《工程矩阵理论》（第 2 版）张明淳编著，东南大学出版社课后习题答案。

[illegible]

习题 0

1. 计算 n 阶行列式.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b_3 & 0 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & 0 \\ -b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n \end{vmatrix}.$$

解: 若 $c_2, c_3, \dots, c_n$ 全不为 0, 则原式 $=\begin{vmatrix} a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{c_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n \end{vmatrix} = (a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{c_i})c_2c_3\dots c_n.$

若有某个 $c_j=0\ (2\le j\le n)$, 则按第 j 行展开得:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{j-1} & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_n \\ -b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{j-1} & 0 & \cdots & c_{j-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_{j+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{j+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix} = (-1)^{j+2}b_j\begin{vmatrix} a_2 & \cdots & a_{j-1} & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_n \\ c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{j-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{j+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix}$$

$$\underline{\text{按第 } j-1 \text{ 列展开}}\ (-1)^{j+2}b_j(-1)^ja_j\begin{vmatrix} c_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{j-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{j+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix} = a_jb_jc_2\dots c_{j-1}c_{j+1}\dots c_n.$$

2. 化 $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix}$ 为上题的形式计算之, 并求 $\begin{vmatrix} x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix}.$

解: $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix}\times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{cases} (1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i})x_1\cdots x_n, & x_1\cdots x_n\ne 0; \\ x_1\cdots x_{j-1}a_jx_{j+1}\cdots x_n, & x_j=0. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix} = \begin{cases} (1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i})x_1\cdots x_n, & x_1\cdots x_n\ne 0; \\ x_1\cdots x_{j-1}a_jx_{j+1}\cdots x_n, & x_j=0. \end{cases}$$

3. 由第 2 题的启发求 $\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+n \end{vmatrix}.$

解: $\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & a_2^2+2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+n \end{vmatrix}\times(-a_1)\ \times(-a_2)\ \cdots\ \times(-a_n)$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i})n!.$$

4. $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}=|i-j|$, 求 $\det A$.

[illegible]

解: $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}\times(-1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \dots = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}\times(-1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}\times(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{1+n}(n-1)2^{n-2}.$

5. $d_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a+b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a+b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$. 试证: $d_n-ad_{n-1}=b^n$, $d_n-bd_{n-1}=a^n$. 由此求 d_n.

解: 原式 $= \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a+b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a+b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a+b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$

$$= ad_{n-1} + \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a+b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$= ad_{n-1} + b\begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a+b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= ad_{n-1} + b\begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= ad_{n-1} + b^2\begin{vmatrix} b & a & \cdots & 0 & 0 \\ b & a+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a+b & a \\ 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} = \dots = ad_{n-1}+b^n.$$

互换 a, b 可得 $d_n = bd_{n-1}+a^n$.

故 $\begin{cases} d_n-ad_{n-1}=b^n, \\ d_n-bd_{n-1}=a^n. \end{cases}$

若 $a\ne b$, 则 $d_n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$.

若 $a=b$,

则 $d_n = ad_{n-1}+a^n = a(ad_{n-2}+a^{n-1})+a^n = a^2d_{n-2}+2a^n = \dots = a^{n-1}d_1+(n-1)a^n = (n+1)a^n$.

6. $A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$, 求 AA^{T} 及 $\det A$.

解: $AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$, 其中 $k=a^2+b^2+c^2+d^2$.

由此可得 $(\det A)^2=\det(AA^{\mathrm{T}})=k^4$.

又因为 $\det A$ 中 a^4 的系数为 1, 所以 $\det A=k^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

7. 设 $A=(a_{ij})_{4\times 7}$, 其子矩阵 $B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{26} \\ a_{41} & a_{44} & a_{46} \end{bmatrix}$. 求 C 与 D 使 $B=CAD$.

解: 令 $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$,

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_5=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_6=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_7=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

则 $e_iA=(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}, a_{i6}, a_{i7})$, $e_iA\varepsilon_j=a_{ij}$.

令 $C=\begin{bmatrix} e_2 \\ e_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D=[\varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_6]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $B=CAD$.

8. 设 n 阶方阵 $A=(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$, 求证: $A^k=\begin{bmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{bmatrix}$ $(k=1, 2, \dots, n-1)$, $A^n=I_n$.

证明: 因为用 $A=(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$ 右乘一个矩阵 $B_{n\times n}$ 相当于把 $B_{n\times n}$ 的第 n 列调到第 1 列(原来的第 1 列至第 $n-1$ 列向后平移),

由此可见 $A=(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})=\begin{bmatrix} O & I_{n-1} \\ 1 & O \end{bmatrix}$, $A^2=\begin{bmatrix} O & I_{n-2} \\ I_2 & O \end{bmatrix}$, …, $A^{n-1}=\begin{bmatrix} O & 1 \\ I_{n-1} & O \end{bmatrix}$, $A^n=I_n$.

9. (1) 记 $e=e_1+e_2+\dots+e_n$, $Ae=(s_1, s_2, \dots, s_n)^{\mathrm{T}}$, 问 $s_i=?\ (1\le i\le n)$.

(2) 已知 n 阶方阵 A 的每行元素和为 a, 求证 A^k 的每行元素和为 a^k, k 为正整数, 且当 A 可逆时, 以上命题对 $k=-1$ 也成立.

解(1) $e=e_1+e_2+\ldots+e_n$, $Ae=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}\\a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}\\\vdots\\a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}\end{bmatrix}$,

$s_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ (1\le i\le n)$.

证明(2) 因为 n 阶方阵 A 的每行元素和为 a，故由(1)可知 $Ae=\begin{bmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{bmatrix}=ae$.

进而有 $A^2e=A(Ae)=A(ae)=a(Ae)=a^2e$.

对于任意正整数 k，依次类推可得 $A^ke=a^ke$. 可见 A^k 的每行元素和为 a^k.

当 A 可逆时, $a\neq 0$. (否则 $a=0\Rightarrow Ae=ae=0\Rightarrow e=A^{-1}0=0$, 矛盾!)

进而由 $Ae=ae$ 可得 $A^{-1}e=a^{-1}e$, 可见 A^{-1} 的每行元素和为 a^{-1}.

有同学直接看 $k=-1$ 代入 $A^ke=a^ke$.

10. n 阶 Frobenius 矩阵 $F=(e_2,e_3,\ldots,e_n,-\beta)$, 其中 $\beta=(a_n,a_{n-1},\ldots,a_1)^T$.

(1) 求证 $B=F^n+a_1F^{n-1}+\ldots+a_nI_n=O$;

(2) 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 F 乘积可交换, 证明 $A=a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I$.

证明(1) 由条件可知 $Fe_1=e_2, Fe_2=e_3,\ldots,Fe_{n-1}=e_n, Fe_n=-\beta$.

进而有 $F^2e_1=Fe_2=e_3,\ldots,F^{n-1}e_1=e_n, F^ne_1=-\beta$.

故 $Be_1=(F^n+a_1F^{n-1}+\ldots+a_nI_n)e_1=-\beta+a_1e_n+\ldots+a_ne_1=-\beta+\beta=0$.

于是 $Be_2=BFe_1=FBe_1=F0=0,\ldots,Be_n=BFe_{n-1}=FBe_{n-1}=F0=0$.

因此 $B=BI=B(e_1,e_2,\ldots,e_n)=(Be_1,Be_2,\ldots,Be_n)=O$.

(2) $(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_1=a_{n1}F^{n-1}e_1+\ldots+a_{21}Fe_1+a_{11}e_1=a_{n1}e_n+\ldots+a_{21}e_2+a_{11}e_1$
$=(a_{11},a_{21},\ldots,a_{n1})^T=Ae_1$,

对于 $1<k\le n$, 设 $(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_{k-1}=Ae_{k-1}$, 则

$$\begin{aligned}(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_k&=(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)Fe_{k-1}\\&=F(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_{k-1}\\&=FAe_{k-1}=AFe_{k-1}=Ae_k.\end{aligned}$$

有同学做对

由数学归纳法原理可知, $(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_k=Ae_k$ 对于任意的 $1\le k\le n$ 都成立.

所以 $A=A(e_1,e_2,\ldots,e_n)=(Ae_1,Ae_2,\ldots,Ae_n)=(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)(e_1,e_2,\ldots,e_n)$
$=a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I$.

11. 称如下形式的矩阵为循环阵

$$\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&\cdots&a_{n-3}&a_{n-2}\\a_{n-2}&a_{n-1}&a_0&\cdots&a_{n-4}&a_{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}&a_0\end{bmatrix}$$

试证: 两个循环阵之积仍为循环阵.

证明: 设 n 阶方阵 $A=(e_n,e_1,\ldots,e_{n-1})$, 由第 8 题可知 $A^k=\begin{bmatrix}O&I_{n-k}\\I_k&O\end{bmatrix}(k=1,2,\ldots,n-1)$, $A^n=I_n$.

① 有同学直接用两个矩阵相乘
② 有同学用两个相同的循环阵之积.

设 $M=\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&\cdots&a_{n-3}&a_{n-2}\\a_{n-2}&a_{n-1}&a_0&\cdots&a_{n-4}&a_{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}&a_0\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix}b_0&b_1&b_2&\cdots&b_{n-2}&b_{n-1}\\b_{n-1}&b_0&b_1&\cdots&b_{n-3}&b_{n-2}\\b_{n-2}&b_{n-1}&b_0&\cdots&b_{n-4}&b_{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\b_2&b_3&b_4&\cdots&b_0&b_1\\b_1&b_2&b_3&\cdots&b_{n-1}&b_0\end{bmatrix}$,

则 $M=a_0I+a_1A+a_2A^2+\ldots+a_{n-1}A^{n-1}$, $N=b_0I+b_1A+b_2A^2+\ldots+b_{n-1}A^{n-1}$.

而且 MN 仍可写成 $c_0I+c_1A+c_2A^2+\ldots+c_{n-1}A^{n-1}$ 的形式.

所以 $MN=\begin{bmatrix}c_0&c_1&c_2&\cdots&c_{n-2}&c_{n-1}\\c_{n-1}&c_0&c_1&\cdots&c_{n-3}&c_{n-2}\\c_{n-2}&c_{n-1}&c_0&\cdots&c_{n-4}&c_{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\c_2&c_3&c_4&\cdots&c_0&c_1\\c_1&c_2&c_3&\cdots&c_{n-1}&c_0\end{bmatrix}$ 仍为循环阵.

12. 试证(1) Sherman-Morrison 公式. 设 B 为 n 阶可逆阵, $u,v\in\mathbb{C}^n$ 且 $r=1+v^TB^{-1}u\neq 0$, 则 $A=B+uv^T$ 可逆, 且 $A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}uv^TB^{-1}$;

(2) 若 B 与 $B+uv^T$ 可逆, 其中 $u,v\in\mathbb{C}^n, B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则 $1+v^TB^{-1}u\neq 0$;

(3) 设 B^{-1} 已知, $v\in\mathbb{C}^n$, $A=B+e_kv^T$ (即 A 与 B 除第 k 行外, 其余完全相同)可逆, 试用 Sherman-Morrison 公式求 A^{-1} (称此法为修正法).

证明: (1) $A(B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}uv^TB^{-1})=(B+uv^T)(B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}uv^TB^{-1})$

$$\begin{aligned}&=I-\frac{1}{r}uv^TB^{-1}+uv^TB^{-1}-\frac{1}{r}uv^TB^{-1}uv^TB^{-1}\\&=I-\frac{1}{r}uv^TB^{-1}+uv^TB^{-1}-\frac{1}{r}(v^TB^{-1}u)(uv^TB^{-1})\\&=I-\frac{1}{r}(1+v^TB^{-1}u)uv^TB^{-1}+uv^TB^{-1}\\&=I-uv^TB^{-1}+uv^TB^{-1}=I.\end{aligned}$$

有同学把此题拆成 [illegible] 可逆

故 $A=B+uv^T$ 可逆, 且 $A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}uv^TB^{-1}$.

(2) 当 $u=0$ 时, $1+v^TB^{-1}u=1\neq 0$;

当 $u\neq 0$ 时, $(B+uv^T)B^{-1}u=u+uv^TB^{-1}u=u+u(v^TB^{-1}u)=u+(v^TB^{-1}u)u$
$=(1+v^TB^{-1}u)u$,

有近 30% 的同学不会

可见 $1+v^TB^{-1}u$ 为可逆矩阵 $(B+uv^T)B^{-1}$ 的特征值, 故 $1+v^TB^{-1}u\neq 0$.

(3) 在 Sherman-Morrison 公式中取 $u=e_k$, $r=1+v^TB^{-1}e_k$, 则 $A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}e_kv^TB^{-1}$.

13. (1) 已知 A,B 满足 $A+B=AB$, 证明 $A-I$ 可逆, 并求其逆.

(2) 已知 $A^2=A$, 证明 $A-2I$ 可逆, 并求其逆.

证明: (1) $A+B=AB\Rightarrow AB-A-B=O\Rightarrow (A-I)(B-I)=AB-A-B+I=I$
$\Rightarrow A-I$ 可逆而且 $(A-I)^{-1}=B-I$.

(2) $A^2=A\Rightarrow (A-2I)(A+I)=A^2-A-2I=-2I\Rightarrow A-2I$ 可逆而且 $(A-2I)^{-1}=-\frac{1}{2}(A+I)$.

14. 已知 $A^3=2I$, $B=A^2-2A+2I$, 证明 B 可逆, 并求其逆.

证明: $A^3=2I\Rightarrow$ ① $B=A^2-2A+2I=A^2-2A+A^3=A(A+2I)(A-I)$;

② $A^{-1}=\frac{1}{2}A^2$;

③ $(A+2I)(A^2-2A+4I)=A^3+8I=10I\Rightarrow (A+2I)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4I)$;

④ $(A-I)(A^2+A+I)=A^3-I=I\Rightarrow (A-I)^{-1}=A^2+A+I$,

14. 有同学直接凑出了 B^{-1}.

$\Rightarrow B=A^2-2A+2I$ 可逆而且

$$B^{-1}=(A-I)^{-1}(A+2I)^{-1}A^{-1}=(A^2+A+I)\frac{1}{10}(A^2-2A+4I)\frac{1}{2}A^2$$
$$=\frac{1}{10}(A^2+3A+4I).$$

【注】本题也可以用"待定系数法". 令 $B^{-1}=aA^2+bA+cI$,

则 $I=(A^2-2A+2I)(aA^2+bA+cI)=aA^4+(b-2a)A^3+(2a-2b+c)A^2+(2b-2c)A+2cI$
$=aA^4+(b-2a)A^3+(2a-2b+c)A^2+(2b-2c)A+2cI$
$=(2a-2b+c)A^2+(2a+2b-2c)A+(-4a+2b+2c)I$,

故 $\begin{cases}2a-2b+c=0,\\2a+2b-2c=0,\\-4a+2b+2c=1.\end{cases}$ 由此可得 $a=\frac{1}{10}, b=\frac{3}{10}, c=\frac{2}{5}$.

15. 证明: 秩为 r 的矩阵可以分解为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证明: 设矩阵 A 的秩为 r, 当 $r=0$ 时, $A=O$, 此时结论显然成立. 若 r 为一个正整数, 则存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q.$$

有同学把两边看成矩阵做错了.

其中 I_r 为 r 阶单位矩阵. 对于 $i=1,2,\ldots,r$, 令 B_i 为 r 阶对角矩阵, 其对角线上第 i 个元素为 1, 其余元素为 0, 即

$$B_i=\mathrm{diag}(0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0),$$

少部分同学不会.

再令 $U_i=P\begin{pmatrix}B_i&O\\O&O\end{pmatrix}Q$, 则每个 U_i 的秩都为 1, 而且

$$A=P\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q=P(\begin{pmatrix}B_1&O\\O&O\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}B_r&O\\O&O\end{pmatrix})Q=U_1+\ldots+U_r.$$

16. 设 A 为 r 阶方阵, B 是秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵(称为行满秩矩阵). 证明:

(1) 若 $AB=O$, 则 $A=O$; (2) 若 $AB=B$, 则 $A=I$.

证明: B 是秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵 $\Rightarrow$ 存在 r 阶可逆阵 P 使得 $PB=(I_r,C)$ —— B 的行最简形

(1) $AB=O\Rightarrow AP^{-1}PB=O\Rightarrow AP^{-1}(I_r,C)=O\Rightarrow (AP^{-1},AP^{-1}C)=O\Rightarrow AP^{-1}=O$
$\Rightarrow A=O$.

(2) $AB=B\Rightarrow AP^{-1}(I_r,C)=P^{-1}(I_r,C)\Rightarrow AP^{-1}=P^{-1}\Rightarrow A=I$.

【注】(1)也可以根据 B 的行向量组线性无关来证明.

(2) $AB=B\Rightarrow (A-I)B=O\Rightarrow A-I=O\Rightarrow A=I$.

17. 证明: 任一方阵都可表示为可逆阵与幂等阵(平方等于自身)直积.

证明: 设 n 阶方阵 A 的秩为 r, 则存在可逆阵 P,Q 使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q=PQQ^{-1}\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q,$$

有同学把题意理解错了, 直接说 $A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$, 其中 P,Q 可逆, $\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 幂等

其中 PQ 为可逆阵, $Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$ 为幂等阵.

18. 求下列矩阵的满秩分解:

$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\1&1&2&4\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\3&1&2&1\\4&1&3&2\end{bmatrix}$.

解: (1) 因为 $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ 是行满秩矩阵, 所以 $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ 的满秩分解可取为

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\1&1&2&4\end{bmatrix}\times(-1)\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&-1&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 由此可见

有同学算错了(1)

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\1&1&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

剩下的不会做满秩分解, 不少同学不会

故 $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\1&1&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\3&1&2&1\\4&1&3&2\end{bmatrix}\times(-3)\ \times(-4)\to\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&-3&3&6\end{bmatrix}\times(-\frac{3}{2})\to\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 由此可见

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\3&1&2&1\\4&1&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

故 $\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\3&1&2&1\\4&1&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\\4&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\end{bmatrix}$.

19. (1) 若 A 可逆, 试证: 秩$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=$ 秩$(A)+$ 秩$(D-CA^{-1}B)$;

(2) 设 C 为 $k\times n$ 阵, B 为 $n\times k$ 阵, 试证: $n+$ 秩$(I_k-CB)=k+$ 秩(I_n-BC).

证明: (1) $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\xrightarrow{-CA^{-1}}\begin{pmatrix}A&B\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-A^{-1}B)}\begin{pmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$, 由此可见

秩$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=$ 秩$\begin{pmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}=$ 秩$(A)+$ 秩$(D-CA^{-1}B)$.

(2) $\begin{pmatrix}I_n&B\\C&I_k\end{pmatrix}\xrightarrow{-C}\begin{pmatrix}I_n&B\\O&I_k-CB\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_n&O\\O&I_k-CB\end{pmatrix}$,

另一方面, $\begin{pmatrix}I_n&B\\C&I_k\end{pmatrix}\xrightarrow{-B}\begin{pmatrix}I_n-BC&O\\C&I_k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_n-BC&O\\O&I_k\end{pmatrix}$,

由此可见

(= 秩(A,AA) = 秩[A …)

$$n+秩(I_k-CB)=秩\begin{pmatrix}I_n & O\\ O & I_k-CB\end{pmatrix}=秩\begin{pmatrix}I_n & B\\ C & I_k\end{pmatrix}=秩\begin{pmatrix}I_n-BC & O\\ O & I_k\end{pmatrix}=k+秩(I_n-BC).$$

20. 设 A 为 $s\times n$ 阵, B 为 $s\times t$ 阵, 试证: $AX=B$ 有解的充要条件为秩(A)=秩(A,B).

证明: (必要性) ~~若 $AX=B$ 有解, 则 B 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示,~~ 有同学不会证下面的

~~故~~秩$(A)\le$ 秩(A,B) $\le$ 秩(A), 进而秩(A)=秩(A,B).

(充分性) 若秩(A)=秩(A,B), 则对于 B 的任意一列向量 B_i,

有秩(A) = 秩$(A,B)\le$ 秩$(A,B_i)\le$ 秩(A), 秩(A,b) =

故秩(A) = 秩(A,B_i), 因而 $Ax=B_i$ 有解.

所以 $AX=B$ 有解.

21. 试证: 幂等阵 A (即 $A^2=A$)有秩(A)+秩$(I_n-A)=n$.

证明: 一方面, $A+(I_n-A)=I_n\Rightarrow$ 秩(A)+秩$(I_n-A)\ge$ 秩$[A+(I_n-A)]$ = 秩$(I_n)=n$.

另一方面, $A^2=A\Rightarrow A(I_n-A)=A-A^2=O\Rightarrow$ 秩(A)+秩$(I_n-A)\le n$.

综上可得秩(A)+秩$(I_n-A)=n$.

22. 试证: 若 n 阶方阵 A 满足秩(A)+秩$(I_n-A)=n$, 则 $A^2=A$.

证明: 设$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s$是 $Ax=0$ 的一个基础解系; $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$是$(I_n-A)x=0$ 的一个基础解系,

则$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s$是 A 的对应于特征值 0 的特征向量, 很有同学不会

$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$是 A 的对应于特征值 1 的特征向量,

可见$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$线性无关.

另一方面 $A(I_n-A)\xi_i=(I_n-A)A\xi_i=0, A(I_n-A)\eta_j=0, \forall 1\le i\le s, 1\le j\le t$.

可见$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$都是 $A(I_n-A)x=0$ 的解.

因此 $n-$ 秩$[A(I_n-A)]\ge s+t=[n-$ 秩$(A)]+[n-$ 秩$(I_n-A)]$.

由此可得秩$[A(I_n-A)]\le$ 秩(A)+秩$(I_n-A)-n=0$.

故 $A(I_n-A)=O$, 即 $A^2=A$.

证明: 设秩$(A)=r$ 且 $A=GH$ 为 A 的一个满秩分解, 其中 G 为 $n\times r$ 阵, H 为 $r\times n$ 阵.

由第 19 题(2)可知, $n+$ 秩$(I_r-HG)=r+$ 秩(I_n-A).

由秩(A)+秩$(I_n-A)=n$ 得秩$(I_r-HG)=0$, 故 $I_r=HG$.

于是 $A^2=GHGH=GI_rH=GH=A$.

23. 若 $A^2=I$, 则称 A 为对合阵. 试证 n 阶方阵 A 为对合阵的充要条件为

$$秩(I_n+A)+秩(I_n-A)=n.$$

证明: (必要性) $A^2=I\Rightarrow(I_n+A)(I_n-A)=I-A^2=O\Rightarrow$ 秩(I_n+A)+秩$(I_n-A)\le n$.

另一方面, $(I_n+A)+(I_n-A)=2I_n\Rightarrow$ 秩(I_n+A)+秩$(I_n-A)\ge$ 秩$(2I_n)=n$.

故秩(I_n+A)+秩$(I_n-A)=n$.

(充分性) 令 $B=\frac{1}{2}(I_n+A)$, 则 $I_n-B=\frac{1}{2}(I_n-A)$.

秩(I_n+A)+秩$(I_n-A)=n\Rightarrow$ 秩(B)+秩$(I_n-B)=n$.

于是由第 22 题得 $B^2=B$. 由此可得 $A^2=I$.

很多同学不会证 必要性

①充分性 也有很多同学不会

因为不清楚什么是充分性, 什么是必要性 (搞错方向)

24. 设 A,B 为 n 阶对合阵, 且 $\det(AB)<0$, 试证: 存在非零列向量 X 使 $BAX+X=0$.

证明: $\det(I+BA)=\det(B^2+BA)=\det B\det(B+A)=\det B\det(BA^2+A)=\det B\det(BA+I)\det A$

$=\det A\det B\det(BA+I)=\det(AB)\det(BA+I)=\det(AB)\det(I+BA)$.

由此可得 $[1-\det(AB)]\det(I+BA)=0$.

又因为 $\det(AB)<0$, 所以 $\det(I+BA)=0$.

因而$(I+BA)x=0$ 有非零解, 故存在非零列向量 X 使 $BAX+X=0$.

25. 设 n 阶方阵 $B_1,\ldots,B_k$满足$\prod_{i=1}^{k}B_i=O$, 试证: $\sum_{i=1}^{k}r(B_i)\le(k-1)n$. 并举一个等号成立的例子.

证明: 由$\begin{pmatrix}A & O\\ I & B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}O & -AB\\ I & B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}O & -AB\\ I & O\end{pmatrix}$可见

$$n+r(AB)=r\begin{pmatrix}O & -AB\\ I & O\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & O\\ I & B\end{pmatrix}\ge r(A)+r(B).$$

反复使用该结论可得 $(k-1)n+r(\prod_{i=1}^{k}B_i)\ge\sum_{i=1}^{k}r(B_i)$.

又因为$\prod_{i=1}^{k}B_i=O$, 所以$\sum_{i=1}^{k}r(B_i)\le(k-1)n$.

举例: $n=4, k=3, B_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

则 $B_1B_2B_3=O$, 而且$\sum_{i=1}^{k}r(B_i)=3+2+3=8=(k-1)n$.

1. 下列集合是否是指定数域上的线性空间, 证明之.

(1) $V=\{(n_1,n_2,\ldots,n_k)\mid n_i$ 为整数$\}$, 数域为实数域$\mathbb{R}$, 加法与数乘为通常的运算.

答: 不是. 因为对于$\alpha=(1,0,\ldots,0)\in V$, 以及 $a=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$, $a\alpha=(\frac{1}{2},0,\ldots,0)\notin V$.

(2) $V=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$, 数域为$\mathbb{R}$, 加法$\oplus$与数乘$\otimes$定义为

$$(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(x_1+2y_1,x_2+2y_2),$$
$$k\otimes(x_1,x_2)=(kx_1,2kx_2).$$

答: 不是. 因为对于$\alpha=(0,1)\in V$, $1\otimes\alpha=1\otimes(0,1)=(0,2)\ne(0,1)=\alpha$.

(3) $V=\mathbb{R}^+$, 数域为$\mathbb{R}$, 加法$\oplus$与数乘$\otimes$定义为

$$a\oplus b=ab, k\otimes a=a^k.$$

答: 是. 证明如下:

对于任意的 $a,b\in\mathbb{R}^+$, 以及任意的 $k\in\mathbb{R}$, 有 $a\oplus b=ab$, $k\otimes a=a^k\in\mathbb{R}^+$, 而且

① 对于任意的 $a,b\in\mathbb{R}^+$, 有 $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$.

② 对于任意的 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, 有$(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=(ab)c=a(bc)=a\oplus(bc)=a\oplus(b\oplus c)$,

③ 存在 $1\in\mathbb{R}^+$, 使得对于任意的 $a\in\mathbb{R}^+$, 有 $a\oplus 1=a\cdot 1=a$,

④ 对于任意的 $a\in\mathbb{R}^+$, 存在 $b=a^{-1}\in\mathbb{R}^+$ 使得 $a\oplus b=ab=aa^{-1}=1$.

⑤ 对于任意的 $a\in\mathbb{R}^+$, 有 $1\otimes a=a^1=a$,

⑥ 对于任意的 $a\in\mathbb{R}^+$, 以及任意的 $k,l\in\mathbb{R}$, 有

$$k\otimes(l\otimes a)=k\otimes a^l=(a^l)^k=a^{kl}=(k\cdot l)\otimes a,$$

⑦ 对于任意的 $a\in\mathbb{R}^+$, 以及任意的 $k,l\in\mathbb{R}$, 有

$$(k+l)\otimes a=a^{(k+l)}=a^k\cdot a^l=a^k\oplus a^l=k\otimes a\oplus l\otimes a,$$

⑧ 对于任意的 $a,b\in\mathbb{R}^+$, 以及任意的 $k\in\mathbb{R}$, 有

$$k\otimes(a\oplus b)=k\otimes(ab)=(ab)^k=a^k\cdot b^k=a^k\oplus b^k=k\otimes a\oplus k\otimes b.$$

(4) $V=\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$, 数域为$\mathbb{R}$, 加法$\oplus$与数乘$\otimes$定义为

$$(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1),$$
$$k\otimes(x_1,x_2)=(kx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2)\quad(\forall x_1,x_2,y_1,y_2,k\in\mathbb{R}).$$

答: 是. 证明如下: 有同学忘记

对于任意的$(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 以及任意的 $k\in\mathbb{R}$, 有

$(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)$, $k\otimes(x_1,x_2)=(kx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2)\in\mathbb{R}^2$, } 一部分.

而且

① 对于任意的$(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 有

$(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)=(y_1+x_1,y_2+x_2+y_1x_1)=(y_1,y_2)\oplus(x_1,x_2)$,

② 对于任意的$(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$\begin{aligned}[(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)]\oplus(z_1,z_2)&=(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)\oplus(z_1,z_2)\\&=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+x_1y_1+z_2+x_1z_1+y_1z_1)\\&=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2+y_1z_1+x_1y_1+x_1z_1)\\&=(x_1,x_2)\oplus(y_1+z_1,y_2+z_2+y_1z_1)\\&=(x_1,x_2)\oplus[(y_1,y_2)\oplus(z_1,z_2)],\end{aligned}$$

③ 存在$(0,0)\in\mathbb{R}^2$, 使得对于任意的$(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$(x_1,x_2)\oplus(0,0)=(x_1+0,x_2+0+x_1 0)=(x_1,x_2),$$

④ 对于任意的$(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, 存在$(-x_1,x_1^2-x_2)\in\mathbb{R}^2$使得

$$(x_1,x_2)\oplus(-x_1,x_1^2-x_2)=(x_1-x_1,x_2+x_1^2-x_2+x_1(-x_1))=(0,0).$$

有些同学不会写 负元!

