

工程矩阵理论试卷 (A)

2006 年 10 月

系别 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

一. (20%) 记 $C^{2 \times 2}$ 为复数域 C 上的 2×2 矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域上的

线性空间, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \{X \in C^{2 \times 2} \mid AX = XA\}$ 。

1. 证明 V 是 $C^{2 \times 2}$ 的子空间, 并求 V 的基和维数;

2. 假设 $C^{2 \times 2}$ 的子空间 $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix} \mid \forall a, b \in C \right\}$, 求 W 的基和维数;

3. 求 $V+W, V \cap W$ 的基和维数。

二. (12%) 假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 试求 A 的广义逆矩阵 A^+ 。

三. (16%) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

1. 分别求 A 的特征多项式及 Jordan 标准型;

2. 写出 A 的最小多项式;

3. 将 e^{At} 表示成关于 A 的次数不超过 2 的多项式, 并求 e^{At} 。

四. (20%) 记 $C^{2 \times 2}$ 为复数域 C 上的 2×2 矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域上的

线性空间, 对固定的矩阵 $A, B \in C^{2 \times 2}$, 定义 $C^{2 \times 2}$ 上的变换如下: 对任意 $X \in C^{2 \times 2}$,

$$f(X) = AXB.$$

1. 证明: 对给定的矩阵 $A, B \in C^{2 \times 2}$, f 是 $C^{2 \times 2}$ 上的线性变换;

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 分别求 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 在 f 下的像, 并求 f 在 $C^{2 \times 2}$

的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵 M ;

3. 假设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 f 的值域 $R(f)$ 及核子空间 $K(f)$ 的各一组基及它们的维数;

4. 问: $C^{2 \times 2} = R(f) \oplus K(f)$ 是否成立? 为什么?

五. (12%) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 。

1. 根据 x 的不同的值, 讨论矩阵 A 的所有可能的 Jordan 标准形;

2. 若 A 与 B 是相似的, 问: 参数 x, y 应满足什么条件? 试说明理由。

六. (10%) 假设 R^3 的由 ξ_1, ξ_2 生成的子空间 $V = L(\xi_1, \xi_2)$, 其中

$\xi_1 = (0, 1, 0)$, $\xi_2 = (1, 0, 2)$ 。设 $\eta = (1, 0, 1)$ 。在 V 中求向量 η_0 , 使得

$$\|\eta - \eta_0\| = \min_{\xi \in V} \|\eta - \xi\|。$$

七. (10%)证明题

1. 证明: Hermite 阵和酉矩阵都是正规阵。试举一例说明存在这样的正规阵, 它既不是 Hermite 矩阵, 也不是酉矩阵。

2. 若 n 维列向量 $\alpha \in C^n$ 的长度小于 2, 证明: $4I - \alpha\alpha^H$ 是正定矩阵。