Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 8 "Интерполяционные полиномы приближения табличных функций" дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Жохов О. Д.
Преподаватель Козлов К.Н.

Март, 2024

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

Приближение табличной функции полиномом Ньютона, идущим с конца в начало

1.1 Формализация задачи:

Реализовать метод построения полинома Ньютона, проанализировать его работу

1.2 Поставленные задачи:

1. Реализовать алгоритм метода
2. Вычислить вручную на бумаге значения полинома и фактической ошибки для 3 узлов в узлах и серединах между узлами. Получить полином в каноническом виде (по степеням x).
3. Построить на одном графике функцию, полином для 3 вариантов небольшого числа узлов (5...10), отметить узлы. На другом графике построить функции поточечной ошибки для этих же полиномов. Провести линию теоретической ошибки, построенной для одного из 3х полиномов.
4. Зависимость ошибки интерполяции от степени интерполяционного полинома (количества узлов). Требуется построить график максимальной ошибки на отрезке в зависимости от числа узлов: 5...100.
5. Две точки требуется выбрать из проверочной сетки, в них вычисляется модуль разности значений функции и полинома для полиномов, построенных по разному количеству узлов

2 Алгоритм метода и условия применимости

2.1 Алгоритм метода

В цикле по m от 0 до n - числа узлов вычисляется коэффициент - разделенная разность $[y_0, ..., y_m]$. Далее, этот коэффициент умножается на $\Pi_{k=0}^{m}(x - x_k)$, где x_k - k-й элемент сетки xh, а x - значение аргумента, в котором вычисляется значение полинома Ньютона.

2.2 Условия применимости

Задача имеет единственное решение в случае, если:

1. Степень интерполяционного полиному на единицу меньше количества интерполяционных узлов, по которым мы строим полином.

2. Все x-компоненты табличной функции попарно различны.

3 Предварительный анализ задачи

Вариант включает в себя аппроксимацию полиномом Ньютона двух следующих функций:

$$\sqrt{x} - cos(x) \tag{1}$$

$$sign(x)x^4 - 18x^2 + 2 \tag{2}$$

Для интерполирования функции (1) выбран отрезок $[1;6]$. Для функции (2) - $[-2;2]$

Для каждой функции строится 2 вида сетки - равномерная и Чебышевская. Далее, для определенного числа узлов n вычисляются значения полинома в 10000 точках.

3.1 Теоретическая ошибка

Формула теоретической ошибки

$|y - P(x)| = [y_0, ..., y_n, y]\omega(x)$

4 Тестовый пример

Ручной расчёт

Чебышевская сетка:

$x = \{1{,}13397 5;\ 2;\ 2{,}866025\}$

$y = \{0{,}691621;\ 1{,}83036;\ 2{,}655205\}$

$[y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 1{,}37240726$

$[y_1, y_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0{,}95244941$

$[y_0, y_1, y_2] = \frac{[y_1, y_2] - [y_0, y_1]}{x_2 - x_0} = -0{,}242963$

$$
\begin{aligned}
P_2 &= y_2 + (x - x_2)[y_1, y_2] + (x - x_2)(x - x_1)[y_0, y_1, y_2] = \\
&= 2{,}655205 + 0{,}95244941(x - 2{,}866025) - 0{,}242463(x - 2{,}866025)(x - 2) = \\
&= 2{,}655205 + 0{,}95244941x - 2{,}729744 - 0{,}242463x^2 + 1{,}179831x - \\
&- 1{,}38981 = -0{,}242463x^2 + 2{,}13228x - 1{,}454399
\end{aligned}
$$

Ошибка:

$|f(x_0) - P(x_0)| = 0$

$\left|f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) - P\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\right| = 0{,}04357$

$|f(x_1) - P(x_1)| = 0$

$\left|f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| = 0{,}02086$

$|f(x_2) - P(x_2)| = 0$

5 Модульная структура программы и контрольные тесты

5.1 Контрольные тесты

Для каждой функции строится 2 вида сетки - равномерная и Чебышевская. Далее, для пределенного числа узлов n вычисляются значения полинома в 10000 точках (построение проверочной сетки).

5.2 Модульная структура программы

```
double f1(double x)
```

- возвращает значение функции (1) в точке x

```
double f2(double x)
```

- возвращает значение функции (2) в точке x

```
double* table_h(double start, double finish, int n)
```

- построение набора элементов по x для равномерной сетки n узлов на отрезке $[start; finish]$, возвращает массив из n элементов

```
double* table_chebish(double start, double finish, int n)
```

- построение набора элементов по x Чебышевской сетки для n узлов на отрезке $[start; finish]$, возвращает массив из n элементов

```
double** differences_building(double* x, double* y, int n)
```

- построение двумерного массива разделенных разностей для Чебышевской xy сетки n узлов, возвращает указатель на массив указателей, в котором на позиции (i, j) находится разделенная разность $y[y_i, ..., y_{i+j}]$

```
double Newton_method_rtl(double const x, double
const* x_list, double const** differences, int const n)
```

- возвращает значение интерполяционного полинома в точке x для Чебышевской сетки n, используя массив разделенных разностей differences и набор элементов сетки по x `x_list`

```
Newton_cycle_mistake(double x_start_1, double x_finish_1, double
x_start_2, double x_finish_2, int cycle_start, int cycle_finish,
double current_x, int check)
```

- Функция, принимающая на вход начала отрезков непрерывности для каждой из функций, начало и конец количества узлов, по которым будет определена ошибка, точку, в которой будет найдена ошибка и количество точек, на которые будут разбиты отрезки непрерывности. Записывает в файл output1.txt максимальную ошибку в зависимости от количества узлов, в output2.txt - ошибку в конкретной точке в зависимости от числа узлов.