⑤ 对于任意的$(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, 有 $1\otimes(x_1,x_2)=(1x_1,1x_2+\frac{1(1-1)}{2}x_1^2)=(x_1,x_2)$,

⑥ 对于任意的$(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, 以及任意的 $k,l\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}k\otimes[l\otimes(x_1,x_2)]&=k\otimes(lx_1,lx_2+\frac{l(l-1)}{2}x_1^2)\\&=(klx_1,klx_2+k\frac{l(l-1)}{2}x_1^2+\frac{k(k-1)}{2}(lx_1)^2)\\&=(klx_1,klx_2+\frac{kl(kl-1)}{2}x_1^2)=(kl)\otimes(x_1,x_2),\end{aligned}$$

⑦ 对于任意的$(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, 以及任意的 $k,l\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}(k+l)\otimes(x_1,x_2)&=((k+l)x_1,(k+l)x_2+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}x_1^2)\\&=(kx_1+lx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2+lx_2+\frac{l(l-1)}{2}x_1^2+klx_1^2)\\&=(kx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2)\oplus(lx_1,lx_2+\frac{l(l-1)}{2}x_1^2)\\&=k\otimes(x_1,x_2)\oplus l\otimes(x_1,x_2),\end{aligned}$$

⑧ 对于任意的$(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 以及任意的 $k\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}k\otimes[(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)]&=k\otimes(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)\\&=(k(x_1+y_1),k(x_2+y_2+x_1y_1)+\frac{k(k-1)}{2}(x_1+y_1)^2)\\&=(kx_1+ky_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2+ky_2+\frac{k(k-1)}{2}y_1^2+k^2x_1y_1)\\&=(kx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2)\oplus(ky_1,ky_2+\frac{k(k-1)}{2}y_1^2)\\&=k\otimes(x_1,x_2)\oplus k\otimes(y_1,y_2).\end{aligned}$$

2. 设α为线性空间 $V(F)$中的非零向量. 若 F 中数 k_1 与 k_2 不等, 证明 $k_1\alpha\ne k_2\alpha$.

(由于任一数域中均含无穷多个数, 故任一有非零向量的线性空间含有无穷多个向量.)

有些同学不会做

证明: 首先证明对于任意的非零向量$\alpha\in V(F)$, 以及 $k\in F$, 若 $k\alpha=\theta$, 则 $k=0$.

事实上, 假若 $k\ne0$, 则有$\alpha=1\alpha=(k^{-1}k)\alpha=k^{-1}(k\alpha)=k^{-1}\theta=\theta$, 这与$\alpha\ne\theta$矛盾!

下面证明 $k_1\alpha\ne k_2\alpha$.

假若 $k_1\alpha=k_2\alpha$, 则$(k_1-k_2)\alpha=k_1\alpha-k_2\alpha=\theta$, 而$\alpha\ne\theta$, 故 $k_1-k_2=0$, 即 $k_1=k_2$,

但这与 $k_1\ne k_2$矛盾! 可见 $k_1\alpha\ne k_2\alpha$.

3. 证明: 若$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性无关, $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta$线性相关, 则$\beta$可经$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性表出, 且系数唯一.

有同学未证唯一性

证明: 因为$\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta$线性相关,

所以存在不全为零的数 $k_1,\ldots,k_r,k_{r+1}$ 使得 $k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=\theta$.

假若 $k_{r+1}=0$, 则 $k_1,\ldots,k_r$不全为零, 而且 $k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=\theta$.

但这与"$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性无关"矛盾!

可见 $k_{r+1}\ne0$.

于是由 $k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=\theta$可得$\beta=-\frac{k_1}{k_{r+1}}\alpha_1-\ldots-\frac{k_r}{k_{r+1}}\alpha_r$

可见β可经$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性表出.

若$\beta=k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=l_1\alpha_1+\ldots+l_r\alpha_r$,

则$(k_1-l_1)\alpha_1+\ldots+(k_r-l_r)\alpha_r=(k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r)-(l_1\alpha_1+\ldots+l_r\alpha_r)=\theta$.
由$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性无关可得 $k_1-l_1=\ldots=k_r-l_r=0$, 即 $k_1=l_1,\ldots,k_r=l_r$.
可见β经$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性表出的系数唯一.

4. 求下列线性空间的维数及一组基.

(1) $F^{n\times n}$中全体对称阵所构成F上的线性空间V.

解: 对于任意的$1\le i<j\le n$, 令$A_{ij}=E_{ij}+E_{ji}$, $A_{ii}=E_{ii}$, 其中诸E_{ij}为$F^{n\times n}$中的矩阵单位.
则$\{A_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}\subseteq V$, 而且有

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}A_{ij}=O\Rightarrow a_{ij}=0\,(1\le i\le j\le n),$$

可见$\{A_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$线性无关. 不少一半同学未说明 线性无关.

另一方面, 对于任意的$A\in V$, 可设$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$,

于是有$A=\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}A_{ij}$, 可见$A$能由$\{A_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$线性表示.

综上所述, $\{A_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$是$V$的一组基, 因而$\dim V=1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) $\mathbb{C}^{n\times n}$中全体上三角阵所构成$\mathbb{C}$上的线性空间V.

解: $\{E_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}\subseteq V$, 而且有

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}E_{ij}=O\Rightarrow a_{ij}=0\,(1\le i\le j\le n),$$

可见$\{E_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$线性无关.

另一方面, 对于任意的$A\in V$, 可设$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$,

于是有$A=\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}E_{ij}$, 可见$A$能由$\{E_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$线性表示.

综上所述, $\{E_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$是$V$的一组基, 因而$\dim V=1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(3) $V(F)=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{2n-1},x_{2n})\mid x_2=x_4=\ldots=x_{2n},\forall x_i\in F\}$. 有同学不会求基 维数

解: 对于任意的$1\le i\le 2n$,
令$e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)\in V(F)$, 其中第$i$分量为1, 其余分量为0.
令$e=e_2+e_4+\ldots+e_{2n}$. 则

$$a_1e_1+a_3e_3+\ldots+a_{2n-1}e_{2n-1}+ae=(a_1,a,a_3,\ldots,a_{2n-1},a)=0$$
$$\Rightarrow a_1=a_3=\ldots=a_{2n-1}=a=0,$$

可见$\{e_1,e_3,\ldots,e_{2n-1},e\}$线性无关.
另一方面, 对于任意的$\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_{2n-1},x_{2n})\in V(F)$,
有$\alpha=x_1e_1+x_3e_3+\ldots+x_{2n-1}e_{2n-1}+x_2e$. 可见$\alpha$能由$\{e_1,e_3,\ldots,e_{2n-1},e\}$线性表示.
综上所述, $\{e_1,e_3,\ldots,e_{2n-1},e\}$是$V(F)$的一组基, 因而$\dim V(F)=n+1$.

(4) $A=\mathrm{diag}(1,\omega,\omega^2)$, 其中$\omega^3=1$, 但$\omega\ne1$, 且$V(\mathbb{R})=\{f(A)\mid\forall f(x)\in\mathbb{R}[x]\}$.

解: $A=\mathrm{diag}(1,\omega,\omega^2)$, $A^2=\mathrm{diag}(1,\omega^2,\omega)$, $A^3=\mathrm{diag}(1,1,1)=I$.

$$x_1I+x_2A+x_3A^2=\mathrm{diag}(x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2\omega+x_3\omega^2,\ x_1+x_2\omega^2+x_3\omega)=O$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=0\\x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0,$$

可见$\{I,A,A^2\}$线性无关.
另一方面, 对于任意的$f(x)\in\mathbb{R}[x]$,
可设$f(x)=q(x)(x^3-x)+r(x)$, 其中$r(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}[x]$,
于是$f(A)=q(A)(A^3-I)+r(A)=r(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2$,
可见$f(A)$能由$\{I,A,A^2\}$线性表示.
综上所述, $\{I,A,A^2\}$是$V(\mathbb{R})$的一组基, 因而$\dim V(\mathbb{R})=3$.

5. 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

(1) 若$V=\{B\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid AB=BA\}$, 证明$V$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的子空间.

证明: 首先, 由$AI=IA$可知$I\in V$, 因而$V\ne\varnothing$.
很多同学未证非空! 其次, 对于任意的$B,C\in V$, $a,b\in\mathbb{C}$, 有

$$A(aB+bC)=aAB+bAC=aBA+bCA=(aB+bC)A,$$

故$aB+bC\in V$.
综上所述, V是$\mathbb{C}^{n\times n}$的子空间.

(2) 若$A=I$, 求(1)中的V.

解: 若$A=I$, 则对于任意的$B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 有$AB=AI=IA=BA$, 即$B\in V$.
因此$\mathbb{C}^{n\times n}\subseteq V$, 进而有$V=\mathbb{C}^{n\times n}$.

(3) 若$A=\mathrm{diag}(1,2,\ldots,n)$, 求(1)中$V$的一组基.

解: 若$A=\mathrm{diag}(1,2,\ldots,n)$, 则对于任意的$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,

$$B\in V\Leftrightarrow AB=BA\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\2b_{21}&2b_{22}&\cdots&2b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\nb_{n1}&nb_{n2}&\cdots&nb_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&2b_{12}&\cdots&nb_{1n}\\b_{21}&2b_{22}&\cdots&nb_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&2b_{n2}&\cdots&nb_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow b_{ij}=0\,(\forall i\ne j)\Leftrightarrow B=\begin{pmatrix}b_{11}&0&\cdots&0\\0&b_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(b_{11},b_{22},\ldots,b_{nn}).$$

因此V的一组基为$\{E_{11},E_{22},\ldots,E_{nn}\}$.

(4) 当$n=3$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$时, 求(1)中$V$的一组基.

解: 若$n=3$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$, 则对于任意的$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times3}$,

$$B\in V\Leftrightarrow AB=BA\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3b_{11}&3b_{12}&3b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{21}+2b_{31}&b_{22}+2b_{32}&b_{23}+2b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b_{11}&b_{12}+b_{13}&2b_{13}\\3b_{21}&b_{22}+b_{23}&2b_{23}\\3b_{31}&b_{32}+b_{33}&2b_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow B=\begin{pmatrix}b_{11}&0&0\\0&b_{22}&0\\0&b_{33}-b_{22}&b_{33}\end{pmatrix}=b_{11}E_{11}+b_{22}(E_{22}-E_{32})+b_{33}(E_{32}+E_{33}).$$

另一方面, 不难验证E_{11}, $E_{22}-E_{32}$, $E_{32}+E_{33}$线性无关.
因此V的一组基为$\{E_{11},E_{22}-E_{32},E_{32}+E_{33}\}$.
很多同学不会用B的一般形式求V的基.

6. 已知$\alpha_1=(1,2,1,0)$, $\alpha_2=(-1,1,1,1)$, $\beta_1=(2,-1,0,1)$, $\beta_2=(1,-1,3,7)$,
$V_1=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $V_2=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2\}$, 分别求$V_1+V_2$及$V_1\cap V_2$的一组基.

解: (1) $V_1+V_2=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&1&1&1\\2&-1&0&1\\1&-1&3&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&3&2&1\\0&-5&-2&1\\0&-3&2&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&3&2&1\\0&1&2&3\\0&0&4&8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&-4&-8\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见$\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$与$\{(1,2,1,0),(0,1,2,3),(0,0,1,2)\}$等价,
且$\{(1,2,1,0),(0,1,2,3),(0,0,1,2)\}$线性无关.
故$\{(1,2,1,0),(0,1,2,3),(0,0,1,2)\}$为$V_1+V_2$的一组基.

注: 也可以用下面的方法求解.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&1&1&1\\2&-1&0&1\\1&-1&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\2&1&1&0\\1&7&3&0\end{pmatrix},$$

可见$\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$是$\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$的一个极大无关组,
故$\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$是$V_1+V_2$的一组基.
不少同学没有说明 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性无关

(2) $\alpha\in V_1\cap V_2\Leftrightarrow\exists k_1,k_2,k_3,k_4$使得$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_3\beta_1+k_4\beta_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k_1-k_2-2k_3-k_4=0,\\2k_1+k_2+k_3+k_4=0,\\k_1+k_2-3k_4=0,\\k_2-k_3-7k_4=0,\end{cases}\text{该方程组的通解为}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

不少同学不会求 $V_1\cap V_2$ 的基.

可见$-\alpha_1+4\alpha_2$是$V_1\cap V_2$的一组基. $3\beta_1+\beta_2$.

7. 已知$\mathbb{C}^{2\times2}$的子空间: $V_1=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\y&x\end{bmatrix}\middle|\forall x,y\in\mathbb{C}\right\}$, $V_2=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\x&y\end{bmatrix}\middle|\forall x,y\in\mathbb{C}\right\}$,
分别求V_1+V_2及$V_1\cap V_2$的一组基.

大多数同学不会做

解: (1) $V_1=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$, $V_2=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\right\}$.

$$V_1+V_2=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\right\}.$$

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的坐标依次为:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可见$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$是$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$的一个极大无关组.

因而$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$是$V_1+V_2$的一组基.

(2) $A\in V_1\cap V_2\Leftrightarrow\exists k_1,k_2,k_3,k_4$使得$A=\begin{bmatrix}k_1&k_2\\k_2&k_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_3&k_4\\k_3&k_4\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=k_3,\\k_2=k_4,\\k_2=k_3,\\k_1=k_4,\end{cases}\text{该方程组的通解为}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

可见$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$是$V_1\cap V_2$的一组基.

8. 设$V_1=\{A\mid A^{\mathrm T}=A,A\in\mathbb{C}^{n\times n}\}$, $V_2=\{A\mid A^{\mathrm T}=-A,A\in\mathbb{C}^{n\times n}\}$, 证明: $\mathbb{C}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$.

证明: 对于任意的$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 令$B=\frac12(A+A^{\mathrm T})$, $C=\frac12(A-A^{\mathrm T})$,
则$B^{\mathrm T}=B$, $C^{\mathrm T}=-C$, 即$B\in V_1$, $C\in V_2$.
于是有$A=B+C\in V_1+V_2$.
这一步很多同学忘记 因此$\mathbb{C}^{n\times n}\subseteq V_1+V_2$, 进而有$\mathbb{C}^{n\times n}=V_1+V_2$.
另一方面, 若$A\in V_1\cap V_2$, 则$A=A^{\mathrm T}=-A$, 因而$A=O$. 可见$V_1\cap V_2=\{O\}$.
综上所述, $\mathbb{C}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$.

9. 设$V(\mathbb{R})$为一切实连续函数所构成的线性空间, 作$V(\mathbb{R})$的子空间:

$$V_1=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\},\ V_2=\{f(x)\mid f(-x)=-f(x)\},$$

证明: $V=V_1\oplus V_2$.

证明: 对于任意的$f(x)\in V$, 令$g(x)=\frac12[f(x)+f(-x)]$, $h(x)=\frac12[f(x)-f(-x)]$,
则$g(-x)=g(x)$, $h(-x)=-h(x)$, 即$g(x)\in V_1$, $h(x)\in V_2$.
于是有$f(x)=g(x)+h(x)\in V_1+V_2$.
因此$V\subseteq V_1+V_2$, 进而有$V=V_1+V_2$.
另一方面, 若$f(x)\in V_1\cap V_2$, 则$f(x)=f(-x)=-f(x)$, 因而$f(x)=0$.
可见$V_1\cap V_2=\{0\}$.
综上所述, $V=V_1\oplus V_2$.

10. 设$V_1=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_1+\ldots+x_n=0\}$, $V_2=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_1=\ldots=x_n\}$, 证明: $\mathbb{C}^n=V_1\oplus V_2$.

证明: 对于任意的$\alpha=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n$,
令$x=x_1+\ldots+x_n$, $\beta=(x_1-x,\ldots,x_n-x)$, $\gamma=(x,\ldots,x)$,
则$\beta\in V_1$, $\gamma\in V_2$, 而且$\alpha=\beta+\gamma\in V_1+V_2$.
因此$V\subseteq V_1+V_2$, 进而有$V=V_1+V_2$.
另一方面, 若$\alpha=(x_1,\ldots,x_n)\in V_1\cap V_2$,
则$nx_1=nx_2=\ldots=nx_n=x_1+\ldots+x_n=0$, 因而$x_1=\ldots=x_n=0$, 即$\alpha=(x_1,\ldots,x_n)=0$.
可见$V_1\cap V_2=\{0\}$.
综上所述, $V=V_1\oplus V_2$.

证明：若 $\alpha=(x_1, \dots, x_n)\in V_1\cap V_2$，

则 $nx_1=nx_2=\dots=nx_n=x_1+\dots+x_n=0$，因而 $x_1=\dots=x_n=0$，即 $\alpha=(x_1, \dots, x_n)=0$.

可见 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

故 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$.

另一方面，线性方程组 $x_1+\dots+x_n=0$ 的一个基础解系为

$$\alpha_1=(1,-1,0,\dots,0),\ \alpha_2=(1,0,-1,\dots,0),\ \dots,\ \alpha_{n-1}=(1,0,\dots,0,-1),$$

可见 $\dim V_1=n-1$.

V_2 的一组基为 $\alpha_n=(1,1,\dots,1)$，故 $\dim V_2=1$.

于是 $\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2=n=\dim\mathbb{C}^n$.

因此 $V=V_1\oplus V_2$.

证明：若 $\alpha=(x_1, \dots, x_n)\in V_1\cap V_2$，

则 $nx_1=nx_2=\dots=nx_n=x_1+\dots+x_n=0$，因而 $x_1=\dots=x_n=0$，即 $\alpha=(x_1, \dots, x_n)=0$.

可见 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

故 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$.

另一方面，线性方程组 $x_1+\dots+x_n=0$ 的一个基础解系为

$$\alpha_1=(1,-1,0,\dots,0),\ \alpha_2=(1,0,-1,\dots,0),\ \dots,\ \alpha_{n-1}=(1,0,\dots,0,-1),$$

即 V_1 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$.

V_2 的一组基为 $\alpha_n=(1,1,\dots,1)$.

而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 线性无关，

故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基.

于是 $\mathbb{C}^n=\mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}=V_1+V_2=V_1\oplus V_2$.

11. 设 $A, B\in F^{n\times n}$，且 $AB=O$, $B^2=B$, $V_1=\{X\in F^n \mid AX=0\}$, $V_2=\{X\in F^n \mid BX=0\}$.

(1)证明：$F^n=V_1+V_2$;

证明：对于任意的 $X\in F^n$，令 $Y=BX$, $Z=X-BX$,

则 $AY=ABX=OX=0$, $BZ=B(X-BX)=BX-B^2X=BX-BX=0$,

可见 $Y\in V_1$, $Z\in V_2$, $X=BX+(X-BX)=Y+Z\in V_1+V_2$.

因此，$F^n\subseteq V_1+V_2\subseteq F^n$，进而有 $F^n=V_1+V_2$.

(2)证明：$F^n=V_1\oplus V_2 \Leftrightarrow r(A)+r(B)=n$.

证明：($\Rightarrow$)若 $F^n=V_1\oplus V_2$，则 $\dim V_1+\dim V_2=n$，其中 $\dim V_1=n-r(A)$, $\dim V_2=n-r(B)$,

由此可得 $n-r(A)+n-r(B)=n$，故 $r(A)+r(B)=n$.

($\Leftarrow$)设 $r(A)+r(B)=n$，则 $r(B)=n-r(A)$.

令 $B=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$，且 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_{n-r(A)}}$ 为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的极大无关组.

由 $AB=O$ 可知 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_{n-r(A)}}$ 为 V_1 的一组基,

因而 $V_1=\mathrm{span}\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_{n-r(A)}}\}=\mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}=R(B)$.

于是对于任意的 $X\in V_1\cap V_2$，存在 $Y\in F^n$ 使得 $X=BY$，且 $BX=0$,

故 $X=BY=B^2Y=B(BY)=BX=0$.

可见 $V_1\cap V_2=\{0\}$，结合(1)可得 $F^n=V_1\oplus V_2$.

12. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\-1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，分别求 $R(A)$ 及 $K(A)$ 的一组基.

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\-1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&3&3\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-3)\ \times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

由此可见 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的列向量组的一个极大无关组，

因而 α_1, α_2 为 $R(A)$ 的一组基.

另一方面，$AX=0$ 经初等行变换化为 $\begin{cases}x_1+2x_3=0,\\x_2+x_3=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=-2x_3,\\x_2=-x_3,\end{cases}$

由此可得 $AX=0$ 的一个基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

因而 ξ 为 $K(A)$ 的一组基.

13. 在 $F^{2\times2}$ 中定义线性变换 $f(X)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}X$, $\forall X\in F^{2\times2}$，分别求 f 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 与基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 下的矩阵.

解：$f(E_{11})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}E_{11}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}=aE_{11}+0E_{12}+cE_{21}+0E_{22}$,

$f(E_{12})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}E_{12}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a\\0&c\end{bmatrix}=0E_{11}+aE_{12}+0E_{21}+cE_{22}$,

$f(E_{21})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}E_{21}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\d&0\end{bmatrix}=bE_{11}+0E_{12}+dE_{21}+0E_{22}$,

$f(E_{22})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}E_{22}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&b\\0&d\end{bmatrix}=0E_{11}+bE_{12}+0E_{21}+dE_{22}$,

可见 f 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{bmatrix}$.

$f(E_{11})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}E_{11}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}=aE_{11}+cE_{21}+0E_{12}+0E_{22}$,

$f(E_{21})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}E_{21}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\d&0\end{bmatrix}=bE_{11}+dE_{21}+0E_{12}+0E_{22}$,

$f(E_{12})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}E_{12}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a\\0&c\end{bmatrix}=0E_{11}+0E_{21}+aE_{12}+cE_{22}$,

$f(E_{22})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}E_{22}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&b\\0&d\end{bmatrix}=0E_{11}+0E_{21}+bE_{12}+dE_{22}$,

可见 f 在基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{bmatrix}$.

注：从基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 到基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

故 f 在基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{bmatrix}.$$

14. 设线性变换 f 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A=(a_{ij})_{3\times3}$.

(1)求 f 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵;

解：从基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 到基 $\{\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1\}$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,

故 f 在基 $\{\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{bmatrix}$.

(2)求 f 在基 $\varepsilon_1+k\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.

解：从基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 到基 $\{\varepsilon_1+k\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,

故 f 在基 $\{\varepsilon_1+k\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+ka_{12}&a_{12}&a_{13}\\-ka_{11}+a_{21}-k^2a_{12}+ka_{22}&-ka_{12}+a_{22}&-ka_{13}+a_{23}\\a_{31}+ka_{32}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}.$$

15. 证明下列映射是线性映射，并自选基偶，求线性映射的矩阵.

(1) $f(A)=\mathrm{tr}A$, $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $f:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$;

证明：$\forall A, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $k\in\mathbb{R}$，有

$$f(A+B)=\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B=f(A)+f(B),$$
$$f(kA)=\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}A=kf(A),$$

故 f 是线性映射.

取 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的一组基：$E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn}$,

$\mathbb{R}$ 的一组基：1,

则 $f(E_{11})=1, f(E_{12})=0, \dots, f(E_{1n})=0, f(E_{21})=0, f(E_{22})=1, \dots, f(E_{2n})=0,$

$\dots, f(E_{n1})=0, f(E_{n2})=0, \dots, f(E_{nn})=1$,

可见 f 在基偶 $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn}\}$, $\{1\}$ 下的矩阵为

$(1, 0, \dots, 0, 0, 1, \dots, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1)^T$.

(2) $\mathbb{R}[x]_3=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid \forall a_i\in\mathbb{R}\}$, $h(x,t)=x^2+tx$，且

$$f[p(x)]=\int_0^1 p(t)h(x,t)\mathrm{d}t\quad(\forall p(x)\in\mathbb{R}[x]_3).$$

证明：设 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}[x]_3$，则

$$\begin{aligned}f[p(x)]&=\int_0^1(a_0+a_1t+a_2t^2)(x^2+tx)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1[a_0x^2+(a_0x+a_1x^2)t+(a_1x+a_2x^2)t^2+a_2xt^3]\mathrm{d}t\\&=a_0x^2+\frac{1}{2}(a_0x+a_1x^2)+\frac{1}{3}(a_1x+a_2x^2)+\frac{1}{4}a_2x\\&=(\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{4}a_2)x+(a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2)x^2\in\mathbb{R}[x]_3.\end{aligned}$$

$\forall p(x), q(x)\in\mathbb{R}[x]_3$, $k\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}f[p(x)+q(x)]&=\int_0^1[p(t)+q(t)]h(x,t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 p(t)h(x,t)\mathrm{d}t+\int_0^1 q(t)h(x,t)\mathrm{d}t=f[p(x)]+f[q(x)],\end{aligned}$$

$$f[kp(x)]=\int_0^1 kp(t)h(x,t)\mathrm{d}t=k\int_0^1 p(t)h(x,t)\mathrm{d}t=kf[p(x)],$$

故 f 是线性映射.

取 $\mathbb{R}[x]_3$ 的一组基：$1, x, x^2$，则

$$f(1)=\frac{1}{2}x+x^2,\quad f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2,\quad f(x^2)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x^2,$$

可见 $f:\mathbb{R}[x]_3\to\mathbb{R}[x]_3$ 在基 $\{1, x, x^2\}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&0&0\\1/2&1/3&1/4\\1&1/2&1/3\end{pmatrix}$.

16. 分别求第 15 题中 f 的值域及核的一组基.

解：(1)对于任意的 $a\in\mathbb{R}$，存在 $aE_{11}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $f(aE_{11})=\mathrm{tr}(aE_{11})=a$,

可见 f 为满射，即 $R(f)=\mathbb{R}$，它的一组基为 1.

对于任意的 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，有 $A=(a_{ij})_{n\times n}=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}E_{ij}$ 且

$A\in K(f)\Leftrightarrow\mathrm{tr}(A)=f(A)=0\Leftrightarrow a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}=0$.

可见对于任意的 $1\le i\ne j\le n$, $E_{ij}\in K(f)$.

同时有 $E_{11}-E_{22}, E_{11}-E_{33}, \dots, E_{11}-E_{nn}\in K(f)$.

而且 $E_{ij}\ (1\le i\ne j\le n), E_{11}-E_{22}, E_{11}-E_{33}, \dots, E_{11}-E_{nn}$ 这 n^2-1 个矩阵线性无关.

又因为 $\dim R(f)+\dim K(f)=\dim\mathbb{R}^{n\times n}=n^2$, $\dim R(f)=\dim\mathbb{R}=1$,

所以 $\dim K(f)=n^2-1$.

可见 $E_{ij}\ (1\le i\ne j\le n), E_{11}-E_{22}, E_{11}-E_{33}, \dots, E_{11}-E_{nn}$ 是 $K(f)$ 的一组基.

(2) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1/2&1/3&1/4\\1&1/2&1/3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\0&0&0\end{pmatrix}\times(-1/2)\to\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\0&1/12&1/12\\0&0&0\end{pmatrix}\times12$

$\to\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times(-1/2)\to\begin{pmatrix}1&0&-1/6\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

由此可见 $\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1/3\\1/2\end{pmatrix}$ 为 A 的列向量组的一个极大无关组,

因而 $\frac{1}{2}x+x^2$, $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2$ 为 $R(f)$ 的一组基.

另一方面，$AX=0$ 的一个基础解系为 $X=(1/6,-1,1)^T$.

由此可得 $\frac{1}{6}-x+x^2$ 为 $K(f)$ 的一组基.

17. 设 $f\in\mathrm{Hom}(V, V)$.

(1)证明：f 是单射 $\Leftrightarrow K(f)=\{0\}$;

证明：($\Rightarrow$)设 f 是单射，则对于任意的 $\alpha\in K(f)$，由 $f(\alpha)=0=f(0)$ 得 $\alpha=0$,

故 $K(f)\subseteq\{0\}$，进而有 $K(f)=\{0\}$.

($\Leftarrow$)设 $K(f)=\{0\}$，则对于任意的 $\alpha, \beta\in V$,

由 $f(\alpha)=f(\beta)$ 可得 $f(\alpha-\beta)=f(\alpha)-f(\beta)=0$,

故$\alpha-\beta\in K(f)=\{0\}$,
从而有$\alpha-\beta=0$, 即$\alpha=\beta$.
可见f是单射.

(2)若$\dim V=n$, 证明:f是单射$\Leftrightarrow f$是满射$\Leftrightarrow f$可逆.

证明: 若$\dim V=n$, 则$\dim R(f)+\dim K(f)=\dim V=n$.

① 由(1)得f是单射$\Leftrightarrow K(f)=\{0\}\Leftrightarrow \dim K(f)=0\Leftrightarrow \dim R(f)=n\Leftrightarrow f$是满射.

② 设f是单射, 则由①可得f是满射, 进而得f可逆.
反之, 设f可逆, 则f是单射.
所以f是单射$\Leftrightarrow f$可逆.

18. 设$f\in \mathrm{Hom}(V,V)$, $\dim V=n$, 且$f^2=f$.

证明:f的矩阵必相似于$\begin{bmatrix} I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times n}$, 其中$r=\dim R(f)$.

证明: 令$V_1=\{\alpha\in V\,|\,f(\alpha)=\alpha\}$, $V_2=\{\alpha\in V\,|\,f(\alpha)=0\}$, 则

(1) $V_1, V_2\le V$. 事实上,
① $\alpha,\beta\in V_1, k,l\in F\Rightarrow f(k\alpha+l\beta)=kf(\alpha)+lf(\beta)=k\alpha+l\beta\Rightarrow k\alpha+l\beta\in V_1$,
② $\alpha,\beta\in V_2, k,l\in F\Rightarrow f(k\alpha+l\beta)=kf(\alpha)+lf(\beta)=k0+l0=0\Rightarrow k\alpha+l\beta\in V_2$.

(2) $V_1\cap V_2=\{0\}$. 事实上,
$\alpha\in V_1\cap V_2\Rightarrow \alpha=f(\alpha)=0$.

