2015年秋学期

工程矩阵理论期终考试评分标准

一、（12%）设 $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$C^{2\times 2}$ 的子空间 $V_1=\left\{X\in C^{2\times 2}\mid PX=O\right\}$，$V_2=\left\{X\in C^{2\times 2}\mid XP=O\right\}$。分别求$V_1$，$V_2$，$V_1\cap V_2$，$V_1+V_2$的基及它们的维数.

【解】

V_1的基：$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\dim V_1=2$；

V_2的基：$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\dim V_1=2$；

$V_1\cap V_2$的基：$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\dim V_1\cap V_2=1$；

V_1+V_2的基：A,B,C，$\dim V_1+V_2=3$

二、（10%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$R^4$ 的子空间 $W=K^{\perp}(A)$，求向量 $\eta=(1,0,0,0)^T$在W中的正投影.

【解】

$W=K^{\perp}(A)=R(A^H)$。记 $A^H=(\alpha,\beta)$。明显地，α,β线性无关，所以，α,β是$W=L(\alpha,\beta)$的一组基。

设η在W中的正投影$\eta_0=a\alpha+b\beta$，则$\eta_0-\eta\perp W$，即$\eta_0-\eta\perp\alpha,\beta$，也即$<\eta_0-\eta,\alpha>=<\eta_0-\eta,\beta>=0$。

因为$\eta_0-\eta=(a-1,b,-a+b,a+b)^T$，

所以$\begin{cases}(a-1)-(-a+b)+(a+b)=0\\ b+(-a+b)+(a+b)=0\end{cases}$，故$a=\dfrac{1}{3},b=0$。

因此设η在W中的正投影$\eta_0=a\alpha+b\beta=\dfrac{1}{3}(1,0,-1,1)^T$。

三、（18%）设 f 是 $C^{2\times2}$ 上的线性变换：$\forall X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in C^{2\times2}$，$f(X)=\begin{pmatrix} 2a+3b+d & b \\ a+2c+d & d \end{pmatrix}$.

1. 求 f 在 $C^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵 A；

【解】$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. 求 f 的特征值，并求相应的各特征子空间的一组基；

【解】$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$，所以，$f$ 的特征值为 $1,1,2,2$。

因为 $(A-E)x=0$ 有基础解系：$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

所以，相应于特征值 1，特征子空间有一组基：$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。

因为 $(A-2E)x=0$ 有基础解系：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

所以，相应于特征值 2，特征子空间有一组基：$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

3. 问：是否存在 $C^{2\times2}$ 的基使得 f 的矩阵是对角阵？为什么？

【答】不存在。

因为 f 只有 3 个线性无关的特征向量，而 $\dim C^{2\times2}=4$。两者不等。

四、(10%)设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. 求 A 的若当标准形；并问：当参数 a,b 取什么值时，A 与 B 相似？

【解】

$|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为 1, 1，−1. 又 $r(A-E)=2$，

所以，A 的若当标准形是 $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$。

$|\lambda E-B|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-a)$，所以，$B$ 的特征值为 $1,-1,a$。

如果 A 与 B 相似，则它们有相同的特征值，从而 $a=1$。
当 $a=1$ 时，A 与 B 相似当且仅当它们有相同的若当标准形，即 B 与 J 相似，也即 $r(B-E)=2$，也就是 $b\neq 0$。

五、（10%）设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$. 将 e^{At} 表示成关于 A 的多项式，并求行列式 $\det e^{At}$ 的值.

【解】$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+1)^2$，所以，$A$ 特征值为 $0,-1,-1$。又 $r(A+E)=2$，所以，A 的若当标准形是 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$。

因此 A 的最小多项式是 $m(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2$。

记 $f(\lambda)=e^{\lambda t},g(\lambda)=a+b\lambda+c\lambda^2$。

则 $g(A)=f(A)$ 当且仅当 $g(0)=f(0),g(-1)=f(-1),g'(-1)=f'(-1)$，

即 $\begin{cases}a=1\\ a-b+c=e^{-t}\\ b-2c=te^{-t}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ b=2-2e^{-t}-te^{-t}\\ c=1-e^{-t}-te^{-t}\end{cases}$。

故 $e^{At}=E+(2-2e^{-t}-te^{-t})A+(1-e^{-t}-te^{-t})A^2$。

由于 A 特征值为 $0,-1,-1$，所以 e^{At} 特征值为 $1,e^{-t},e^{-t}$。故 $\det e^{At}=e^{-2t}$。

六、（10%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$。求 A 的广义逆矩阵 A^+.

【解】记 $B=2,C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$。

于是 $A=\begin{pmatrix}O & B\\ C & O\end{pmatrix}$，从而 $A^+=\begin{pmatrix}O & C^+\\ B^+ & O\end{pmatrix}$。

$B^{+}=\dfrac{1}{2}$。

C 是行满秩矩阵，所以 $C^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}$。

$CC^{H}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，所以 $\left(CC^{H}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$。

所以 $C^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/3\\ 0 & 1/3\\ -1/2 & 1/3\end{pmatrix}$

所以，$A^{+}=\begin{pmatrix}O & C^{+}\\ B^{+} & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 0 & 1/3\\ 0 & -1/2 & 1/3\\ 1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

七、（30%）证明题：

1. 假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是内积空间 V 的一组基，$\eta\in V$。如果 $\eta\perp\alpha_i$（$i=1,2,\cdots,n$）. 证明：$\eta=\theta$。

   【证】设 η 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合

   通过验证 $<\eta,\eta>=0$ 得出结论

2. 已知 A 是一 $m\times n$ 矩阵，A 的秩 $r(A)=n$，$\|\cdot\|$ 是线性空间 C^m 上的范数，证明：如下定义的 C^n 上的函数 $\|\cdot\|_A$ 是 C^n 上的范数：对任意 $x\in C^n$，$\|x\|_A=\|Ax\|$。

   【证】说明“当 $x\neq\theta$ 时 $Ax\neq\theta$ ”

   通过验证三条公理，最后得出结论

3. 已知 n 阶 $Hermite$ 矩阵 A 是正定的，B 是 $n\times s$ 矩阵。证明：矩阵 $B^{H}AB$ 是正定的当且仅当 B 的秩 $r(B)=s$。

   【证】

4. 已知 $s\times n$ 矩阵 A 的秩 $r(A)=r$，关于矩阵的范数，证明：$\|AA^{+}\|_F=\sqrt{r}\,\|AA^{+}\|_2$。

   【证】证明 AA^{+} 的特征值为 1 或 0

   证明 AA^{+} 相似于对角阵

   证明 $r(AA^{+})=r(A)$ 并得出结论

5. 已知$n\times n$矩阵A的最小多项式没有重根，证明：矩阵$M=\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{pmatrix}$的最小多项式也没有重根。

【证】因为A的最小多项式没有重根，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$是对角阵。

令$C=\begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix}$，则$C$是可逆的，且$C^{-1}MC=\begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda^2 \\ \Lambda^2 & \Lambda \end{pmatrix}$。

验证$C^{-1}MC=\begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda^2 \\ \Lambda^2 & \Lambda \end{pmatrix}$是正规阵

所以$C^{-1}MC$酉相似于对角阵。

从而M与对角阵相似，故其最小多项式没有重根。