

工程矩阵理论试卷样卷 10c

一、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C^{2 \times 2}$ 的子集 $V = \{X | AX = O, X \in C^{2 \times 2}\}$

1、证明: V 是 $C^{2 \times 2}$ 的子空间;

2、求 V 的一组基及 V 的维数;

3、证明 $A \in V$, 并求 A 在上小题所提基下的坐标;

4、试给出 $C^{2 \times 2}$ 的两个不同的子空间 W 及 W' , 使得 $C^{2 \times 2} = V \oplus W = V \oplus W'$

解: 1、设 $x, y \in V, k \in F$

$$A(x + y) = Ax + Ay = O$$

$$A(kx) = k(Ax) = O$$

所以, V 对加法和数乘封闭, 故 V 是 $C^{2 \times 2}$ 的子空间。

2、设 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix} = O$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}, \text{ 所以 } V \text{ 的基为 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 2 \text{ 维。}$$

3、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, A 在 α_1, α_2 下的坐标为 $(1, 1)$ 。

4、 V 实际为 A 核子空间, $V = K(A)$, 令 $W = V^\perp$ 即可构成 $C^{2 \times 2} = V \oplus W$, 则有

$W = V^\perp = K(A^H)$ 的极大线性无关组。(此处概念有点不清楚, 是否正确, 请周老师指教!)

$$A^H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A^H \text{ 的极大线性无关组为 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

二、假设 3 维线性空间 V 上的线性变换 f 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $J = \begin{pmatrix} 2 & a & c \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。问: 当 a, b, c, d

满足什么条件时, 存在 V 的一组基, 使得 f 的矩阵是 $K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & d & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$?

解:

$\because J, K$ 为同一线性变换下的矩阵, 故 $J \sim K$, 有相同的 jordan 标准形, 相同的特征值, 相同的迹, 相同的秩。

根据 J, K 迹相同(即主对角元素的和相同)得: $d = -1, K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

$$|\lambda I - K| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda + 1 & 0 \\ -2 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2,$$

$$\lambda = 2 \text{ 时, } r(2I - K) = r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2, \text{ 求得 } J_K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -a & -c \\ 0 & \lambda - 2 & -b \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$$

$$\lambda = 2 \text{ 时, } r(2I - J) = r \begin{pmatrix} 0 & -a & -c \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\therefore b \neq 0, a = c = 0 \quad \text{或} \quad b = 0, ac \neq 0$$

三、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C^{2 \times 2}$ 上的变换 f 定义如下: $f(X) = XA, \forall X \in C^{2 \times 2}$

1、证明: f 是线性变换;

2、求 f 在 $C^{2 \times 2}$ 的基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵 M ;

3、求 f 的值域 $R(f)$ 及核子空间 $K(f)$ 的基及它们的维数;

4、试求 M 的 jordan 标准形, 并写出 f 的最小多项式;

5、问: 能否找到 $C^{2 \times 2}$ 的基, 使得 f 的矩阵为对角阵? 为什么?

解:

1、证明: 设 $x, y \in C^{2 \times 2}, k \in F$

$$f(x+y) = (x+y)A = xA + yA = f(x) + f(y)$$

$$f(kx) = (kx)A = k(xA) = kf(x)$$

故 f 关于加法和数乘封闭, f 为线性变换。

2、 $f(X) = XA$

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{11}E_{12}E_{21}E_{22}) = (E_{11}E_{12}E_{21}E_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (E_{11}E_{12}E_{21}E_{22})M$$

3、 $R(f) = L(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$, $R(f)$ 的基 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 2 维。

$K(f): M \rightarrow M$, $K(f)$ 的基 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 2 维。

$$4、|\lambda I - M| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^4$$

$$J_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad m(\lambda) = \lambda^2$$

5、不能找到

四、求下列矩阵的广义逆矩阵：

$$1、A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{解： } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{3 \times 3} = B_{3 \times 2} C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^+ = C^H (C C^H)^{-1} B^H B^{-1} B^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^H \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^H \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^H =$$

$$2、B = \alpha^T \beta, \text{ 其中 } \alpha = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n), \ \beta = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)。$$

$$\text{解： } r(B) = r(\alpha^T \beta) = 1$$

$$\text{故对 } B \text{ 进行满秩分解, } B_{n \times n} = M_{n \times 1} N_{1 \times n} = \alpha^T \beta$$

$$\begin{aligned} A^+ &= \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} ((\alpha^T)^T \cdot \alpha^T)^{-1} \cdot (\alpha^T)^T \\ &= \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} (\alpha \cdot \alpha^T)^{-1} \cdot \alpha \\ &= \frac{1}{\langle \beta, \beta \rangle \langle \alpha, \alpha \rangle} \beta^T \alpha = \frac{1}{\langle \beta, \beta \rangle \langle \alpha, \alpha \rangle} B^T \end{aligned}$$

五、已知矩阵 A 的特征多项式与最小多项式相等，均为 $(\lambda - \lambda_0)^4$ ，给出 A, A^2, e^A, e^{A^2} 可能的 jordan 标准形。