(3) $V=V_1+V_2$. 事实上,
对于任意的$\alpha\in V$, 令$\beta=f(\alpha)$, $\gamma=\alpha-f(\alpha)$, 则由$f^2=f$可得
$f(\beta)=f^2(\alpha)=f(\alpha)=\beta$, $f(\gamma)=f(\alpha-f(\alpha))=f(\alpha)-f^2(\alpha)=f(\alpha)-f(\alpha)=0$,
故$\beta\in V_1$, $\gamma\in V_2$, $\alpha=\beta+\gamma\in V_1+V_2$.
可见$V_1+V_2\subseteq V\subseteq V_1+V_2$.
因而$V=V_1+V_2=V_1\oplus V_2$.

(4)由(2)和(3)可得$V=V_1\oplus V_2$.

(5) $V_1=R(f)$. 事实上,
① $\alpha\in V_1\Rightarrow \alpha=f(\alpha)\in R(f)$.
② $\alpha\in R(f)\Rightarrow$ 存在$\beta\in V$使得$\alpha=f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)=f^2(\beta)=f(\beta)=\alpha\Rightarrow \alpha\in V_1$.

(6)设V_1的一组基为$\alpha_1,\dots,\alpha_r$, V_2的一组基为$\beta_{r+1},\dots,\beta_n$,

则f在V的基$\alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_{r+1},\dots,\beta_n$下的矩阵为$\begin{bmatrix} I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times n}$,

其中$r=\dim V_1=\dim R(f)$.

由于线性变换在不同的基下的矩阵是相似的,

所以f的矩阵必相似于$\begin{bmatrix} I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times n}$, 其中$r=\dim V_1=\dim R(f)$.

19. 设V_1为n维线性空间V的r维子空间, 又$V=V_1\oplus V_2$, 于是对于任意的$\alpha\in V$, 存在唯一的$\alpha_i\in V_i\,(i=1,2)$, 使得$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. 定义$f(\alpha)=a\alpha_1+b\alpha_2\ (\forall\alpha\in V)$, 证明:$f$为线性变换, 且$f$的矩阵必相似于$\begin{bmatrix} aI_r & O\\ O & bI_{n-r}\end{bmatrix}$.

证明: (1)设$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta=\beta_1+\beta_2$, $\alpha_i,\beta_i\in V_i\,(i=1,2)$, $k\in F$, 则

$$f(\alpha+\beta)=f((\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2))=a(\alpha_1+\beta_1)+b(\alpha_2+\beta_2)$$
$$=(a\alpha_1+b\alpha_2)+(a\beta_1+b\beta_2)=f(\alpha)+f(\beta),$$
$$f(k\alpha)=f(k\alpha_1+k\alpha_2)=ak\alpha_1+bk\alpha_2=k(a\alpha_1+b\alpha_2)=kf(\alpha).$$

故f为线性变换.

(2)设V_1的一组基为$\alpha_1,\dots,\alpha_r$, V_2的一组基为$\beta_{r+1},\dots,\beta_n$,

则f在V的基$\alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_{r+1},\dots,\beta_n$下的矩阵为$\begin{bmatrix} aI_r & O\\ O & bI_{n-r}\end{bmatrix}$,

由于线性变换在不同的基下的矩阵是相似的,

所以f的矩阵必相似于$\begin{bmatrix} aI_r & O\\ O & bI_{n-r}\end{bmatrix}$.

20. 已知线性变换f与g满足$f^2=f, g^2=g$, 证明:

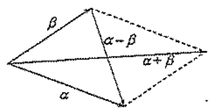
(1)f与g有相同的值域$\Leftrightarrow fg=g, gf=f$.

证明: ($\Rightarrow$)设f与g有相同的值域, 则对于任意的$\alpha\in V$, 有$g(\alpha)\in R(g)=R(f)$,
故存在$\beta\in V$使得$g(\alpha)=f(\beta)=f^2(\beta)=f[f(\beta)]=f[g(\alpha)]=fg(\alpha)$.
可见$fg=g$.
互换f与g可得$gf=f$.
($\Leftarrow$)设$fg=g, gf=f$, 则对于任意的$\alpha\in R(f)$, 存在$\beta\in V$使得$\alpha=f(\beta)$,
于是$\alpha=f(\beta)=gf(\beta)=g[f(\beta)]\in R(g)$.
可见$R(f)\subseteq R(g)$.
互换f与g可得$R(g)\subseteq R(f)$. 因而$R(f)=R(g)$.

(2)f与g有相同的核$\Leftrightarrow fg=f, gf=g$.

证明: ($\Rightarrow$)设f与g有相同的核, 则对于任意的$\alpha\in V$,
由$f(\alpha-f(\alpha))=f(\alpha)-f^2(\alpha)=f(\alpha)-f(\alpha)=0$可得$\alpha-f(\alpha)\in K(f)=K(g)$,
故$g(\alpha)-gf(\alpha)=g(\alpha-f(\alpha))=0$, 即$g(\alpha)=gf(\alpha)$.
可见$gf=g$.
互换f与g可得$fg=f$.
($\Leftarrow$)设$fg=f, gf=g$, 则对于任意的$\alpha\in K(f)$,
有$g(\alpha)=gf(\alpha)=g[f(\alpha)]=g(0)=0$, 即$\alpha\in K(g)$,
可见$K(f)\subseteq K(g)$.
互换f与g可得$K(g)\subseteq K(f)$. 因而$K(f)=K(g)$.

1. 证明内积空间中的“平行四边形定理”:
$$\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2=2(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2).$$



证明: $\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2$
$=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)+(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$
$=(\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)$
$\quad+(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)-(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)$
$=2(\alpha,\alpha)+2(\beta,\beta)=2(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2)$.

2. 证明欧式空间的“勾股定理”: $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$, 并讨论该命题在酉空间中是否成立.

证明: 因为$\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)=\|\alpha\|^2+2(\alpha,\beta)+\|\beta\|^2$,
所以$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow(\alpha,\beta)=0\Leftrightarrow\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$.

在酉空间$\mathbb{C}$中, $(\alpha,\beta)=\overline{\beta}\alpha$.

取$\alpha=1,\beta=\mathrm{i}$, 则$(\alpha,\beta)=(1,\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, $(\beta,\alpha)=(\mathrm{i},1)=\mathrm{i}$,
$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)+\|\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2,$$
但$(\alpha,\beta)=(1,\mathrm{i})=-\mathrm{i}\ne0$, 即$\alpha\perp\beta$不成立.

3. 设$f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x)$是$[a,b]$上的实连续函数, 证明:
$$\left|\int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x\right|\le\max_k\int_a^b f_k^2(x)\mathrm{d}x\quad(i,j=1,2,\dots,n).$$

证明: $\left|\int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f_i(x)f_j(x)|\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_a^b[f_i^2(x)+f_j^2(x)]\mathrm{d}x\le\max_k\int_a^b f_k^2(x)\mathrm{d}x$.

4. 设$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&1&2\\1&1&-1\end{bmatrix}$, 把$A$的列作为欧式空间$\mathbb{R}^3$的一组基, 按Schmidt正交化方法求$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基, 由此求出正交阵$Q$及上三角阵$R$, 使$A=QR$.

解: 令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 其中$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

令$\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{0}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$,

$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$,

于是η_1,η_2,η_3为$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基,

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{bmatrix}\|\beta_1\| & \|\beta_1\|\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \|\beta_1\|\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\\ 0 & \|\beta_2\| & \|\beta_2\|\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\\ 0 & 0 & \|\beta_3\|\end{bmatrix}=QR,$$

其中$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}0&1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$为正交阵,

$R=\begin{bmatrix}\|\beta_1\| & \|\beta_1\|\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \|\beta_1\|\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\\ 0 & \|\beta_2\| & \|\beta_2\|\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\\ 0 & 0 & \|\beta_3\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&-\frac{3\sqrt{2}}{2}\\0&\sqrt{3}&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{6}/2\end{bmatrix}$为上三角阵.

5. 已知$W=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_5)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_5)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$, 求$W^{\perp}$的一组标准正交基.

解: 令$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}$, 则$W=\mathrm{K}(A)$, $W^{\perp}=\mathrm{K}(A)^{\perp}=\mathrm{R}(A^{\mathrm{H}})$, 其中$A^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&2\\4&3\\5&4\end{bmatrix}$.

令$A^{\mathrm{H}}=(\alpha_1,\alpha_2)$, 则$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$线性无关.

令$\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-\frac{8}{11}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8/11\\-5/11\\-2/11\\1/11\\4/11\end{pmatrix}$,

$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(\frac{1}{\sqrt{55}},\frac{2}{\sqrt{55}},\frac{3}{\sqrt{55}},\frac{4}{\sqrt{55}},\frac{5}{\sqrt{55}})^{\mathrm{T}}$, $\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(\frac{-8}{\sqrt{110}},\frac{-5}{\sqrt{110}},\frac{-2}{\sqrt{110}},\frac{1}{\sqrt{110}},\frac{4}{\sqrt{110}})^{\mathrm{T}}$,

于是η_1,η_2为$W^{\perp}$的一组标准正交基.

6. 设f是内积空间V上的变换, 若$(f(\alpha),f(\beta))=(\alpha,\beta)\quad(\forall\alpha,\beta\in V)$, 证明$f$是线性变换, 因而$f$是等距变换.

证明: $\forall\alpha,\beta\in V, k\in F$, 有
$(f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta), f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta))$
$=(f(\alpha+\beta),f(\alpha+\beta))-(f(\alpha+\beta),f(\alpha))-(f(\alpha+\beta),f(\beta))$
$\quad-(f(\alpha),f(\alpha+\beta))+(f(\alpha),f(\alpha))+(f(\alpha),f(\beta))$
$\quad-(f(\beta),f(\alpha+\beta))+(f(\beta),f(\alpha))+(f(\beta),f(\beta))$
$=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-(\alpha+\beta,\alpha)-(\alpha+\beta,\beta)$
$\quad-(\alpha,\alpha+\beta)+(\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)-(\beta,\alpha+\beta)+(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)$
$=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-(\alpha,\alpha+\beta)+(\alpha,\alpha+\beta)-(\beta,\alpha+\beta)+(\beta,\alpha+\beta)=0$;
$(f(k\alpha)-kf(\alpha), f(k\alpha)-kf(\alpha))$
$=(f(k\alpha),f(k\alpha))-\overline{k}(f(k\alpha),f(\alpha))-k(f(\alpha),f(k\alpha))+k\overline{k}(f(\alpha),f(\alpha))$
$=(k\alpha,k\alpha)-\overline{k}(k\alpha,\alpha)-k(\alpha,k\alpha)+k\overline{k}(\alpha,\alpha)$
$=k\overline{k}(\alpha,\alpha)-k\overline{k}(\alpha,\alpha)-k\overline{k}(\alpha,\alpha)+k\overline{k}(\alpha,\alpha)=0$,
故$f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta)=0$, $f(k\alpha)-kf(\alpha)=0$, 即$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$, $f(k\alpha)=kf(\alpha)$,
可见f是线性变换, 因而f是等距变换.

7. 设 V 为欧式空间, k 为实数, $f(\alpha)=\alpha-k(\alpha,\omega)\omega$, $\forall\alpha\in V$, $\|\omega\|=1$, 求 f 是正交变换的充要条件.

解: $\|f(\alpha)\|^2=\langle f(\alpha),f(\alpha)\rangle=\langle\alpha-k(\alpha,\omega)\omega,\ \alpha-k(\alpha,\omega)\omega\rangle$

$=\langle\alpha,\alpha\rangle-k(\alpha,\omega)\langle\alpha,\omega\rangle-k(\alpha,\omega)\langle\omega,\alpha\rangle+k^2\langle\alpha,\omega\rangle^2\langle\omega,\omega\rangle$

$=\langle\alpha,\alpha\rangle+(k^2-2k)\langle\alpha,\omega\rangle^2=\|\alpha\|^2+(k^2-2k)\langle\alpha,\omega\rangle^2$,

因此 f 是正交变换 $\Leftrightarrow\|f(\alpha)\|=\|\alpha\|,\ \forall\alpha\in V$

$\Leftrightarrow\|f(\alpha)\|^2=\|\alpha\|^2,\ \forall\alpha\in V$

$\Leftrightarrow(k^2-2k)\langle\alpha,\omega\rangle^2=0,\ \forall\alpha\in V$

$\Leftrightarrow k^2-2k=0\Leftrightarrow k=0$ 或 2.

8. 设 f 是内积空间 V 的等距变换, W 是 f 的 r 维不变子空间. 证明: $W^{\perp}$ 也是 f 的不变子空间.

证明: 因为 W 是 f 的 r 维不变子空间, 所以 $V=W\oplus W^{\perp}$.

又因为 f 是内积空间 V 的等距变换, 所以 $f|_W$ 是 W 的等距变换.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 为 W 的一组标准正交基,

则 $f|_W$ 在 $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r\}$ 下的矩阵 A 为酉矩阵.

对于任意的 $\alpha\in W$, 令 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)X$,

则存在 $\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)A^HX\in W$,

使得 $f(\beta)=f|_W(\beta)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)AA^HX=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)X=\alpha$.

于是对于任意的 $\gamma\in W^{\perp}$, 有 $\langle f(\gamma),\alpha\rangle=\langle f(\gamma),f(\beta)\rangle=\langle\gamma,\beta\rangle=0$.

由此可见 $f(\gamma)\in W^{\perp}$.

因而 $W^{\perp}$ 也是 f 的不变子空间.

9. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}. 证明: A 是正交阵的充要条件是

$$a_{ij}=(\det A)^{-1}A_{ij}\quad(i,j=1,2,\dots,n).$$

证明: A 的伴随矩阵 $A^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$, 而且 $AA^*=(\det A)I$.

$(\Rightarrow)$ A 是正交阵 $\Rightarrow A^{\mathrm{T}}=A^{-1}=(\det A)^{-1}A^*=(\det A)^{-1}(A_{ij})^{\mathrm{T}}\Rightarrow A=(\det A)^{-1}(A_{ij})$

$\Rightarrow a_{ij}=(\det A)^{-1}A_{ij}\quad(i,j=1,2,\dots,n)$.

$(\Leftarrow)$ $a_{ij}=(\det A)^{-1}A_{ij}\quad(i,j=1,2,\dots,n)\Rightarrow A=(\det A)^{-1}(A_{ij})$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}}=(\det A)^{-1}(A_{ij})^{\mathrm{T}}=(\det A)^{-1}A^*=A^{-1}$

$\Rightarrow A$ 是正交阵.

10. 设 A,B 都是正交阵, 且 $\det A\det B=-1$, 证明 $\det(A+B)=0$.

证明: 因为 A,B 都是正交阵, 所以 $A^{\mathrm{T}}A=I$, $B^{\mathrm{T}}B=I$, 从而有

$\det(A+B)=\det(A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}})=\det(A^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}AB^{\mathrm{T}})=\det A^{\mathrm{T}}(B+A)B^{\mathrm{T}}$

$=\det A^{\mathrm{T}}\det(B+A)\det B^{\mathrm{T}}=\det A\det(A+B)\det B=\det A\det B\det(A+B)$.

又因为 $\det A\det B=-1$, 所以 $\det(A+B)=-\det(A+B)$, 因而 $\det(A+B)=0$.

$|(A+B)^2|=|A^2+B^2+AB+BA|$

11. 证明: n 维欧式空间 V 中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+1)$ 个.

证明: (1) $n=1$ 时, 设 α 为 V 的一组标准正交基.

假若 $\alpha_1=k_1\alpha$, $\alpha_2=k_2\alpha$, $\alpha_3=k_3\alpha$ 两两成"钝角",

则 $k_1k_2=k_1k_2(\alpha,\alpha)=\langle k_1\alpha,k_2\alpha\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle<0$,

类似地, $k_1k_3=\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle<0$, $k_2k_3=\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle<0$,

于是 $k_1^2k_2^2k_3^2=(k_1k_2)(k_1k_3)(k_2k_3)<0$, 矛盾!

可见 V 中两两成"钝角"的向量不多于 2 个.

(2) 设 n 维欧式空间中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+1)$ 个,

下面证明 $n+1$ 维欧式空间 V 中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+2)$ 个.

假若 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+3}$ 是 V 中两两成"钝角"的向量,

则 $W=\mathrm{span}\{\alpha_{n+3}\}$ 为 V 的 1 维子空间, 于是 $V=W\oplus W^{\perp}$, 其中 $\dim W^{\perp}=n$.

令 $\alpha_i=k_i\alpha_{n+3}+\beta_i$, 其中 $k_i\in\mathbb{R}$, $\beta_i\in W^{\perp}$, $i=1,2,\dots,n+2$,

则 $k_i\langle\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle=\langle k_i\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle=\langle k_i\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle+\langle\beta_i,\alpha_{n+3}\rangle=\langle k_i\alpha_{n+3}+\beta_i,\alpha_{n+3}\rangle$

$=\langle\alpha_i,\alpha_{n+3}\rangle<0$,

而 $\langle\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle>0$, 故 $k_i<0$, $i=1,2,\dots,n+2$.

于是对于任意的 $1\le i\ne j\le n+2$, 有

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\langle k_i\alpha_{n+3}+\beta_i,\ k_j\alpha_{n+3}+\beta_j\rangle=k_ik_j\langle\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle+\langle\beta_i,\beta_j\rangle,$$

$$\langle\beta_i,\beta_j\rangle=\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle-k_ik_j\langle\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle<0,$$

可见 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{n+2}$ 是 $W^{\perp}$ 中 $(n+2)$ 个两两成"钝角"的向量.

但根据归纳假设, n 维欧式空间 $W^{\perp}$ 中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+1)$ 个.

此矛盾表明, $n+1$ 维欧式空间 V 中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+2)$ 个.

由数学归纳法原理可知, 原命题对任意的 n 都成立.

12. 设 $\|\omega\|=1$, 证明镜像变换

$$H(X)=X-2(X,\omega)\omega\quad(\forall X\in\mathbb{C}^n)$$

在基 $e_1,e_2,\dots,e_n$ 下的矩阵为 $I-2\omega\omega^H$. 因此, 无论 ω 是怎样的单位向量, 总有

$$\det(I-2\omega\omega^H)=-1.$$

证明: 设 $\omega=(a_1,a_2,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$, 则

$$H(e_1)=e_1-2\langle e_1,\omega\rangle\omega=e_1-2\overline{a_1}\,\omega=(e_1,e_2,\dots,e_n)\begin{pmatrix}1-2\overline{a_1}a_1\\-2\overline{a_1}a_2\\\vdots\\-2\overline{a_1}a_n\end{pmatrix},$$

$$H(e_2)=e_2-2\langle e_2,\omega\rangle\omega=e_2-2\overline{a_2}\,\omega=(e_1,e_2,\dots,e_n)\begin{pmatrix}-2\overline{a_2}a_1\\1-2\overline{a_2}a_2\\\vdots\\-2\overline{a_2}a_n\end{pmatrix},$$

$\dots,$

$$H(e_n)=e_n-2\langle e_n,\omega\rangle\omega=e_n-2\overline{a_n}\,\omega=(e_1,e_2,\dots,e_n)\begin{pmatrix}-2\overline{a_n}a_1\\-2\overline{a_n}a_2\\\vdots\\1-2\overline{a_n}a_n\end{pmatrix},$$

可见镜像变换 $H(X)=X-2(X,\omega)\omega\quad(\forall X\in\mathbb{C}^n)$ 在基 $e_1,e_2,\dots,e_n$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1-2\overline{a_1}a_1&-2\overline{a_2}a_1&\cdots&-2\overline{a_n}a_1\\-2\overline{a_1}a_2&1-2\overline{a_2}a_2&\cdots&-2\overline{a_n}a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-2\overline{a_1}a_n&-2\overline{a_2}a_n&\cdots&1-2\overline{a_n}a_n\end{pmatrix}=I-2\omega\omega^H.$$

又因为镜像变换在任意一组基下的矩阵都相似于 $\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$,

所以 $\det(I-2\omega\omega^H)=\det(\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1))=-1$.

1. 设 $A\in\mathbb{C}^{r\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times r}$, 证明:

(1) $\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$;

(2) $\mathrm{tr}(AB)^k=\mathrm{tr}(BA)^k$, 其中 k 为任一正整数.

证明: (1) 令 $A=(a_{ij})_{r\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times r}$, $AB=(c_{ij})_{r\times r}$, $BA=(d_{kl})_{n\times n}$, 其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, $d_{kl}=\sum_{j=1}^{r}b_{kj}a_{jl}$, 则

$$\mathrm{tr}AB=\sum_{i=1}^{r}c_{ii}=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{r}b_{ki}a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n}d_{kk}=\mathrm{tr}BA.$$

(2) 当 $k=1$ 时, 由(1)可得.

当 $k>1$ 时, $(AB)^k=[(AB)^{k-1}A]B$, $(BA)^k=B[(AB)^{k-1}A]$, 根据(1)可知

$\mathrm{tr}(AB)^k=\mathrm{tr}[(AB)^{k-1}A]B=\mathrm{tr}B[(AB)^{k-1}A]=\mathrm{tr}(BA)^k$.

2. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 存在正整数 k 使 $A^k=O$ (称 A 为幂零阵). 证明:

(1) $\det A=0$.

(2) $\mathrm{tr}A=0$.

(3) $\det(I+A)=1$.

(4) 若 $A\ne O$, 则 A 不能相似于对角阵.

证明: (1) $(\det A)^k=\det(A^k)=\det O=0\Rightarrow\det A=0$.

(2) 设 λ 为 A 的特征值, 则 λ^k 为 A^k 的特征值, 故由 $A^k=O$ 可得 $\lambda^k=0$, 从而 $\lambda=0$.

因此 $\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=0$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 为 A 的全体特征值.

(3) 对于任意的复数 λ 以及 n 维非零列向量 ξ, 有

$$A\xi=\lambda\xi\Leftrightarrow(I+A)\xi=(1+\lambda)\xi.$$

由此可见, λ 为 A 的特征值 $\Leftrightarrow 1+\lambda$ 为 $I+A$ 的特征值.

由 $A^k=O$ 可得 A 的特征值全为 0, 故 $I+A$ 的特征值全为 1,

因此 $\det(I+A)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=1$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 为 $I+A$ 的全体特征值.

(4) 由 $A^k=O$ 可得 A 的特征值全为 0.

假若 A 相似于对角阵 Λ, 即存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$,

则 $\Lambda=O$, 从而有 $A=P\Lambda P^{-1}=POP^{-1}=O$.

因此, 若 $A\ne O$, 则 A 不能相似于对角阵.

3. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 且 $\det A\ne0$, 又 α,β 为已知的 n 维列向量, 求方程 $f(\lambda)=\det(\lambda A-\alpha\beta^{\mathrm{T}})=0$ 的根.

解: 因为 $\det A\ne0$, $\det(\lambda A-\alpha\beta^{\mathrm{T}})=\det[(\lambda I-\alpha\beta^{\mathrm{T}}A^{-1})A]=\det(\lambda I-\alpha\beta^{\mathrm{T}}A^{-1})\det A$,

所以 $\det(\lambda A-\alpha\beta^{\mathrm{T}})=0\Leftrightarrow\det(\lambda I_n-\alpha\beta^{\mathrm{T}}A^{-1})=0$.

又因为 α 和 $\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}$ 分别为 $n\times1$ 和 $1\times n$ 矩阵, 根据第 3.1 节的例 3(2)可得

$$\lambda\det(\lambda I_n-\alpha\beta^{\mathrm{T}}A^{-1})=\lambda^n\det(\lambda-\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha)=\lambda^n(\lambda-\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha),$$

所以 $f(\lambda)=\det(\lambda I_n-\alpha\beta^{\mathrm{T}}A^{-1})=\lambda^{n-1}(\lambda-\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha)$.

可见 $f(\lambda)=0$ 的根为: 0 ($n-1$ 重), $\lambda-\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha$.

4. 设 V 为 n 维内积空间, ω 为 V 中单位向量, 作线性变换

$$f(\xi)=\xi-2(\xi,\omega)\omega\quad(\forall\xi\in V).$$

求 f 的特征多项式, 特征值及相应的特征子空间.

解: 将 ω 扩充为 V 的标准正交基 $\omega,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$,

则 $f(\omega)=-\omega$, $f(\varepsilon_i)=\varepsilon_i\ (i=2,\dots,n)$,

故 f 在这组基下的矩阵为 $A=\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$.

因而 f 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}$.

f 的特征值为 -1, 1 ($n-1$ 重).

对于任意的 $\xi\in V$, 设 ξ 在基 $\omega,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$,

则 $\xi=(\omega,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)X$, $f(\xi)=(\omega,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)AX$.

故 $\xi\in V_{-1}\Leftrightarrow f(\xi)=-\xi\Leftrightarrow AX=-X\Leftrightarrow(I+A)X=0\Leftrightarrow x_2=\dots=x_n=0\Leftrightarrow\xi\in L(\omega)$.

可见 $V_{-1}=L(\omega)$.

类似地, $\xi\in V_1\Leftrightarrow f(\xi)=\xi\Leftrightarrow AX=X\Leftrightarrow(I-A)X=0\Leftrightarrow x_1=0\Leftrightarrow\xi\in L(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$.

可见 $V_1=L(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)=L(\omega)^{\perp}$.

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}$, 求 $A^{100}-3A^{25}$.

解: $C(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-1&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-\lambda-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}$

$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda-3&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda+1)+4]$

$=(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$.

令 $f(\lambda)=\lambda^{100}-3\lambda^{25}=C(\lambda)g(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$, 则

$$4=f(-1)=a-b+c,$$
$$-2=f(1)=a+b+c,$$
$$25=f'(1)=2a+b,$$

c=13.

由此可得, $a=14$, $b=-3$, $c=-13$.

于是 $A^{100}-3A^{25}=f(A)=C(A)g(A)+14A^2-3A-13I=14A^2-3A-13I$

$$=14\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}-13\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}54&-6&25\\50&-2&25\\-112&12&-52\end{bmatrix}.$$

6. 证明: 相似的矩阵必有相同的最小多项式.

证明: 设 $P^{-1}AP=B$, 则 $PBP^{-1}=A$.

于是对于任意多项式 $\varphi(x)$, 有 $P^{-1}\varphi(A)P=\varphi(B)$, $P\varphi(B)P^{-1}=\varphi(A)$.

可见 $\varphi(A)=O\Leftrightarrow\varphi(B)=O$,

即 A 和 B 具有相同的化零多项式集.

因此 $m_A(x)\mid m_B(x)$ 且 $m_B(x)\mid m_A(x)$,

又因为 $m_A(x)$ 的 $m_B(x)$ 首相系数都是 1, 故 $m_A(x)=m_B(x)$.

7. 求解矩阵方程 $X^2-X-20I=O$, 其中 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

解: 因为 X 的最小多项式 $m(x)$ 整除其化零多项式 $\varphi(x)=x^2-x-20=(x-5)(x+4)$,

所以 $m(x)$ 没有重根, 且可能的特征值只有: 5, -4.

因此 X 相似于 $\begin{bmatrix}5I_r&O\\O&-4I_{n-r}\end{bmatrix}$, 其中 $0\le r\le n$,

即 $X=P\begin{bmatrix}5I_r&O\\O&-4I_{n-r}\end{bmatrix}P^{-1}$, 其中 P 为任意 n 阶可逆阵.

8. 设 f,g 为线性空间 V 上线性变换, 且 $fg=gf$. 证明: f 的特征子空间是 g 的不变子空间.

证明: 设 $V_\lambda=\{\xi\in V\mid f(\xi)=\lambda\xi\}$.

对于任意的 $\xi\in V_\lambda$, 由 $fg=gf$ 得 $f(g(\xi))=g(f(\xi))=g(\lambda\xi)=\lambda g(\xi)$, 即 $g(\xi)\in V_\lambda$.

因此 V_λ 是 g 的不变子空间.

9. 设 A 与 B 分别为 s 与 t 阶方阵, $C(\lambda)$为 A 的特征多项式,
   证明: $C(B)$可逆$\Leftrightarrow A$ 与 B 无公共特征值.

证明: ($\Rightarrow$)假若 A 与 B 有公共特征值λ, 则 $C(\lambda)=0$.
   设η为 B 的对应于λ的特征向量, 即$\eta\neq 0$ 而且 $B\eta=\lambda\eta$,
   于是 $C(B)\eta=C(\lambda)\eta=0$.
   又因为 $C(B)$可逆, 所以$\eta=C(B)^{-1}C(B)\eta=C(B)^{-1}0=0$. 但这与$\eta\neq 0$ 矛盾.
   故 A 与 B 无公共特征值.
   ($\Leftarrow$)设 B 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, 则 $C(B)$的特征值为 $C(\lambda_1), C(\lambda_2), ..., C(\lambda_m)$,
   若 A 与 B 无公共特征值, 则 $C(\lambda_1), C(\lambda_2), ..., C(\lambda_m)$全不为零,
   进而有 $\det C(B)=C(\lambda_1)C(\lambda_2)...C(\lambda_m)\neq 0$, 故 $C(B)$可逆.

10. 设 A 与 B 分别为 s 与 t 阶方阵, 证明: A 与 B 无公共特征值$\Leftrightarrow$矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

证明: ($\Leftarrow$)假若 A 与 B 有公共特征值λ, 则λ也是 B^T 的特征值.
   设ξ为 A 的对应于λ的特征向量, 则$\xi\neq 0$ 而且 $A\xi=\lambda\xi$.
   设η为 B^T 的对应于λ的特征向量, 则$\eta\neq 0$ 而且 $B^T\eta=\lambda\eta, \eta^TB=\lambda\eta^T$.
   令 $X=\xi\eta^T$, 则 $X\neq O$, 且
   $$AX=A(\xi\eta^T)=(A\xi)\eta^T=\lambda\xi\eta^T=\xi(\lambda\eta^T)=\xi(\eta^TB)=(\xi\eta^T)B=XB.$$
   但这与 $AX=XB$ 只有零解矛盾.
   故 A 与 B 无公共特征值.
   ($\Rightarrow$)设 A 的特征多项式为 $C_A(\lambda)$.
   假若矩阵方程 $AX=XB$ 有非零解 $X_{s\times t}$, 则 $O=C_A(A)X=XC_A(B)$.
   若 A 与 B 无公共特征值, 则由上题可知 $C_A(B)$可逆,
   进而有 $X=XC_A(B)C_A(B)^{-1}=OC_A(B)^{-1}=O$, 但这与 $X\neq O$ 矛盾.
   故矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

11. 设 A 与 B 分别为 s 与 t 阶方阵, D 是秩为 r 的 $s\times t$ 阵, 且 $AD=DB$.
   证明: A 与 B 至少有 r 个(k 重根计 k 个)公共特征值.