6 Численный анализ решения

6.1 Функции и полиномы на одном графике. Графики поточечной ошибки

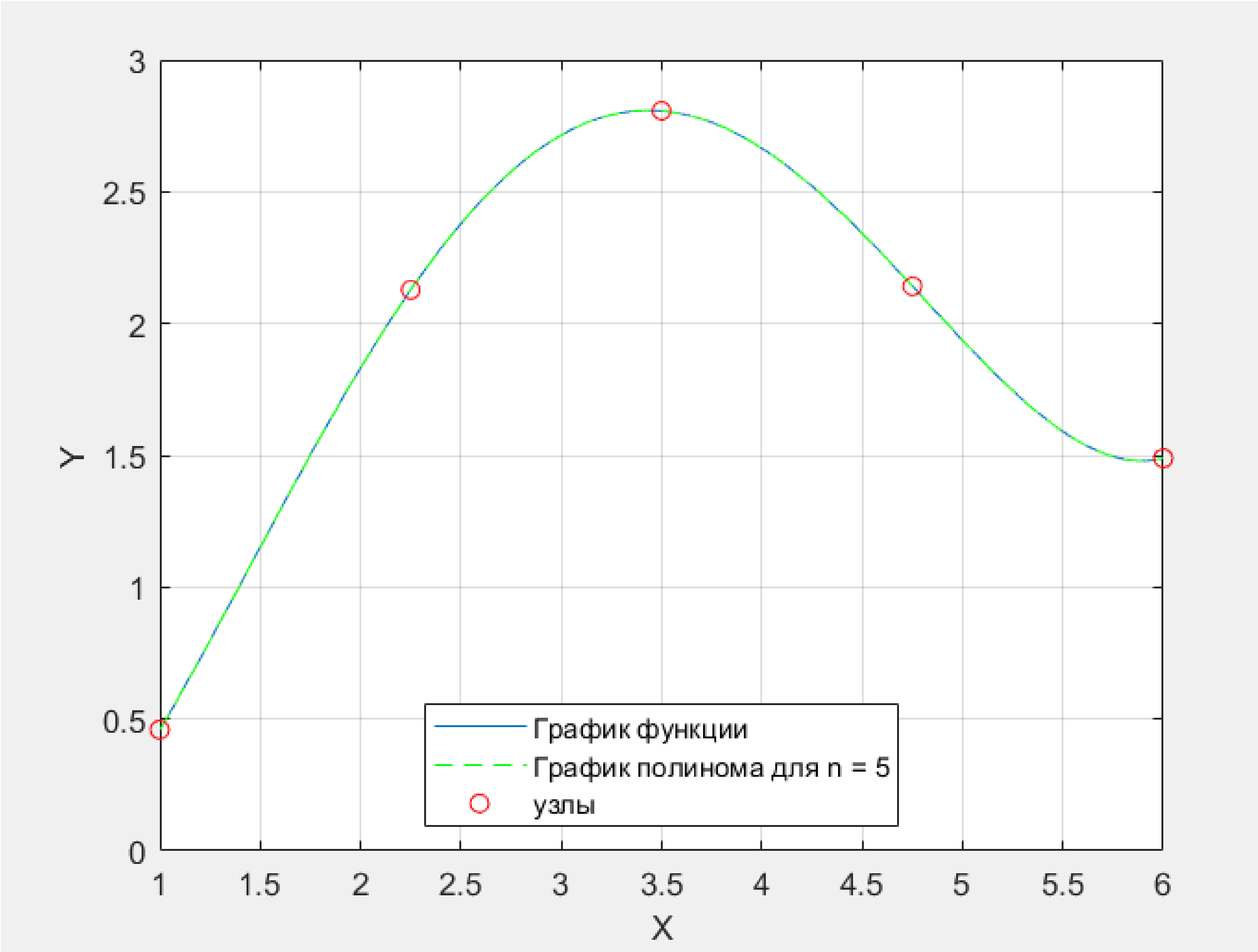

Рис. 1: График функции (1) и полинома Ньютона для n=5, равномерная сетка

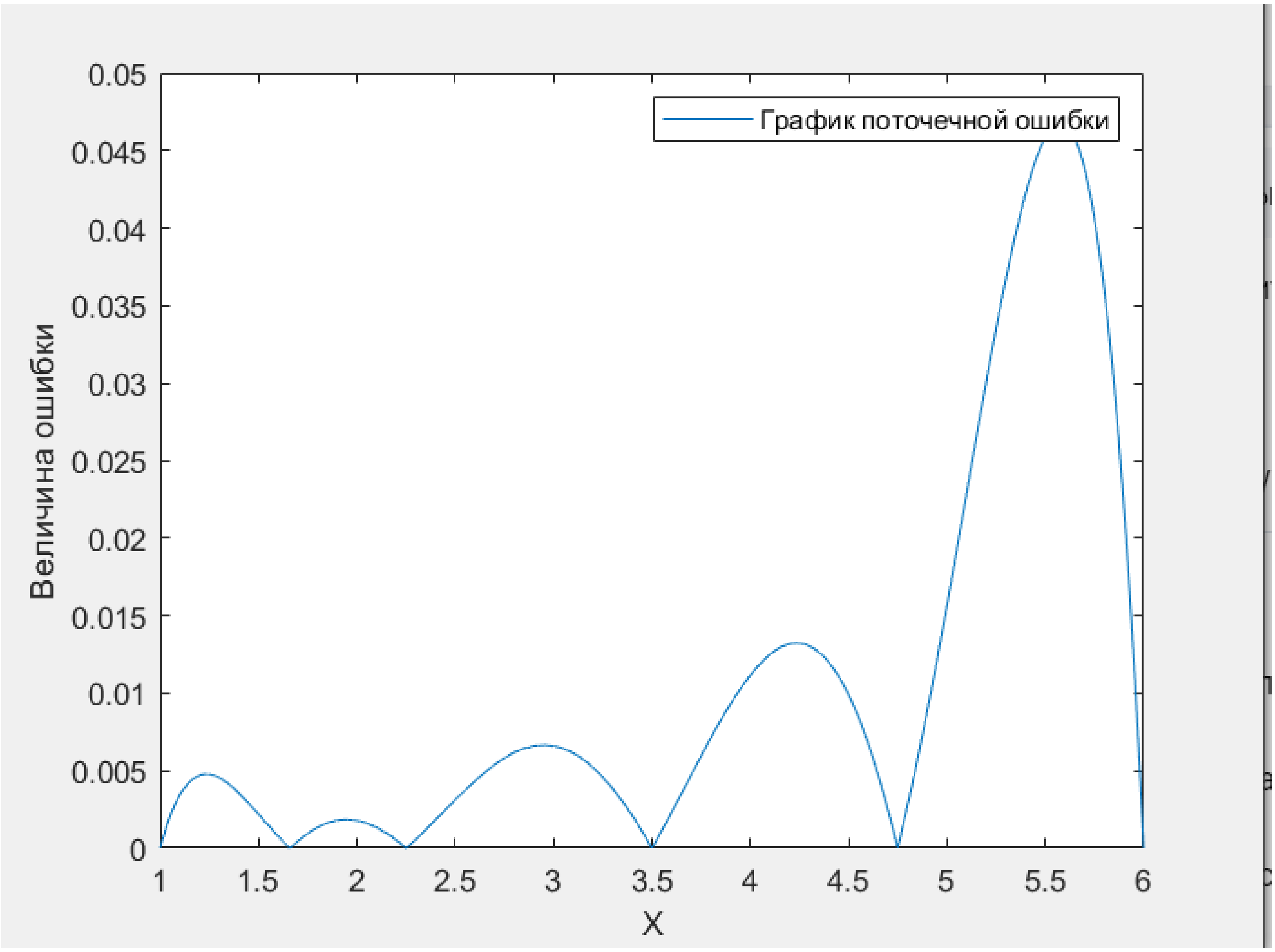

Рис. 2: График функции поточечной ошибки для n=5, равномерная сетка, функция (1)

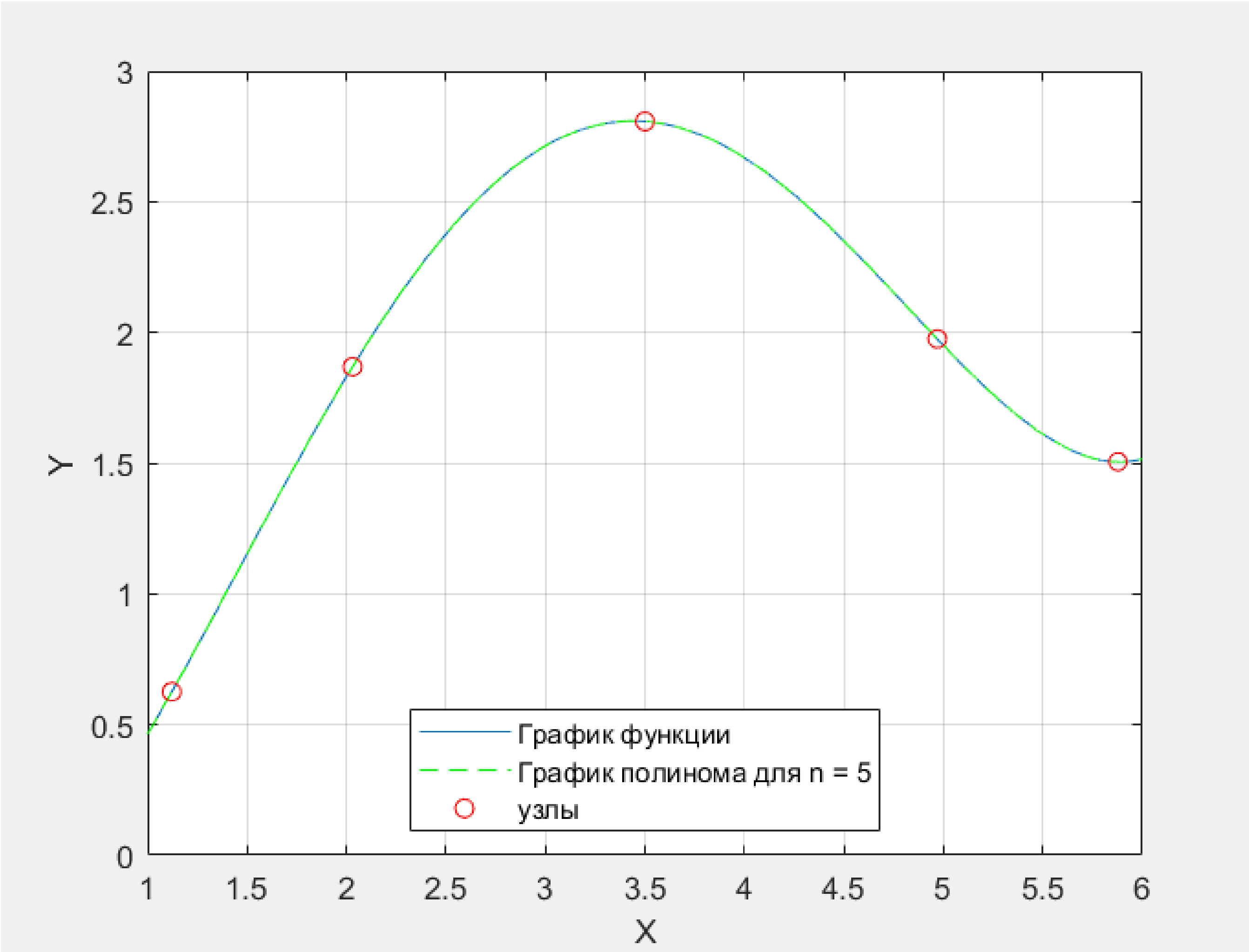

Рис. 3: График функции (1) и полинома Ньютона для n=5, Чебышевская сетка

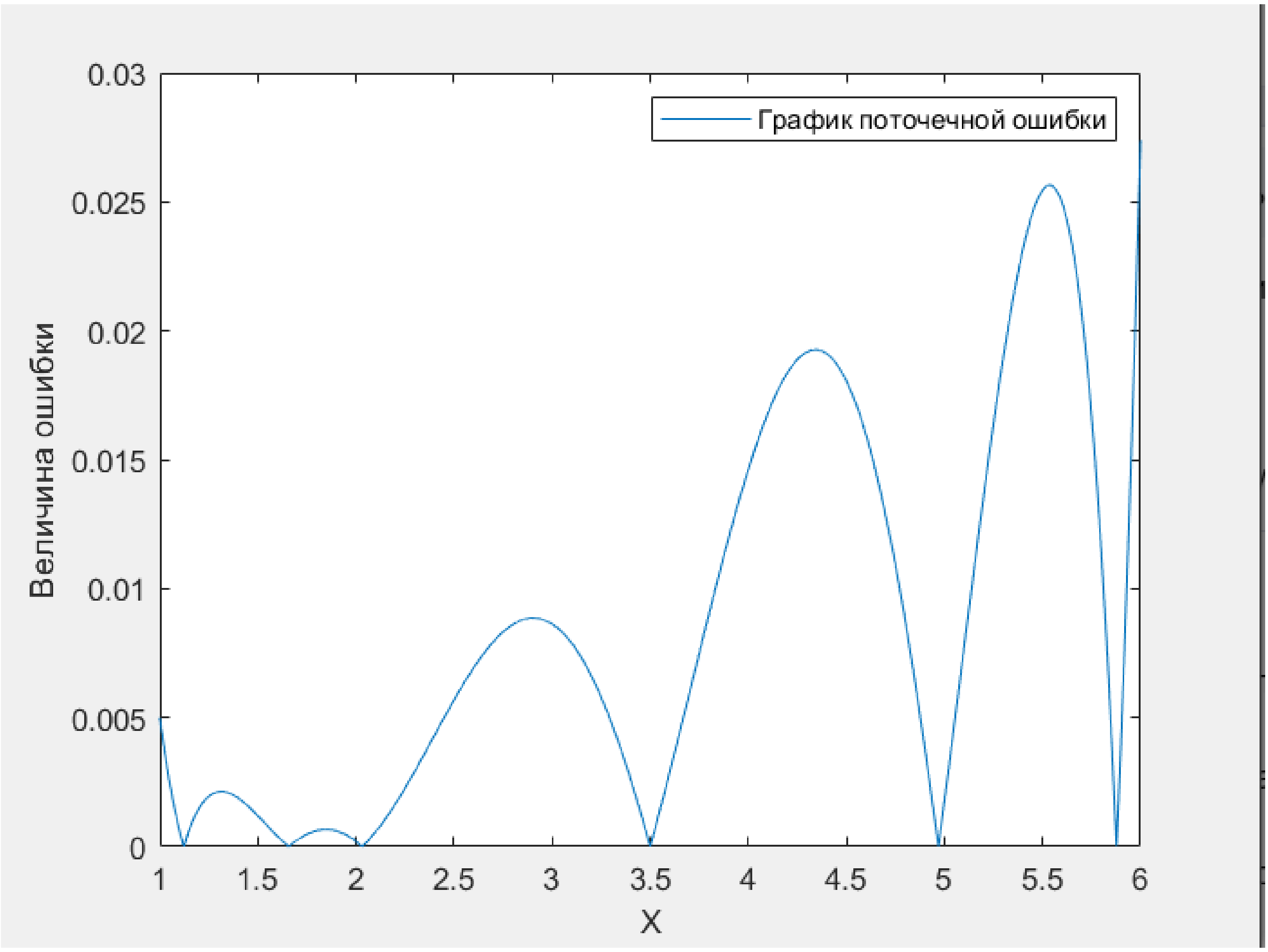

Рис. 4: График функции поточечной ошибки для n=5, Чебышевская сетка, функция (1)

