参考书目：1.《线性代数》

2.《矩阵论》，《矩阵分析》.

课程主要内容：$\begin{cases} \text{线性代数}(\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{C}) \ (\text{第0~4章}) \\ \text{矩阵范数、矩阵函数} \ (\text{第5章}) \\ \text{广义逆} \ (\text{第6章}) \end{cases}$

Ch0 复习与引深

§0.1 矩阵与分块

回顾：矩阵运算，分块矩阵，方阵的行列式及逆

要点：n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow |A|\neq 0 \quad (A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*)$

$\Leftrightarrow \exists$方阵B使$AB=I$

$(A^{-1}=B)$

$\Leftrightarrow r(A)=n$.

例1. 求证可逆上三角阵之逆仍为上三角阵.

证明：设A为n阶可逆上三角阵，则由$|A|\neq 0$知A的对角元全非0，下对n作归纳.

$n=1$时，命题显然成立，假设$n-1$阶时成立.

记$A=\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_{nn}\end{bmatrix}$，其中$A_1$为$n-1$阶上三角阵.

$\because A_1$的对角元非0，$\therefore |A_1|\neq 0$即A_1可逆，由假设知A_1^{-1}为上三角阵. 设$A^{-1}=\begin{bmatrix} X_1 & \beta \\ X_2 & x_{nn}\end{bmatrix}$，则

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & \beta \\ X_2 & x_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

即$\begin{cases} A_1X_1+\alpha X_2=I_{n-1} \\ A_1\beta+\alpha x_{nn}=0 \\ a_{nn}X_2=0 \\ a_{nn}x_{nn}=1 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} X_1=A_1^{-1} \\ X_2=0 \\ \beta=-A_1^{-1}\alpha a_{nn}^{-1} \\ x_{nn}=a_{nn}^{-1}\end{cases}$

于是$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}\alpha a_{nn}^{-1} \\ 0 & a_{nn}^{-1}\end{bmatrix}$为上三角阵. #

No. 2

Date

思考：$AB=BA$? 例2. 已知 A, B 满足 $A+B=AB$. 试证：$A-I$ 可逆并求其逆.

证明：由 $A+B=AB$ 得 $AB-B-A+I=I$，

即 $(A-I)(B-I)=I$，故 $A-I$ 可逆且 $(A-I)^{-1}=B-I$. #

例3.(1) 记 $I=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，试证：$Ae_j$ 为 A 的第 j 列，$e_i^T A$ 为 A 的第 i 行.

(2) 设 n 阶矩阵 $N=\begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$，试证：

$$N^k=\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & k<n \\ 0, & k\geq n. \end{cases}$$

证明：(1) $(A_1, \cdots, A_n)=A=AI=A(e_1, e_2, \cdots, e_n)$
$=(Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_n)$

即 $A_j=Ae_j$ 为 A 的第 j 列.

$$\left(\text{或 } Ae_j=(A_1, \cdots, A_n)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} j = A_j \right)$$

$$e_i^T A=(0, \cdots, \overset{i}{1}, \cdots, 0)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}=\alpha_i \text{ 为 } A \text{ 的第 } i \text{ 行}.$$

(2). 对 $k<n$，用归纳法来证

当 $k=1$ 时，命题显然成立. 假设 $k-1$ 时成立，即

$$N^{k-1}=\begin{bmatrix} 0 & I_{n-k+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=(\underbrace{0, \cdots, 0}_{k-1\text{个}}, e_1, \cdots, e_{n-k+1})$$

于是 $N^k=N^{k-1}N=N^{k-1}(0, e_1, \cdots, e_{n-1})$

$=(0, N^{k-1}e_1, \cdots, N^{k-1}e_{n-1})$

$=(\underbrace{0, \cdots, 0}_{k\text{个}}, e_1, \cdots, e_{n-k})$

$=\begin{bmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

特别地，取 $k=n-1$，则有 $N^{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
$=(\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, e_1)$

于是 $N^n = N^{n-1}N = N^{n-1}(0, e_1, \cdots, e_{n-1})$
$= (0, N^{n-1}e_1, \cdots, N^{n-1}e_{n-1}) = O$

故 $k \geq n$ 时，$N^k = O$. #.

例4. 试证：(1) 若 A 可逆，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$;

(2) 若 A, B, C, D 为同阶方阵，且 $AC = CA$，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

证明：(1) 设 $A_{k\times k}$, $D_{s\times s}$，则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & -A^{-1}B \\ O & I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

(2) 先假设 A 可逆，则由(1)知

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B|$$

$$\xlongequal{AC=CA} |AD - CB|$$

一般情况下，作 $f(t) = \begin{vmatrix} A + tI & B \\ C & D \end{vmatrix}$.

