

其中$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$均为正数.

(存在性)对于正整数 m, 令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}\{\sqrt[m]{\lambda_1}, \sqrt[m]{\lambda_2}, \ldots, \sqrt[m]{\lambda_n}\}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$,

则 $\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵而且 $\boldsymbol{B}^m = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$.

(唯一性)设正定矩阵 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{B}^m = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^m$, 则

$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^m\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{m+1} = \boldsymbol{BB}^m = \boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{C}^m\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{m+1} = \boldsymbol{CC}^m = \boldsymbol{CA}$.

因而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有完全相同的特征向量,

同时 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 具有完全相同的特征向量,

故 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 具有完全相同的特征向量.

设非零向量α满足 $\boldsymbol{B}\alpha = \mu\alpha$, $\boldsymbol{C}\alpha = \lambda\alpha$,

则$\mu^m\alpha = \boldsymbol{B}^m\alpha = \boldsymbol{A}\alpha = \boldsymbol{C}^m\alpha = \lambda^m\alpha$, 由此可得$\mu^m = \lambda^m$.

由于μ和λ都是正数, 所以$\mu = \lambda$.

因而 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU}$ 与 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{CU}$ 为同一个对角阵Λ,

故 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{C}$.

试题六

一. (18%)设 $\boldsymbol{M}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 记 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M}) = \{\ \boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid \boldsymbol{MX}=\boldsymbol{XM}\}$,

1. 证明: $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M})$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的子空间.

证明: 因为 $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M})$, 所以 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M})\neq\varnothing$.

对于任意的 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M}), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\mathbb{C}$, 有 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{aX}+\boldsymbol{bY}) = \boldsymbol{aMX}+\boldsymbol{bMY} = \boldsymbol{aXM}+\boldsymbol{bYM} = (\boldsymbol{aX}+\boldsymbol{bY})\boldsymbol{M}$,

可见 $\boldsymbol{aX}+\boldsymbol{bY}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M})$.

故 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M})$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的子空间.

2. 若 $\boldsymbol{n}=2$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,

分别求 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{V}(\boldsymbol{B}), \boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})\cap\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})$以及 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})$的各一组基与维数.

解: (1) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\2\boldsymbol{x}&2\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&2\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&2\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{uE}_{11}+\boldsymbol{yE}_{22}.$$

又因为 $\boldsymbol{uE}_{11}+\boldsymbol{yE}_{22}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}=0$, 可见 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{22}$ 线性无关.

而且由 $\boldsymbol{AE}_{11}=\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{AE}_{22}=\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{A}$ 可见 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{22}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})$.

综上可得 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{22}$ 为 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})$的一组基, 因而 $\dim\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})=2$.

(2) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}&\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{y}&\boldsymbol{x}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}$ 而且 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}),$$

又因为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21})\Leftrightarrow\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}=0$,

可见 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}$ 线性无关.

而且由 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22})=(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21})=(\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21})\boldsymbol{B}$

可见 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})$.

综上可得 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}$ 为 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})$的一组基, 因而 $\dim\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})=2$.

(3) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})\cap\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}=0$ 而且 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22})$.

又因为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}$ 线性无关, 而且 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})\cap\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})$.

综上可得 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}$ 为 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})\cap\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})$的一组基, 因而 $\dim[\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})\cap\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})]=1$.

(4) 由(1)(2)可知 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})\cap\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}\}$.

又因为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}$ 能由 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}$ 线性表示,

而且 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}$ 线性无关,

可见 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}$ 为 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})$的一组基, 因而 $\dim[\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B})]=3$.

二. (18%)已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 线性空间$\mathbb{C}^{2\times2}$上的变换 $\boldsymbol{f}$ 定义如下:

对于任意的 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{2\times2}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXB}$.

1. 证明: $\boldsymbol{f}$ 是$\mathbb{C}^{2\times2}$上的线性变换.