解：A： 根据矩阵 A 的特征多项式与最小多项式相等，均为 $(\lambda - \lambda_0)^4$ ，可得

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$A^2: \quad A^2 \sim J_A^2 \sim J_{A^2}$$

$$J_A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & 2\lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix}$$

$$J_{A^2} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & * & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0^2 & * & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_0 = 0, \text{ 则 } J_{A^2} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad J_{A^2} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix}$$

$$e^A: \quad \text{令 } f(x) = e^x, \quad g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$f(\lambda_0) = g(\lambda_0) \quad e^{\lambda_0} = a + b\lambda_0 + c\lambda_0^2 + d\lambda_0^3$$

$$f'(\lambda_0) = g'(\lambda_0) \quad e^{\lambda_0} = b + 2c\lambda_0 + 3d\lambda_0^2$$

$$f''(\lambda_0) = g''(\lambda_0) \quad e^{\lambda_0} = 2c + 6d\lambda_0$$

$$f'''(\lambda_0) = g'''(\lambda_0) \quad e^{\lambda_0} = 6d$$

$$\text{求出 } a, b, c, d \text{ 代入, 求出 } f(A) = e^A = g(A) = a + bA + cA^2 + dA^3$$

$$e^{A^2}: \quad \text{令 } f(x) = e^{x^2}, \quad g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$f(\lambda_0) = g(\lambda_0) \quad e^{\lambda_0^2} = a + b\lambda_0 + c\lambda_0^2 + d\lambda_0^3$$

$$f'(\lambda_0) \neq g'(\lambda_0) \quad 2x\lambda_0 = b + 2c\lambda_0 + 3d\lambda_0^2$$

$$f''(\lambda_0) \neq g''(\lambda_0) \quad 2\lambda_0^2 + 1 = 2c + 6d\lambda_0$$

$$f'''(\lambda_0) = g'''(\lambda_0) \quad 4\lambda_0 e^{\lambda_0} (2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 + 1) = 6d$$

求出 a, b, c, d 代入, 求出 $f(A) = e^{A^2} = g(A) = a + bA + cA^2 + dA^3$

六、矩阵函数:

1、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵函数 e^{At} , 并给出 e^{At} 的特征多项式。

解: 求 e^{At} :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$$r(I - A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad \therefore J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$$\text{令 } f(x) = e^{xt}, \quad g(x) = a + bx + cx^2$$

$$f(0) = g(0) \quad e^0 = 1 = a$$

$$f(1) = g(1) \quad e^1 = a + b + c$$

$$f'(1) = g'(1) \quad t'e = b + 2c$$

$$a = 1 \quad b = 2e - t'e - 2 \quad c = t'e - e$$

$$f(A) = e^{At} = g(A) = aI + bA + cA^2 = I + (2e^t - te^t - 2)A + (te^t - e^t + 1)A^2$$

求 e^{At} 的特征多项式:

A 的特征值 λ 为 0, 1, $f(A)$ 的特征值即为 $f(\lambda)$, 故 e^{At} 的特征值为 $e^{0t} = 1$, $e^{1t} = e^t$ 。

2、设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 试将 $A^2 e^{At}$ 表示成关于 A 的次数不超过 2 的多项式, 并求 $A^2 e^A$ 。

$$\text{解: } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2, \text{ 当 } \lambda = 1 \text{ 时, } r(I - A) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\therefore J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$$\text{令 } f(x) = x^2 e^{xt} \quad g(x) = a + bx + cx^2$$

$$f(0) = g(0) \quad 0 = a$$

$$f(1) = g(1) \quad e^t = a + b + c$$

$$f'(1) = g'(1) \quad 2x e^{xt} + e^{xt} = b + 2cx \quad 2e^t = b + 2c$$

$$\text{求出 } a, b, c \text{ 代入, 求出 } f(A) = A^2 e^{At} = g(A) = a + bA + cA^2$$

七、设 \mathbf{R}^3 的子空间 $V = \{(x, y, z) | 2x - y + 3z = 0\}$, $\eta = (1, 1, 1)$, 求 $\eta_0 \in V$ 使得 $\|\eta - \eta_0\| = \min_{\xi \in V} \|\eta - \xi\|$ 。

该题与“工程矩阵理论试卷样卷 10a”第三题类似, 为找正投影问题。

八、证明题:

1、证明: 若酉矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2I = 0$, 则 $A = I$ 。

证明: 令 $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$\therefore f(A) = A^2 - 3A + 2I = 0$, $\therefore f(x)$ 为 A 的化零多项式,

$\therefore A$ 的特征值一定是 $f(x)$ 的根, $\lambda_1 = 1$ (重数未知), $\lambda_2 = 2$ (重数未知),

$$\text{设 } J_A = \begin{pmatrix} 1 & * & & \\ & \dots & * & \\ & & 1 & 0 \\ & & & 2 & * \\ & & & & \dots & * \\ & & & & & 2 \end{pmatrix} \quad (* \text{ 可能为 } 0, \text{ 也可能为 } 1)$$

$\therefore A$ 为酉矩阵, $\therefore A$ 一定相似于 I , 即 $J_A \sim I$, 由此得 $\lambda_2 = 2$ 的重数为 0,

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} 1 & * & \\ & \cdots & * \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ (* 只可能为 0)}, \mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & \cdots & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\because \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \therefore \text{得证。}$$

$$\therefore \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{I} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}$$

2、设 H 阵 A, B 均是正定的, 证明: AB 的特征值均为正实数。

该题与 “工程矩阵理论试卷样卷 10a” 第七题第二小题相同。