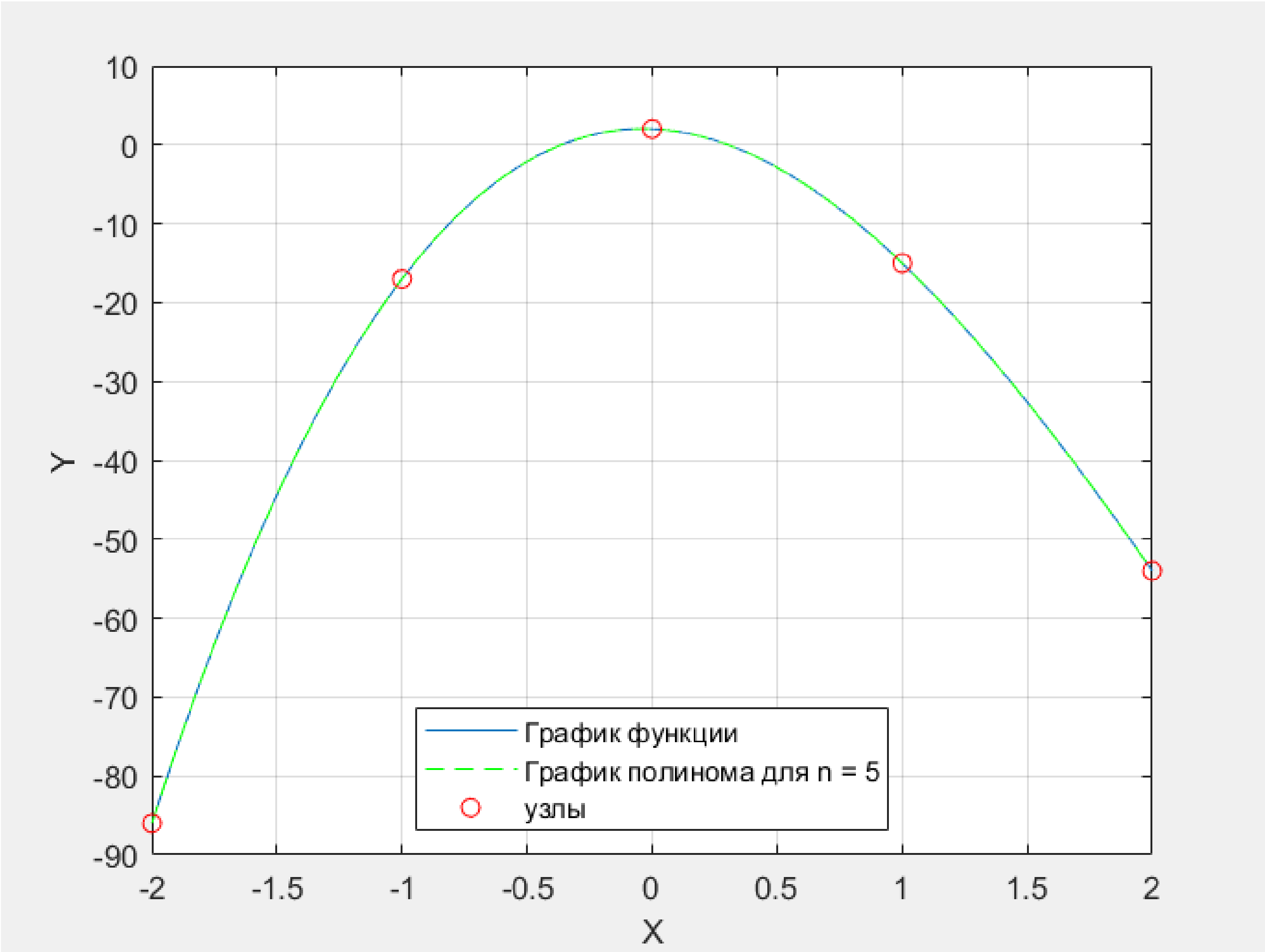

Рис. 5: График функции (2) и полинома Ньютона для n=5, равномерная сетка

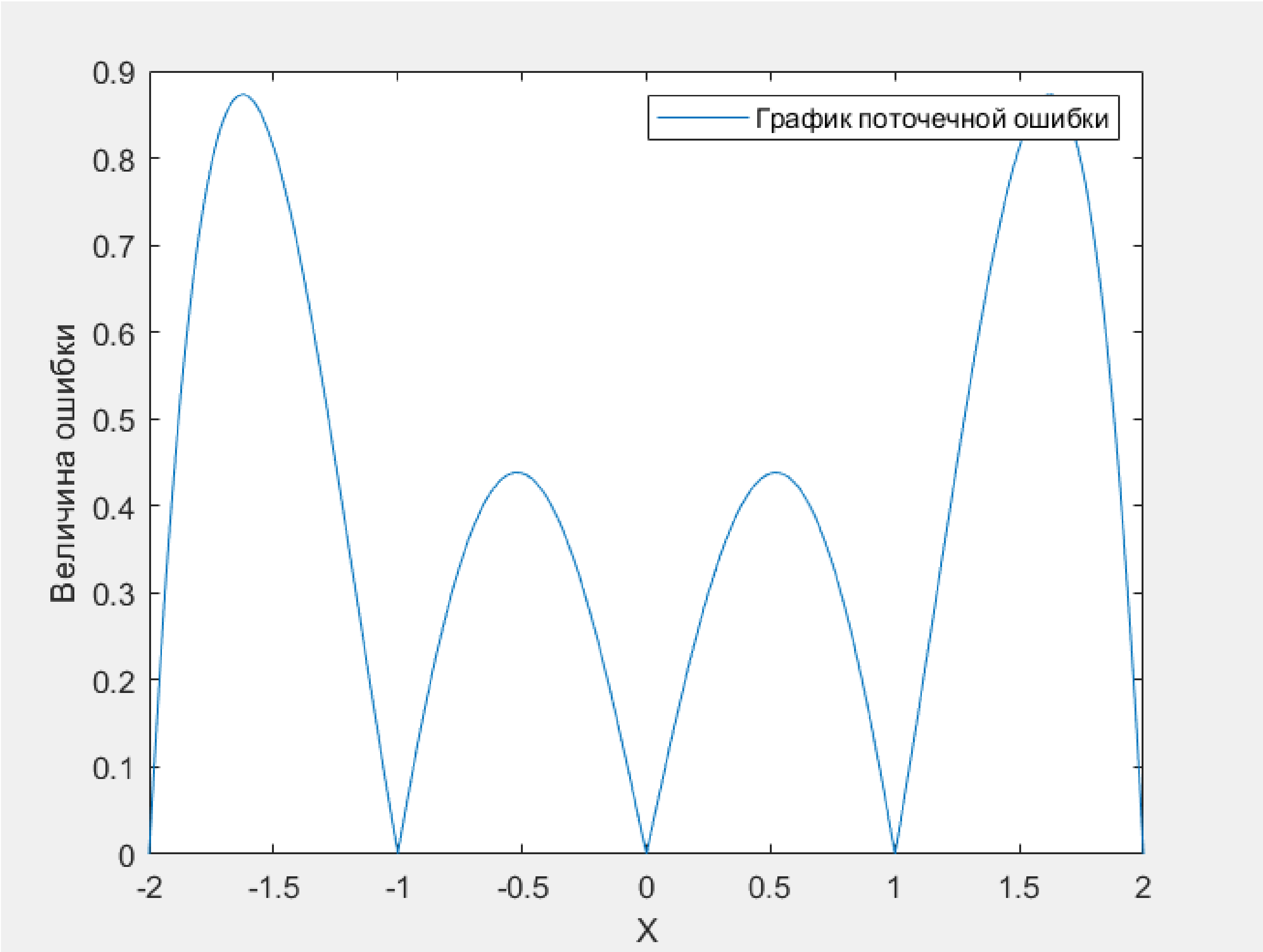

Рис. 6: График функции поточечной ошибки для n=5, равномерная сетка, функция (2)

