工程矩阵理论试卷

一、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}^{2\times 2}$ 的子集 $\boldsymbol{V}=\left\{\boldsymbol{X}\,\middle|\,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{C}^{2\times 2}\right\}$

1、证明：V 是 $\boldsymbol{C}^{2\times 2}$ 的子空间；

2、求 V 的一组基及 V 的维数；

3、证明 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{V}$，并求 A 在上小题所提基下的坐标；

4、试给出 $\boldsymbol{C}^{2\times 2}$ 的两个不同的子空间 $\boldsymbol{W}$ 及 $\boldsymbol{W}'$，使得 $\boldsymbol{C}^{2\times 2}=\boldsymbol{V}\oplus\boldsymbol{W}=\boldsymbol{V}\oplus\boldsymbol{W}'$

解：1、设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{O}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{kx})=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{O}$$

所以，V 对加法和数乘封闭，故 V 是 $\boldsymbol{C}^{2\times 2}$ 的子空间。

2、设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c} & -\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

$\begin{cases}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=0\\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=0\end{cases}$ $\quad\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{a} & -\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$，所以 V 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，2 维。

3、$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标为 $(1,1)$。

4、扩充 V 的基为 $\boldsymbol{C}^{2\times 2}$ 上的基,扩充出来的向量生成的子空间即为 $\boldsymbol{W}$ 的基。

V 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，找两组与 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关的向量。

容易看出，$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 中的四个列向量线性无关，故 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{L}(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix})$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$中的四个列向量也线性无关，故$\boldsymbol{W}'=\boldsymbol{L}(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$

二、假设 3 维线性空间 V 上的线性变换 f 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 2 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ 0 & 2 & \boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$。问：当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 满足什么条件时，存在 V 的一组基，使得 f 的矩阵是 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & \boldsymbol{d} & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$？

解：

$\because$ $\boldsymbol{J}$ 、 $\boldsymbol{K}$ 为同一线性变换下的矩阵，故 $\boldsymbol{J}\backsim\boldsymbol{K}$ ，有相同的 jordan 标准形，相同的特征值，相同的迹，相同的秩。

根据 $\boldsymbol{J}$ 、 $\boldsymbol{K}$ 迹相同(即主对角元素的和相同)得：$\boldsymbol{d}=-1$，$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2，$$

$\lambda=2$时，$\boldsymbol{r}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})=\boldsymbol{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}=2$，求得$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{K}}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -\boldsymbol{a} & -\boldsymbol{c} \\ 0 & \lambda-2 & -\boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$\lambda=2$时，$\boldsymbol{r}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J})=\boldsymbol{r}\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{a} & -\boldsymbol{c} \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=2$

$\therefore$ $\boldsymbol{b}\neq 0$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}=0$ 或$\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{ac}\neq 0$

三、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}^{2\times 2}$ 上的变换 f 定义如下：$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XA},\forall\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{C}^{2\times 2}$

1、证明：f 是线性变换；

2、求 f 在 $C^{2\times2}$ 的基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵 M；

3、求 f 的值域 $R(f)$ 及核子空间 $K(f)$ 的基及它们的维数；

4、试求 M 的 jordan 标准形，并写出 f 的最小多项式；

5、问：能否找到 $C^{2\times2}$ 的基，使得 f 的矩阵为对角阵？为什么？

解：

1、证明：设 $x,y\in C^{2\times2},k\in F$

$$f(x+y)=(x+y)A=xA+yA=f(x)+f(y)$$

$$f(kx)=(kx)A=k(xA)=kf(x)$$

故 f 关于加法和数乘封闭，f 为线性变换。

2、 $f(X)=XA$

$$f(E_{11})=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\qquad f(E_{12})=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0-&\end{pmatrix}$$

$$f(E_{21})=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\qquad f(E_{22})=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0-&\end{pmatrix}$$

$$f(E_{11}E_{12}E_{21}E_{22})=(E_{11}E_{12}E_{21}E_{22})\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&-1&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}=(E_{11}E_{12}E_{21}E_{22})M$$