证明: 对于任意的 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M}), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\mathbb{C}$, 有

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{aX}+\boldsymbol{bY})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{aX}+\boldsymbol{bY})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{aAXB}+\boldsymbol{bAYB}=\boldsymbol{af}(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{bf}(\boldsymbol{Y})$.

可见 $\boldsymbol{f}$ 是$\mathbb{C}^{2\times2}$上的线性变换.

2. 求 $\boldsymbol{f}$ 在$\mathbb{C}^{2\times2}$的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

解: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{AE}_{11}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+1\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+(-1)\boldsymbol{E}_{22}$.

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{AE}_{12}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=1\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+(-1)\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$.

$$f(E_{21}) = AE_{21}B = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0E_{11} + (-1)E_{12} + 0E_{21} + 1E_{22}.$$

$$f(E_{22}) = AE_{22}B = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = (-1)E_{11} + 0E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22}.$$

由此可得 f 在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

3. 问：是否存在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的一组基，使得 f 在此基下的矩阵为对角阵?
若存在，试给出这样的一组基；若不存在，请给出理由.

解：因为 f 在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵 $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，所以 A 相似于对角矩阵，因而存在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的一组基，使得 f 在此基下的矩阵为对角阵.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 1\\ -1 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda & \lambda & \lambda & \lambda\\ -1 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}\ \begin{matrix}\times 1 & \times(-1)\end{matrix} = \lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$= \lambda\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ -1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)\lambda(\lambda+2) = \lambda^2(\lambda-2)(\lambda+2).$$

$Ax = 0$ 的一个基础解系为 $\xi_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\xi_2 = (0, 1, 0, 1)^T$;
$(2I - A)x = 0$ 的一个基础解系为 $\xi_3 = (-1, -1, 1, 1)^T$,
$(-2I - A)x = 0$ 的一个基础解系为 $\xi_3 = (1, -1, -1, 1)^T$,

令 $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{0, 0, 2, -2\}$.

令 $(F_1, F_2, F_3, F_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})P = (E_{11} + E_{21}, E_{12} + E_{22}, -E_{11} - E_{12} + E_{21} + E_{22}, E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22})$,
则 f 在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基 F_1, F_2, F_3, F_4 下的矩阵为 $\mathrm{diag}\{0, 0, 2, -2\}$.

三. (14%)设矩阵 $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^4$ 的子空间 $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$.

1. 求 W 在 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补空间 $W^\perp$的一组基.

解：因为 $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\} = K(A)$, 所以 $W^\perp = R(A^H)$.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此可见 $(1, 1, 0, 1)^T, (0, 1, -1, 1)^T$ 为 A^H 的列向量组的一个极大无关组,
因而 $\alpha = (1, 1, 0, 1)^T$, $\beta = (0, 1, -1, 1)^T$ 是 $W^\perp$的一组基.

2. 求$\eta = (1, 1, 1, 1)^T$在$W^\perp$中的正投影.

解: 设$\eta_0 = a(1, 1, 0, 1)^T + b(0, 1, -1, 1)^T$, 则

η_0是$\eta = (1, 1, 1, 1)^T$在$W^\perp$中的正投影 $\Leftrightarrow \langle \eta-\eta_0, \alpha\rangle = 0 = \langle \eta-\eta_0, \beta\rangle$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=3 \\ 2a+3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{7}{5}, b=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \eta_0 = (\frac{7}{5},\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5})^T.$$

解: 令$\xi_1 = \alpha = (1, 1, 0, 1)^T$, $\xi_2 = \beta - \frac{\langle \beta,\xi_1\rangle}{\langle \xi_1,\xi_1\rangle}\xi_1 = (-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-1,\frac{1}{3})^T$, 再单位化得

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}})^T,\quad \eta_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = (-\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},-\frac{3}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}})^T.$$

于是η_0是η在$W^\perp$中的正投影 $\Leftrightarrow \eta_0 = \langle \eta, \eta_1\rangle\eta_1 + \langle \eta, \eta_2\rangle\eta_2 = (\frac{7}{5},\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5})^T$.

四. (24%)设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&1&-1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

1. 求A的Jordan标准形.