证明: 因为 D 是秩为 r 的 $s\times t$ 阵, 所以存在可逆矩阵 P, Q 使得 $D=P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}Q$.

   由 $AD=DB$ 得 $AP\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}QB$,

   从而有$(P^{-1}AP)\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}(QBQ^{-1})$.

   记 $M=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}, N=QBQ^{-1}=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22}\end{bmatrix}$, 其中 M_{11}, N_{11} 为 r 阶方阵,

   则$\begin{bmatrix} M_{11} & O \\ M_{21} & O\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}N=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ O & O\end{bmatrix}$,

   故 $M=\begin{bmatrix} C & M_{12} \\ O & M_{22}\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix} C & O \\ N_{21} & N_{22}\end{bmatrix}$, 其中 $M_{11}=C=N_{11}$.

   于是$|\lambda I_s-A|=|\lambda I_s-M|=|\lambda I_r-C|\times|\lambda I_{s-r}-M_{22}|$,
   $|\lambda I_t-B|=|\lambda I_t-N|=|\lambda I_r-C|\times|\lambda I_{t-r}-N_{22}|$.
   其中$|\lambda I_r-C|$为$|\lambda I_s-A|$与$|\lambda I_t-B|$得 r 次公因式,
   所以 A 与 B 至少有 r 个(k 重根计 k 个)公共特征值.

12. 证明: 酉矩阵之特征值的模必等于 1.

证明: 设 $A^HA=AA^H=I, A\xi=\lambda\xi$, 其中$\xi\neq 0$,
   则 $\bar{\lambda}\lambda\,\xi^H\xi=(\lambda\xi)^H(\lambda\xi)=(A\xi)^H(A\xi)=\xi^HA^HA\xi=\xi^H\xi$, 其中$\xi^H\xi\neq 0$,

   故$|\lambda|^2=\bar{\lambda}\lambda=1$, 因而$|\lambda|=1$.

13. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为上三角阵且主对角元全等于 k,
   证明: A 相似于对角阵$\Leftrightarrow A=kI$.

证明: ($\Leftarrow$) $A=kI\Rightarrow A$ 相似于对角阵 kI.
   ($\Rightarrow$)因为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为上三角阵且主对角元全等于 k,
   所以$|\lambda I-A|=(\lambda-k)^n$.
   若 A 相似于对角阵, 则 A 的最小多项式为$\lambda-k$,
   故 $A-kI=O$, 即 $A=kI$.
   ($\Rightarrow$)因为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为上三角阵且主对角元全等于 k,
   所以$|\lambda I-A|=(\lambda-k)^n$.
   若 A 相似于对角阵, 则存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=kI$,
   故 $A=PkIP^{-1}=kI$.

14. 设 $f\in \mathrm{Hom}(V, V)$.
   (1)若存在正整数 k 及$\alpha\in V$ 使 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0, f^k(\alpha)=0$.
   证明: 向量组$\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$线性无关; 且当 $\dim V=k$ 时, $f^k=0$.

证明: 由 $f^k(\alpha)=0$ 可得 $f^{k+1}(\alpha)=f[f^k(\alpha)]=f(0)=0$,
   依次类推, $f^l(\alpha)=0$, 其中 l 为任意的大于 k 的整数.
   若 $a_1\alpha+a_2f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)=0$, 则有
   $0=f^{k-1}(0)=f^{k-1}[a_1\alpha+a_2f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)]=a_1f^{k-1}(\alpha)+a_2f^k(\alpha)+...+a_kf^{2(k-1)}(\alpha)$
   $=a_1f^{k-1}(\alpha)+0+...+0=a_1f^{k-1}(\alpha)$.
   由于 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0$, 故 $a_1=0$.
   于是 $a_2f(\alpha)+a_3f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)=0$, 从而有
   $0=f^{k-2}(0)=f^{k-2}[a_2f(\alpha)+a_3f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)]=a_2f^{k-1}(\alpha)+a_3f^k(\alpha)+...+a_kf^{2(k-1)}(\alpha)$
   $=a_2f^{k-1}(\alpha)+0+...+0=a_2f^{k-1}(\alpha)$.
   由于 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0$, 故 $a_2=0$.
   依次类推, 可得 $a_1=a_2=...=a_k=0$.
   由此可见向量组$\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$线性无关.
   当 $\dim V=k$ 时, $\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$构成 V 的一组基,
   于是, 对于任意的$\xi\in V$, 可设$\xi=x_1\alpha+x_2f(\alpha)+...+x_kf^{k-1}(\alpha)$, 则有
   $f^k(\xi)=f^k[x_1\alpha+x_2f(\alpha)+...+x_kf^{k-1}(\alpha)]=x_1f^k(\alpha)+x_2f^{k+1}(\alpha)+...+x_kf^{2k-1}(\alpha)=0$.

证明: 由 $f^k(\alpha)=0$ 可得 $f^{k+1}(\alpha)=f[f^k(\alpha)]=f(0)=0$,
   依次类推, $f^l(\alpha)=0$, 其中 l 为任意的大于 k 的整数.
   假若$\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$线性相关, 则存在不全为零的数 $a_1, a_2, ..., a_k$ 使得
   $$a_1\alpha+a_2f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)=0,$$
   设 $a_1, a_2, ..., a_k$ 中第一个不等于零的是 a_i, 即 $a_1=a_2=...=a_{i-1}=0, a_i\neq 0$, 则
   $0=f^{k-i}(0)=f^{k-i}[a_1\alpha+a_2f(\alpha)+...+a_if^{i-1}(\alpha)+a_{i+1}f^i(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)]$
   $=f^{k-i}[a_if^{i-1}(\alpha)+a_{i+1}f^i(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)]$
   $=a_if^{k-1}(\alpha)+a_{i+1}f^k(\alpha)+...+a_kf^{2k-i-1}(\alpha)$
   $=a_if^{k-1}(\alpha)+0+...+0=a_if^{k-1}(\alpha)$.
   由于 $a_i\neq 0$, 故 $f^{k-1}(\alpha)=0$, 但这与 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0$ 矛盾!
   由此可见向量组$\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$线性无关.
   ......

   (2)若 $\dim V=k, f^k=0$, 但 $f^{k-1}\neq 0$, 则 f 的矩阵必相似于 $N=\begin{bmatrix} O & I_{k-1} \\ O & O\end{bmatrix}$.

证明: 因为 $f^k=0, f^{k-1}\neq 0$, 所以存在$\alpha\in V$ 使 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0, f^k(\alpha)=0$.
   又因为 $\dim V=k$, 所以由(1)可知$\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$构成 V 的一组基,
   而且 f 在这一组基下的矩阵为 $N=\begin{bmatrix} O & I_{k-1} \\ O & O\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{k-1} & 0\end{bmatrix}$
   故 f 的矩阵必相似于 N.

15. 设 $J_0=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{bmatrix}_{k\times k}=aI_k+N$, 且 $p(x)$为 x 的多项式, 证明:

$$p(J_0)=\begin{bmatrix} p(a) & p'(a) & p''(a)/2 & \cdots & p^{(k-2)}(a)/(k-2)! & p^{(k-1)}(a)/(k-1)! \\ 0 & p(a) & p'(a) & \cdots & p^{(k-3)}(a)/(k-3)! & p^{(k-2)}(a)/(k-2)! \\ 0 & 0 & p(a) & \cdots & p^{(k-4)}(a)/(k-4)! & p^{(k-3)}(a)/(k-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(a) & p'(a) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(a)\end{bmatrix}_{k\times k}.$$

证明: ① $(aI_k)^n=a^nI_k$.

② $N^2=\begin{bmatrix} O & I_{k-2} \\ O & O\end{bmatrix}, N^3=\begin{bmatrix} O & I_{k-3} \\ O & O\end{bmatrix}, ..., N^{k-1}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}, N^k=O$.

③ $aI_kN=NaI_k$.

④ $J_0^n=(aI_k+N)^n$
$=(aI_k)^n+C_n^1(aI_k)^{n-1}N+C_n^2(aI_k)^{n-2}N^2+...+C_n^{k-1}(aI_k)^{n-k+1}N^{k-1}+C_n^k(aI_k)^{n-k}N^k+...+N^n$
$=a^nI_k+C_n^1a^{n-1}N+C_n^2a^{n-2}N^2+...+C_n^{k-1}a^{n-k+1}N^{k-1}$

$$=\begin{bmatrix} a^n & C_n^1a^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & \cdots & C_n^{k-2}a^{n-k+2} & C_n^{k-1}a^{n-k+1} \\ 0 & a^n & C_n^1a^{n-1} & \cdots & C_n^{k-3}a^{n-k+3} & C_n^{k-2}a^{n-k+2} \\ 0 & 0 & a^n & \cdots & C_n^{k-4}a^{n-k+4} & C_n^{k-3}a^{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^n & C_n^1a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^n\end{bmatrix}_{k\times k}.$$

④设 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, 则

$p(a)=a_0+a_1a+a_2a^2+...+a_na^n=\sum_{i=0}^{n}a_ia^i$,

$p'(a)=a_1+2a_2a+3a_3a^2+...+na_na^{n-1}$
$=a_1+C_2^1a_2a+C_3^1a_3a^2+...+C_n^1a_na^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}C_i^1a_ia^{i-1}$,

$p''(a)=2a_2+6a_3a+12a_4a^2+...+n(n-1)a_na^{n-2}$,

$\frac{1}{2}p''(a)=C_2^2a_2+C_3^2a_3a+C_4^2a_4a^2+...+C_n^2a_na^{n-2}=\sum_{i=2}^{n}C_i^2a_ia^{i-2}$,

......

$p^{(k-1)}(a)=(k-1)!a_{k-1}+k...2a_ka+(k+1)k...3a_{k+1}a^2+...+n(n-1)...(n-k+2)a_na^{n-k+1}$,

$\frac{1}{(k-1)!}p^{(k-1)}(a)=C_{k-1}^{k-1}a_{k-1}+C_k^{k-1}a_ka+C_{k+1}^{k-1}a_{k+1}a^2+...+C_n^{k-1}a_na^{n-k+1}=\sum_{i=k-1}^{n}C_i^{k-1}a_ia^{i-k+1}$,

$p(J_0)=a_0I_k+a_1J_0+a_2J_0^2+...+a_nJ_0^n$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n}a_ia^i & \sum_{i=1}^{n}C_i^1a_ia^{i-1} & \sum_{i=2}^{n}C_i^2a_ia^{i-2} & \cdots & \sum_{i=k-2}^{n}C_i^{k-2}a_ia^{i-k+2} & \sum_{i=k-1}^{n}C_i^{k-1}a_ia^{i-k+1} \\ 0 & \sum_{i=0}^{n}a_ia^i & \sum_{i=1}^{n}C_i^1a_ia^{i-1} & \cdots & \sum_{i=k-3}^{n}C_i^{k-3}a_ia^{i-k+3} & \sum_{i=k-2}^{n}C_i^{k-2}a_ia^{i-k+2} \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{n}a_ia^i & \cdots & \sum_{i=k-4}^{n}C_i^{k-4}a_ia^{i-k+4} & \sum_{i=k-3}^{n}C_i^{k-3}a_ia^{i-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=0}^{n}a_ia^i & \sum_{i=1}^{n}C_i^1a_ia^{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=0}^{n}a_ia^i\end{bmatrix}_{k\times k}$$

$$=\begin{bmatrix} p(a) & p'(a) & p''(a)/2 & \cdots & p^{(k-2)}(a)/(k-2)! & p^{(k-1)}(a)/(k-1)! \\ 0 & p(a) & p'(a) & \cdots & p^{(k-3)}(a)/(k-3)! & p^{(k-2)}(a)/(k-2)! \\ 0 & 0 & p(a) & \cdots & p^{(k-4)}(a)/(k-4)! & p^{(k-3)}(a)/(k-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(a) & p'(a) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(a)\end{bmatrix}_{k\times k}$$

16. 分别写出满足下列条件的矩阵 A 的 Jordan 标准形之一切可能的形式(不计 Jordan 块的次序).
   (1) A 的特征多项式为 $C(\lambda)=(\lambda-a)^2(\lambda-b)^3\quad(a\neq b)$;

答: $\begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & \\ & & & & b\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & b & 1 & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b\end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & \\ & & & & b\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & & & \\ & & b & 1 & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b\end{bmatrix}$.

   (2) $C(\lambda)=(\lambda-a)^2(\lambda-b)^3$, 最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-b)^2, (a\neq b)$;

答: $\begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b\end{bmatrix}$.

   (3) $C(\lambda)=(\lambda-a)^4, m(\lambda)=(\lambda-a)^2, r(A-aI)=2$;

答: $\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & & \\ & & a & 1 \\ & & & a\end{bmatrix}$.

   (4) $C(\lambda)=(\lambda-a)^7, m(\lambda)=(\lambda-a)^3, r(A-aI)=4$.

答: $\begin{bmatrix} a &&&&&& \\ & a & 1 &&&& \\ && a & 1 &&& \\ &&& a &&& \\ &&&& a & 1 & \\ &&&&& a & 1 \\ &&&&&& a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 1 &&&&& \\ & a &&&&& \\ && a & 1 &&& \\ &&& a &&& \\ &&&& a & 1 & \\ &&&&& a & 1 \\ &&&&&& a \end{bmatrix}$.

17. 已知 n 阶阵 A 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, $p(x)$为 x 的多项式, 求 $p(A)$的特征多项式.

解: 设 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} J_1 &&& \\ & J_2 && \\ && \ddots & \\ &&& J_s \end{bmatrix}$, 其中 J 的主对角线元素依次为$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$,

则 $p(A)$相似于 $p(J)=\begin{bmatrix} p(J_1) &&& \\ & p(J_2) && \\ && \ddots & \\ &&& p(J_s) \end{bmatrix}$.

由第 15 题的结论可知, $p(J)$的主对角线元素依次为 $p(\lambda_1), p(\lambda_2), ..., p(\lambda_n)$.
因此 $p(A)$的特征多项式$|\lambda I-p(A)|=|\lambda I-p(J)|=[\lambda-p(\lambda_1)][\lambda-p(\lambda_2)]...[\lambda-p(\lambda_n)]$.

18. 证明: 复数域上任一 n 阶方阵 A 必有分解式 $A=S+M$, 其中 S 可相似对角化, M 是幂零阵, 且 $SM=MS$.

证明: 设 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} J_1 &&& \\ & J_2 && \\ && \ddots & \\ &&& J_s \end{bmatrix}=P^{-1}AP$,

其中 $J_i=\lambda_iI+N_i$, $N_i^n=O$, $\lambda_iIN_i=N_i\lambda_iI$, $i=1, 2, ..., n$.

因而 $J=D+N$, 其中 $N=\begin{bmatrix} N_1 &&& \\ & N_2 && \\ && \ddots & \\ &&& N_s \end{bmatrix}$满足 $N^n=O$,

$D=\begin{bmatrix} \lambda_1I &&& \\ & \lambda_2I && \\ && \ddots & \\ &&& \lambda_sI \end{bmatrix}$是对角阵, 且满足 $DN=ND$.

令 $S=PDP^{-1}$, $M=PNP^{-1}$, 则 $A=PJP^{-1}=P(D+N)P^{-1}=PDP^{-1}+PNP^{-1}=S+M$,
其中 S 相似于对角阵 D, $M^n=(PNP^{-1})^n=PN^nP^{-1}=POP^{-1}=O$,
且 $SM=(PDP^{-1})(PNP^{-1})=PDNP^{-1}=PNDP^{-1}=(PNP^{-1})(PDP^{-1})=MS$.

19. 已知 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, 当 $a\neq0$ 和 $a=0$ 时, 分别求 A^2 的 Jordan 标准形.

解: 设 $P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}A^2P=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=J^2=\begin{bmatrix} a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

(1)当 $a\neq0$ 时, $|\lambda I-J^2|=(\lambda-a^2)^4$, $r(a^2I-J^2)=3$,

故 J^2 的 Jordan 标准形为$\begin{bmatrix} a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$,

因而 A^2 的 Jordan 标准形为$\begin{bmatrix} a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

(2)当 $a=0$ 时, $|\lambda I-J^2|=\lambda^4$, $r(J^2)=2$, 且 $J^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$的最小多项式为$\lambda^2$,

极周多认为 $(J^2)^2=\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

故 J^2 的 Jordan 标准形为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 因而 A^2 的 Jordan 标准形为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

20. 设α, β为 n 维列向量, 研究矩阵$\alpha\beta^H$的 Jordan 标准形.

解: (1)当α, β中有一个为零时, $\alpha\beta^H=O$, 因而其 Jordan 标准形为 O.
(2)当α, β均为非零向量时, $\alpha\beta^H\neq O$, 因而 $0<r(\alpha\beta^H)\leq r(\alpha)=1$, 故 $r(\alpha\beta^H)=1$.
此时$\alpha\beta^H$的 2 阶主子式全为零,
所以$|\lambda I-\alpha\beta^H|=\lambda^n-\text{tr}(\alpha\beta^H)\lambda^{n-1}=\lambda^n-\text{tr}(\beta^H\alpha)\lambda^{n-1}=\lambda^n-\beta^H\alpha\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda-\beta^H\alpha)$.
①若$\beta^H\alpha=0$, 则$|\lambda I-\alpha\beta^H|=\lambda^n$, 且$(\alpha\beta^H)^2=(\alpha\beta^H)(\alpha\beta^H)=\alpha(\beta^H\alpha)\beta^H=O$,

可见$\alpha\beta^H$的最小多项式为λ^2, 故其 Jordan 标准形为$\begin{bmatrix} 0 &&& \\ & \ddots && \\ && 0 & \\ &&& 0 & 1 \\ &&&& 0 \end{bmatrix}$.

②若$\beta^H\alpha\neq0$, 则$|\lambda I-\alpha\beta^H|=\lambda^{n-1}(\lambda-\beta^H\alpha)$.

由 $r(\alpha\beta^H)=1$ 可知其 Jordan 标准形为$\begin{bmatrix} \beta^H\alpha &&& \\ & 0 && \\ && \ddots & \\ &&& 0 \end{bmatrix}$.

21. 利用 Jordan 标准形证明: 若矩阵 A 的最小多项式无重因式, 则 A 必可相似于对角阵.

证明: 因为 $J_0=\begin{bmatrix} a & 1 && \\ & a & \ddots & \\ && \ddots & 1 \\ &&& a \end{bmatrix}_{k\times k}$ 的最小多项式为$(\lambda-a)^k$,

所以 J_0 的最小多项式无重因式$\Leftrightarrow k=1$.

设 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} J_1 &&& \\ & J_2 && \\ && \ddots & \\ &&& J_s \end{bmatrix}$,

则 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)=m_{J_1}(\lambda)m_{J_2}(\lambda)\cdots m_{J_s}(\lambda)$,

其中 $m_{J_i}(\lambda)$ 为 J_i 的最小多项式, $i=1, 2, ..., s$.
故 A 的最小多项式无重因式$\Rightarrow$每个 J_i 的最小多项式无重因式
$\Rightarrow$每个 J_i 都是 1 阶的
$\Rightarrow J$ 为对角阵
$\Rightarrow A$ 相似于对角阵.

22. 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$与 $B=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ c & 5 & 0 \\ 1 & 2 & b \end{bmatrix}$相似, 问: a, b, c, d 应满足什么条件?

解: $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-d)$, $|\lambda I-B|=(\lambda-5)(\lambda-a)(\lambda-b)$.
若 A 与 B 相似, 则$(\lambda-1)^2(\lambda-d)=(\lambda-5)(\lambda-a)(\lambda-b)$, 因而 $a=b=1$, $d=5$.

此时 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $r(I-A)=2$, $I-B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c^{-c} & -4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

由 $r(I-B)=r(I-A)=2$ 可得$\begin{vmatrix} c & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\neq0$, 即 $c\neq-2_{2}$

此时 A 与 B 的 Jordan 标准形都是$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 故 A 与 B 相似.

综上所述, A 与 B 相似的充要条件是 $a=b=1$, $c\neq-2$, $d=5$.

23. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 证明: 矩阵方程 $X^2=A$ 有解, 但 $X^2=B$ 无解.

问 λ 补全

证明: (1) $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$, $r(2I-A)=2$,

故 A 的 Jordan 标准形为 $J_A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

设 $P^{-1}AP=J_A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $X=P\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/4 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}P^{-1}$, 则

$$X^2=P\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/4 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}PP^{-1}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/4 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/4 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/4 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}P^{-1}=A.$$

(2) $|\lambda I-B|=\lambda^3$, $r(B)=2$, 故 B 的 Jordan 标准形为 $J_B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

假若 $X^2=B$ 有解, 则 $X^6=B^3=O$, $2=r(B)\leq r(X)$, $|X|^2=|B|=0$, 因而$|X|=0$, $r(X)=2$.

由此可得 X 的 Jordan 标准形为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 于是 X^2 的 Jordan 标准形为$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

可见 $r(X^2)=r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=1$. 但另一方面 $r(X^2)=r(B)=2$.

此矛盾表明 $X^2=B$ 无解.

24. 求 Jordan 标准形, 并求 P, 使 $P^{-1}AP=J$.

(1)$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, (2)$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, (3)$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{bmatrix}$, (4)$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

解: (1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $r(A)=1$, $|\lambda I-A|=\lambda^3-\text{tr}(A)\lambda^2=\lambda^3$.

由此可见 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

令 $P^{-1}AP=J$, 其中 $P=(p_1, p_2, p_3)$,

则$(Ap_1, Ap_2, Ap_3)=A(p_1, p_2, p_3)=AP=PJ=(p_1, p_2, p_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=(0, p_1, 0)$,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \times3 & \times2 \\ & \\ & \end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 由此可得 $Ax=0$ 的基础解系: $\xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

取 $p_1=a\xi_1+b\xi_2$, $p_3=\xi_2$,

$(A, p_1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & a+b \\ -3 & -3 & 3 & -a \\ -2 & -2 & 2 & b \end{bmatrix}\begin{matrix} \times3 & \times2 \\ & \\ & \end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 2a+3b \\ 0 & 0 & 0 & 2a+3b \end{bmatrix}$,

当 $a=3$, $b=-2$ 时, $p_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $Ax=p_1$ 的一个特解为 $\eta=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

因为 p_1, η, p_3 线性无关, 所以可取 $p_2=\eta$使得 $P=(p_1, p_2, p_3)$可逆, 而且 $P^{-1}AP=J$.

(2) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -8 \\ 2 & \lambda+5 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$.

由此可见 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$,

又因为 $r(-I-A)=1$, 所以 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

令 $P^{-1}AP=J$, 其中 $P=(p_1, p_2, p_3)$,

则$(Ap_1, Ap_2, Ap_3)=A(p_1, p_2, p_3)=AP=PJ=(p_1, p_2, p_3)\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=(-p_1, p_1-p_2, -p_3)$,

$$-I-A=\begin{bmatrix}-4&0&-8\\-3&0&-6\\2&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(-I-A)x=0$的基础解系: $\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$,

取$p_1=a\xi_1+b\xi_2$, $p_3=\xi_2$,

$$(A+I,p_1)=\begin{bmatrix}4&0&8&-2b\\3&0&6&a\\-2&0&-4&b\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \times1\end{matrix}\ \begin{matrix}\\ \times2\end{matrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&2&a+b\\-2&0&-4&b\end{bmatrix}\times2\to\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&2&a+b\\0&0&0&2a+3b\end{bmatrix},$$

当$a=3$, $b=-2$时, $p_1=\begin{bmatrix}4\\3\\-2\end{bmatrix}$, $(A+I)x=p_1$的一个特解为$\eta=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,

因为p_1,η,p_3线性无关, 所以可取$p_2=\eta$使得$P=(p_1,p_2,p_3)$可逆, 而且$P^{-1}AP=J$.

(3) $A=\begin{bmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{bmatrix}$,

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-3&-3\\1&\lambda-8&-6\\-2&14&\lambda+10\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times2\end{matrix}\ \begin{matrix}\\ \times(-\lambda)\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&-\lambda^2+8\lambda-3&6\lambda-3\\1&\lambda-8&-6\\0&2\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-\lambda^2+8\lambda-3&6\lambda-3\\2\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=-(-\lambda^2+8\lambda-3)(\lambda-2)+(2\lambda-2)(6\lambda-3)=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)^2.$$

由此可见A的特征值为$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$,

又因为$r(-I-A)=2$, 所以 Jordan 标准形为$J=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

令$P^{-1}AP=J$, 其中$P=(p_1,p_2,p_3)$,

则$(Ap_1,Ap_2,Ap_3)=A(p_1,p_2,p_3)=AP=PJ=(p_1,p_2,p_3)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}=(0,-p_2,p_2-p_3)$,

对应于特征值$\lambda_1=0$的特征向量为$k\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$, $k\neq0$.

取$p_1=\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$.

$$-I-A=\begin{bmatrix}-1&-3&-3\\1&-9&-6\\-2&14&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&3/4\\0&1&3/4\\0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(-I-A)x=0$的基础解系: $\xi_1=\begin{bmatrix}-3\\-3\\4\end{bmatrix}$,

取$p_2=\xi_1$,

$$(A+I,p_2)=\begin{bmatrix}1&3&3&-3\\-1&9&6&-3\\2&-14&-9&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&3/4&-3/2\\0&1&3/4&-1/2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(A+I)x=p_3$的一个特解为$\eta=\begin{bmatrix}-3/2\\-1/2\\0\end{bmatrix}$,

取$p_3=\eta$, 则p_1,p_2,p_3线性无关, $P=(p_1,p_2,p_3)$可逆, 而且$P^{-1}AP=J$.

(4) $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3&-4\\0&\lambda-1&-2&-3\\0&0&\lambda-1&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^4$.

由此可见A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$,

又因为$r(I-A)=3$, 所以 Jordan 标准形为$J=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

令$P^{-1}AP=J$, 其中$P=(p_1,p_2,p_3,p_4)$,

则$(Ap_1,Ap_2,Ap_3,Ap_4)=(p_1,p_2,p_3,p_4)\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=(p_1,p_1+p_2,p_2+p_3,p_3+p_4)$.

对应于特征值$\lambda=1$的特征向量为$k(1,0,0,0)^T$, $k\neq0$.

取$p_1=(1,0,0,0)^T$.

$$(A-I,p_1)=\begin{bmatrix}0&2&3&4&1\\0&0&2&3&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}0&1&0&0&1/2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(A-I)x=p_1$的一个特解: $p_2=(0,1/2,0,0)^T$.

$$(A-I,p_2)=\begin{bmatrix}0&2&3&4&0\\0&0&2&3&1/2\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}0&1&0&0&-3/8\\0&0&1&0&1/4\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(A-I)x=p_1$的一个特解: $p_3=(0,-3/8,1/4,0)^T$.

$$(A-I,p_3)=\begin{bmatrix}0&2&3&4&0\\0&0&2&3&-3/8\\0&0&0&2&1/4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}0&1&0&0&5/16\\0&0&1&0&-3/8\\0&0&0&1&1/8\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(A-I)x=p_1$的一个特解: $p_4=(0,5/16,-3/8,1/8)^T$.

因为p_1,p_2,p_3,p_4线性无关, 所以$P=(p_1,p_2,p_3,p_4)$可逆, 而且$P^{-1}AP=J$.

25. 已知$A=\begin{bmatrix}1&1\\-10&3\end{bmatrix}$, 适当选择$d_1,d_2$, 由$D^{-1}AD$来作出$\rho(A)$较精确的估计, 其中

$$D=\operatorname{diag}(d_1,d_2).$$

解: $D^{-1}AD=\begin{bmatrix}d_1^{-1}&0\\0&d_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-10&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&0\\0&d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&d_2/d_1\\-10d_1/d_2&3\end{bmatrix}$.

设$x=\dfrac{d_1}{d_2}>0$, 则$D^{-1}AD=\begin{bmatrix}1&x^{-1}\\-10x&3\end{bmatrix}$,

$\rho_1=\max\{1+x^{-1},3+10x\}$, $\rho_2=\max\{1+10x,3+x^{-1}\}$, $\rho(A)\le\min\{\rho_1,\rho_2\}$.

令$1+x^{-1}=3+10x$, 则由$x>0$可得$x=\dfrac{\sqrt{11}-1}{10}$, 此时, $1+x^{-1}=3+10x=\sqrt{11}+2$.

$$\rho_1=\max\{1+x^{-1},3+10x\}=\begin{cases}1+x^{-1}, & x\in(0,\frac{\sqrt{11}-1}{10}];\\ 3+10x, & x\in(\frac{\sqrt{11}-1}{10},+\infty).\end{cases}$$

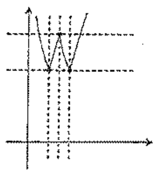
令$1+10x=3+x^{-1}$, 则由$x>0$可得$x=\dfrac{\sqrt{11}+1}{10}$, 此时, $1+10x=3+x^{-1}=\sqrt{11}+2$.

$$\rho_2=\max\{1+10x,3+x^{-1}\}=\begin{cases}3+x^{-1}, & x\in(0,\frac{\sqrt{11}+1}{10}];\\ 1+10x, & x\in(\frac{\sqrt{11}+1}{10},+\infty).\end{cases}$$

又因为$3+10x=3+x^{-1}$的正根为$x=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,

当$x=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$时, $3+10x=3+x^{-1}=3+\sqrt{10}$.

$$\text{于是可得}\min\{\rho_1,\rho_2\}=\begin{cases}1+x^{-1}, & x\in(0,\frac{\sqrt{11}-1}{10}];\\ 3+10x, & x\in(\frac{\sqrt{11}-1}{10},\frac{\sqrt{10}}{10}];\\ 3+x^{-1}, & x\in(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{11}+1}{10}];\\ 1+10x, & x\in(\frac{\sqrt{11}+1}{10},+\infty).\end{cases}$$



取$d_1=\sqrt{11}\pm1$, $d_2=10$, 则$x=\dfrac{\sqrt{11}\pm1}{10}$, $\min\{\rho_1,\rho_2\}$达到最小值$\sqrt{11}+2$.