3、 $R(f)=L(f(E_{11}),f(E_{12}),f(E_{21}),f(E_{22}))$，$R(f)$ 的基 $\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$，2 维。

$K(f): Mx=$ ，$K(f)$ 的基 $\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$，2 维。

4、$$|\lambda I-M|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1&0\\0&\lambda-1&0&-1\\1&0&\lambda+1&0\\0&1&0&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^4$$

$$J_M=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad m(\lambda)=\lambda^2$$

5、不能找到

四、求下列矩阵的广义逆矩阵：

1、$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac12\\0&1&\frac12\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$A_{3\times 3}=B_{3\times 2}C_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&\frac12\\0&1&\frac12\end{pmatrix}$$

$$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=\begin{pmatrix}1&0&\frac12\\0&1&\frac12\end{pmatrix}^H\left(\begin{pmatrix}1&0&-\frac12\\0&1&-\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\frac12\\0&1&-\frac12\end{pmatrix}^H\right)^{-1}\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&0\end{pmatrix}^H\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&0\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&0\end{pmatrix}^H=$$

2、$B=\alpha^T\beta$，其中 $\alpha=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)$，$\beta=(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)$。

解：$r(B)=r(\alpha^T\beta)=1$

故对 B 进行满秩分解，$B_{n\times n}=M_{n\times 1}N_{1\times n}=\alpha^T\beta$

$$\begin{aligned}A^+&=\beta^T(\beta\beta^T)^{-1}((\alpha^T)^T\cdot\alpha^T)^{-1}\cdot(\alpha^T)^T\\&=\beta^T(\beta\beta^T)^{-1}(\alpha\cdot\alpha^T)^{-1}\cdot\alpha\\&=\frac{1}{<\beta,\beta>\cdot<\alpha,\alpha>}\beta^T\alpha=\frac{1}{<\beta,\beta>\cdot<\alpha,\alpha>}B^T\end{aligned}$$

五、已知矩阵 A 的特征多项式与最小多项式相等，均为$(\lambda-\lambda_0)^4$，给出A, A^2, e^A, e^{A^2}可能的 jordan 标准形。

解：A： 根据矩阵 A 的特征多项式与最小多项式相等，均为$(\lambda-\lambda_0)^4$，可得

$$J_A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$$

A^2： $A^2 \backsim J_A^2 \backsim J_{A^2}$

$$J_A^2=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & 2\lambda_0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^2\end{pmatrix}$$

$$J_{A^2}=\begin{pmatrix}\lambda_0^2 & * & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0^2 & * & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & *\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^2\end{pmatrix}$$

当$\lambda_0=0,$,则$J_{A^2}=\begin{pmatrix}\lambda_0^2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^2\end{pmatrix}$ 或 $J_{A^2}=\begin{pmatrix}\lambda_0^2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^2\end{pmatrix}$

e^A： 令$f(x)=e^x$， $g(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$f(\lambda_0)=g(\lambda_0)$ $\qquad e^{\lambda_0}=a+b\lambda_0+c\lambda_0{}^2+d\lambda_0{}^3$

$f'(\lambda_0)=g'(\lambda_0)$ $\qquad e^{\lambda_0}=b+2c\lambda_0+3d\lambda_0^2$

$f''(\lambda_0)=g''(\lambda_0)$ $\qquad e^{\lambda_0}=2c+6d\lambda$

$f'''(\lambda_0)=g'''(\lambda_0)$ $\qquad e^{\lambda_0}=6d$

求出a,b,c,d代入，求出$f(A)=e^A=g(A)=a+bA+cA^2+dA^3$

e^{A^2}： 令$f(x)=e^{x^2}$， $g(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$f(\lambda_0)=g(\lambda_0)$ $\qquad e^{\lambda_0^2}=a+b\lambda_0+c\lambda_0{}^2+d\lambda_0{}^3$

$f'(\lambda_0)=g'(\lambda_0)$ $\quad 2\lambda_0 e^{\lambda_0^2}=b+2c\lambda_0+3d\lambda_0^2$

$f''(\lambda_0)=g''(\lambda_0)$ $\quad 2e^{\lambda_0^2}(2\lambda_0^2+1)=2c+6d\lambda_0$