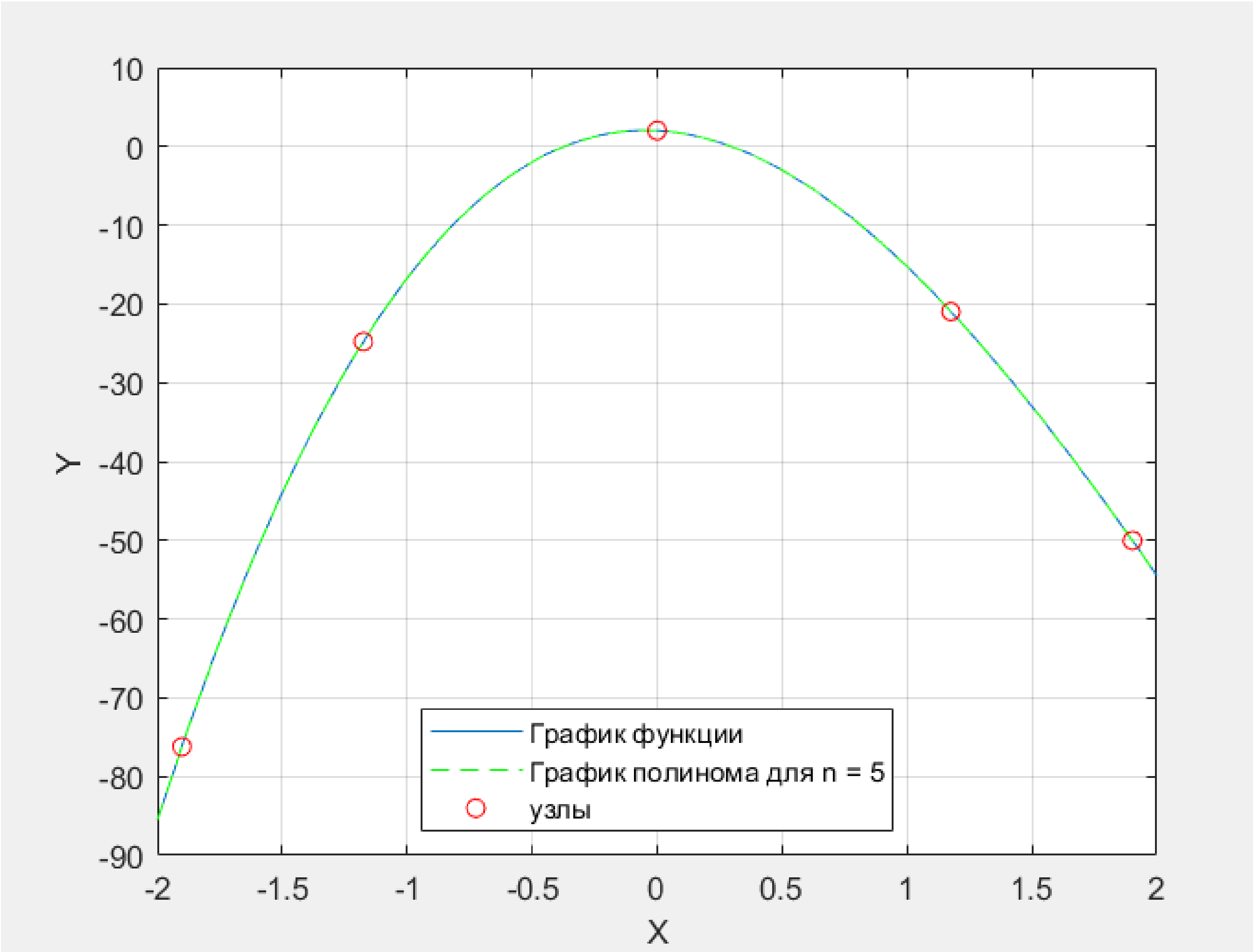

Рис. 7: График функции (2) и полинома Ньютона для n=5, Чебышевская сетка

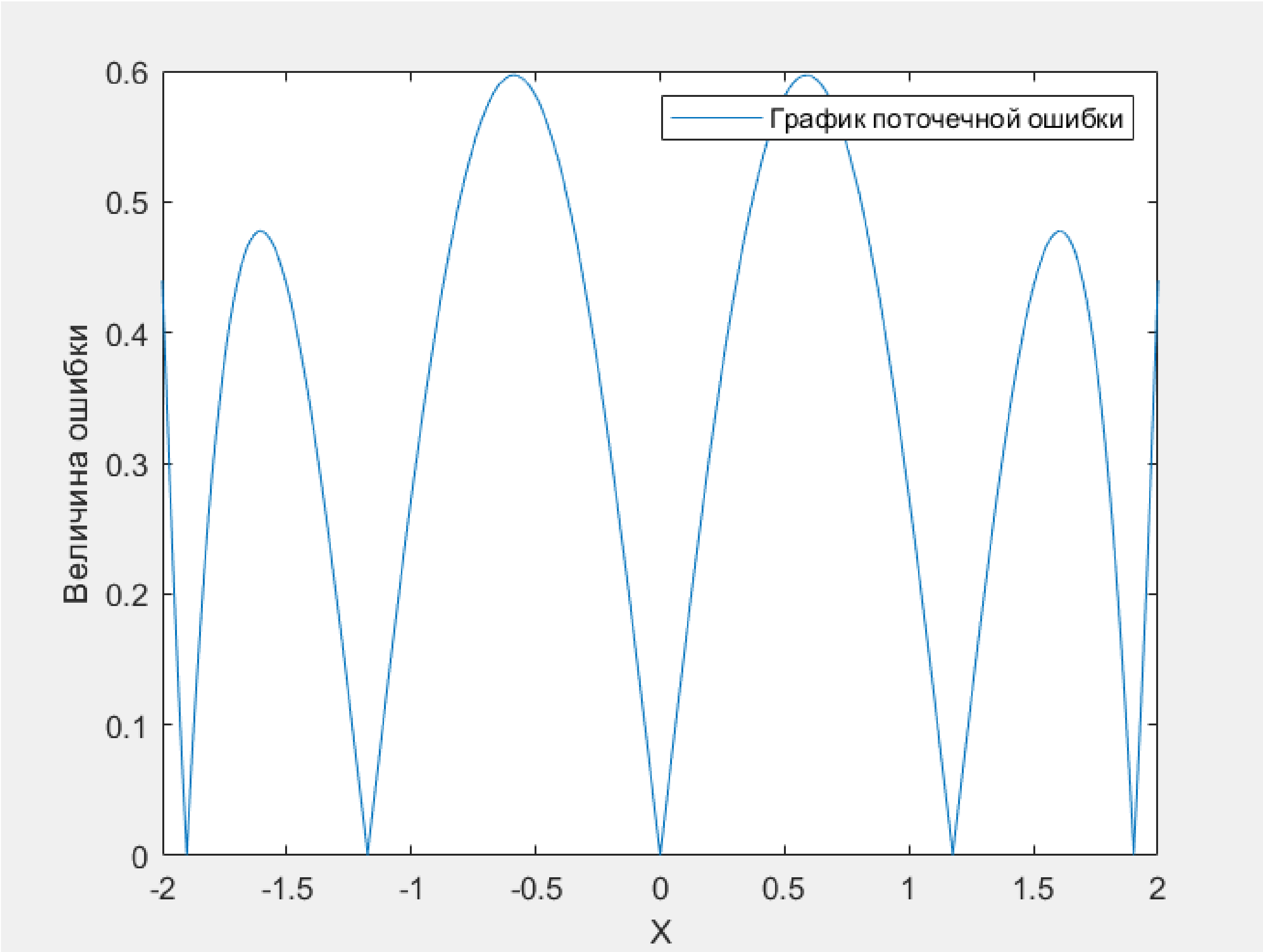

Рис. 8: График функции поточечной ошибки для n=5, Чебышевская сетка, функция (2)

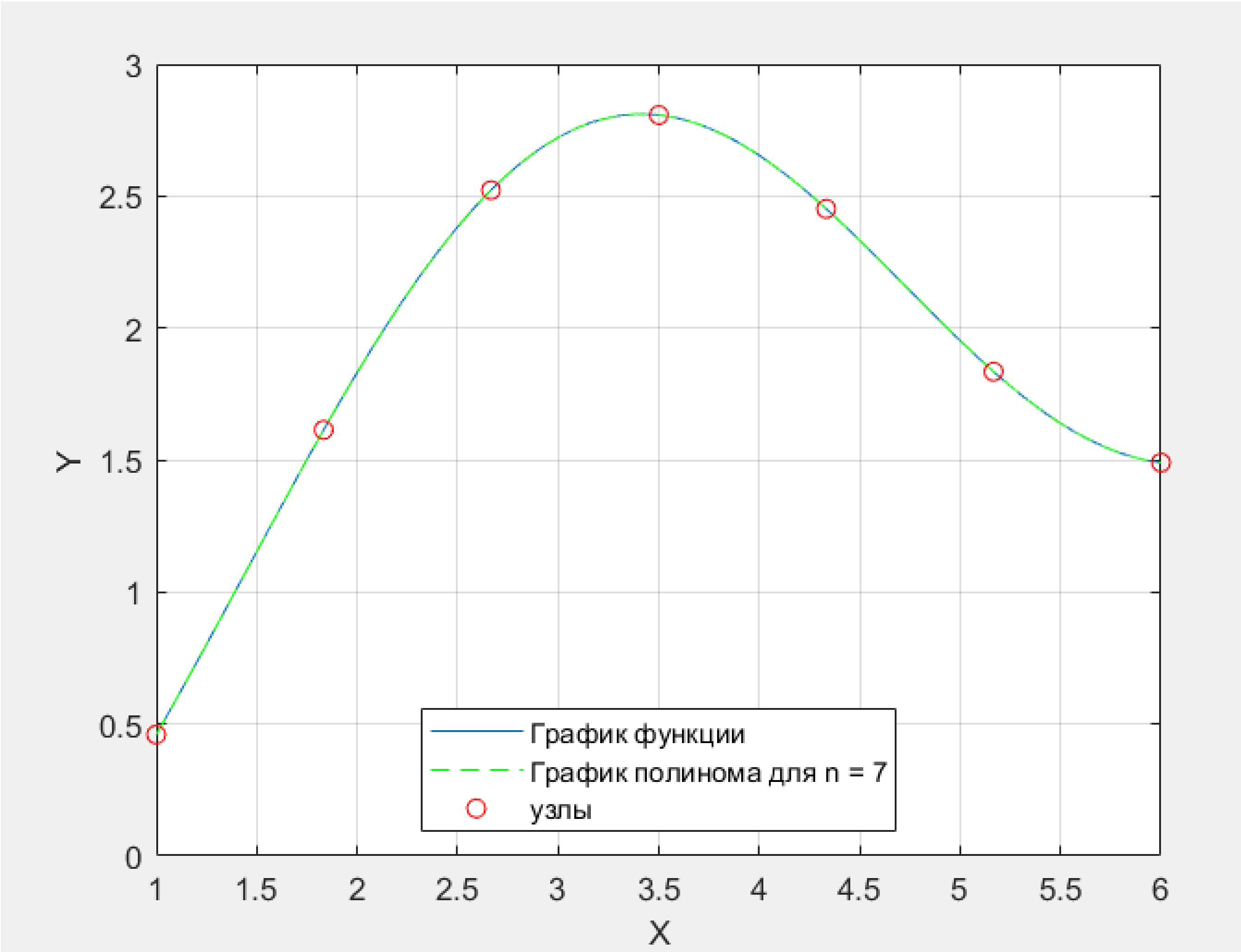

Рис. 9: График функции (1) и полинома Ньютона для n=7, равномерная сетка

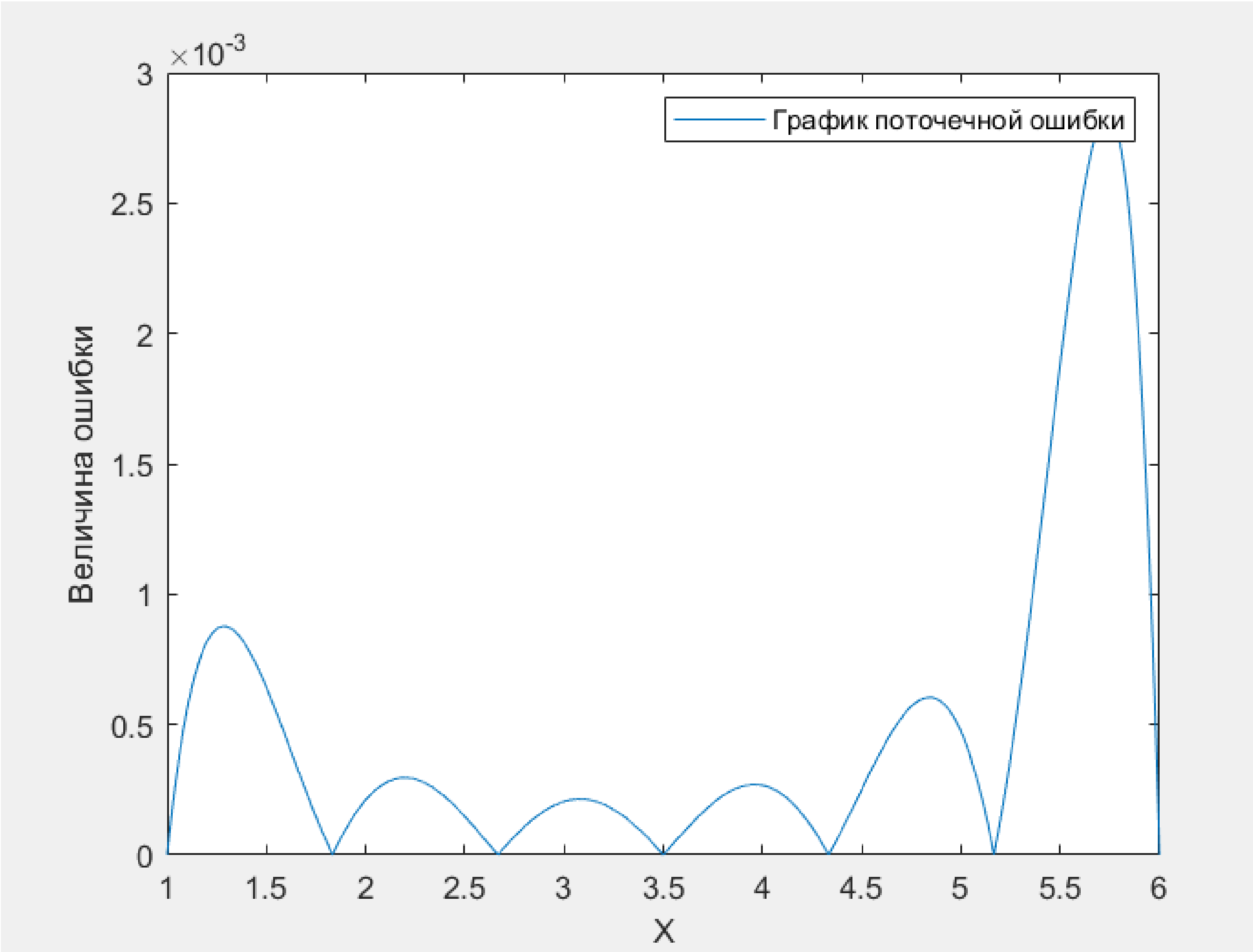

Рис. 10: График функции поточечной ошибки для n=7, равномерная сетка, функция (1)