故$\rho(A)\le\sqrt{11}+2$.

26. 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$ $|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ $(i=1,2,\dots,k)$, 证明: A的秩至少为k.

证明: 令$B=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&a_{1,k+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1k}&\cdots&a_{kk}&a_{k,k+1}&\cdots&a_{kn}\\0&\cdots&0&1&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_k\\\varepsilon_{k+1}\\\vdots\\\varepsilon_n\end{bmatrix}$, 则由条件可知$B$为行对角占优矩阵,

因而B可逆, 从而$\alpha_1,\dots,\alpha_k$线性无关, 故$r(A)\ge r(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=k$.

27. 已知$A=(a_{ij})_{n\times n}$为对角占优矩阵, 作$\Lambda=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$, 分别就$A$为行对角占优与列对角占优证明: $\rho(I-\Lambda^{-1}A)<1$.

证明: 因为$A=(a_{ij})_{n\times n}$为对角占优矩阵, 所以$a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$均非零,

从而$\Lambda=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$可逆, 而且有

$$I-\Lambda^{-1}A=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_{11}^{-1}&0&\cdots&0\\0&a_{22}^{-1}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-a_{11}^{-1}a_{12}&\cdots&-a_{11}^{-1}a_{1n}\\-a_{22}^{-1}a_{21}&0&\cdots&-a_{22}^{-1}a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{nn}^{-1}a_{n1}&-a_{nn}^{-1}a_{n2}&\cdots&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}.$$

(1)若A为行对角占优矩阵, 即$|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$, 则$1>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ii}^{-1}a_{ij}|$.

因而$\rho_1(I-\Lambda^{-1}A)=\max\{\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|\,|\,i=1,2,\dots,n\}=\max\{\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ii}^{-1}a_{ij}|\,|\,i=1,2,\dots,n\}<1$.

故$\rho(I-\Lambda^{-1}A)\le\rho_1(I-\Lambda^{-1}A)<1$.

(2)若A为列对角占优矩阵, 即$|a_{jj}|>\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}|$, 则$1>\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{jj}^{-1}a_{ij}|$.

令$C=\Lambda(I-\Lambda^{-1}A)\Lambda^{-1}=I-A\Lambda^{-1}=\begin{bmatrix}0&-a_{22}^{-1}a_{12}&\cdots&-a_{nn}^{-1}a_{1n}\\-a_{11}^{-1}a_{21}&0&\cdots&-a_{nn}^{-1}a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{11}^{-1}a_{n1}&-a_{22}^{-1}a_{n2}&\cdots&0\end{bmatrix}=(c_{ij})_{n\times n}$

因而$\rho_2(C)=\max\{\sum\limits_{i=1}^{n}|c_{ij}|\,|\,j=1,2,\dots,n\}=\max\{\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{jj}^{-1}a_{ij}|\,|\,j=1,2,\dots,n\}<1$.

故$\rho(I-\Lambda^{-1}A)=\rho(\Lambda(I-\Lambda^{-1}A)\Lambda^{-1})=\rho(C)\le\rho_2(C)<1$.

28. 设$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}$, 证明: $\rho(A)=10$.

证明: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3&-4\\-2&\lambda-3&-4&-1\\-3&-4&\lambda-1&-2\\-4&-1&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-10&\lambda-10&\lambda-10&\lambda-10\\-2&\lambda-3&-4&-1\\-3&-4&\lambda-1&-2\\-4&-1&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-10)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-2&\lambda-3&-4&-1\\-3&-4&\lambda-1&-2\\-4&-1&-2&\lambda-3\end{vmatrix}\begin{matrix}\times2&\times3&\times4\\ \\ \\ \\ \end{matrix}=(\lambda-10)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda-1&-2&1\\0&-1&\lambda+2&1\\0&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-10)\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&1\\-1&\lambda+2&1\\3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-10)\begin{vmatrix}\lambda+2&0&\lambda+2\\-1&\lambda+2&1\\3&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-10)(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&\lambda+2&1\\3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&\lambda+2&2\\3&2&\lambda-2\end{vmatrix}.$$

$$=(\lambda-10)(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+2&2\\2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda+2)(\lambda+2\sqrt{2})(\lambda-2\sqrt{2}).$$

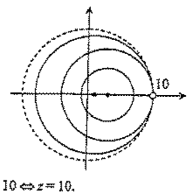
可见 A 的特征值为 $\lambda_1=10,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-2\sqrt{2},\ \lambda_4=2\sqrt{2}$.
故 $\rho(A)=10$.

证明：因为 $\rho_1(A)=10$，所以 $\rho(A)\le\rho_1(A)=10$.

又因为 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\10\\10\\10\end{bmatrix}=10\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$,

可见 10 是 A 的一个特征值.
综上可得 $\rho(A)=10$.

29. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\1&1&2&3\end{bmatrix}$，证明：$\rho(A)<10$.



证明：因为 $\rho_1(A)=10$，所以 $\rho(A)\le\rho_1(A)=10$.
A 的盖尔圆：
$C_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|\le 9\}$；　$C_2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-3|\le 7\}$；
$C_3=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|\le 9\}$；　$C_4=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-3|\le 4\}$.
令 $G=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$，则对于复数 $z\in G$，有 $|z|=10\Leftrightarrow z=10$.

又因为 $|10I-A|=\begin{vmatrix}9&-2&-3&-4\\-2&6&-4&-1\\-3&-4&9&-2\\-4&-1&-2&6\end{vmatrix}\times 2=\begin{vmatrix}1&-4&-7&8\\-2&6&-4&-1\\-3&-4&9&-2\\-4&-1&-2&6\end{vmatrix}\begin{matrix}\times2\ \times3\ \times4\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&-4&-7&8\\0&-2&-18&17\\0&-16&-12&22\\0&-8&-30&38\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}-2&-18&17\\-16&-12&22\\-8&-30&38\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&9&17\\8&6&22\\4&15&38\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-8)\ \times(-4)\end{matrix}=4\begin{vmatrix}1&9&17\\0&-66&-114\\0&-21&-30\end{vmatrix}$

$=4\begin{vmatrix}-66&-114\\-21&-30\end{vmatrix}=72\begin{vmatrix}22&19\\7&5\end{vmatrix}=-1656\ne 0$,

故 10 不是 A 的特征值.
综上可得 $\rho(A)<10$.

30. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1/n&1/n&\cdots&1/n&1/n\\2/n&2&1/n&\cdots&1/n&1/n\\1/n&1/n&4&\cdots&1/n&1/n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1/n&1/n&1/n&\cdots&2n-4&1/n\\1/n&1/n&1/n&\cdots&1/n&2n-2\end{bmatrix}$. 证明：$A$ 必相似于实对角阵.

证明：因为实矩阵 A 的 n 个盖尔圆 $C_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le\frac{n-1}{n}\}$，$C_2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-2|\le 1\}$，

$C_3=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-4|\le\frac{n-1}{n}\}$，…，$C_n=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-(2n-2)|\le\frac{n-1}{n}\}$ 互不相交，

即实矩阵 A 的盖尔圆都是 1 区，所以 A 相似于实对角阵.

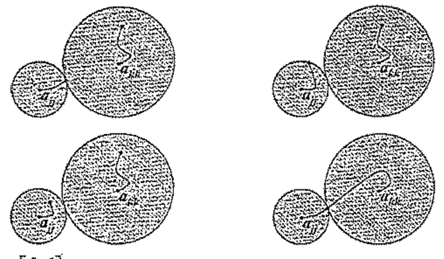
31. 若 A 的盖尔圆系中有一个 2 区由两外切圆组成. 证明：此两圆上必各有一特征值. 举例说明两圆内切时命题不成立.

证明：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$\Lambda=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$，

$$A(t)=\Lambda+t(A-\Lambda),\ 0\le t\le 1,$$

则 $A(0)=\Lambda$，$A(1)=A$.

$A(t)$ 的盖尔圆系 $G(t)=C_1(t)\cup C_2(t)\cup\ldots\cup C_n(t)$，
其中 $C_i(t)$ 为 $|z-a_{ii}|\le tR_i$ 含在 A 的盖尔圆 C_i 内 $(i=1,2,\ldots,n)$.
设 A 的盖尔圆系中有一个 2 区 G_2 由两外切圆 C_j 和 C_k 组成，
则当 t 从 0 变化到 1 时，$A(t)$ 的特征值 $\lambda_j(t)$ 由 $\lambda_j(0)=a_{jj}$ 连续地变化到 $\lambda_j(1)=\lambda_j$，
其轨迹完全落在 A 的盖尔圆 C_j 上；
同时，$A(t)$ 的特征值 $\lambda_k(t)$ 由 $\lambda_k(0)=a_{kk}$ 连续地变化到 $\lambda_k(1)=\lambda_k$，
其轨迹完全落在 A 的盖尔圆 C_k 上，
故 $\lambda_j\in C_j$，$\lambda_k\in C_k$.

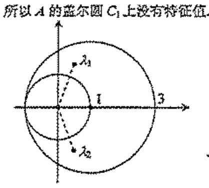


举例：设 $A=\begin{bmatrix}0&1\\-2&1\end{bmatrix}$，则 A 的盖尔圆 $C_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le 1\}$ 与 $C_2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|\le 2\}$ 内切，
而且 C_1 与 C_2 组成一个 2 区.

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda+2=(\lambda-\frac{1+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2})(\lambda-\frac{1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2})$.

A 的特征值为 $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$，$\lambda_2=\frac{1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$.

因为 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\sqrt{2}>1$，所以 A 的盖尔圆 C_1 上没有特征值.



1. 设 A 为正规阵，证明：
(1) A 为 Hermite 阵 $\Leftrightarrow$ A 的特征值全为实数.

证明：($\Rightarrow$) 设 A 为 Hermite 阵，即 $A^H=A$.
根据 Schur 引理，存在酉矩阵 U 以及上三角矩阵 T 使得 $U^HAU=T$.
于是有 $T^H=U^HA^HU=U^HAU=T$.
可见 T 为实对角阵，而且 A 酉相似于 T，故 A 的特征值全为实数.
($\Leftarrow$) 因为 A 为正规阵，所以 A 酉相似于对角阵.
若 A 的特征值全为实数，
则存在酉矩阵 U 使得 $U^HAU=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 均为实数.
于是有 $A=U\Lambda U^H$，$A^H=(U\Lambda U^H)^H=U\Lambda^HU^H=U\Lambda U^H=A$. 可见 A 为 Hermite 阵.

(2) A 为酉矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的特征值之模为 1.

证明：($\Rightarrow$) 设 $A^HA=AA^H=I$，$A\xi=\lambda\xi$，其中 $\xi\ne 0$，
若 A 的特征值全为实数，
则 $\bar{\lambda}\lambda\,\xi^H\xi=(\lambda\xi)^H(\lambda\xi)=(A\xi)^H(A\xi)=\xi^HA^HA\xi=\xi^H\xi$，其中 $\xi^H\xi\ne 0$，
故 $|\lambda|^2=\bar{\lambda}\lambda=1$，因而 $|\lambda|=1$.
($\Leftarrow$) 因为 A 为正规阵，所以 A 酉相似于对角阵.
设 $U^HAU=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$，其中 U 为酉矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，
则 $A=U\Lambda U^H$.
若 A 的特征值之模为 1，则 $\Lambda^H\Lambda=\mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1\lambda_1,\ \bar{\lambda}_2\lambda_2,\ldots,\ \bar{\lambda}_n\lambda_n)=I$，
于是 $A^HA=(U\Lambda U^H)^H(U\Lambda U^H)=(U\Lambda^HU^H)(U\Lambda U^H)=U\Lambda^H\Lambda U^H=UIU^H=I$.
故 A 为酉矩阵.

2. 证明：n 阶方阵 A 为正规阵 $\Leftrightarrow\|AX\|=\|A^HX\|$　$(\forall X\in\mathbb{C}^n)$

证明：($\Rightarrow$) 设 A 为 n 阶正规阵，则 $A^HA=AA^H$，$\forall X\in\mathbb{C}^n$ 有
$\|AX\|^2=(AX,AX)=(AX)^H(AX)=(X^HA^H)(AX)=(X^HA)(A^HX)=(A^HX)^H(A^HX)$
$=(A^HX,A^HX)=\|A^HX\|^2$.
因而 $\|AX\|=\|A^HX\|$.

($\Leftarrow$) ① 令 $(b_{ij})_{n\times n}=B=A^HA-AA^H$，　∴ B 是 Hermite 阵，$b_{ij}=\overline{b_{ji}}$.　证
则 $B^H=(A^HA-AA^H)^H=(A^HA)^H-(AA^H)^H=A^HA-AA^H=\underline{B}$. 下证 $B=0$　~~和 B 的 对 二次~~
② $\forall X\in\mathbb{C}^n$，有
$X^HBX=X^H(A^HA-AA^H)X=X^HA^HAX-X^HAA^HX=\underline{(AX)^H(AX)}-(A^HX)^H(A^HX)$
$=(AX,AX)-(A^HX,A^HX)=\|AX\|^2-\|A^HX\|^2=0$.
③ 对于 $\mathbb{C}^n$ 的基本单位向量组 $e_1,e_2,\ldots,e_n$，有
$0=(e_i+e_j)^HB(e_i+e_j)=\underbrace{e_i^HBe_i}_{=0}+e_i^HBe_j+e_j^HBe_i+\underbrace{e_j^HBe_j}_{=0}=\underbrace{e_i^HBe_j}_{=b_{ij}}+\underbrace{e_j^HBe_i}_{b_{ji}}$
$=b_{ij}+b_{ji}=b_{ij}+\overline{b_{ij}}=2\mathrm{Re}(b_{ij})$;　$a+bi\ \ -a+bi$　$a-bi$
$0=(e_i+\mathrm{i}e_j)^HB(e_i+\mathrm{i}e_j)=e_i^HBe_i+\mathrm{i}e_i^HBe_j-\mathrm{i}e_j^HBe_i+\underbrace{e_j^HBe_j}_{=0}=\underbrace{\mathrm{i}e_i^HBe_j}_{\mathrm{i}b_{ij}}-\underbrace{\mathrm{i}e_j^HBe_i}_{\mathrm{i}b_{ji}}$
$=\mathrm{i}b_{ij}-\mathrm{i}b_{ji}=\mathrm{i}b_{ij}-\mathrm{i}\overline{b_{ij}}=-2\mathrm{Im}(b_{ij})$;
由此可得 $b_{ij}=0$，$\forall i,j=1,2,\ldots,n$.　$=i(b_{ij}-\overline{b_{ij}})$
故 $A^HA-AA^H=B=O$，即 $A^HA=AA^H$. 可见 A 为正规阵.　$=i(i2bi)$　$=-2b$

3. 证明：(1) 若 A 为正规阵，则 $A-\lambda I$ 也是正规阵.

证明：因为 A 为正规阵，即 $A^HA=AA^H$，所以
$$(A-\lambda I)^H(A-\lambda I)=(A^H-\bar{\lambda}I)(A-\lambda I)=A^HA-\lambda A^H-\bar{\lambda}A+\bar{\lambda}\lambda I$$
$$=AA^H-\lambda A^H-\bar{\lambda}A+\bar{\lambda}\lambda I=(A-\lambda I)(A^H-\bar{\lambda}I)$$
$$=(A-\lambda I)(A-\lambda I)^H,$$

可见 $A-\lambda I$ 也是正规阵.

证明：因为 A 为正规阵，所以 A 酉相似于对角阵.
设 $U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$，其中 U 为酉矩阵，
则 $U^H(A-\lambda I)U=U^HAU-\lambda U^HU=\mathrm{diag}(\lambda_1-\lambda,\lambda_2-\lambda,\ldots,\lambda_n-\lambda)$，
可见 $A-\lambda I$ 也酉相似于对角阵，因而 $A-\lambda I$ 也是正规阵.

(2) 若 A 为正规阵，则 $AX=\lambda X\Leftrightarrow A^HX=\bar{\lambda}X$（即 A 的特征值 λ 之共轭 $\bar{\lambda}$ 为 A^H 的特征值，且可对应于相同的特征向量）.

证明：($\Rightarrow$) 因为 A 为正规阵，所以 $A-\lambda I$ 也是正规阵.
又因为 $AX=\lambda X$，故 $(A-\lambda I)X=0$.
于是 $[(A-\lambda I)^HX]^H[(A-\lambda I)^HX]=X^H(A-\lambda I)(A-\lambda I)^HX=X^H(A-\lambda I)^H(A-\lambda I)X=0$，
因而 $A^HX-\bar{\lambda}X=(A^H-\bar{\lambda}I)X=(A-\lambda I)^HX=0$.
可见 $A^HX=\bar{\lambda}X$.
($\Leftarrow$) 因为 A 为正规阵，所以 $A-\lambda I$ 也是正规阵.
又因为 $A^HX=\bar{\lambda}X$，故 $(A-\lambda I)^HX=(A^H-\bar{\lambda}I)X=A^HX-\bar{\lambda}X=0$.
于是 $[(A-\lambda I)X]^H[(A-\lambda I)X]=X^H(A-\lambda I)^H(A-\lambda I)X=X^H(A-\lambda I)(A-\lambda I)^HX=0$，
因而 $AX-\lambda X=(A-\lambda I)X=0$.
可见 $AX=\lambda X$.

4. 证明：若 A 是正规阵，有 r 个互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$，则存在 r 个矩阵 $P_1,P_2,\ldots,P_r$，使
(1) $A=\sum_{i=1}^r\lambda_iP_i$；
(2) $P_i^H=P_i=P_i^2$　$(i=1,2,\ldots,r)$；
(3) $i\ne j$ 时，$P_iP_j=O$；
(4) $\sum_{i=1}^rP_i=I$.

证明：因为 A 为正规阵，所以 A 酉相似于对角阵.
若有 r 个互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$，设 λ_i 的（代数）重数为 c_i，$i=1,2,\ldots,r$，
则存在酉矩阵 U，使得 $U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1I_{c_1},\lambda_2I_{c_2},\ldots,\lambda_rI_{c_r})$.
令 $P_i=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H$，$i=1,2,\ldots,r$，则

(1) $A=U\mathrm{diag}(\lambda_1I_{c_1},\lambda_2I_{c_2},\ldots,\lambda_rI_{c_r})U^H=\sum_{i=1}^r\lambda_iP_i$；

(2) $P_i^H=[U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H]^H=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})^HU^H$
$=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H=P_i$　$(i=1,2,\ldots,r)$；
$P_i^2=[U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H][U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H]$
$=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H$
$=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H=P_i$　$(i=1,2,\ldots,r)$；

(3) $i\ne j$ 时，
$P_iP_j=[U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H][U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_j},\ldots,O_{c_r})U^H]$
$=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_j},\ldots,O_{c_r})U^H$
$=UOU^H=O$；

(4) $\sum_{i=1}^rP_i=\sum_{i=1}^rU\mathrm{diag}(O_{c_1},\cdots,I_{c_i},\cdots,O_{c_r})U^H=U\left[\sum_{i=1}^r\mathrm{diag}(O_{c_1},\cdots,I_{c_i},\cdots,O_{c_r})\right]U^H$
$=UIU^H=I$.

5. 证明：若对 n 阶方阵 A 存在满足上题四个方程的 r 个互异数 λ_i 及 r 个非零矩阵 P_i，则
(1) A 为正规阵；
(2) A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$；
(3)相应于特征值 λ_k 的特征子空间 $V_{\lambda_k} = \mathrm{R}(P_k)$.

证明：(1) $A^HA = (\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i)^H(\sum_{j=1}^r \lambda_j P_j) = (\sum_{i=1}^r \overline{\lambda_i} P_i^H)(\sum_{j=1}^r \lambda_j P_j) = \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r \overline{\lambda_i} P_i^H \lambda_j P_j = \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r \overline{\lambda_i}\lambda_j P_i P_j$

$= \sum_{i=1}^r \overline{\lambda_i}\lambda_i P_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overline{\lambda_i} P_i = \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r \lambda_i\overline{\lambda_j} P_i P_j = \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r \lambda_i P_i \overline{\lambda_j} P_j^H$

$= (\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i)(\sum_{j=1}^r \overline{\lambda_j} P_j^H) = (\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i)(\sum_{j=1}^r \lambda_j P_j)^H = AA^H$.

(2)对于任意的 $X \in \mathrm{C}^n$，有 $X = (\sum_{i=1}^r P_i)X = P_1X + \ldots + P_rX \in \mathrm{R}(P_1) + \ldots + \mathrm{R}(P_r)$.
故 $\mathrm{C}^n = \mathrm{R}(P_1) + \ldots + \mathrm{R}(P_r)$.
又因为对于任意的 $\xi \in \mathrm{R}(P_i)$，存在 $\eta \in \mathrm{C}^n$ 使得 $\xi = P_i\eta$，
于是 $A\xi = AP_i\eta = (\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i)P_i\eta = \lambda_i P_i P_i\eta = \lambda_i P_i\eta = \lambda_i\xi$.
可见 $\mathrm{R}(P_i) \subseteq V_{\lambda_i}$，$i = 1, 2, \ldots, r$，
由此可得 $\mathrm{C}^n = \mathrm{R}(P_1) + \ldots + \mathrm{R}(P_r) \subseteq V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r} \subseteq \mathrm{C}^n$.
因而 $\mathrm{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$，
所以 A 相似于对角阵且有 r 个互异的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.
(3)在证明(2)的过程中已经得到 $\mathrm{R}(P_i) \subseteq V_{\lambda_i}$，因而 $\dim\mathrm{R}(P_i) \le \dim V_{\lambda_i}$ $i = 1, 2, \ldots, r$.
另一方面，$\mathrm{C}^n = \mathrm{R}(P_1) + \ldots + \mathrm{R}(P_r) = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$.
假若存在 $\dim\mathrm{R}(P_i) < \dim V_{\lambda_i}$，
则 $n = \dim \mathrm{C}^n \le \dim\mathrm{R}(P_1) + \ldots + \dim\mathrm{R}(P_r) < \dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_r} = n$，矛盾!
故 $\dim\mathrm{R}(P_i) = \dim V_{\lambda_i}$，$i = 1, 2, \ldots, r$，
因此 $\mathrm{R}(P_i) = V_{\lambda_i}$，$i = 1, 2, \ldots, r$.

6. 设 $\alpha \in \mathrm{C}^n$，且 $\alpha^H\alpha < 1$，证明：$I - \alpha\alpha^H$ 是正定阵.
证明：首先，$(I - \alpha\alpha^H)^H = I - \alpha\alpha^H$，故 $I - \alpha\alpha^H$ 是 Hermit 阵.
其次，因为 α 和 α^H 分别为 $n\times1$ 和 $1\times n$ 矩阵，根据第 3.1 节的例 3(2)可得
$$\lambda|\lambda I - \alpha\alpha^H| = \lambda^n|\lambda - \alpha^H\alpha| = \lambda^n(\lambda - \alpha^H\alpha),$$
所以 $|\lambda I - \alpha\alpha^H| = \lambda^{n-1}(\lambda - \alpha^H\alpha)$，可见 $\alpha\alpha^H$ 的特征值为 0($n-1$ 重)和 $\alpha^H\alpha$.
因而 $I - \alpha\alpha^H$ 的特征值为 1($n-1$ 重)和 $1-\alpha^H\alpha$.
最后，因为 $\alpha^H\alpha < 1$，所以 $I - \alpha\alpha^H$ 的特征值全为正数，故 $I - \alpha\alpha^H$ 是正定阵.

7. 证明：Hermite 阵 A 是半正定阵 $\Leftrightarrow$ A 的特征值非负.
证明：设 $U^HAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，其中 U 为酉矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.
($\Rightarrow$)若 A 是半正定阵，则
$$\lambda_i = e_i^H\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)e_i = e_i^HU^HAUe_i = (Ue_i)^HA(Ue_i) \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$ $X=UY$
($\Leftarrow$)设 A 的特征值非负. $Y^H = U^H\xi$
对于任意的 $\xi \in \mathrm{C}^n$，令 $U^H\xi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$，则 $\xi = U(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. $X = UY$
$\xi^HA\xi = \xi^HA\xi = [U(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T]^HA[U(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T]$ $X^HAX = Y^HU^HAUY$
$= (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n})U^HAU(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$

$= (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n})\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$
$= \lambda_1|y_1|^2 + \lambda_2|y_2|^2 + \ldots + \lambda_n|y_n|^2 \ge 0.$
可见 A 是半正定阵.

8. 证明：Hermite 阵 A 是半正定阵 $\Leftrightarrow$ A 的一切主子式非负.
证明：($\Rightarrow$)设 A 是半正定阵，$A_k = \begin{bmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{bmatrix}$，$k = 1, \ldots, n$.
对于任意的 $X_k = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})^T$，
令 n 维列向量 $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$，其中 $x_j = 0$，$\forall j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$，
则 $X_k^HA_kX_k = X^HAX \ge 0$.
由此可见 A_k 是半正定的，因而 $|A_k| \ge 0$.
($\Leftarrow$)设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. 下面对 A 的阶数 n 用数学归纳法：
①当 $n = 1$ 时，$A = a_{11}$. 由 A 的一切主子式非负可得 $a_{11} \ge 0$，因而 $A = a_{11}$ 半正定.
②当 $n > 1$ 时，假设一切主子式非负的 $n-1$ 阶 Hermite 阵是半正定阵的.
下面证明一切主子式非负的 n 阶 Hermite 阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是半正定阵的.
(i)若 $a_{11} = 0$，则对于任意的 $j > 1$，由于 A 的一切 2 阶主子式非负，故有
$$-|a_{1j}|^2 = -\overline{a_{j1}}a_{1j} = -a_{j1}a_{1j} = \begin{vmatrix} 0 & a_{1j} \\ a_{j1} & a_{jj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{j1} & a_{jj} \end{vmatrix} \ge 0,$$
由此可得 $a_{1j} = 0$，$j = 2, \ldots, n$.
于是 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$，
其中 $B = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为一切主子式非负的 $n-1$ 阶 Hermite 阵，
故由归纳假设可知 B 是半正定阵的.
于是对于任意的 n 维列向量 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，令 $Y = (x_2, \ldots, x_n)^T$，则
$$X^HAX = Y^HBY \ge 0.$$
可见 A 是半正定阵.
(ii)若 $a_{11} \ne 0$，则由 A 的一切主子式非负可得 $a_{11} > 0$.
设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^H \\ \alpha & B \end{bmatrix}$，其中 $B = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，
则 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^H \\ \alpha & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^H \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^H \end{bmatrix}$.
令 $C = B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^H$，
则 C 的任一 k 阶主子阵 C_k 由 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ 的第 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ($2 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$)行与列交叉处的元素构成，而且 $C_k = B_k - a_{11}^{-1}\beta\beta^H$，
其中 B_k 由 A 的第 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 行与列交叉处的元素构成，
$\beta^H = (a_{1i_1}, a_{1i_2}, \ldots, a_{1i_k})$.
因而 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B_k - a_{11}^{-1}\beta\beta^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\beta & I_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \beta^H \\ \beta & B_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\beta^H \\ 0 & I_k \end{bmatrix}$，

其中 $\begin{bmatrix} a_{11} & \beta^H \\ \beta & B_k \end{bmatrix}$ 为 A 的第 $1, i_1, i_2, \ldots, i_k$ 行与列交叉处的元素构成的 $k+1$ 主子阵，
故 $a_{11}|C_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & C_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta^H \\ \beta & B_k \end{vmatrix} \ge 0$，可见 $|C_k| \ge 0$，
这就是说 C 的主子式也全非负.
故由归纳假设可知 C 是半正定阵的.
于是存在 $n-1$ 阶可逆阵 P，使得 $P^HCP = \mathrm{diag}(d_2, \ldots, d_n)$，其中 $d_2, \ldots, d_n$ 全非负.
令 $Q = \begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^H \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$，则
$$Q^HAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^H \\ \alpha & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^H \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & P^HCP \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(a_{11}, d_2, \ldots, d_n),$$
由此可见 A 是半正定阵.

9. 证明：Hermite 阵 A 是负定阵 $\Leftrightarrow$ A 的 k 阶顺序主子式与 $(-1)^k$ 同号.
证明：设 A 是 Hermite 阵，即 $A^H = A$，则 $(-A)^H = -A$，即 $-A$ 也是 Hermite 阵.
设 D_k 为 A 的 k 阶顺序主子式，则 $-A$ 的 k 阶顺序主子式 $\Delta_k = (-1)^kD_k$.
因此，Hermite 阵 A 是负定阵 $\Leftrightarrow$ $-A$ 是正定阵
$\Leftrightarrow$ $-A$ 的 k 阶顺序主子式 Δ_k 全为正数
$\Leftrightarrow$ A 的 k 阶顺序主子式 D_k 与 $(-1)^k$ 同号.

10. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为正定阵. 证明：$\max\{|a_{ij}| \mid 1 \le i \ne j \le n\} < \max\{|a_{ii}| \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$.
证明：因为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为正定阵，所以对于任意的 $1 \le i < j \le n$，有
$$a_{ii}, a_{jj} > 0 \text{ 而且 } a_{ii}a_{jj} - a_{ji}a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} > 0.$$ $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$
从而 $|a_{ij}|^2 = \overline{a_{ij}}a_{ij} < a_{ii}a_{jj} \le (\max\{a_{kk} \mid k = 1, 2, \ldots, n\})^2$，
故 $|a_{ji}| = |\overline{a_{ij}}| = |a_{ij}| < \max\{a_{kk} \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$.
可见 $\max\{|a_{ij}| \mid 1 \le i \ne j \le n\} < \max\{|a_{ii}| \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$.