注意到多项式 $|A + tI|$ 的零点只有有限多个，因此，有无穷多个 t 使 $|A + tI| \neq 0$. 对这样的 t，知 $A + tI$ 是可逆的. 同时，$(A + tI)C = C(A + tI)$

于是由前面的证明知：有无穷多个 t 使

$$\begin{vmatrix} A + tI & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A + tI)D - CB| \triangleq g(t) \quad (*)$$

作 $F(t) = f(t) - g(t)$ 为 t 的多项式，(*)式意味着有无穷多个 t 使 $F(t) = 0$，∴ $F(t) \equiv 0$，即对一切 t (*)式成立. 取 $t = 0$，得证. #

§0.2 矩阵的秩、线性方程组及其秩的解

要点：(1) $r(A)=r \Leftrightarrow A$的行(列)秩$=r$ $\quad (r(A)=r(A^T))$

$\Leftrightarrow A$的非零子式的最高阶数$=r$

$\Leftrightarrow \exists$可逆阵P, Q使 $A=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

(2) $Ax=b$有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)$

$\Leftrightarrow b\in A$的列空间

(3) 设$K(A)=\{X\in \mathbb{R}^n$ (或$\mathbb{C}^n$) $\mid AX=0\}$，则 $\dim K(A)=n-r(A)$

例1. 试证：(1) $ABX=0$与$BX=0$同解 $\Leftrightarrow r(AB)=r(B)$

~~(2) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$~~

(2) $r(A)=r(A^HA)$，其中 $A^H=(\bar{A})^T$

证明：(1) "$\Rightarrow$" 依题意知 $\dim K(AB)=\dim K(B)$

即 $n-r(AB)=n-r(B)$，$\therefore r(AB)=r(B)$；

"$\Leftarrow$" 若$r(AB)=r(B)=n$，则 $ABX=0$，$BX=0$都只有零解，即同解；若$r(AB)=r(B)=r<n$，由于$BX_0=0$时必有$ABX_0=0$，故$BX=0$的由$n-r(A)$个解构成的基础解系也是$ABX=0$的基础解系.

(2) 只需证明 $A^HAX=0$与$AX=0$同解.

设$AX_0=0$ 则 $A^HAX_0=0$．若 $A^HAX_0=0$，则

$0=X_0^HA^HAX_0=(AX_0)^H(AX_0)$ 即 $AX_0=0$.

(事实上，设$AX_0=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{bmatrix}$，则由上式可知 $|y_1|^2+\cdots+|y_s|^2=0$ 即 $y_1=\cdots=y_s=0$ $\therefore AX_0=0$)

由(1)知 $r(A)=r(A^HA)$. #

例2. 试证：(1) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

(2) ~~$r(AB)\le$~~ $r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\{r(A), r(B)\}$

其中 $A_{s\times n}$，$B_{n\times t}$.

证明：(1) 设$A=(A_1,\cdots,A_n)$，$B=(B_1,\cdots,B_n)$，则

$(A+B)_j=A_j+B_j$，$j=1,\cdots,n$.

即 $A+B$ 的列向量组可由 $A_1,\cdots,A_n,B_1,\cdots,B_n$ 线性表示.
故 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

(2) 由于 $BX=0$ 的解是 $ABX=0$ 的解，故
$$n-r(B)\le n-r(AB),\quad 即\ r(AB)\le r(B)$$
$$r(AB)=r(AB)^T=r(B^TA^T)\le r(A^T)=r(A)$$
$\therefore\ r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$

另一方面，设 $r(A)=r$，$r(B)=k$，则 $\exists$ 可逆阵 P,Q 使
$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q,$$
于是 $AB=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}QB\ \underline{\underline{记QB=\begin{bmatrix}C_r\\C_{n-r}\end{bmatrix}}}\ P\begin{bmatrix}C_r\\0\end{bmatrix}$

$\therefore\ r(AB)=r\left(P\begin{bmatrix}C_r\\0\end{bmatrix}\right)=r(C_r)$

又 $r(B)=r(QB)=r\left(\begin{bmatrix}C_r\\C_{n-r}\end{bmatrix}\right)\le r(C_r)+r(C_{n-r})$
$$\le r(AB)+n-r$$
即 $r(A)+r(B)-n\le r(AB)$，得证. #

设 A 是 $s\times n$ 矩阵且 $r(A)=r$，显然有
$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$$
$$=P\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix}[I_r,0]Q$$
令 $B=P\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix}$，$C=[I_r,0]Q$，则 $A=BC$

$s\times r$ 列满秩

行满秩 $r\times n$

且 $r(B)=r=r(C)$，称之为 A 的满秩分解.

如何找 B,C？简单的初观察法：

例如 $A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=(A_1,A_2,A_1+2A_2,A_1-A_2)$
$$=\underbrace{(A_1,A_2)}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&-1\end{bmatrix}}_{C}$$

当A比较复杂时,

$A=(A_1,\cdots,A_n) \xrightarrow{\text{行变换}}$ 最简行 $\tilde{A}=(\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_n)$

容易观察出 $\tilde{B}, \tilde{C}$.

又 $AX=0$ 与 $\tilde{A}X=0$ 同解

故A的列向量间的线性关系与$\tilde{A}$的相同.

例5. 求 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&2\\-2&3&-5&-12\\1&0&1&3\\-1&2&-3&-7\end{bmatrix}$ 的满秩分解.

解. $A \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=(\tilde{A}_1,\tilde{A}_3)\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&2\end{bmatrix}$

$\therefore A=(A_1,A_3)\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-2&-5\\1&1\\-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&2\end{bmatrix}$. #

例6. 试证: $r(ABC)+r(B)\geq r(AB)+r(BC)$.

证明: 设 $r(B)=r$ 则 $B=HK$ 为B的满秩分解. 则

$r(ABC)=r(AHKC)\geq r(AH)+r(KC)-r$ (*)

又 $r(AB)=r(AHK)\leq r(AH)$

$r(BC)=r(HKC)\leq r(KC)$

故由(*)式立知,

$r(ABC)+r(B)\geq r(AB)+r(BC)$. #

作业: 待回课后习题10中: 第7, 8, 9, 10, 14, 16, 17

18(3), 21, 22, 25.