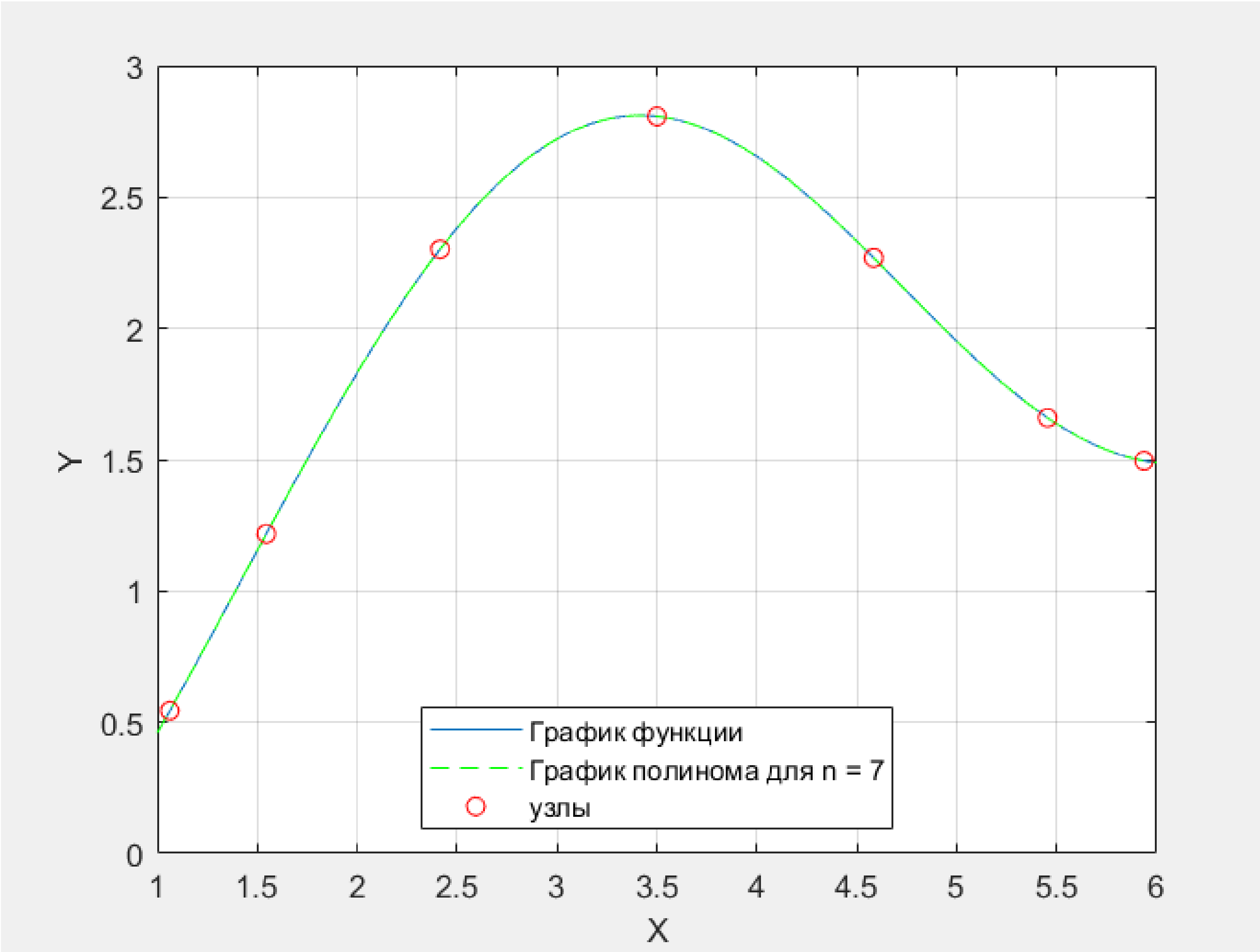

Рис. 11: График функции (1) и полинома Ньютона для n=7, Чебышевская сетка

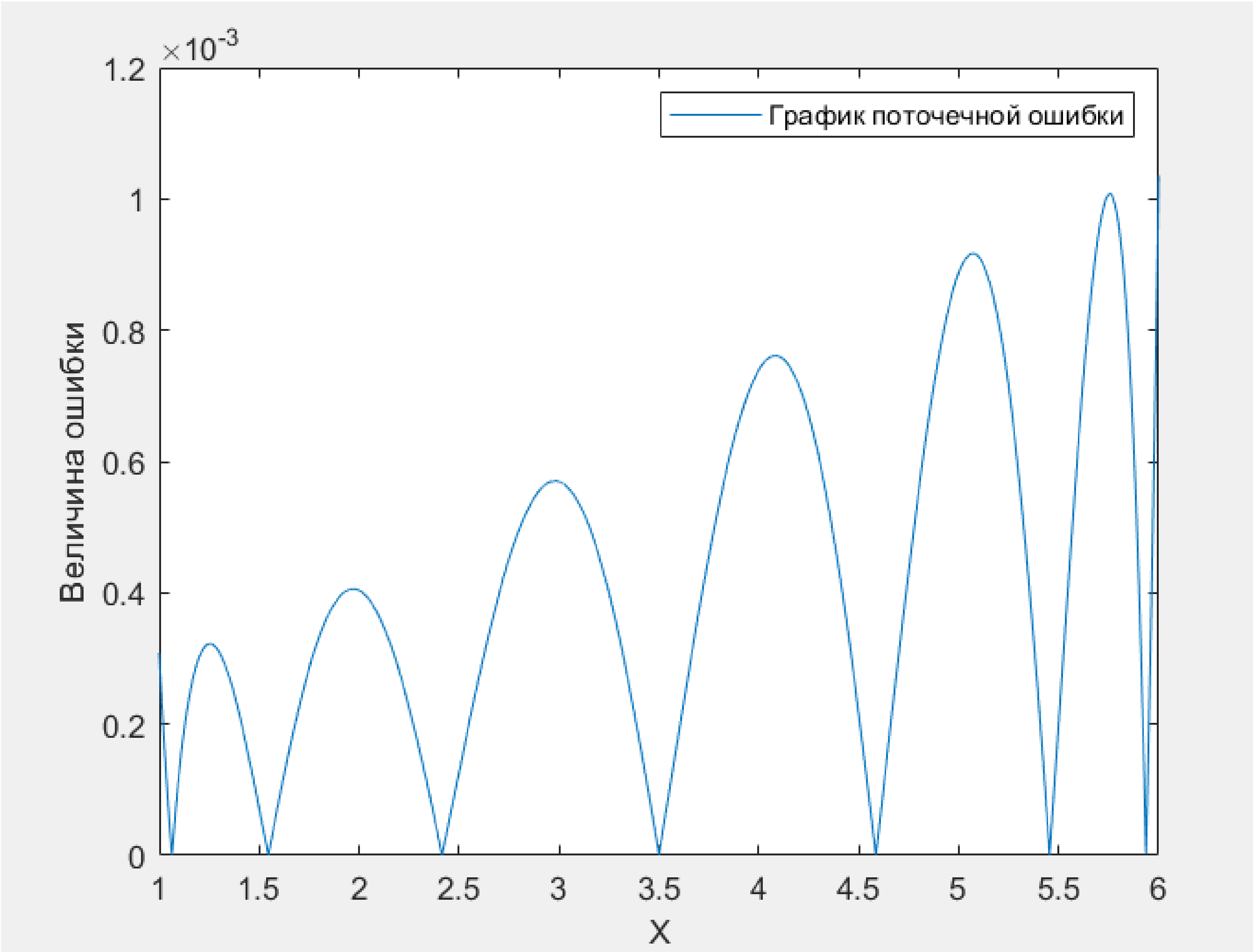

Рис. 12: График функции поточечной ошибки для n=7, Чебышевская сетка, функция (1)