11. 设 A 为半正定阵. 证明：
(1)必存在半正定阵 S 使 $A = S^2$.
证明：因为 A 为半正定阵，所以存在酉矩阵 Q 使得 $Q^HAQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，
其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为 A 的特征值，且 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 全为非负实数.
令 $S = Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})Q^H$，
则 S 的特征值为 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$，因而 S 也是半正定阵，而且有
$A = Q\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)Q^H$
$= Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})Q^H$
$= Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})Q^HQ\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})Q^H = S^2$.

(2) $|Y^HAX|^2 \le |Y^HAY||X^HAX|$，$\forall X, Y \in \mathrm{C}^n$.
证明：$|Y^HAX|^2 = |Y^HSSX|^2 = |Y^HS^HSX|^2 = |(SY)^HSX|^2 = |(SX, SY)|^2 \le (SX, SX)(SY, SY)$

$= (SX)^HSX(SY)^HSY = X^HS^HSXY^HS^HSY = X^HSSXY^HSSY$
$= X^HAXY^HAY = |Y^HAY||X^HAX|$.

12. 设 T_1, T_2 为主对角元恒正的上三角阵. 若 $T_1^HT_1 = T_2^HT_2$，证明：$T_1 = T_2$.
证明：设 $T_1 = (t_{ij})_{n\times n}$，$T_2 = (\tau_{ij})_{n\times n}$ 为主对角元恒正的上三角阵，
则 T_1, T_2 可逆，而且 T_1^{-1}, T_2^{-1} 也是主对角元恒正的上三角阵.
若 $T_1^HT_1 = T_2^HT_2$，则 $T_1T_2^{-1} = (T_1^H)^{-1}T_2^H$，
其中 $T_1T_2^{-1}$ 为主对角元恒正的上三角阵，
$(T_1^H)^{-1}T_2^H = (T_1^{-1})^HT_2^H$ 为主对角元恒正的下三角阵，
故 $\mathrm{diag}(t_{11}\tau_{11}^{-1}, t_{22}\tau_{22}^{-1}, \ldots, t_{nn}\tau_{nn}^{-1}) = T_1T_2^{-1} = (T_1^H)^{-1}T_2^H = \mathrm{diag}(t_{11}^{-1}\tau_{11}, t_{22}^{-1}\tau_{22}, \ldots, t_{nn}^{-1}\tau_{nn})$.
由此可得 $t_{ii}\tau_{ii}^{-1} = t_{ii}^{-1}\tau_{ii} = (t_{ii}\tau_{ii}^{-1})^{-1} > 0$，从而 $t_{ii}\tau_{ii}^{-1} = 1$，$i = 1, 2, \ldots, n$.
因此 $T_1T_2^{-1} = \mathrm{diag}(t_{11}\tau_{11}^{-1}, t_{22}\tau_{22}^{-1}, \ldots, t_{nn}\tau_{nn}^{-1}) = I$，即 $T_1 = T_2$.

13. 设 A, B 为同阶 Hermite 阵，且 A 为正定阵. 证明：存在可逆阵 C，使 C^HAC 与 C^HBC 均为对角阵.
证明：设 A 为 n 阶正定阵，则存在 n 阶可逆阵 P 使得 $P^HAP = I$.
设 B 为 n 阶 Hermite 阵，则 P^HBP 也是 n 阶 Hermite 阵，
故存在 n 阶酉矩阵 U 使得 $U^H(P^HBP)U$ 为对角阵.
令 $C = PU$，则 C 为 n 阶可逆阵，而且
$$C^HAC = (PU)^HA(PU) = U^HP^HAPU = U^HIU = U^HU = I,$$
$$C^HBC = (PU)^HB(PU) = U^H(P^HBP)U$$
均为对角阵.

14. 设 A 为 n 阶正定阵，作 n 元 Hermite 二次型 $f(X) = \begin{vmatrix} A & X \\ X^H & 0 \end{vmatrix}$ ($X \in \mathrm{C}^n$)，证明：f 是负定的.
证明：因为 A 为 n 阶正定阵，所以存在可逆阵 P 使得 $A = P^HP$.
从而 $A^{-1} = (P^HP)^{-1} = P^{-1}(P^{-1})^H$ 也是正定阵.
又因为 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -X^HA^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & X \\ X^H & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A^{-1}X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -X^HA^{-1}X \end{bmatrix}$，
所以 $-(X^HA^{-1}X)|A| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & -X^HA^{-1}X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & X \\ X^H & 0 \end{vmatrix}$，
其中 $|A| > 0$，且对于任意的非零向量 $X \in \mathrm{C}^n$，$X^HA^{-1}X > 0$，因而 $f(X) = \begin{vmatrix} A & X \\ X^H & 0 \end{vmatrix} < 0$.
故 f 是负定的.

15. 设正规阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，相应的标准正交特征向量系为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
证明：线性方程组 $AX = kX + b$，$k \in \mathrm{C}$，$b \in \mathrm{C}^n$，$k \ne \lambda_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$)的解可表示为
$$X = \sum_{i=1}^n \frac{(b, X_i)}{\lambda_i - k}X_i.$$
证明：设 $b = b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n$，
则 $(b, X_i) = (b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n, X_i) = b_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$.
当 $X = \sum_{i=1}^n \frac{(b, X_i)}{\lambda_i - k}X_i$ 时，
$$AX = \sum_{i=1}^n \frac{(b, X_i)}{\lambda_i - k}AX_i = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_ib_i}{\lambda_i - k}X_i = \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda_i - k + k)b_i}{\lambda_i - k}X_i$$
$$= \sum_{i=1}^n \frac{kb_i}{\lambda_i - k}X_i + \sum_{i=1}^n b_iX_i = kX + b.$$

设 $X=c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n$，则

$$AX=A(c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n)=c_1AX_1+c_2AX_2+\ldots+c_nAX_n$$
$$=c_1\lambda_1X_1+c_2\lambda_2X_2+\ldots+c_n\lambda_nX_n.$$

若 $AX=kX+b$，则 $c_i\lambda_i=kc_i+b_i$，$c_i=\dfrac{b_i}{\lambda_i-k}=\dfrac{\langle b,X_i\rangle}{\lambda_i-k}$，$i=1,2,\ldots,n$.

故 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\langle b,X_i\rangle}{\lambda_i-k}X_i$.

证明：令 $U=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，则 $U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$.

于是 $U^H(A-kI)U=\mathrm{diag}(\lambda_1-k,\lambda_2-k,\ldots,\lambda_n-k)$，

$$A-kI=U\mathrm{diag}(\lambda_1-k,\lambda_2-k,\ldots,\lambda_n-k)U^H.$$

若 $k\neq\lambda_i\,(i=1,2,\ldots,n)$，则 $A-kI$ 可逆，而且

$$(A-kI)^{-1}=U\mathrm{diag}(\lambda_1-k,\lambda_2-k,\ldots,\lambda_n-k)^{-1}U^H.$$

因而有 $AX=kX+b\Leftrightarrow(A-kI)X=b\Leftrightarrow X=(A-kI)^{-1}b$

$$\Leftrightarrow X=U\mathrm{diag}(\lambda_1-k,\lambda_2-k,\ldots,\lambda_n-k)^{-1}U^Hb$$

$$=(X_1,X_2,\ldots,X_n)\begin{pmatrix}(\lambda_1-k)^{-1}&&&\\&(\lambda_2-k)^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&(\lambda_n-k)^{-1}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}X_1^Hb\\X_2^Hb\\\vdots\\X_n^Hb\end{bmatrix}$$

$$=(X_1,X_2,\ldots,X_n)\begin{pmatrix}\dfrac{\langle b,X_1\rangle}{\lambda_1-k}\\\dfrac{\langle b,X_2\rangle}{\lambda_2-k}\\\vdots\\\dfrac{\langle b,X_n\rangle}{\lambda_n-k}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle b,X_i\rangle}{\lambda_i-k}X_i.$$

16. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 阵，且 B 是正定阵. 设有非零 n 维列向量 X 及数 λ 使

$$AX=\lambda BX,\qquad(*)$$

则称 λ 为 A (关于 B)的广义特征值.

(1)证明：λ 为实数，且 λ 是 $\det(\lambda I-B^{-1}A)=0$ 的根.

证明：因为 B 是正定阵，所以 B 可逆，且对于任意的 n 维非零列向量 X 有 $X^HBX>0$.

若有非零 n 维列向量 X 及数 λ 使 $AX=\lambda BX$，则 $(\lambda I-B^{-1}A)X=B^{-1}(\lambda B-A)X=0$，

故 $\det(\lambda I-B^{-1}A)=0$.

同时由 A,B 为 n 阶 Hermite 阵以及 $X^HAX=\lambda X^HBX$ 可得 $\lambda=\dfrac{X^HAX}{X^HBX}$ 为实数.

(2)将满足(*)式的 λ 按大到小排列($\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n$)，证明

$$\lambda_1=\max\left\{\frac{X^HAX}{X^HBX}\,\middle|\,0\neq X\in\mathbb{C}^n\right\},\ \lambda_n=\min\left\{\frac{X^HAX}{X^HBX}\,\middle|\,0\neq X\in\mathbb{C}^n\right\}.$$

证明：假若 λ 是 $\det(\lambda I-B^{-1}A)=0$ 的根，

则存在非零 n 维列向量 X 使 $(\lambda I-B^{-1}A)X=0$，由此可得 $AX=\lambda BX$，

可见 λ 满足(*)式 $\Leftrightarrow\lambda$ 为 $B^{-1}A$ 的特征值，而且由(1)可知 $B^{-1}A$ 的特征值全为实数.

于是可设 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n$ 为 $B^{-1}A$ 的特征值.

因为 B 是正定阵，所以存在可逆阵 P 使得 $B=P^HP$.

于是 $B^{-1}A=(P^HP)^{-1}A=P^{-1}(P^{-1})^HA=P^{-1}[(P^{-1})^HAP^{-1}]P$，

可见 $B^{-1}A$ 与 $(P^{-1})^HAP^{-1}$ 相似，因而 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n$ 也是 $(P^{-1})^HAP^{-1}$ 的特征值.

因而
$$\lambda_1=\max\left\{\frac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}\,\middle|\,0\neq Y\in\mathbb{C}^n\right\},$$
$$\lambda_n=\min\left\{\frac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}\,\middle|\,0\neq Y\in\mathbb{C}^n\right\}.$$

对于任意的 n 维列向量 X，令 $Y=PX$，则 $Y\neq0\Leftrightarrow X\neq0$，而且当 $X\neq0$ 时，有

$$\frac{X^HAX}{X^HBX}=\frac{(P^{-1}Y)^HA(P^{-1}Y)}{(P^{-1}Y)^HB(P^{-1}Y)}=\frac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^H(P^{-1})^HP^HPP^{-1}Y}=\frac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}.$$

因而 $\lambda_1=\max\left\{\dfrac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}\,\middle|\,0\neq Y\in\mathbb{C}^n\right\}=\max\left\{\dfrac{X^HAX}{X^HBX}\,\middle|\,0\neq X\in\mathbb{C}^n\right\}$，

$\lambda_n=\min\left\{\dfrac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}\,\middle|\,0\neq Y\in\mathbb{C}^n\right\}=\min\left\{\dfrac{X^HAX}{X^HBX}\,\middle|\,0\neq X\in\mathbb{C}^n\right\}$.

17. 设 A,B 为同阶 Hermite 阵，且 A 正定. 证明：AB 的特征值都是实数.

证明：因为 A,B 为同阶 Hermite 阵，且 A 正定，

所以 A 可逆，A^{-1} 也正定，而且对于任意的 n 维列向量 X，$X^HA^{-1}X$ 与 X^HBX 都是实数.

若 λ 为 AB 的特征值，则存在 n 维非零列向量 X 使 $ABX=\lambda X$，

于是 $BX=\lambda A^{-1}X$，$X^HBX=\lambda X^HA^{-1}X$，其中 $X^HA^{-1}X>0$，

故 $\lambda=\dfrac{X^HAX}{X^HBX}$ 为实数.

证明：因为 A 正定，所以存在可逆阵 P 使得 $A=P^HP$. 其余同于E

于是 $(P^H)^{-1}ABP^H=(P^H)^{-1}P^HPBP^H=PBP^H$，

可见 AB 与 PBP^H 相似.

又因为 $(PBP^H)^H=PB^HP^H=PBP^H$，即 PBP^H 为 Hermite 阵，

所以 PBP^H 的特征值均为实数

而相似的矩阵具有相同的特征值.

故 AB 的特征值都为实数.

1. 完成第节中例 1 的证明，即验证下列向量范数满足范数的定义，其中 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$.

(1) 1-范数：$\|X\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，

证明：①正定性

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\neq0\Rightarrow\exists\,x_i\neq0\Rightarrow\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\geq|x_i|>0.$$

②齐次性

$$\|kX\|_1=\sum_{i=1}^{n}|kx_i|=|k|\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|k|\cdot\|X\|_1.$$

③三角不等式

设 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$，则

$$\|X+Y\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\leq\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)=\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i|=\|X\|_1+\|Y\|_1.$$

(2) 2-范数：$\|X\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}=(X^HX)^{1/2}$，

证明：①正定性

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\neq0\Rightarrow\exists\,x_i\neq0\Rightarrow\|X\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\geq|x_i|>0.$$

②齐次性

$$\|kX\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|kx_i|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}|k|^2|x_i|^2\right)^{1/2}=|k|\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}=|k|\cdot\|X\|_2.$$

③三角不等式

设 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$，则

$$|\langle X,Y\rangle|^2\leq\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle=\|X\|_2^2\cdot\|Y\|_2^2$$
$$\Rightarrow|\langle X,Y\rangle|=\|X\|_2\cdot\|Y\|_2$$
$$\Rightarrow\|X+Y\|_2^2=\langle X+Y,X+Y\rangle=\langle X,X\rangle+\langle X,Y\rangle+\langle Y,X\rangle+\langle Y,Y\rangle$$
$$=\|X\|_2^2+2\mathrm{Re}\langle X,Y\rangle+\|Y\|_2^2$$
$$\leq\|X\|_2^2+2|\langle X,Y\rangle|+\|Y\|_2^2$$
$$\leq\|X\|_2^2+2\|X\|_2\cdot\|Y\|_2+\|Y\|_2^2=(\|X\|_2+\|Y\|_2)^2$$
$$\Rightarrow\|X+Y\|_2\leq\|X\|_2+\|Y\|_2.$$

(3) ∞-范数：$\|X\|_\infty=\max\{|x_i|\mid i=1,2,\ldots,n\}$.

证明：①正定性

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\neq0\Rightarrow\exists\,x_j\neq0\Rightarrow\|X\|_\infty=\max\{|x_i|\mid i=1,2,\ldots,n\}\geq|x_j|>0.$$

②齐次性

$$\|kX\|_\infty=\max\{|kx_i|\mid i=1,2,\ldots,n\}=|k|\cdot\max\{|x_i|\mid i=1,2,\ldots,n\}=|k|\cdot\|X\|_\infty.$$

③三角不等式

设 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$，$p\geq1$，则由 Minkowski 不等式可得

$$\|X+Y\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}=\|X\|_p+\|Y\|_p.$$

上式两边取极限得

$$\|X+Y\|_\infty=\lim_{p\to+\infty}\|X+Y\|_p\leq\lim_{p\to+\infty}\|X\|_p+\lim_{p\to+\infty}\|Y\|_p=\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty.$$

2. 在 $\mathbb{C}^n$ 中设 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，对于正实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$，规定

$$\|X\|=\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|\quad(\forall X\in\mathbb{C}^n),$$

证明：$\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上范数.

证明：①正定性

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\neq0\Rightarrow\exists\,x_i\neq0\Rightarrow\|X\|=\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|\geq a_i|x_i|>0.$$

②齐次性

$$\|kX\|=\sum_{i=1}^{n}a_i|kx_i|=|k|\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|=|k|\cdot\|X\|.$$

③三角不等式

设 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$，则

$$\|X+Y\|=\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i+y_i|\leq\sum_{i=1}^{n}(a_i|x_i|+a_i|y_i|)=\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|+\sum_{i=1}^{n}a_i|y_i|=\|X\|+\|Y\|.$$

3. 设 $\|\cdot\|_a$ 与 $\|\cdot\|_b$ 均是 $\mathbb{C}^n$ 的范数，k_1,k_2 为正实数. 证明：$\|X\|=k_1\|X\|_a+k_2\|X\|_b\quad(\forall X\in\mathbb{C}^n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的范数.

证明：①正定性

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\neq0\Rightarrow\|X\|=k_1\|X\|_a+k_2\|X\|_b>0.$$

②齐次性

$$\|kX\|=k_1\|kX\|_a+k_2\|kX\|_b=k_1|k|\cdot\|X\|_a+k_2|k|\cdot\|X\|_b=|k|(k_1\|X\|_a+k_2\|X\|_b)=|k|\cdot\|X\|.$$

③三角不等式

设 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$，则

$$\|X+Y\|=k_1\|X+Y\|_a+k_2\|X+Y\|_b$$
$$\leq k_1(\|X\|_a+\|Y\|_a)+k_2(\|X\|_b+\|Y\|_b)$$
$$=(k_1\|X\|_a+k_2\|X\|_b)+(k_1\|Y\|_a+k_2\|Y\|_b)=\|X\|+\|Y\|.$$

4. 设 A 为 n 阶正定阵，定义 $\|X\|=\sqrt{X^HAX}$，$\forall X\in\mathbb{C}^n$.

(1)证明：$\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的范数.

证明：①正定性

A 为 n 阶正定阵，$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\neq0$

$$\Rightarrow X^HAX>0\Rightarrow\|X\|=\sqrt{X^HAX}>0.$$

②齐次性

$$\|kX\|=\sqrt{(kX)^HA(kX)}=\sqrt{\bar{k}kX^HAX}=\sqrt{|k|^2X^HAX}=|k|\sqrt{X^HAX}=|k|\cdot\|X\|.$$

③三角不等式

因为 A 为 n 阶正定阵，所以存在 n 阶可逆阵 P 使得 $A=P^HP$.

设 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$，则

$$\|X+Y\|=\sqrt{(X+Y)^HP^HP(X+Y)}=\sqrt{[P(X+Y)]^H[P(X+Y)]}=\|PX+PY\|_2$$
$$\leq\|PX\|_2+\|PY\|_2=\sqrt{(PX)^H(PX)}+\sqrt{(PY)^H(PY)}$$
$$=\sqrt{X^HP^HPX}+\sqrt{Y^HP^HPY}=\sqrt{X^HAX}+\sqrt{Y^HAY}=\|X\|+\|Y\|.$$

(2)当 $A=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，其中 $d_i>0\,(i=1,2,\ldots,n)$，具体写出 $\|X\|$ 的表达式.

解：设 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，则 $X^HAX=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i|x_i|^2$，$\|X\|=\sqrt{X^HAX}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}d_i|x_i|^2}$.

5. 在 $\mathbb{C}^n$ 中证明：对任一 $X\in\mathbb{C}^n$，有

(1) $\|X\|_\infty \le \|X\|_1 \le n\|X\|_\infty$.

(2) $\|X\|_2 \le \|X\|_1 \le \sqrt{n}\,\|X\|_2$.

(3) $\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{n}\,\|X\|_\infty$.

证明: 设 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的非零向量,

令 $k=|x_1|+\dots+|x_n|$, $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)^T=k^{-1}X$,

则$|y_1|+\dots+|y_n|=1$, $\|X\|_a=\|kY\|_a=|k|\cdot\|Y\|_a$, 其中$\|\cdot\|_a$为 $\mathbb{C}^n$ 的任意范数.

于是对于 $\mathbb{C}^n$ 的任意范数$\|\cdot\|_a$和$\|\cdot\|_b$, 有$\dfrac{\|Y\|_a}{\|Y\|_b}=\dfrac{\|X\|_a}{\|X\|_b}$.

因为$\dfrac{\|Y\|_a}{\|Y\|_b}$在有界闭集 $S=\{Y=(y_1, \dots, y_n)^T \mid \sum_{i=1}^n |y_i|=1\}$上连续,

故存在最小值 k_1 和最大值 k_2.

于是对于任意的 $0\ne X\in\mathbb{C}^n$, 有 $k_1\le\dfrac{\|X\|_a}{\|X\|_b}\le k_2$.

从而有 $k_1\|X\|_b \le \|X\|_a \le k_2\|X\|_b$.

当 $X=0$ 时, $k_1\|X\|_b \le \|X\|_a \le k_2\|X\|_b$ 依然成立.

(1)$\dfrac{\|Y\|_1}{\|Y\|_\infty}$在有界闭集 $S=\{Y=(y_1, \dots, y_n)^T \mid \sum_{i=1}^n |y_i|=1\}$上的最小值为 1, 最大值为 n,

故$\|X\|_\infty \le \|X\|_1 \le n\|X\|_\infty$.

(2)$\dfrac{\|Y\|_1}{\|Y\|_2}$在有界闭集 $S=\{Y=(y_1, \dots, y_n)^T \mid \sum_{i=1}^n |y_i|=1\}$上的最小值为 1, 最大值为$\sqrt{n}$,

故$\|X\|_2 \le \|X\|_1 \le \sqrt{n}\,\|X\|_2$.

(3)$\dfrac{\|Y\|_2}{\|Y\|_\infty}$在有界闭集 $S=\{Y=(y_1, \dots, y_n)^T \mid \sum_{i=1}^n |y_i|=1\}$上的最小值为 1, 最大值为$\sqrt{n}$,

故$\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{n}\,\|X\|_\infty$.

6. 在一维线性空间 $\mathbb{R}$ 中绝对值$|\cdot|$是一种范数. 证明: 对于 $\mathbb{R}$ 中任一种范数 $\nu(\cdot)$, 必存在正实数 a 使 $\nu(x)=a|x|$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.

证明: 令 $a=\nu(1)$, 则由 $\nu(\cdot)$的正定性可知 $a>0$.

由 $\nu(\cdot)$的齐次性可知 $\nu(x)=\nu(x\cdot 1)=|x|\cdot\nu(1)=a|x|$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.

7. 将上题之结论推广到复数域上一维线性空间 $V(\mathbb{C})$. 设$\|\cdot\|$为 $V(\mathbb{C})$的指定范数, $\nu_a(\cdot)$为 $V(\mathbb{C})$的任一种范数.

解: 设α为 $V(\mathbb{C})$的一组基, 则$\alpha\ne 0$. 由$\|\cdot\|$和 $\nu_a(\cdot)$的正定性可知$\|\alpha\|, \nu_a(\alpha)>0$.

令 $b=\nu_a(\alpha)/\|\alpha\|$, 则 $b>0$.

于是对于任意的$\xi\in V(\mathbb{C})$, 设$\xi=k\alpha$, 其中 $k\in\mathbb{C}$, 由$\|\cdot\|$和 $\nu_a(\cdot)$的齐次性可知

$\|\xi\|=\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$, $\nu_a(\xi)=\nu_a(k\alpha)=|k|\cdot\nu_a(\alpha)=|k|\cdot\|\alpha\|\cdot\nu_a(\alpha)/\|\alpha\|=b\|\xi\|$.

这就是说, 对于 $V(\mathbb{C})$的任一种范数 $\nu_a(\cdot)$, 必存在正实数 b 使 $\nu_a(\xi)=b\|\xi\|$, $\xi\in V(\mathbb{C})$.

8. 设$\|\cdot\|$为相容的矩阵范数. 证明:

(1) $\|I\|\ge 1$.

证明: $\|I\|\cdot\|I\|\ge\|I^2\|=\|I\|>0 \Rightarrow \|I\|\ge 1$.

(2)若 A 为可逆阵, λ为 A 的特征值, 则$\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$.

证明: 若λ为 A 的特征值, 则存在非零向量ξ使得 $A\xi=\lambda\xi$.

若 A 为可逆阵, 则$\lambda\ne 0$. (否则 $A\xi=\lambda\xi=0 \Rightarrow \xi=A^{-1}A\xi=0$, 矛盾!)

于是由 $A\xi=\lambda\xi$可得 $A^{-1}\xi=\lambda^{-1}\xi$.

$A\xi=\lambda\xi \Rightarrow \|A\|\cdot\|\xi\|\ge\|A\xi\|=\|\lambda\xi\|=|\lambda|\cdot\|\xi\| \Rightarrow \|A\|\ge|\lambda|$.

$A^{-1}\xi=\lambda^{-1}\xi \Rightarrow \|A^{-1}\|\cdot\|\xi\|\ge\|A^{-1}\xi\|=\|\lambda^{-1}\xi\|=|\lambda^{-1}|\cdot\|\xi\| \Rightarrow \|A^{-1}\|\ge|\lambda^{-1}|=|\lambda|^{-1}>0$

$\Rightarrow \|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|$.

9. 证明: $\|A\|=n\|A\|_{m_\infty}$ $(\forall A\in\mathbb{C}^{s\times n})$是相容矩阵范数.

证明: 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}\in\mathbb{C}^{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}\in\mathbb{C}^{n\times t}$.

令 $M=\max\{|a_{ij}| \mid 1\le i\le s, 1\le j\le n\}$, $N=\max\{|b_{jk}| \mid 1\le j\le n, 1\le k\le t\}$, 则

$\|AB\|=t\|AB\|_{m_\infty}=t\cdot\max\{\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\right| \mid 1\le i\le s, 1\le k\le t\}$

$\le t\cdot\max\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,|b_{jk}| \mid 1\le i\le s, 1\le k\le t\}$

$\le t(nMN)=(nM)(tN)=n\|A\|_{m_\infty}\cdot t\|B\|_{m_\infty}=\|A\|\cdot\|B\|$.

故$\|\cdot\|$是相容矩阵范数.

10. 设$\|\cdot\|$是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容矩阵范数, A 为 n 阶可逆阵, 且$\|A^{-1}\|\le 1$.

证明: $\|M\|_a=\|AM\|$ $(\forall M\in\mathbb{C}^{n\times n})$是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容矩阵范数.

证明: ①<u>正定性</u>

A 为 n 阶可逆矩阵, M 为 n 阶非零矩阵

$\Rightarrow AM$ 为 n 阶非零矩阵 $\Rightarrow \|M\|_a=\|AM\|>0$.

②<u>齐次性</u>

$\|kM\|_a=\|A(kM)\|=\|k(AM)\|=|k|\cdot\|AM\|=|k|\cdot\|M\|_a$.

③<u>三角不等式</u>

$\|M+N\|_a=\|A(M+N)\|=\|AM+AN\|\le\|AM\|+\|AN\|=\|M\|_a+\|N\|_a$.

④<u>相容性</u>

$\|MN\|_a=\|A(MN)\|=\|AMA^{-1}AN\|\le\|AM\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|AN\|\le\|AM\|\cdot\|AN\|=\|M\|_a\cdot\|N\|_a$.

11. 设$\|\cdot\|$是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容矩阵范数, A 为 n 阶可逆阵.

证明: $\|M\|_A=\|A^{-1}MA\|$ $(\forall M\in\mathbb{C}^{n\times n})$是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是上相容矩阵范数.

证明: ①<u>正定性</u>

A 为 n 阶可逆矩阵, M 为 n 阶非零矩阵

$\Rightarrow A^{-1}MA$ 为 n 阶非零矩阵 $\Rightarrow \|M\|_A=\|A^{-1}MA\|>0$.

②<u>齐次性</u>

$\|kM\|_A=\|A^{-1}(kM)A\|=\|k(A^{-1}MA)\|=|k|\cdot\|A^{-1}MA\|=|k|\cdot\|M\|_A$.

③<u>三角不等式</u>

$\|M+N\|_A=\|A^{-1}(M+N)A\|=\|A^{-1}MA+A^{-1}NA\|\le\|A^{-1}MA\|+\|A^{-1}NA\|=\|M\|_A+\|N\|_A$.

④<u>相容性</u>

$\|MN\|_a=\|A^{-1}(MN)A\|=\|(A^{-1}MA)(A^{-1}NA)\|\le\|A^{-1}MA\|\cdot\|A^{-1}NA\|=\|M\|_A\cdot\|N\|_A$.

12. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 证明:

(1)若 $A^HA=I_n$, 则$\|A\|_F=\sqrt{n}$, $\|A\|_2=1$.

证明: 若 $A^HA=I_n$, 则$\|A\|_F=(\mathrm{tr}A^HA)^{1/2}=\sqrt{n}$, $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^HA)}=\sqrt{\rho(I)}=1$.

(2) $\|A\|_2\le\|A\|_F\le\sqrt{n}\,\|A\|_2$.

证明: 因为 A^HA 是 n 阶半正定阵, 所以 A^HA 的特征值为非负实数.

设 A^HA 的特征值为$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots\ge\lambda_n\ (\ge 0)$,

则$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^HA)}=\sqrt{\lambda_1}$, $\|A\|_F=(\mathrm{tr}A^HA)^{1/2}=(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)^{1/2}\le(n\lambda_1)^{1/2}$,

因此$\|A\|_2\le\|A\|_F\le\sqrt{n}\,\|A\|_2$.

13. 设$\|\cdot\|$是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容矩阵范数, 且$\|A\|<1$. 证明:

(1) $I-A$ 可逆.

证明: 对于任意的非零向量 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T\in\mathbb{C}^n$,

$\|(I-A)X\|=\|X-AX\|\ge\|X\|-\|AX\|\ge\|X\|-\|A\|\cdot\|X\|=(1-\|A\|)\|X\|>0$,

故$(I-A)X\ne 0$.

可见齐次线性方程组$(I-A)X=0$ 只有零解, 因而$|I-A|=0$, 即 $I-A$ 可逆.

(2) $\|(I-A)^{-1}-I\|\le\|A\|(1-\|A\|)^{-1}$.