解: 令 $B = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&1&-1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}$, 则 $A = \begin{pmatrix} 0 & O \\ O & B \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}\times(-1) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1).$$

又由 $r(B) = 2$ 可得B的Jordan标准形为$\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, 因而$A$的Jordan标准形为$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

2. 求矩阵函数e^{At}.

解: 由B的Jordan标准形可见B的最小多项式为$\lambda^2(\lambda-1)$.

设 $e^{Bt} = c_0(t)I + c_1(t)B + c_2(t)B^2$, $f(x) = e^{xt}$, $g(x) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2$,

则 $1 = f(0) = g(0) = c_0(t)$, $t = f'(0) = g'(0) = c_1(t)$, $e^t = f(1) = g(1) = c_0(t) + c_1(t) + c_2(t)$,

由此可得 $c_0(t) = 1$, $c_1(t) = t$, $c_2(t) = e^t-t-1$,

于是有 $e^{Bt} = I + tB + (e^t-t-1)B^2 = \begin{pmatrix} e^t-t & e^t-1 & 1+t-e^t \\ e^t-1 & e^t & 1-e^t \\ e^t-t-1 & e^t-1 & 2+t-e^t \end{pmatrix}$,

$$故\ e^{At} = \begin{pmatrix} e^0 & O \\ O & e^{Bt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & e^{Bt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0 & e^t-t & e^t-1 & 1+t-e^t \\ 0 & e^t-1 & e^t & 1-e^t \\ 0 & e^t-t-1 & e^t-1 & 2+t-e^t \end{pmatrix}.$$

3. 求A的广义逆矩阵A^+.

解: B的满秩分解为$B = CD$, 其中 $C = \begin{pmatrix} 0&1 \\ 1&1 \\ 0&1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1&0&-1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}$,

$$C^HC = \begin{pmatrix} 1&1 \\ 1&3 \end{pmatrix}, (C^HC)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3&-1 \\ -1&1 \end{pmatrix}, DD^H = \begin{pmatrix} 2&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}, (DD^H)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&2 \end{pmatrix},$$

$$B^+ = D^H(DD^H)^{-1}(C^HC)^{-1}C^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

于是可得 $A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

五. (10%)已知α, β都是 n 维列向量, $\|\alpha\|, \|\beta\|$分别表示在$\mathbb{C}^n$的标准内积下向量α, β的长度, 矩阵 $A = \alpha\beta^H$.

1. 证明: 关于范数, 有$\|A\|_2 = \|A\|_F = \|\alpha\|\cdot\|\beta\|$.

证明: 当$\beta = 0$ 时, $A = O$, $\|A\|_2 = \|A\|_F = \|\alpha\|\cdot\|\beta\| = 0$.

当$\beta \neq 0$ 时, $A^HA = (\alpha\beta^H)^H(\alpha\beta^H) = (\beta\alpha^H)(\alpha\beta^H) = \|\alpha\|^2\beta\beta^H$.

由$\beta\beta^H\beta = \|\beta\|^2\beta$可见$\|\beta\|^2$为 Hermite 阵$\beta\beta^H$的非零特征值.

又因为 $\mathrm{r}(\beta\beta^H) = \mathrm{r}(\beta) = 1$, 所以酉相似于 $\mathrm{diag}\{\|\beta\|^2, 0, \ldots, 0\}$.

于是可得$\rho(\beta\beta^H) = \|\beta\|^2 = \mathrm{tr}(\beta\beta^H)$, $\rho(A^HA) = \|\alpha\|^2\rho(\beta\beta^H) = \|\alpha\|^2\|\beta\|^2$, $\mathrm{tr}(A^HA) = \|\alpha\|^2\mathrm{tr}(\beta\beta^H) = \|\alpha\|^2\|\beta\|^2$,

故$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^HA)} = \|\alpha\|\cdot\|\beta\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^HA)} = \|A\|_F$.

2. 若$\|\alpha\| = \|\beta\| = 1$, 证明: 关于广义逆, 有 $A^+ = A^H$.