$f'''(\lambda_0)=g'''(\lambda_0)$ $\quad 4\lambda_0 e^{\lambda_0}(2\lambda_0^2+2\lambda_0+1)=6d$

求出 a,b,c,d 代入，求出 $f(A)=e^{A^2}=g(A)=a+bA+cA^2+dA^3$

六、矩阵函数：

1、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，求矩阵函数 e^{At}，并给出 e^{At} 的特征多项式。

解：求 e^{At}：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda&0\\0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$$

$$r(I-A)=\begin{vmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=2 \qquad \therefore J_A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$m_A(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$$

令 $f(x)=e^{xt}$，$g(x)=a+bx+cx^2$

$f(0)=g(0)$ $\quad e^0=1=a$

$f(1)=g(1)$ $\quad e^t=a+b+c$

$f'(1)=g'(1)$ $\quad te^t=b+2c$

$a=1$ $\quad b=2e^t-te^t-2$ $\quad c=te^t-e^t$

$$f(A)=e^{At}=g(A)=aI+bA+cA^2=I+(2e^t-te^t-2)A+(te^t-e^t+1)A^2$$

求 e^{At} 的特征多项式：

A 的特征值 λ 为 0,1，$f(A)$ 的特征值即为 $f(\lambda)$，故 e^{At} 的特征值为 $e^{0\cdot t}=1$，$e^{1\cdot t}=e^t$。

2、设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$，试将 A^2e^{At} 表示成关于 A 的次数不超过 2 的多项式，并求 A^2e^{A} 。

解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda-2&-1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$，当 $\lambda=1$ 时，$r(I-A)=r\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}=2$

$\therefore J_A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　　　$m(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$

令　$f(x)=x^2e^{xt}$　　　　$g(x)=a+bx+cx^2$

$f(0)=g(0)$　　　　$0=a$

$f(1)=g(1)$　　　　$e^t=a+b+c$

$f'(1)=g'(1)$　　　　$2xe^{xt}+x^2te^{xt}=b+2cx$　　　　$2e^t+te^t=b+2c$

求出 a,b,c 代入，求出 $f(A)=A^2e^{At}=g(A)=a+bA+cA^2$

七、设 R^3 的子空间 $V=\{(x,y,z)|2x-y+3z=0\}$，$\eta=(1,1,1)$，求 $\eta_0\in V$ 使得 $\|\eta-\eta_0\|=\min\limits_{\xi\in V}\|\eta-\xi\|$。

该题与“工程矩阵理论试卷样卷 10a”第三题类似，为找正投影问题。

八、证明题：

1、证明：若酉矩阵 A 满足 $A^2-3A+2I=0$，则 $A=I$ 。

证明：令 $f(x)=x^2-3x+2$

$\because f(A)=A^2-3A+2I=0$，$\therefore f(x)$ 为 A 的化零多项式，

$\therefore A$ 的特征值一定是 $f(x)$ 的根，$\lambda_1=1$（重数未知），$\lambda_2=2$（重数未知），

设 $J_A=\begin{pmatrix}1&*&&&&\\&\cdots&*&&&\\&&1&0&&\\&&&2&*&\\&&&&\cdots&*\\&&&&&2\end{pmatrix}$　　（* 可能为 0，也可能为 1）

$\because \boldsymbol{A}$为酉矩阵，$\therefore \boldsymbol{A}$一定相似于$\boldsymbol{I}$，即$\boldsymbol{J}_A \backsim \boldsymbol{I}$，由此得$\lambda_2 = 2$的重数为 0，

$\boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 1 & * & \\ & \cdots & * \\ & & 1 \end{pmatrix}$，（＊只可能为 0），$\boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & \cdots & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$

$\because \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$

$\therefore \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{I}\boldsymbol{U}^H = \boldsymbol{I}$　　$\therefore$ 得证。

2、设 H 阵 A，B 均是正定的，证明：AB 的特征值均为正实数。

该题与“工程矩阵理论试卷样卷 10a”第七题第二小题相同。