证明: $(I-A)^{-1}-I=(I-A)^{-1}[I-(I-A)]=(I-A)^{-1}A$,

因而$(I-A)^{-1}=I+(I-A)^{-1}A$, $(I-A)^{-1}A=A+(I-A)^{-1}A^2$,

故$\|(I-A)^{-1}A\|=\|A+(I-A)^{-1}A^2\|\le\|A\|+\|(I-A)^{-1}A\|\cdot\|A\|$,

由此可得$\|(I-A)^{-1}A\|(1-\|A\|)\le\|A\|$.

又因为$\|A\|<1$, 即 $1-\|A\|>0$, 故$\|(I-A)^{-1}-I\|\le\|A\|(1-\|A\|)^{-1}$.

证明: $(I-A)^{-1}-I=(I-A)^{-1}[I-(I-A)]=(I-A)^{-1}A$,

因而$\|(I-A)^{-1}-I\|=\|(I-A)^{-1}A\|=\|(I-A)^{-1}A-A+A\|\le\|(I-A)^{-1}A-A\|+\|A\|$

$\le\|(I-A)^{-1}-I\|\cdot\|A\|+\|A\|$,

由此可得$\|(I-A)^{-1}A\|(1-\|A\|)\le\|A\|$.

又因为$\|A\|<1$, 即 $1-\|A\|>0$, 故$\|(I-A)^{-1}-I\|\le\|A\|(1-\|A\|)^{-1}$.

证明: $\|(I-A)^{-1}-I\|(1-\|A\|)=\|(I-A)^{-1}-I\|-\|(I-A)^{-1}-I\|\cdot\|A\|$

$\le\|(I-A)^{-1}-I\|-\|[(I-A)^{-1}-I]A\|$

$\le\|(I-A)^{-1}-I-[(I-A)^{-1}-I]A\|$

$=\|[(I-A)^{-1}-I](I-A)\|$

$=\|I-(I-A)\|=\|A\|$.

又因为$\|A\|<1$, 即 $1-\|A\|>0$, 故$\|(I-A)^{-1}-I\|\le\|A\|(1-\|A\|)^{-1}$.

(3)若$\|I\|=1$, 则$\|(I-A)^{-1}\|\le(1-\|A\|)^{-1}$.

证明: $(I-A)^{-1}-I=(I-A)^{-1}[I-(I-A)]=(I-A)^{-1}A$,

故$(I-A)^{-1}=I+(I-A)^{-1}A$.

若$\|I\|=1$, 则$\|(I-A)^{-1}\|=\|I+(I-A)^{-1}A\|\le\|I\|+\|(I-A)^{-1}A\|\le 1+\|(I-A)^{-1}\|\cdot\|A\|$,

因而$\|(I-A)^{-1}\|(1-\|A\|)\le 1$,

又因为$\|A\|<1$, 即 $1-\|A\|>0$, 故$\|(I-A)^{-1}\|\le(1-\|A\|)^{-1}$.

14. 设分块对角阵 $M=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 已知$\|A\|_F=a$, $\|B\|_F=b$, $\|A\|_2=c$, $\|B\|_2=d$,

分别求$\|M\|_F$和$\|M\|_2$.

解: $M^HM=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^H\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^H & O \\ O & B^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^HA & O \\ O & B^HB \end{bmatrix}$.

根据已知条件

$$\|A\|_F=(\mathrm{tr}A^HA)^{1/2}=a,\ \|B\|_F=(\mathrm{tr}B^HB)^{1/2}=b,$$
$$\|A\|_2=[\rho(A^HA)]^{1/2}=c,\ \|B\|_2=[\rho(B^HB)]^{1/2}=d$$

可知 $\mathrm{tr}A^HA=a^2$, $\mathrm{tr}B^HB=b^2$, $\rho(A^HA)=c^2$, $\rho(B^HB)=d^2$.

故$\|M\|_F=(\mathrm{tr}M^HM)^{1/2}=(\mathrm{tr}A^HA+\mathrm{tr}B^HB)^{1/2}=(a^2+b^2)^{1/2}$,

$\|M\|_2=[\rho(M^HM)]^{1/2}=[\max\{\rho(A^HA), \rho(B^HB)\}]^{1/2}=[\max\{c^2, d^2\}]^{1/2}=\max\{c, d\}$.

15. 证明: 对任意矩阵 A, $\|A\|_2\le\|A\|_1\|A\|_\infty$.

证明: 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, 则 $A^HA=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \overline{a_{i1}}a_{i1} & \sum_{i=1}^s \overline{a_{i1}}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^s \overline{a_{i1}}a_{in} \\ \sum_{i=1}^s \overline{a_{i2}}a_{i1} & \sum_{i=1}^s \overline{a_{i2}}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^s \overline{a_{i2}}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^s \overline{a_{in}}a_{i1} & \sum_{i=1}^s \overline{a_{in}}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^s \overline{a_{in}}a_{in} \end{bmatrix}$.

$\|A\|_1=\max\{|a_{1j}|+|a_{2j}|+\dots+|a_{sj}| \mid j=1, \dots, n\}$,

$\|A\|_2=[\rho(A^HA)]^{1/2}$,

$\|A\|_\infty=\max\{|a_{i1}|+|a_{i2}|+\dots+|a_{in}| \mid i=1, \dots, s\}$.

$\rho_1(A^HA)=\max\{\sum_{j=1}^n\left|\sum_{i=1}^s \overline{a_{i1}}a_{ij}\right|, \sum_{j=1}^n\left|\sum_{i=1}^s \overline{a_{i2}}a_{ij}\right|, \dots, \sum_{j=1}^n\left|\sum_{i=1}^s \overline{a_{in}}a_{ij}\right|\}$

$\le\max\{\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^s |a_{i1}|\,|a_{ij}|, \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^s |a_{i2}|\,|a_{ij}|, \dots, \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^s |a_{in}|\,|a_{ij}|\}$

$\le\|A\|_1^2\|A\|_\infty^2$,

故$\|A\|_2=[\rho(A^HA)]^{1/2}\le\|A\|_1\|A\|_\infty$.

16. [Gelfand's Formula, 1941]设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\|\cdot\|$是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容的矩阵范数,

证明: $\lim_{k\to\infty}\|A^k\|^{1/k}=\rho(A)$.

证明: (1)当$\rho(A)=0$ 时, A 的特征值全为 0,

因而 A 的特征多项式 $C(\lambda)=\lambda^n$,

可见 $A^n=C(A)=O$.

故 $k>n$ 时, $\|A^k\|^{1/k}=\|O\|^{1/k}=0$.

于是有$\lim_{k\to\infty}\|A^k\|^{1/k}=0=\rho(A)$.

(2)当$\rho(A)\ne 0$ 时, 有$\rho(A)>0$.

对于任意的$\rho(A)>\varepsilon>0$, 令 $B=(\rho(A)+\varepsilon)^{-1}A$,

则$\rho(B)=\dfrac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}<1$, 因而$\lim_{k\to\infty}B^k=O$.

故存在自然数 N, 当 $k\ge N$ 时, $(\rho(A)+\varepsilon)^{-k}\|A^k\|=\|(\rho(A)+\varepsilon)^{-k}A^k\|=\|B^k\|<1$,

从而有$\|A^k\|<(\rho(A)+\varepsilon)^k$, 即$\|A^k\|^{1/k}<\rho(A)+\varepsilon$.

另一方面, 由$\rho(A)^k=\rho(A^k)\le\|A^k\|$可得$\rho(A)-\varepsilon<\rho(A)\le\|A^k\|^{1/k}$.

于是有$-\varepsilon<\|A^k\|^{1/k}-\rho(A)<\varepsilon$.

所以$\lim_{k\to\infty}\|A^k\|^{1/k}=\rho(A)$.

17. 设 A 为 n 阶方阵. 证明: $\lim_{k\to\infty}A^k=I \Leftrightarrow A=I$.

证明: $(\Rightarrow)$设 $A=PJP^{-1}$, 其中 $J=\mathrm{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$, $J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$, $i=1, 2, \dots, s$.

则 $\mathrm{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_s^k)=J^k=P^{-1}A^kP$,

其中 $J_i^k=\begin{bmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{g^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{bmatrix}$, $g(x)=x^k$, $i=1,2,\ldots,s$.

由 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=I$ 得 $\lim\limits_{k\to\infty}J^k=\lim\limits_{k\to\infty}P^{-1}A^kP=P^{-1}\lim\limits_{k\to\infty}A^kP=P^{-1}IP^{-1}=I$.

因而 $\begin{bmatrix} \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^k & \lim\limits_{k\to\infty}k\lambda_i^{k-1} & \cdots & * \\ & \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \lim\limits_{k\to\infty}k\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^k \end{bmatrix}=\lim\limits_{k\to\infty}J_i^k=I_{r_i}$, $i=1,2,\ldots,s$.

由此可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^k=1$, 进而有 $\lambda_i=1$, $i=1,2,\ldots,s$.

假若存在 $r_i>1$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}k=\lim\limits_{k\to\infty}k\lambda_i^{k-1}=0$, 但这是不可能的.

故 $r_1=r_2=\ldots=r_s=1$.

于是有 $A=PJP^{-1}=P\mathrm{diag}(J_1,J_2,\ldots,J_s)P^{-1}=PIP^{-1}=I$.

($\Rightarrow$)若 $A=I$, 则对于任意的正整数 k, 有 $A^k=I$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=I$.

18. 设 n 阶方阵 A 的谱半径小于 1. 求 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}mA^m$.

解: 由 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}z^m=(1-z)^{-1}$ $(|z|<1)$逐项求导得 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}mz^{m-1}=(1-z)^{-2}$ $(|z|<1)$.

于是有 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}mz^m=z\sum\limits_{m=1}^{\infty}mz^{m-1}=z(1-z)^{-2}$ $(|z|<1)$.

因此 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}mA^m=A(I-A)^{-2}$.

19. 设 A 为 n 阶方阵. 证明:

(1) $\det(e^A)=e^{\mathrm{tr}A}$.

证明: 设 $A=PJP^{-1}$, 其中 $J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\ldots,J_s)$, $J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$, $i=1,2,\ldots,s$.

则 $\mathrm{tr}A=r_1\lambda_1+r_2\lambda_2+\ldots+r_s\lambda_s$, $\mathrm{diag}(J_1^k,J_2^k,\ldots,J_s^k)=J^k=P^{-1}A^kP$,

其中 $J_i^k=\begin{bmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{g^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{bmatrix}$, $g(x)=x^k$, $i=1,2,\ldots,s$,

于是 $e^A=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{PJ^mP^{-1}}{m!}=P\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J^m}{m!}\right)P^{-1}=Pe^JP^{-1}$,

其中 $e^J=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J^m}{m!}=\mathrm{diag}(\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J_1^m}{m!},\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J_2^m}{m!},\ldots,\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J_s^m}{m!})=\mathrm{diag}(e^{J_1},e^{J_2},\ldots,e^{J_s})$,

$$e^{J_i}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_i^m}{m!}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & * & \cdots & * \\ & \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_i} & * & \cdots & * \\ & e^{\lambda_i} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & e^{\lambda_i}\end{bmatrix},$$

因而 $\det(e^A)=\det(e^J)=(e^{\lambda_1})^{r_1}(e^{\lambda_2})^{r_2}\cdots(e^{\lambda_s})^{r_s}=e^{r_1\lambda_1+r_2\lambda_2+\cdots+r_s\lambda_s}=e^{\mathrm{tr}A}$.

(2)若$\|\cdot\|$为相容矩阵范数, 且$\|I\|=1$, 则$\|e^A\|\le e^{\|A\|}$.

证明: $\|e^A\|=\left\|\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}\right\|\le\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\|A^m\|}{m!}\le\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\|A\|^m}{m!}=e^{\|A\|}$. (注意最后一个等号用到条件$\|I\|=1$.)

(3)以$\|\cdot\|_{m_1}$为例, 证明: 存在非零矩阵 A 使$\|e^A\|_{m_1}>e^{\|A\|_{m_1}}$.

证明: 取 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, 则$\|A\|_{m_1}=1$, $e^A=I+A+O+\ldots=I+A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,

$\|e^A\|_{m_1}=3>e^1=e^{\|A\|_{m_1}}$.

20. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 求 e^A, $\sin A$, $\cos A$.

解: 因为 A 是 Jordan 形矩阵, 故由定理 5.4.1 得

$$e^A=\begin{bmatrix}e^2&0&0&0\\0&e^1&e^1&0\\0&0&e^1&0\\0&0&0&e^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^2&0&0&0\\0&e&e&0\\0&0&e&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\sin A=\begin{bmatrix}\sin2&0&0&0\\0&\sin1&\cos1&0\\0&0&\sin1&0\\0&0&0&\sin0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin2&0&0&0\\0&\sin1&\cos1&0\\0&0&\sin1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\cos A=\begin{bmatrix}\cos2&0&0&0\\0&\cos1&-\sin1&0\\0&0&\cos1&0\\0&0&0&\cos0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2&0&0&0\\0&\cos1&-\sin1&0\\0&0&\cos1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

21. 已知 $A=\begin{bmatrix}0&0\\1&-2\end{bmatrix}$, 求 e^A, $\sin A$, $\cos A$.

解: $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+2)$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2$,

容易求得对应于 $\lambda_1=0$ 的一个特征值 $\xi_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, 对应于 $\lambda_2=-2$ 的一个特征值 $\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,

令 $P=(\xi_1,\xi_2)=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}$, $J=\begin{bmatrix}0&0\\0&-2\end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&0\\-1/2&1\end{bmatrix}$, 且 $A=PJP^{-1}$.

于是 $e^J=\begin{bmatrix}e^0&0\\0&e^{-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&e^{-2}\end{bmatrix}$, $\sin J=\begin{bmatrix}\sin0&0\\0&\sin(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-\sin2\end{bmatrix}$,

$\cos J=\begin{bmatrix}\cos0&0\\0&\cos(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\cos2\end{bmatrix}$,

$e^A=Pe^JP^{-1}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&e^{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0\\-1/2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&e^{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0\\-1/2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}&e^{-2}\end{bmatrix}$,

$\sin A=P(\sin J)P^{-1}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&-\sin2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0\\-1/2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-\sin2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0\\-1/2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\\frac{\sin2}{2}&-\sin2\end{bmatrix}$,

$\cos A=P(\cos J)P^{-1}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\cos2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0\\-1/2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&\cos2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0\\-1/2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{1}{2}-\frac{\cos2}{2}&\cos2\end{bmatrix}$.

解: $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+2)$, 所以 A 的最小多项式为 $\lambda(\lambda+2)$,

(1)设 $e^A=aI+bA$, $f(x)=e^x$, $g(x)=a+bx$,

则 $f(0)=g(0)$, $f(-2)=g(-2)$, 即 $1=a$, $e^{-2}=a-2b$,

由此可得 $a=1$, $b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}$, 因而 $e^A=I+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2})A=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}&e^{-2}\end{bmatrix}$.

(2)设 $\sin A=aI+bA$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=a+bx$,

则 $f(0)=g(0)$, $f(-2)=g(-2)$, 即 $0=a$, $\sin(-2)=a-2b$,

由此可得 $a=0$, $b=\frac{\sin2}{2}$, 因而 $\sin A=\frac{\sin2}{2}A=\begin{bmatrix}0&0\\\frac{\sin2}{2}&-\sin2\end{bmatrix}$.

(3)设 $\cos A=aI+bA$, $f(x)=\cos x$, $g(x)=a+bx$,

则 $f(0)=g(0)$, $f(-2)=g(-2)$, 即 $1=a$, $\cos(-2)=a-2b$,

由此可得 $a=1$, $b=\frac{1}{2}-\frac{\cos2}{2}$, 因而 $\cos A=I+(\frac{1}{2}-\frac{\cos2}{2})A=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{1}{2}-\frac{\cos2}{2}&\cos2\end{bmatrix}$.

22. 求 e^{At}, 已知

(1) $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&0\\-1&0&-2\end{bmatrix}$. (2) $A=\begin{bmatrix}0&4\\3&1\end{bmatrix}$. (3) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}$.

解: (1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda&0\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&\lambda\\1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}1&1\\1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1)$.

$A(A+I)=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&0\\-1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}=O$, 可见 A 的最小多项式为 $\lambda(\lambda+1)$.

设 $e^{At}=a(t)I+b(t)A$, $f(x)=e^{xt}$, $g(x)=a(t)+b(t)x$,

则 $1=f(0)=g(0)=a(t)$, $e^{-t}=f(-1)=g(-1)=a(t)-b(t)$,

由此可得 $a(t)=1$, $b(t)=1-e^{-t}$,

因而 $e^{At}=I+(1-e^{-t})A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-e^{-t}&0&2-2e^{-t}\\0&0&0\\e^{-t}-1&0&2e^{-t}-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-e^{-t}&0&2-2e^{-t}\\0&1&0\\e^{-t}-1&0&2e^{-t}-1\end{bmatrix}$.

(2) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-4\\-3&\lambda-1\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}\lambda+3&-\lambda-3\\-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&-1\\-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-4)$.

可见 A 的特征值为 $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=4$.

容易求得对应于 $\lambda_1=-3$ 的一个特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$,

对应于 $\lambda_2=4$ 的一个特征向量 $\xi_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2)=\begin{bmatrix}4&1\\-3&1\end{bmatrix}$, $J=\begin{bmatrix}-3&0\\0&4\end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1/7&-1/7\\3/7&4/7\end{bmatrix}$, 且 $A=PJP^{-1}$.

于是 $e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{-3t}&0\\0&e^{4t}\end{bmatrix}$,

$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=\begin{bmatrix}4&1\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-3t}&0\\0&e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/7&-1/7\\3/7&4/7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4e^{-3t}&e^{4t}\\-3e^{-3t}&e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/7&-1/7\\3/7&4/7\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{4}{7}e^{-3t}+\frac{3}{7}e^{4t}&-\frac{4}{7}e^{-3t}+\frac{4}{7}e^{4t}\\-\frac{3}{7}e^{-3t}+\frac{3}{7}e^{4t}&\frac{3}{7}e^{-3t}+\frac{4}{7}e^{4t}\end{bmatrix}$.

(3) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\0&\lambda-2&-3\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

可见 A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

容易求得对应特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\xi_3=\begin{bmatrix}9\\6\\2\end{bmatrix}$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}1&2&9\\0&1&6\\0&0&2\end{bmatrix}$, $J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&3/2\\0&1&-3\\0&0&1/2\end{bmatrix}$, 且 $A=PJP^{-1}$.

于是 $e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}$.

$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&9\\0&1&6\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3/2\\0&1&-3\\0&0&1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^t&2e^{2t}&9e^{3t}\\0&e^{2t}&6e^{3t}\\0&0&2e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3/2\\0&1&-3\\0&0&1/2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}e^t&-2e^t+2e^{2t}&\frac{3}{2}e^t-6e^{2t}+\frac{9}{2}e^{3t}\\0&e^{2t}&-3e^{2t}+3e^{3t}\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}$.

23. 设 $A\in C^{n\times n}$, $X_0, b\in C^{n\times 1}$, 且 $\det A\ne0$, 证明:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}X(t)=AX(t)+b,\\ X(0)=X_0\end{cases}$$

的解为 $X(t)=e^{At}X_0+A^{-1}e^{At}b-A^{-1}b$, 且若 A 的特征值的实部全为负, 则

$$\lim_{t\to+\infty}X(t)=-A^{-1}b\ (t\text{ 为实变量}).$$

证明: 根据定理 5.5.4, $X(t)=e^{At}X_0+e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}b\,d\tau$.

根据定理 5.5.4，$\dfrac{\mathrm{d}e^{-At}}{\mathrm{d}t}=-Ae^{-At}$.

又因为 $\det A\neq 0$，所以 A 可逆，于是有 $e^{-At}=\dfrac{\mathrm{d}(-A^{-1}e^{-At})}{\mathrm{d}t}$，

$$\int_0^t e^{-A\tau}\mathrm{d}\tau=-A^{-1}e^{-A\tau}\Big|_0^t=-A^{-1}e^{-At}+A^{-1},$$

$$X(t)=e^{At}X_0+e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}b\,\mathrm{d}\tau=e^{At}X_0+e^{At}\left(\int_0^t e^{-A\tau}\mathrm{d}\tau\right)b=e^{At}X_0+e^{At}(-A^{-1}e^{-At}+A^{-1})b$$
$$=e^{At}X_0-A^{-1}b+e^{At}A^{-1}b=e^{At}X_0+A^{-1}e^{At}b-A^{-1}b.$$

设 $A=PJP^{-1}$，其中 $J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\dots,J_s)$，$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$，$i=1,2,\dots,s$.

则 $e^{Jt}=\mathrm{diag}(e^{J_1t},e^{J_2t},\dots,e^{J_st})$，其中 $e^{J_it}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_it} & te^{\lambda_it} & \cdots & t^{r_i-1}e^{\lambda_it}/(r_i-1)!\\ & e^{\lambda_it} & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & te^{\lambda_it}\\ & & & e^{\lambda_it}\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$，$i=1,2,\dots,s$.

若 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 的实部全为负，t 为实变量，

则 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{Jt}=\mathrm{diag}(\lim\limits_{t\to+\infty}e^{J_1t},\lim\limits_{t\to+\infty}e^{J_2t},\dots,\lim\limits_{t\to+\infty}e^{J_st})=O$，

$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{At}=P\lim\limits_{t\to+\infty}e^{Jt}P^{-1}=O$，

$\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(e^{At}X_0+A^{-1}e^{At}b-A^{-1}b)=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{At}X_0+A^{-1}\lim\limits_{t\to+\infty}e^{At}b-A^{-1}b=-A^{-1}b.$

24. 完成定理 5.6.1 的证明，并求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}(\mathrm{tr}AX)$，其中 A 为常数矩阵.

定理 5.6.1 设 $f(x),g(x)$ 均为 $n\times s$ 矩阵 $X=(x_{ij})_{n\times s}$ 的数量函数，且可导，$a,b\in\mathbb{R}$，则

(1) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}=\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}[af(X)+bg(X)]=a\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}+b\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}X}$.

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}[f(X)g(X)]=g(X)\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}+f(X)\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}X}$.

证明：(略).

25. 完成定理 5.6.2 中(1)(2)(3)的证明.

定理 5.6.2 设 $A(X),B(X)\in\mathbb{R}^{s\times t}$，$X\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$f(X)\in\mathbb{R}$，$A,B,f$ 均可导，$a,b\in\mathbb{R}$，$M\in\mathbb{R}^{m\times s}$，则

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}(aA+bB)=a\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}+b\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}A^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}X}=\left(\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}$.

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}[MA(X)]=M\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}$.

证明：(略).

26. 设 $X=(x_{ij})_{n\times n}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\mathrm{tr}X^2$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\mathrm{tr}X^{\mathrm{T}}X$.

解：(略).

************************** 《工程矩阵理论》第一版 习题 5 **************************

14. 设 $\|\cdot\|$ 为相容矩阵范数，若 A 可逆，则称 $\kappa(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ 为 A 的条件数. 证明：

(1) $\kappa(A)\geq 1$.

证明：因为 $\|I\|\cdot\|I\|\geq\|II\|=\|I\|>0$，

所以 $\kappa(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\geq\|AA^{-1}\|=\|I\|\geq 1$.

(2) $\kappa(AB)\leq\kappa(A)\kappa(B)$.

证明：$\kappa(AB)=\|AB\|\cdot\|(AB)^{-1}\|=\|AB\|\cdot\|B^{-1}A^{-1}\|\leq\|A\|\cdot\|B\|\cdot\|B^{-1}\|\cdot\|A^{-1}\|=\kappa(A)\kappa(B)$.

(3) 酉矩阵关于 $\|\cdot\|_2$ 的条件数为 1.

证明：设 A 为酉矩阵，即 $A^{\mathrm{H}}A=AA^{\mathrm{H}}=I$，

则 $\|A\|_2=\rho(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}=\rho(I)^{1/2}=1$，

$\|A^{-1}\|_2=\|A^{\mathrm{H}}\|_2=\rho[(A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}]^{1/2}=\rho(AA^{\mathrm{H}})^{1/2}=\rho(I)^{1/2}=1$，

故 $\kappa(A)=\|A\|_2\cdot\|A^{-1}\|_2=1$.

15. 设 $\|\cdot\|$ 为相容矩阵范数，$A,H\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$A$ 可逆，且 $\|A^{-1}H\|<1$，证明：

(1) 给 A 以扰动 H，则 $A+H$ 仍可逆.

证明：对于任意的 n 维非零列向量 X，由 $\|A^{-1}H\|<1$ 可得

$\|(I+A^{-1}H)X\|=\|X-(-A^{-1}H)X\|\geq\|X\|-\|-A^{-1}H\|\cdot\|X\|=\|X\|-\|A^{-1}H\|\cdot\|X\|$

$=(1-\|A^{-1}H\|)\|X\|>0$，

可见 $(I+A^{-1}H)X\neq 0$.

因此 $I+A^{-1}H$ 可逆，进而有 $A+H=A(I+A^{-1}H)$ 可逆.

(2) 存在 F，使得 $(A+H)^{-1}=(I+F)A^{-1}$.

证明：$(A+H)^{-1}=[A(I+A^{-1}H)]^{-1}=(I+A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$.

令 $B=A^{-1}H$，则 $\rho(-B)=\rho(B)\leq\|B\|=\|A^{-1}H\|<1$.

令 $F=-B+B^2-B^3+\dots$，则

$(A+H)^{-1}=(I+A^{-1}H)^{-1}A^{-1}=(I+B)^{-1}A^{-1}=(I-B+B^2-B^3+\dots)^{-1}A^{-1}=(I+F)A^{-1}$.

(3) A 扰动后，逆矩阵的相对误差满足 $\dfrac{\|A^{-1}-(A+H)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\leq\|F\|\leq\dfrac{\|A^{-1}H\|}{1-\|A^{-1}H\|}$.

证明：对于任意的 n 阶可逆阵 C，

由 $\|C\|\cdot\|C^{-1}\|\geq\|CC^{-1}\|=\|I\|\geq 1$ 可得 $\|C^{-1}\|\geq\|C\|^{-1}$.

由(2)得 $(A+H)^{-1}=(I+F)A^{-1}=A^{-1}+FA^{-1}$.

于是有 $\|A^{-1}-(A+H)^{-1}\|=\|-FA^{-1}\|=\|FA^{-1}\|\leq\|F\|\cdot\|A^{-1}\|$，

进而有 $\|F\|\geq\dfrac{\|A^{-1}-(A+H)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}$.

另一方面，由 $(I+A^{-1}H)^{-1}=(A+H)^{-1}A=I+F$ 得 $(I+A^{-1}H)(I+F)=I$，

即 $I+F+A^{-1}H+A^{-1}HF=I$，故 $F+A^{-1}H=-A^{-1}HF$.

于是有 $\|F\|-\|A^{-1}H\|\leq\|F+A^{-1}H\|=\|-A^{-1}HF\|=\|A^{-1}HF\|\leq\|A^{-1}H\|\cdot\|F\|$，

因而 $\|F\|(1-\|A^{-1}H\|)=\|F\|-\|A^{-1}H\|\cdot\|F\|\leq\|A^{-1}H\|$，

进而有 $\|F\|\leq\dfrac{\|A^{-1}H\|}{1-\|A^{-1}H\|}$.

(4) 若 $\|A^{-1}\|\cdot\|H\|<1$，则 $\|F\|\leq\dfrac{\kappa(A)\|H\|/\|A\|}{1-\kappa(A)\|H\|/\|A\|}$.

证明：因为 $\|A^{-1}H\|\leq\|A^{-1}\|\cdot\|H\|<1$，所以 $1-\|A^{-1}H\|\geq 1-\|A^{-1}\|\cdot\|H\|>0$.

根据(3)可得 $\|F\|\leq\dfrac{\|A^{-1}H\|}{1-\|A^{-1}H\|}\leq\dfrac{\|A^{-1}\|\cdot\|H\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|H\|}=\dfrac{\kappa(A)\|H\|/\|A\|}{1-\kappa(A)\|H\|/\|A\|}$.

注：由(3)与(4)可见，$\kappa(A)$ 过大，相对误差就大. 因此称条件数 $\kappa(A)$ 较大的 A 是病态的，$\kappa(A)$ 较小的 A 为良态的.

16. 设 n 阶方阵 A 可逆，B 不可逆. 证明：

(1) $\det[I-A^{-1}(A-B)]=0$.

证明：B 不可逆 $\Rightarrow\det B=0$

$\Rightarrow\det[I-A^{-1}(A-B)]=\det(I-I+A^{-1}B)=\det(A^{-1}B)=\det A^{-1}\det B=0$.

(2) 对任一种相容矩阵范数均有 $\kappa(A)\geq\dfrac{\|A\|}{\|A-B\|}$.

证明：由(1)可见 1 是 $A^{-1}(A-B)$ 的一个特征值，

因此 $1\leq\rho[A^{-1}(A-B)]\leq\|A^{-1}(A-B)\|\leq\|A^{-1}\|\cdot\|A-B\|$，

故 $\|A\|\leq\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|A-B\|=\kappa(A)\|A-B\|$，由此可得 $\kappa(A)\geq\dfrac{\|A\|}{\|A-B\|}$.

20. $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=I+B$.

(1) 分别求 e^{It} 与 e^{Bt}，利用定理 5.5.1(2)求 e^{At}.

解：$e^{It}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(It)^m}{m!}=\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{t^m}{m!}\right)I=e^tI$.

$e^{Bt}=I+Bt+O+\dots=\begin{bmatrix}1&0&3t\\0&1&3t\\0&0&1\end{bmatrix}$.

因为 $(It)(Bt)=t^2B=(Bt)(It)$，

所以 $e^{At}=e^{(I+B)t}=e^{It+Bt}=e^{It}e^{Bt}=e^tI\begin{bmatrix}1&0&3t\\0&1&3t\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^t&0&3te^t\\0&e^t&3te^t\\0&0&e^t\end{bmatrix}$.