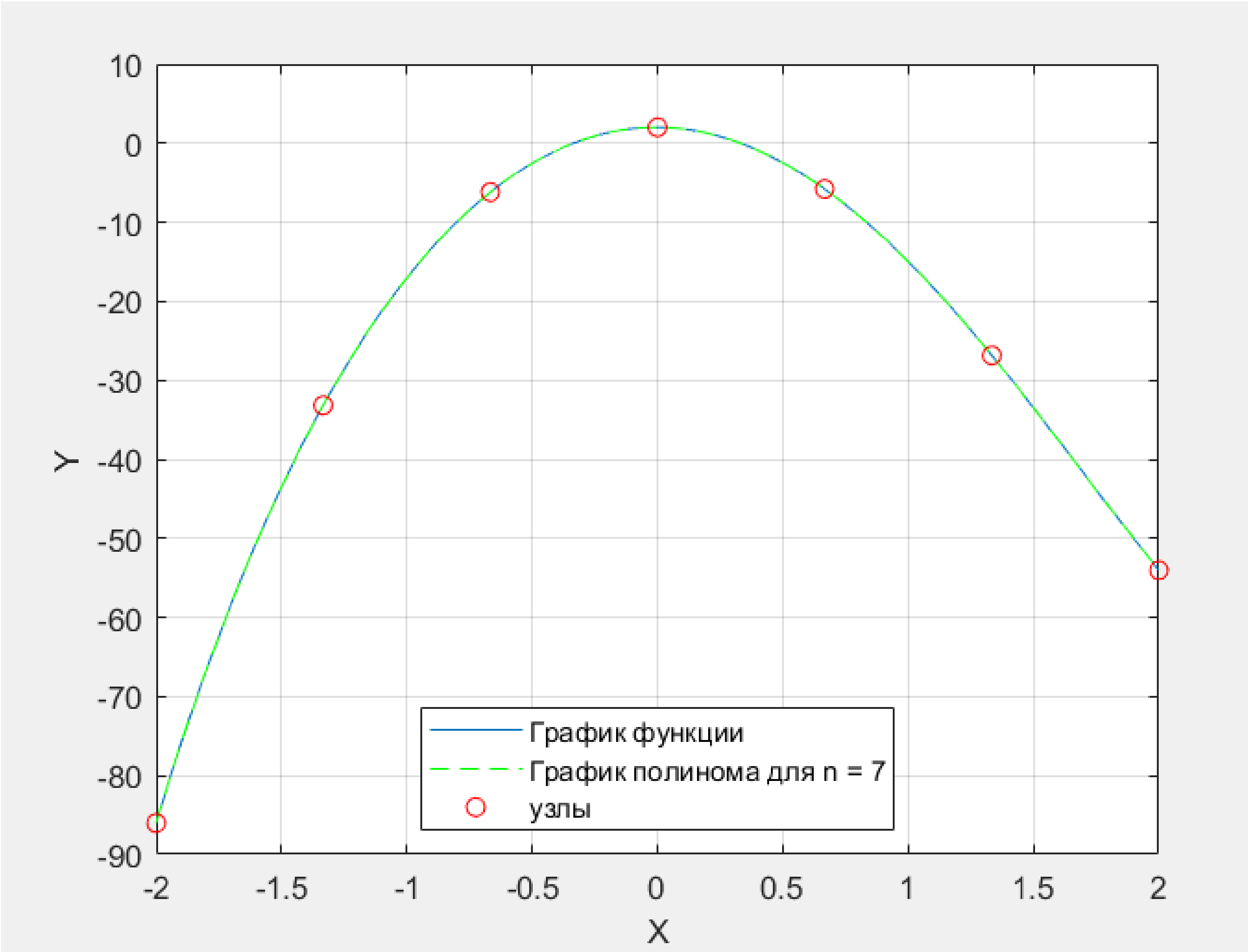

Рис. 13: График функции (2) и полинома Ньютона для n=7, равномерная сетка

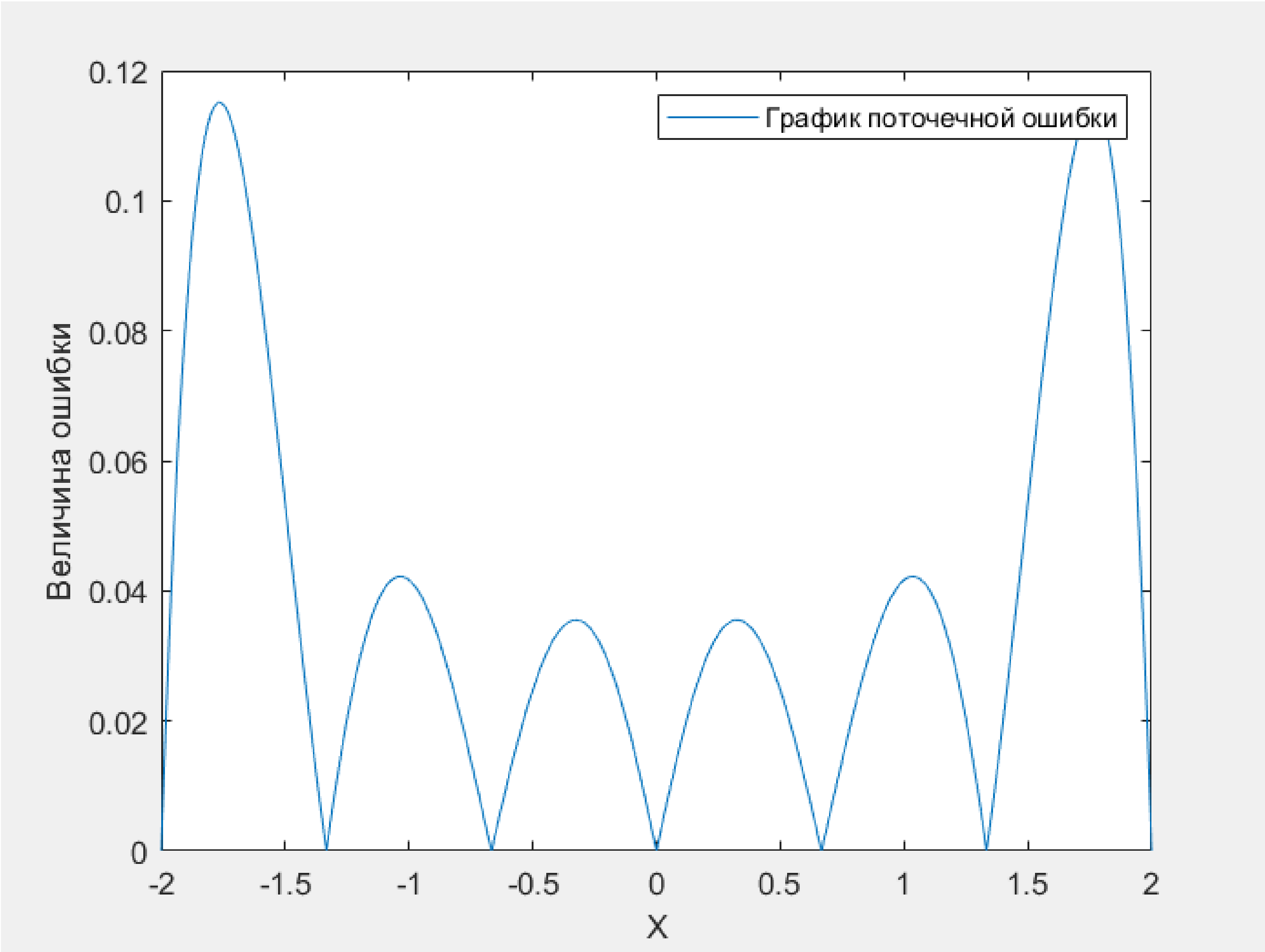

Рис. 14: График функции поточечной ошибки для n=7, равномерная сетка, функция (2)

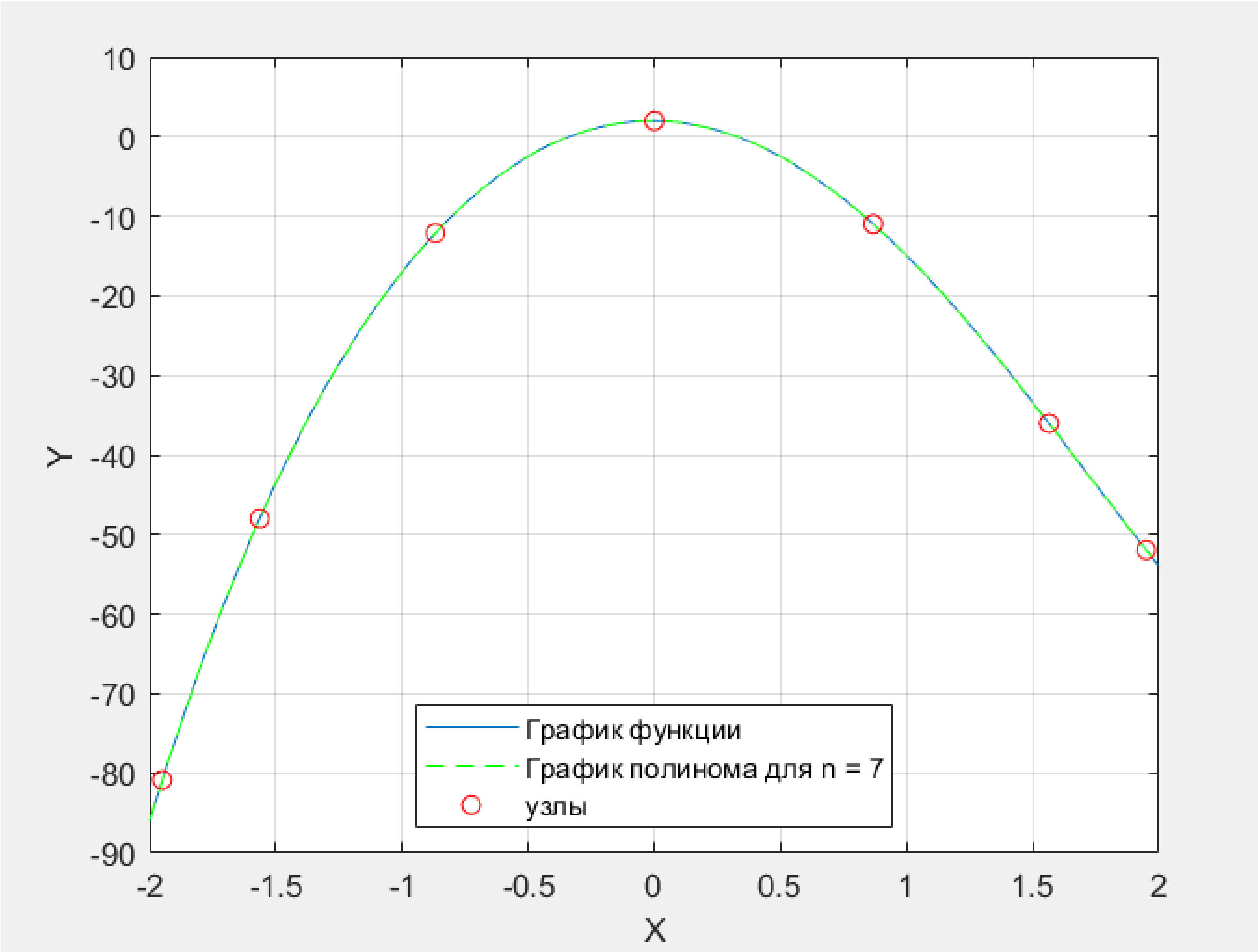

Рис. 15: График функции (2) и полинома Ньютона для n=7, Чебышевская сетка

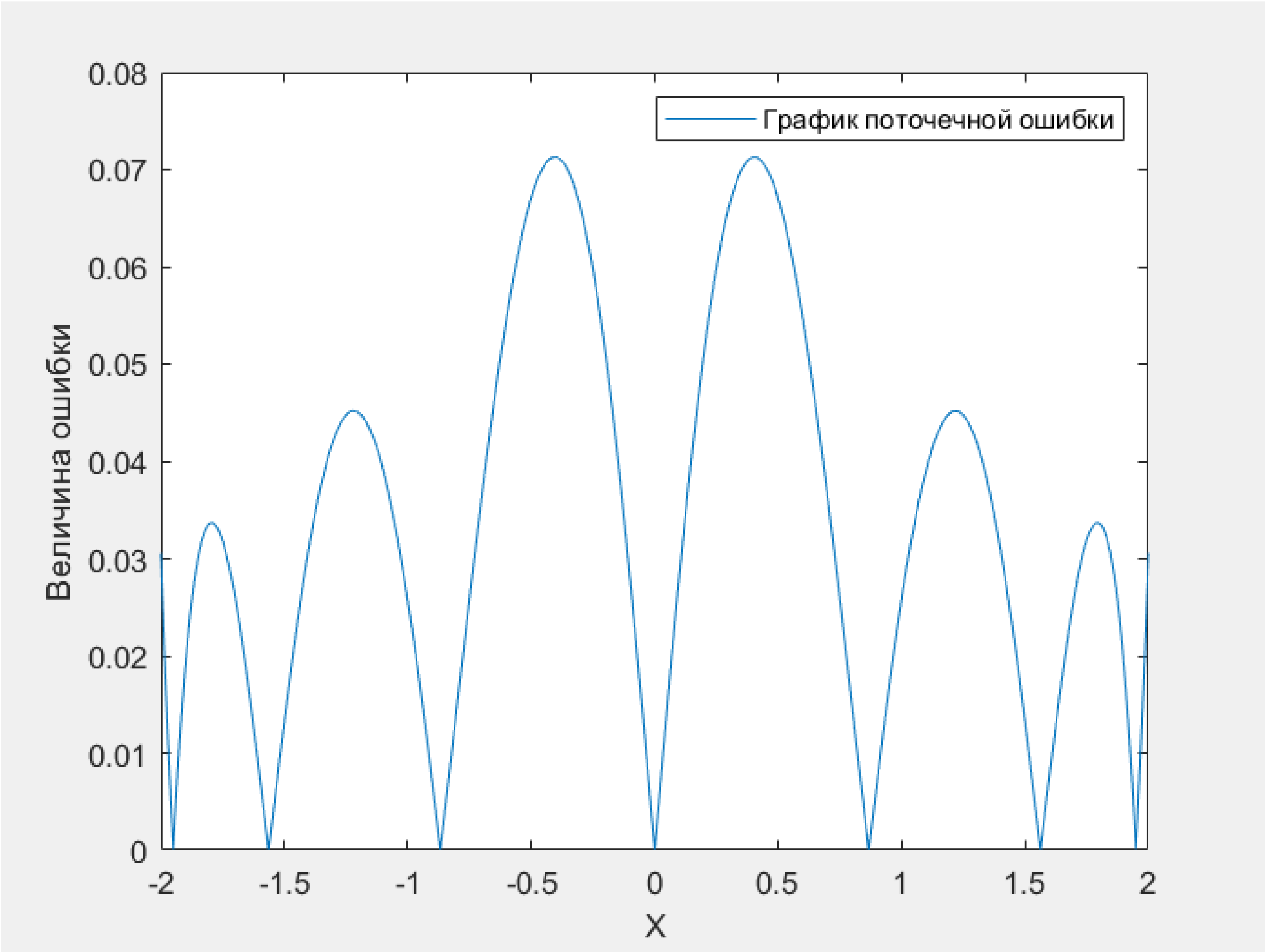

Рис. 16: График функции поточечной ошибки для n=7, Чебышевская сетка, функция (2)