证明: 因为$\|\alpha\| = \|\beta\| = 1$, 所以 $A = \alpha\beta^H$ 为 A 的满秩分解,

而且 $A^+ = \beta(\beta^H\beta)^{-1}(\alpha^H\alpha)^{-1}\alpha^H = \beta\alpha^H = A^H$.

证明: (1) $AA^HA = (\alpha\beta^H)(\alpha\beta^H)^H(\alpha\beta^H) = \alpha\beta^H\beta\alpha^H\alpha\beta^H = \alpha\beta^H = A$,

(2) $A^HAA^H = (\alpha\beta^H)^H(\alpha\beta^H)(\alpha\beta^H)^H = \beta\alpha^H\alpha\beta^H\beta\alpha^H = \beta\alpha^H = A^H$,

(3) $(AA^H)^H = AA^H$,

(4) $(A^HA)^H = A^HA$,

由(1)-(4)可见 $A^+ = A^H$.

六. (8%)设 V 是 n 维欧式空间, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是 V 的一组标准正交基,

向量$\delta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$. 对非零实数 k, 定义 V 上的线性变换 f 如下:

对于任意的 $x \in V$, $f(x) = x + k\langle x, \delta\rangle\delta$.

证明: f 是 V 上的正交变换当且仅当 $k = -\dfrac{2}{n}$.

证明: 对于任意的 $i = 1, 2, \ldots, n$, 有

$f(\eta_i) = \eta_i + k\langle\eta_i, \delta\rangle\delta = \eta_i + k\langle\eta_i, \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n\rangle(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n) = k\eta_1 + \ldots + (1+k)\eta_i + \ldots + k\eta_n$,

可见线性变换 f 在 V 的标准正交基$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1+k & k & \cdots & k \\ k & 1+k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & 1+k \end{pmatrix}$.

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1+k & k & \cdots & k \\ k & 1+k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & 1+k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+k & k & \cdots & k \\ k & 1+k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nk^2+2k+1 & nk^2+2k & \cdots & nk^2+2k \\ nk^2+2k & nk^2+2k+1 & \cdots & nk^2+2k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nk^2+2k & nk^2+2k & \cdots & nk^2+2k+1 \end{pmatrix}.$$

故 f 是 V 上的正交变换$\Leftrightarrow A^TA = I \Leftrightarrow k = -\dfrac{2}{n}$.

七. (8%)已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $\boldsymbol{n}$ 阶 Hermite 矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.

设 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全为 1.

1. 证明: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}$.

于是$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{PB})\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{PBP}^{\mathrm{H}}$.

可见 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{PBP}^{\mathrm{H}}$ 相似.

由 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶 Hermite 矩阵可知 $\boldsymbol{PBP}^{\mathrm{H}}$ 也是 $\boldsymbol{n}$ 阶 Hermite 矩阵,

因而 $\boldsymbol{PBP}^{\mathrm{H}}$ 相似于对角阵, 故 $\boldsymbol{AB}$ 也与对角阵相似.

又因为 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全为 1, 所以 $\boldsymbol{AB}$ 相似于 $\boldsymbol{I}$,

即存在可逆阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$. 由此可得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{QIQ}^{-1} = \boldsymbol{I}$.

2. 证明: 存在次数小于 $\boldsymbol{n}$ 的多项式 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$.

证明: 由第 1 小题可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆而且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-1} + \ldots + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0$,

则 $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}-1} + \ldots + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{A} + \boldsymbol{c}_0\boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{c}_0 = (-1)^{\boldsymbol{n}}|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

由此可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}-1} + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}-2} + \ldots + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{I}) = -\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{I}$,

从而 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} = -\boldsymbol{c}_0^{-1}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}-1} + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}-2} + \ldots + \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{I})$,

可见存在次数小于 $\boldsymbol{n}$ 的多项式 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{c}_0^{-1}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-1} + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-2} + \ldots + \boldsymbol{c}_1)$,

使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$.