(2) 求 A 的最小多项式，化 e^{At} 为有限项和求之.

解：$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$.

$A-I=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\neq O$，$(A-I)^2=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}=O$.

可见 A 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$.

设 $e^{At}=a(t)I+b(t)A$，$f(x)=e^{xt}$，$g(x)=a(t)+b(t)x$，

则 $e^t=f(1)=g(1)=a(t)+b(t)$，$te^t=f'(1)=g'(1)=b(t)$，

由此可得 $a(t)=e^t-te^t$，$b(t)=te^t$，

因而 $e^{At}=(e^t-te^t)I+te^tA=\begin{bmatrix}e^t&0&3te^t\\0&e^t&3te^t\\0&0&e^t\end{bmatrix}$.

21. $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\sin A$.

解：$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$.

$A-I=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\neq O$，$(A-I)^2=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}=O$.

可见 A 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$.

设 $\sin A=aI+bA$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=a+bx$，

则 $\sin 1=f(1)=g(1)=a+b$，$\cos 1=f'(1)=g'(1)=b$，

由此可得 $a=\sin 1-\cos 1$，$b=\cos 1$，

因而 $\sin A=(\sin 1-\cos 1)I+\cos 1A=\begin{bmatrix}\sin 1&0&3\cos 1\\0&\sin 1&3\cos 1\\0&0&\sin 1\end{bmatrix}$.

1. 证明: (1) $\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}^+=(A^+,O)$.

证明: ① $\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}(A^+,O)\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^+ & O\\O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^+A\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}$,

② $(A^+,O)\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}(A^+,O)=A^+A(A^+,O)=(A^+AA^+,O)=(A^+,O)$,

③ $\left(\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}(A^+,\ O)\right)^{\rm H}=\begin{bmatrix}AA^+ & O\\O & O\end{bmatrix}^{\rm H}=\begin{bmatrix}(AA^+)^{\rm H} & O\\O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^+ & O\\O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}(A^+,O)$.

④ $\left((A^+,\ O)\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}\right)^{\rm H}=(A^+A)^{\rm H}=A^+A=(A^+,O)\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}$.

(2) $(A,O)^+=\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}$.

证明: ① $(A,O)\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}(A,O)=AA^+(A,O)=(AA^+A,O)=(A,O)$,

② $\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}(A,O)\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^+A & O\\O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^+AA^+\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}$,

③ $\left((A,\ O)\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}\right)^{\rm H}=(AA^+)^{\rm H}=AA^+=(A,O)\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}$.

④ $\left(\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}(A,\ O)\right)^{\rm H}=\begin{bmatrix}A^+A & O\\O & O\end{bmatrix}^{\rm H}=\begin{bmatrix}(A^+A)^{\rm H} & O\\O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^+A & O\\O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^+\\O\end{bmatrix}(A,O)$.

2. 证明: (1) $\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}A^+ & O\\O & B^+\end{bmatrix}$.

证明: ① $\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^+ & O\\O & B^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^+A & O\\O & BB^+B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}$,

② $\begin{bmatrix}A^+ & O\\O & B^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^+ & O\\O & B^+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^+AA^+ & O\\O & B^+BB^+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^+ & O\\O & B^+\end{bmatrix}$,

③ $\left(\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^+ & O\\O & B^+\end{bmatrix}\right)^{\rm H}=\begin{bmatrix}AA^+ & O\\O & BB^+\end{bmatrix}^{\rm H}=\begin{bmatrix}(AA^+)^{\rm H} & O\\O & (BB^+)^{\rm H}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}AA^+ & O\\O & BB^+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^+ & O\\O & B^+\end{bmatrix}$.

④ $\left(\begin{bmatrix}A^+ & O\\O & B^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}\right)^{\rm H}=\begin{bmatrix}A^+A & O\\O & B^+B\end{bmatrix}^{\rm H}=\begin{bmatrix}(A^+A)^{\rm H} & O\\O & (B^+B)^{\rm H}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}A^+A & O\\O & B^+B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^+ & O\\O & B^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}$.

证明: ① $\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^+ & O\\O & BB^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & AA^+A\\BB^+B & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}$,

② $\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^+B & O\\O & A^+A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & B^+BB^+\\A^+AA^+ & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}$,

③ $\left(\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}\right)^{\rm H}=\begin{bmatrix}AA^+ & O\\O & BB^+\end{bmatrix}^{\rm H}=\begin{bmatrix}(AA^+)^{\rm H} & O\\O & (BB^+)^{\rm H}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}AA^+ & O\\O & BB^+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}$.

④ $\left(\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}\right)^{\rm H}=\begin{bmatrix}B^+B & O\\O & A^+A\end{bmatrix}^{\rm H}=\begin{bmatrix}(B^+B)^{\rm H} & O\\O & (A^+A)^{\rm H}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}B^+B & O\\O & A^+A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & B^+\\A^+ & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}$.

3. 问: $(AB)^+=B^+A^+$是否成立?

答: 一般情况下$(AB)^+=B^+A^+$未必成立. 例如,

$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$, 则 $A^+=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}, B^+=B^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}$,

$AB=\begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}, (AB)^+=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}, B^+A^+=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & -5\\-2 & 2\end{bmatrix}$.

4. 证明: 若 $A^2=A=A^{\rm H}$, 则 $A^+=A$.

证明: ① $AAA=A^2A=AA=A^2=A$,

② $(AA)^{\rm H}=A^{\rm H}A^{\rm H}=AA$.

5. 设α,β为已知的 n 维非零列向量, $A=\alpha\beta^{\rm H}$, 求 A^+.

解: 因为α,β为 n 维非零列向量,

所以 $A=\alpha\beta^{\rm H}$为 A 的满秩分解.

由此可得 $A^+=\beta(\beta^{\rm H}\beta)^{-1}(\alpha^{\rm H}\alpha)^{-1}\alpha^{\rm H}=(\beta^{\rm H}\beta)^{-1}(\alpha^{\rm H}\alpha)^{-1}\beta\alpha^{\rm H}=(\beta^{\rm H}\beta)^{-1}(\alpha^{\rm H}\alpha)^{-1}A^{\rm H}$.

6. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, $r(A)=1$, 证明: $A^+=(\mathrm{tr}A^{\rm H}A)^{-1}A^{\rm H}$.

证明: 因为 $r(A)=1$,

所以 A 的奇值分解为 $A=U\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda} & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}V^{\rm H}$, 其中$\lambda$为 $A^{\rm H}A$ 的非零特征值.

于是 $A^+=V\begin{bmatrix}1/\sqrt{\lambda} & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}U^{\rm H}=\lambda^{-1}V\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda} & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}U^{\rm H}=\lambda^{-1}A^{\rm H}=(\mathrm{tr}A^{\rm H}A)^{-1}A^{\rm H}$.

证明: 因为 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, $r(A)=1$, 所以 A 的满秩分解为 $A=\alpha\beta^{\rm H}$,

其中α为 s 维非零列向量, β为 n 维非零列向量.

由此可得 $\mathrm{tr}A^{\rm H}A=\mathrm{tr}(\beta\alpha^{\rm H}\alpha\beta^{\rm H})=(\alpha^{\rm H}\alpha)\mathrm{tr}(\beta\beta^{\rm H})=(\alpha^{\rm H}\alpha)\mathrm{tr}(\beta^{\rm H}\beta)=(\alpha^{\rm H}\alpha)(\beta^{\rm H}\beta)$.

$A^+=\beta(\beta^{\rm H}\beta)^{-1}(\alpha^{\rm H}\alpha)^{-1}\alpha^{\rm H}=(\beta^{\rm H}\beta)^{-1}(\alpha^{\rm H}\alpha)^{-1}\beta\alpha^{\rm H}=(\mathrm{tr}A^{\rm H}A)^{-1}A^{\rm H}$.

7. 证明: 若 $AB^{\rm H}=O, B^{\rm H}A=O$, 则$(A+B)^+=A^++B^+$.

证明: $AB^{\rm H}=O\Rightarrow AB^+=AB^+BB^+=A(B^+B)^{\rm H}B^+=AB^{\rm H}(B^+)^{\rm H}B^+=O$;

$AB^{\rm H}=O\Rightarrow BA^{\rm H}=(AB^{\rm H})^{\rm H}=O\Rightarrow BA^+=O$;

$B^{\rm H}A=O\Rightarrow B^+A=B^+BB^+A=B^+(BB^+)^{\rm H}A=B^+(B^+)^{\rm H}B^{\rm H}A=O$;

$B^{\rm H}A=O\Rightarrow A^{\rm H}B=(B^{\rm H}A)^{\rm H}=O\Rightarrow A^+B=O$,

于是有

① $(A+B)(A^++B^+)(A+B)=AA^+A+BB^+B=A+B$;

② $(A^++B^+)(A+B)(A^++B^+)=A^+AA^++B^+BB^+=A^++B^+$;

③ $[(A+B)(A^++B^+)]^{\rm H}=(AA^++BB^+)^{\rm H}=(AA^+)^{\rm H}+(BB^+)^{\rm H}=AA^++BB^+$

$=(A+B)(A^++B^+)$;

④ $[(A^++B^+)(A+B)]^{\rm H}=(A^+A+B^+B)^{\rm H}=(A^+A)^{\rm H}+(B^+B)^{\rm H}=A^+A+B^+B$

$=(A^++B^+)(A+B)$.

8. 完善定理 6.1.2 的证明.

定理 6.1.2 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 则

(1) $(A^+)^+=A$.

证明: ① $A^+AA^+=A^+$; ② $AA^+A=A$; ③ $(A^+A)^{\rm H}=A^+A$; ④ $(AA^+)^{\rm H}=AA^+$.

(2) $(A^{\rm H})^+=(A^+)^{\rm H}$.

证明: ① $A^{\rm H}(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}=(AA^+A)^{\rm H}=A^{\rm H}$; ② $(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}(A^+)^{\rm H}=(A^+AA^+)^{\rm H}=(A^+)^{\rm H}$;

③ $[A^{\rm H}(A^+)^{\rm H}]^{\rm H}=A^+A=(A^+A)^{\rm H}=A^{\rm H}(A^+)^{\rm H}$; ④ $[(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}]^{\rm H}=AA^+=(AA^+)^{\rm H}=(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}$.

(3) $(A^{\rm T})^+=(A^+)^{\rm T}$.

证明: ① $A^{\rm T}(A^+)^{\rm T}A^{\rm T}=(AA^+A)^{\rm T}=A^{\rm T}$;

② $(A^+)^{\rm T}A^{\rm T}(A^+)^{\rm T}=(A^+AA^+)^{\rm T}=(A^+)^{\rm T}$;

③ $[A^{\rm T}(A^+)^{\rm T}]^{\rm H}=[(A^+A)^{\rm T}]^{\rm H}=[(A^+A)^{\rm H}]^{\rm T}=(A^+A)^{\rm T}=A^{\rm T}(A^+)^{\rm T}$;

④ $[(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}]^{\rm H}=AA^+=(AA^+)^{\rm H}=(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}$.

(4) $(kA)^+=k^+A^+$, 其中 $k\in\mathbb{C}$, $k^+=\begin{cases}\frac{1}{k}, & k\neq 0,\\0, & k=0.\end{cases}$

证明: 当 $k=0$ 时, $kA=O$, $(kA)^+=O=0A^+$,

当 $k\neq 0$ 时,

① $(kA)(k^+A^+)(kA)=(kk^+k)(AA^+A)=kA$; ② $(k^+A^+)(kA)(k^+A^+)=(k^+kk^+)(A^+AA^+)=k^+A^+$;

③ $[(kA)(k^+A^+)]^{\rm H}=(kk^+)(AA^+)^{\rm H}=(kk^+)(AA^+)=(kA)(k^+A^+)$;

④ $[(k^+A^+)(kA)]^{\rm H}=(k^+k)(A^+A)^{\rm H}=(k^+k)(AA^+)=(k^+A^+)(kA)$.

(5) $A^{\rm H}=A^{\rm H}AA^+=A^+AA^{\rm H}$.

证明: $A^{\rm H}=(AA^+A)^{\rm H}=A^{\rm H}(AA^+)^{\rm H}=A^{\rm H}AA^+$, $A^{\rm H}=(AA^+A)^{\rm H}=(A^+A)^{\rm H}A^{\rm H}=A^+AA^{\rm H}$.

(6) $(A^{\rm H}A)^+=A^+(A^{\rm H})^+$, $(AA^{\rm H})^+=(A^{\rm H})^+A^+$.

证明: ① $(A^{\rm H}A)A^+(A^{\rm H})^+(A^{\rm H}A)=A^{\rm H}AA^+(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}A=A^{\rm H}AA^+(AA^+)^{\rm H}A$

$=A^{\rm H}AA^+AA^+A=A^{\rm H}AA^+A=A^{\rm H}A$;

② $A^+(A^{\rm H})^+(A^{\rm H}A)A^+(A^{\rm H})^+=A^+(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}AA^+(A^{\rm H})^+=A^+(AA^+)^{\rm H}AA^+(A^{\rm H})^+$

$=A^+AA^+AA^+(A^{\rm H})^+=A^+AA^+(A^{\rm H})^+=A^+(A^{\rm H})^+$;

③ $[(A^{\rm H}A)A^+(A^{\rm H})^+]^{\rm H}=[(A^{\rm H})^+]^{\rm H}(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}(A^{\rm H})^{\rm H}=A^+(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}A=A^+(AA^+)^{\rm H}A$

$=A^+AA^+A=A^+A=(A^+A)^{\rm H}=[A^+(AA^+)A]^{\rm H}=A^{\rm H}(AA^+)^{\rm H}(A^+)^{\rm H}$

$=A^{\rm H}AA^+(A^+)^{\rm H}=(A^{\rm H}A)A^+(A^{\rm H})^+$;

④ $[A^+(A^{\rm H})^+(A^{\rm H}A)]^{\rm H}=A^{\rm H}(A^{\rm H})^{\rm H}[(A^{\rm H})^+]^{\rm H}(A^+)^{\rm H}=A^{\rm H}AA^+(A^+)^{\rm H}=A^{\rm H}(AA^+)^{\rm H}(A^+)^{\rm H}$

$=[A^+(AA^+)A]^{\rm H}=(A^+A)^{\rm H}=A^+A=A^+(AA^+)A$

$=A^+(AA^+)^{\rm H}A=A^+(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}A=A^+(A^{\rm H})^+(A^{\rm H}A)$.

由①-④可知$(A^{\rm H}A)^+=A^+(A^{\rm H})^+$,

因而$(AA^{\rm H})^+=[(A^{\rm H})^{\rm H}A^{\rm H}]^+=(A^{\rm H})^+[(A^{\rm H})^{\rm H}]^+=(A^{\rm H})^+A^+$.

(7) $A^+=(A^{\rm H}A)^+A^{\rm H}=A^{\rm H}(AA^{\rm H})^+$.

证明: $(A^{\rm H}A)^+A^{\rm H}=A^+(A^{\rm H})^+A^{\rm H}=A^+(A^+)^{\rm H}A^{\rm H}=A^+(AA^+)^{\rm H}=A^+AA^+=A^+$.

$A^{\rm H}(AA^{\rm H})^+=A^{\rm H}(A^{\rm H})^+A^+=A^{\rm H}(A^+)^{\rm H}A^+=(A^+A)^{\rm H}A^+=A^+AA^+=A^+$.

(8) $(UAV)^+=V^{\rm H}A^+U^{\rm H}$, 其中 U, V 为酉矩阵.

证明: 设 A 的奇值分解为 $A=P\begin{bmatrix}D & O\\O & O\end{bmatrix}_{s\times n}Q^{\rm H}$,

其中 $D=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_r})$, $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_r>0$ 为 $A^{\rm H}A$ 的非零特征值,

P, Q 分别为 s 阶与 n 阶的酉矩阵,

则 UP, VQ 也分别为 s 阶与 n 阶的酉矩阵, $UAV=UP\begin{bmatrix}D & O\\O & O\end{bmatrix}_{s\times n}(V^{\rm H}Q)^{\rm H}$,

由定理 6.1.1 得

$A^+=Q\begin{bmatrix}D^{-1} & O\\O & O\end{bmatrix}_{n\times s}P^{\rm H}$, $(UAV)^+=V^{\rm H}Q\begin{bmatrix}D^{-1} & O\\O & O\end{bmatrix}_{n\times s}(UP)^{\rm H}=V^{\rm H}A^+U^{\rm H}$.

(9) $A^+AB=A^+AC\Leftrightarrow AB=AC$.

证明: $(\Rightarrow)$ $A^+AB=A^+AC\Rightarrow AB=AA^+AB=AA^+AC=AC$.

$(\Leftarrow)$ $AB=AC\Rightarrow A^+AB=A^+AC$.

9. 用适当的方法求下列矩阵的广义逆 A^+.

(1) $A=\begin{bmatrix}0 & c\\a & 0\\b & 0\end{bmatrix}$, 其中复数 a, b, c 满足 $c\neq 0$, $|a|^2+|b|^2\neq 0$.

解: $A^{\rm H}A=\begin{bmatrix}0 & \bar{a} & \bar{b}\\\bar{c} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & c\\a & 0\\b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|a|^2+|b|^2 & 0\\0 & |c|^2\end{bmatrix}$; $(A^{\rm H}A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{|a|^2+|b|^2} & 0\\0 & \frac{1}{|c|^2}\end{bmatrix}$,

$A^+=(A^{\rm H}A)^{-1}A^{\rm H}=\begin{bmatrix}\frac{1}{|a|^2+|b|^2} & 0\\0 & \frac{1}{|c|^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \bar{a} & \bar{b}\\\bar{c} & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\bar{a}}{|a|^2+|b|^2} & \frac{\bar{b}}{|a|^2+|b|^2}\\\frac{\bar{c}}{|c|^2} & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 0 & -2\end{bmatrix}$,

解: A 的满秩分解为 $A=\alpha\beta^{\rm H}$, 其中 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$,

$\alpha^{\rm H}\alpha=5, \beta^{\rm H}\beta=2$,

$A^+=\beta^{\rm H}(\beta^{\rm H}\beta)^{-1}(\alpha^{\rm H}\alpha)^{-1}\alpha=(\beta^{\rm H}\beta)^{-1}(\alpha^{\rm H}\alpha)^{-1}\beta^{\rm H}\alpha=(\beta^{\rm H}\beta)^{-1}(\alpha^{\rm H}\alpha)^{-1}A^{\rm H}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\\-1 & -2\end{bmatrix}$.

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}^{\rm T}$,

解: $A^{H}A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&7\\7&10\end{bmatrix}$, $(A^{H}A)^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}10&-7\\-7&6\end{bmatrix}$,

$A^{+}=(A^{H}A)^{-1}A^{H}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}10&-7\\-7&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&10&-1\\-1&-7&4\end{bmatrix}$.

(4) $A=\begin{bmatrix}i&-i&0\\0&i&1\end{bmatrix}$.

解: $AA^{H}=\begin{bmatrix}i&-i&0\\0&i&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i&0\\-i&-i\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&i\\-i&2\end{bmatrix}$, $(AA^{H})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-i\\i&2\end{bmatrix}$,

$A^{+}=A^{H}(AA^{H})^{-1}=\begin{bmatrix}-i&0\\-i&-i\\0&1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-i\\i&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2i&-1\\-1&-i\\i&2\end{bmatrix}$.

10. 证明: 线性方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当 $AA^{+}b=b$.

证明: (⟹)设线性方程组 $Ax=b$ 有解 $x=\xi$,

则 $AA^{+}b=AA^{+}(A\xi)=(AA^{+}A)\xi=A\xi=b$.

(⟸)设 $AA^{+}b=b$, 则线性方程组 $Ax=b$ 有解 $x=A^{+}b$.

11. 用 $A\{1\}$表示满足 Penrose 第一个方程 $AGA=A$ 的 G 之集合.

证明: $A^{-}\in A\{1\}\Leftrightarrow A^{-}b$ 是方程组 $Ax=b$ 的解, $\forall b\in \mathrm{R}(A)$.

证明: (⟹)设 $A^{-}\in A\{1\}$, $b\in \mathrm{R}(A)$. 则存在ξ使得 $b=A\xi$,

于是 $A(A^{-}b)=A[A^{-}(A\xi)]=(AA^{-}A)\xi=A\xi=b$, 可见 $A^{-}b$ 是方程组 $Ax=b$ 的解.

(⟸)设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s\in \mathrm{R}(A)$.

若$\forall b\in \mathrm{R}(A)$, $A^{-}b$ 是方程组 $Ax=b$ 的解,

则 $AA^{-}A=AA^{-}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)=(AA^{-}\alpha_1,AA^{-}\alpha_2,\dots,AA^{-}\alpha_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)=A$.

可见 $A^{-}\in A\{1\}$.

12. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 证明:

(1)若 $\mathrm{r}(A)=n$, 则$\forall A^{-}\in A\{1\}$, $A^{-}A=I_n$.

证明: $\forall A^{-}\in A\{1\}$, 有 $AA^{-}A=A$, 故 $A(A^{-}A-I_n)=O$.

若 $\mathrm{r}(A)=n$, 则 $Ax=0$ 只有解, 因而 $A^{-}A-I_n=O$, 即 $A^{-}A=I_n$.

(2)若 $\mathrm{r}(A)=s$, 则$\forall A^{-}\in A\{1\}$, $AA^{-}=I_s$.

证明: $\forall A^{-}\in A\{1\}$, 有 $AA^{-}A=A$, 故 $(AA^{-}-I_s)A=O$, 从而 $A^{T}(AA^{-}-I_s)^{T}=O$.

若 $\mathrm{r}(A)=s$, 则 $\mathrm{r}(A^{T})=s$, $A^{T}x=0$ 只有解, 因而$(AA^{-}-I_s)^{T}=O$, 故 $AA^{-}=I_s$.

13. 设 A^{-}意义如第 11 题. 证明:

(1) $\mathrm{r}(A^{-})\ge \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(AA^{-})=\mathrm{r}(A^{-}A)$.

证明: $AA^{-}A=A\Rightarrow \mathrm{r}(A^{-})\ge \mathrm{r}(A)$.

$AA^{-}A=A\Rightarrow \mathrm{r}(A)\le \mathrm{r}(A^{-}A)\le \mathrm{r}(A)\Rightarrow \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{-}A)$.

$AA^{-}A=A\Rightarrow \mathrm{r}(A)\le \mathrm{r}(AA^{-})\le \mathrm{r}(A)\Rightarrow \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(AA^{-})$.

(2) AA^{-}与 $A^{-}A$ 均为幂等阵.

证明: $AA^{-}A=A\Rightarrow (AA^{-})^2=(AA^{-})(AA^{-})=(AA^{-}A)A^{-}=AA^{-}$.

$AA^{-}A=A\Rightarrow (A^{-}A)^2=(A^{-}A)(A^{-}A)=A^{-}(AA^{-}A)=A^{-}A$.

14. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 记为 $A\{1,2\}$满足 $AGA=A$ 与 $GAG=G$ 之 G 的集合.

证明: $\mathbb{C}^{n}=\mathrm{K}(A)\oplus \mathrm{R}(G)$, 其中 $G\in A\{1,2\}$.

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{C}^{n}$, 有 $A(\alpha-GA\alpha)=A\alpha-AGA\alpha=A\alpha-A\alpha=0$,

可见$\alpha-GA\alpha\in \mathrm{K}(A)$, 其中 $GA\alpha\in \mathrm{R}(G)$,

于是有$\alpha=(\alpha-GA\alpha)+GA\alpha\in \mathrm{K}(A)+\mathrm{R}(G)$,

因此$\mathbb{C}^{n}\subseteq \mathrm{K}(A)+\mathrm{R}(G)\subseteq\mathbb{C}^{n}$, 即$\mathbb{C}^{n}=\mathrm{K}(A)+\mathrm{R}(G)$.

另一方面, 对于任意的$\beta\in \mathrm{K}(A)\cap \mathrm{R}(G)$, 有 $A\beta=0$ 而且存在$\alpha\in\mathbb{C}^{n}$使得$\beta=G\alpha$.

故$\beta=G\alpha=(GAG)\alpha=GA\beta=G0=0$,

可见 $\mathrm{K}(A)\cap \mathrm{R}(G)=\{0\}$.

综上所述, $\mathbb{C}^{n}=\mathrm{K}(A)\oplus \mathrm{R}(G)$.

15. 若 G 满足 $AGA=A$, $(AG)^{H}=AG$, 则记 $G\in A\{1,3\}$.

证明: $\forall b\in\mathbb{C}^{s}$, Gb 是 $Ax=b$ 的最小二乘解, 其中 $G\in A\{1,3\}$.

证明: 对于任意的 $b\in\mathbb{C}^{s}$, 有

$A^{H}(AGb-b)=A^{H}AGb-A^{H}b=A^{H}(AG)^{H}b-A^{H}b=(AGA)^{H}b-A^{H}b=A^{H}b-A^{H}b=0$,

故 $AGb-b\in[\mathrm{R}(A)]^{\perp}$, 因而 Gb 是 $Ax=b$ 的最小二乘解.

16. 若 G 满足 $AGA=A$, $(GA)^{H}=GA$.

证明: $\forall b\in \mathrm{R}(A)$, $Gb=A^{+}b$, 故 Gb 是 $Ax=b$ 的极小最小二乘解.

证明: 对于任意的 $b\in \mathrm{R}(A)$, 存在 a 使得 $b=Aa$, 于是

$Gb=GAa=G(AA^{+}A)a=(GA)(A^{+}A)a=(GA)^{H}(A^{+}A)^{H}a=[(A^{+}A)(GA)]^{H}a=(A^{+}A)^{H}a$
$=A^{+}Aa=A^{+}b$,

故 Gb 是 $Ax=b$ 的极小最小二乘解.

17. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 若存在 $B\in\mathbb{C}^{n\times s}$ 使 $BA=I_n$, 则称 A 左可逆, B 为 A 的左逆.

证明: 若 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 则下列命题等价:

(1) A 左可逆.

(2) $s\ge n=\mathrm{r}(A)$.

(3) A 的列向量组线性无关.

(4) A 的核是零子空间.

证明: (1)⟹(2) A 左可逆 ⟹ 存在 $B\in\mathbb{C}^{n\times s}$ 使 $BA=I_n$

$\Rightarrow s\ge \mathrm{r}(B)\ge \mathrm{r}(BA)=\mathrm{r}(I_n)=n\ge \mathrm{r}(A)\ge \mathrm{r}(BA)=\mathrm{r}(I_n)=n$

$\Rightarrow s\ge n=\mathrm{r}(A)$.

(2)⟹(3) $n=\mathrm{r}(A)\Rightarrow A$ 的列向量组的秩为 $n\Rightarrow A$ 的列向量组线性无关.

(3)⟹(4) A 的列向量组线性无关 ⟹ 齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解

$\Rightarrow \mathrm{K}(A)=\{\alpha\in\mathbb{C}^{n}\mid A\alpha=0\}=\{0\}$.

(4)⟹(1)由 $AA^{+}A=A$ 得 $A(A^{+}A-I_n)=AA^{+}A-A=O$.

可见 $A^{+}A-I_n$ 的列向量均属于 A 的核.

若 A 的核是零子空间, 则 $A^{+}A-I_n$ 的列向量均为零, 即 $A^{+}A-I_n=O$,

因而 $A^{+}A=I_n$, 可见 A 左可逆.

18. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, B 为 A 的左逆. 证明:

(1) $(AB)^2=AB$.

证明: B 为 A 的左逆 $\Rightarrow BA=I\Rightarrow (AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B=AIB=AB$.

(2) $ABX=X$, $\forall X\in \mathrm{R}(A)$.

证明: 对于任意的 $X\in \mathrm{R}(A)$, 存在ξ使得 $X=A\xi$, 于是有

$X=A\xi=AI\xi=A(BA)\xi=AB(A\xi)=ABX$.

(3) $\dim\mathrm{R}(A)+\dim\mathrm{K}(B)=s$.

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{C}^{s}$, 有 $B(\alpha-AB\alpha)=B\alpha-BAB\alpha=B\alpha-B\alpha=0$,

可见$\alpha-AB\alpha\in \mathrm{K}(B)$, 其中 $AB\alpha\in \mathrm{R}(A)$,

于是有$\alpha=(\alpha-AB\alpha)+AB\alpha\in \mathrm{K}(B)+\mathrm{R}(A)$,

因此$\mathbb{C}^{s}\subseteq \mathrm{K}(B)+\mathrm{R}(A)\subseteq\mathbb{C}^{s}$, 即$\mathbb{C}^{s}=\mathrm{K}(B)+\mathrm{R}(A)$.

另一方面, 对于任意的$\beta\in \mathrm{K}(B)\cap \mathrm{R}(A)$, 有 $B\beta=0$ 而且存在$\alpha\in\mathbb{C}^{s}$使得$\beta=A\alpha$.

故$\beta=A\alpha=(ABA)\alpha=AB\beta=A0=0$,

可见 $\mathrm{K}(B)\cap \mathrm{R}(A)=\{0\}$.

综上所述, $\mathbb{C}^{s}=\mathrm{K}(B)\oplus \mathrm{R}(A)$, 因而 $\dim\mathrm{R}(A)+\dim\mathrm{K}(B)=\dim\mathbb{C}^{s}=s$.

(4)方程组 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow (I_s-AB)b=0$, 且有解时, 解唯一为 $x=Bb$.

证明: (⟹)方程组 $Ax=b$ 有解 $x=\xi\Rightarrow (I_s-AB)b=(I_s-AB)A\xi=A\xi-ABA\xi=A\xi-A\xi=0$.

此时, $\xi=I\xi=BA\xi=Bb$, 可见 $Ax=b$ 有唯一解 $x=Bb$.

(⟸) $(I_s-AB)b=0\Rightarrow ABb=b\Rightarrow$方程组 $Ax=b$ 有解 $x=Bb$.