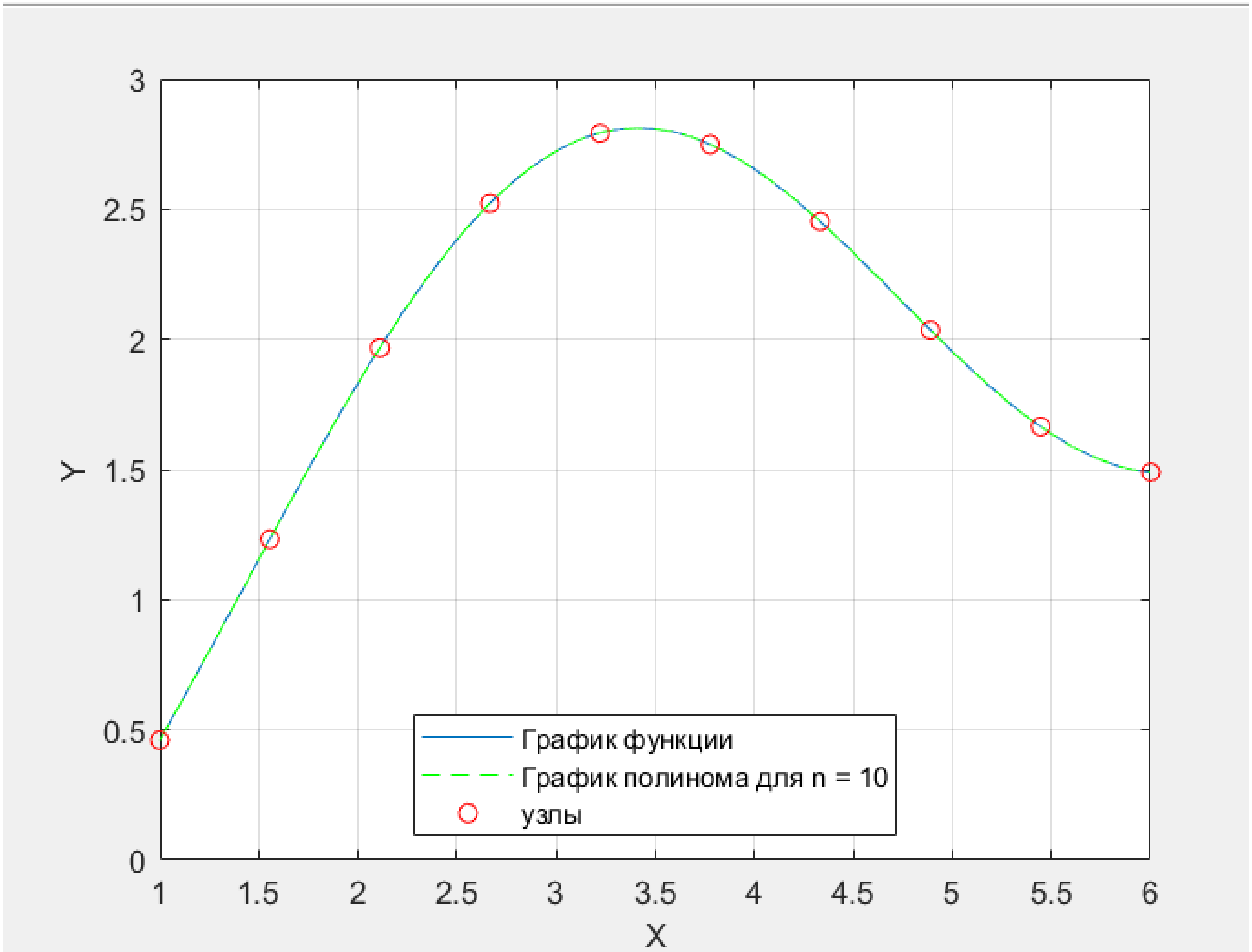

Рис. 17: График функции (1) и полинома Ньютона для n=10, равномерная сетка

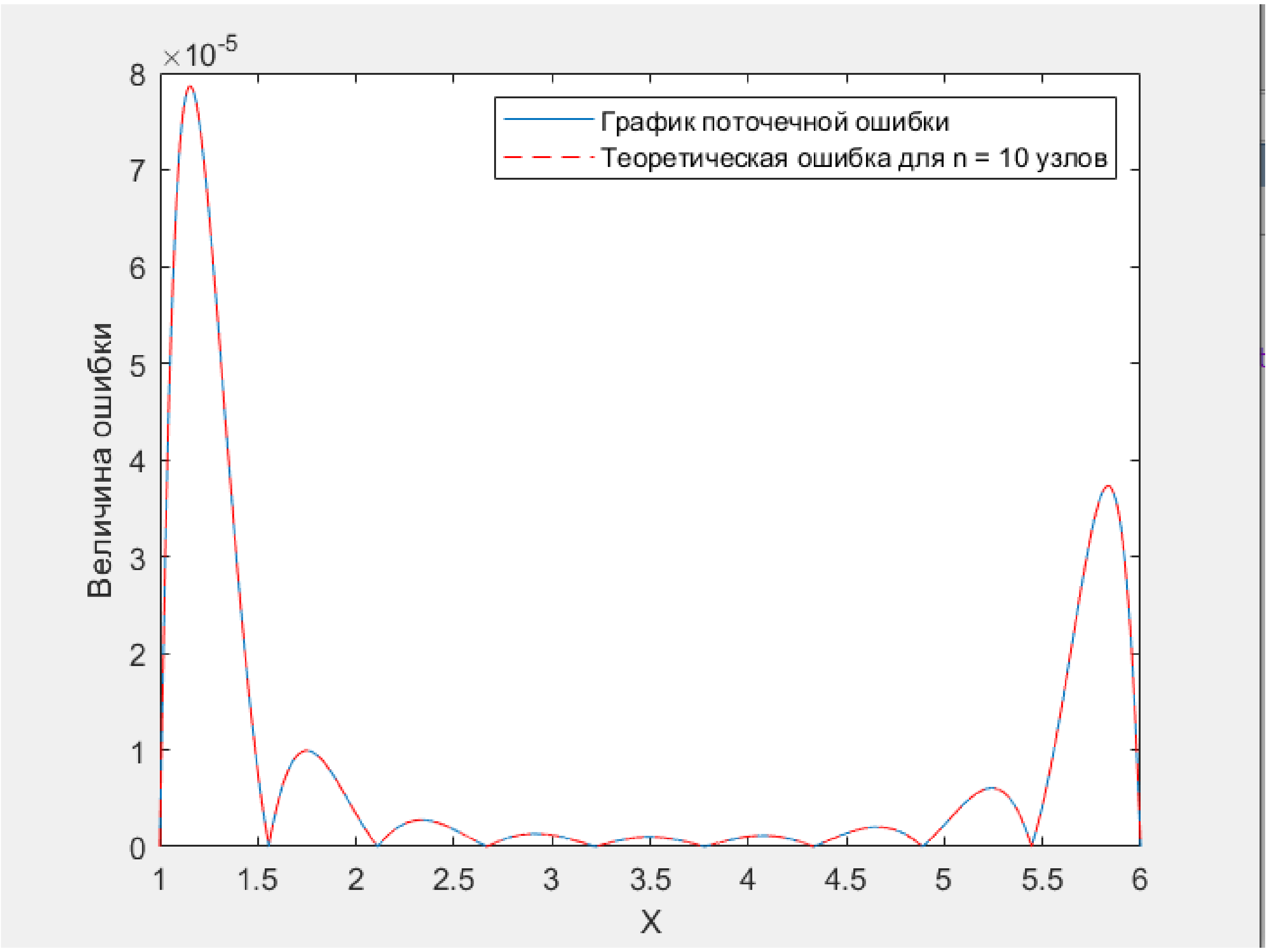

Рис. 18: График функции поточечной и теоретической ошибок для n=10, равномерная сетка, функция (1)

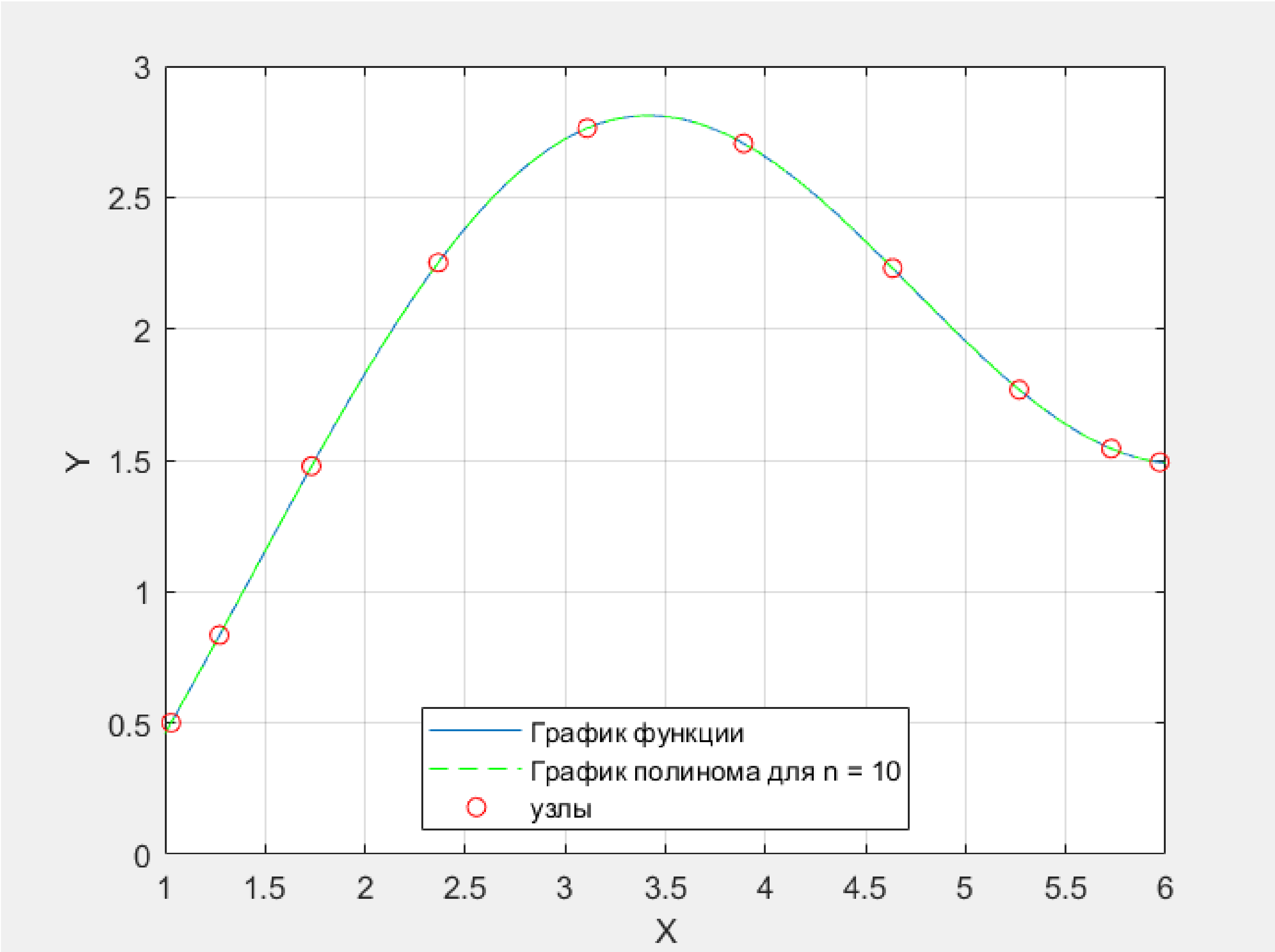

Рис. 19: График функции (1) и полинома Ньютона для n=10, Чебышевская сетка

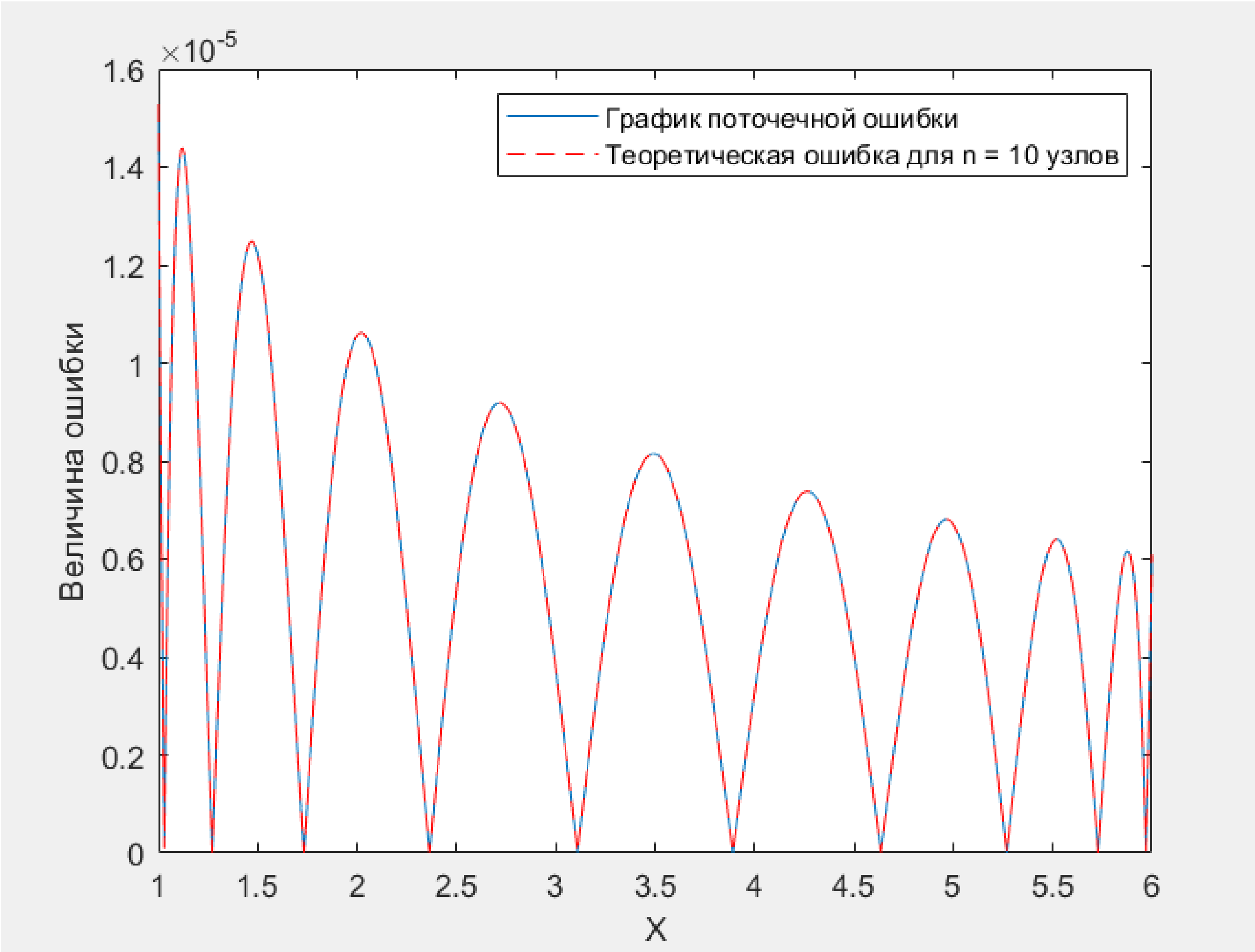

Рис. 20: График функции поточечной и теоретической ошибок для n=10, Чебышевская сетка, функция (1)

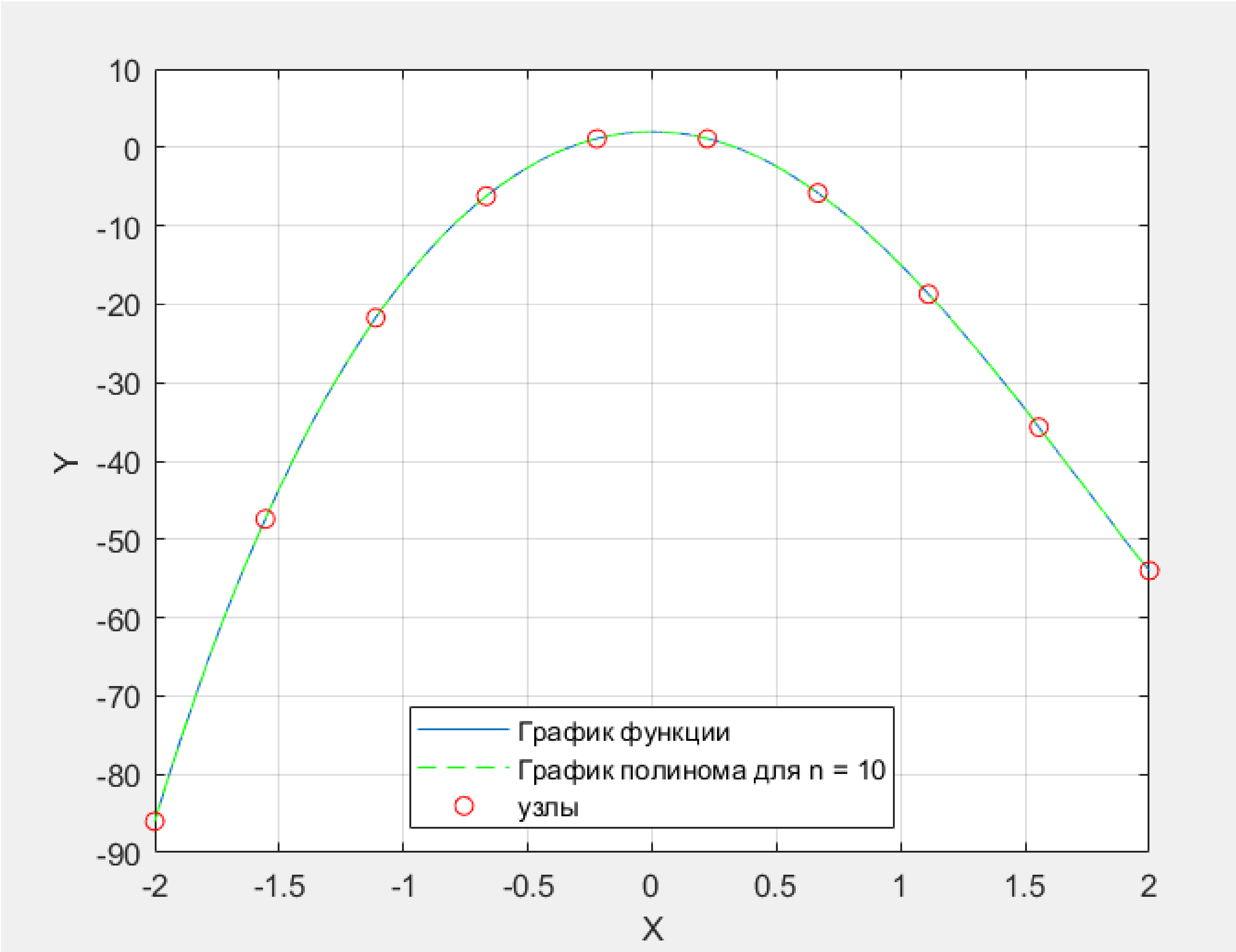

Рис. 21: График функции (2) и полинома Ньютона для n=10, равномерная сетка

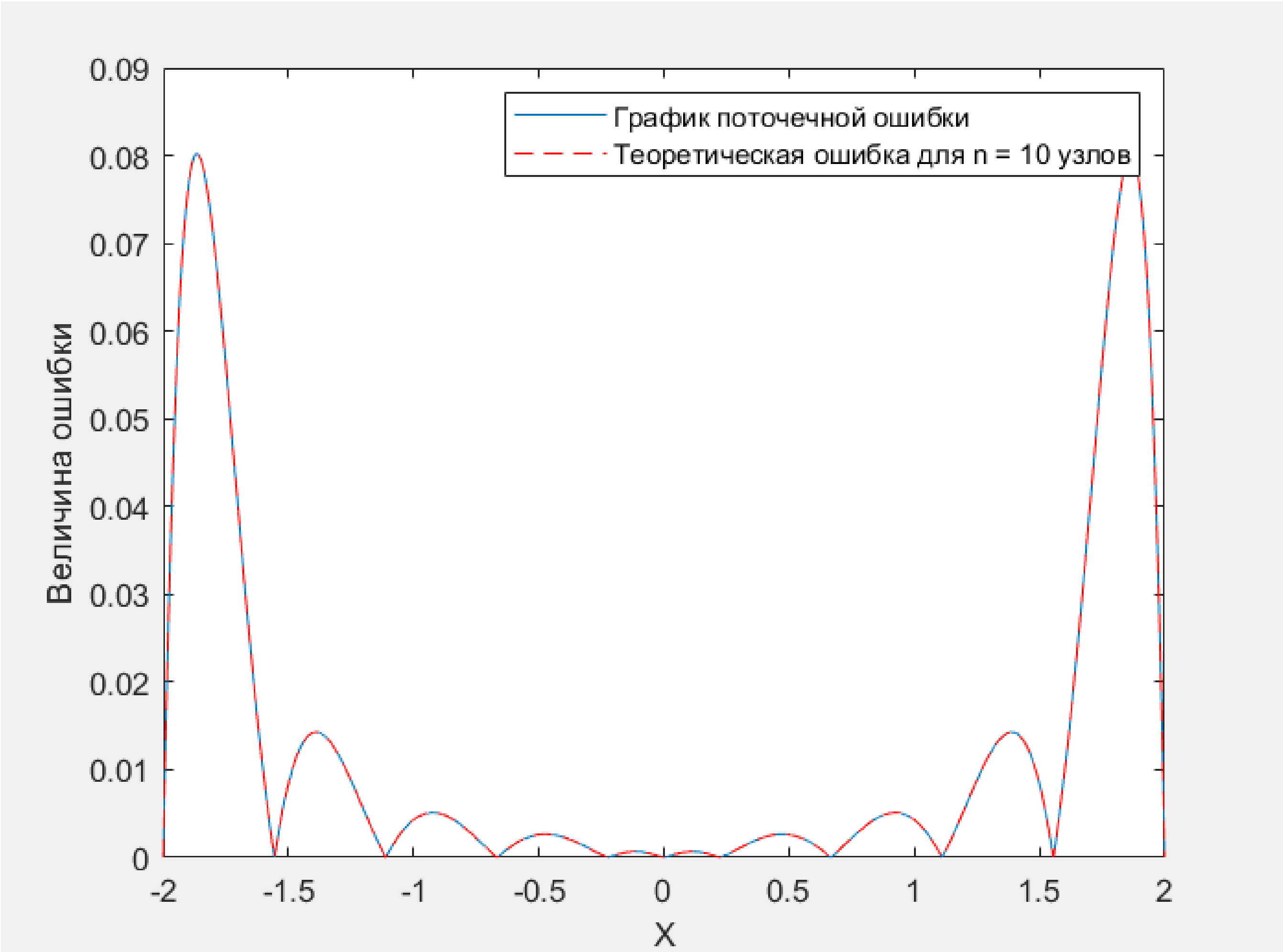

Рис. 22: График функции поточечной и теоретической ошибок для n=10, равномерная сетка, функция (2)

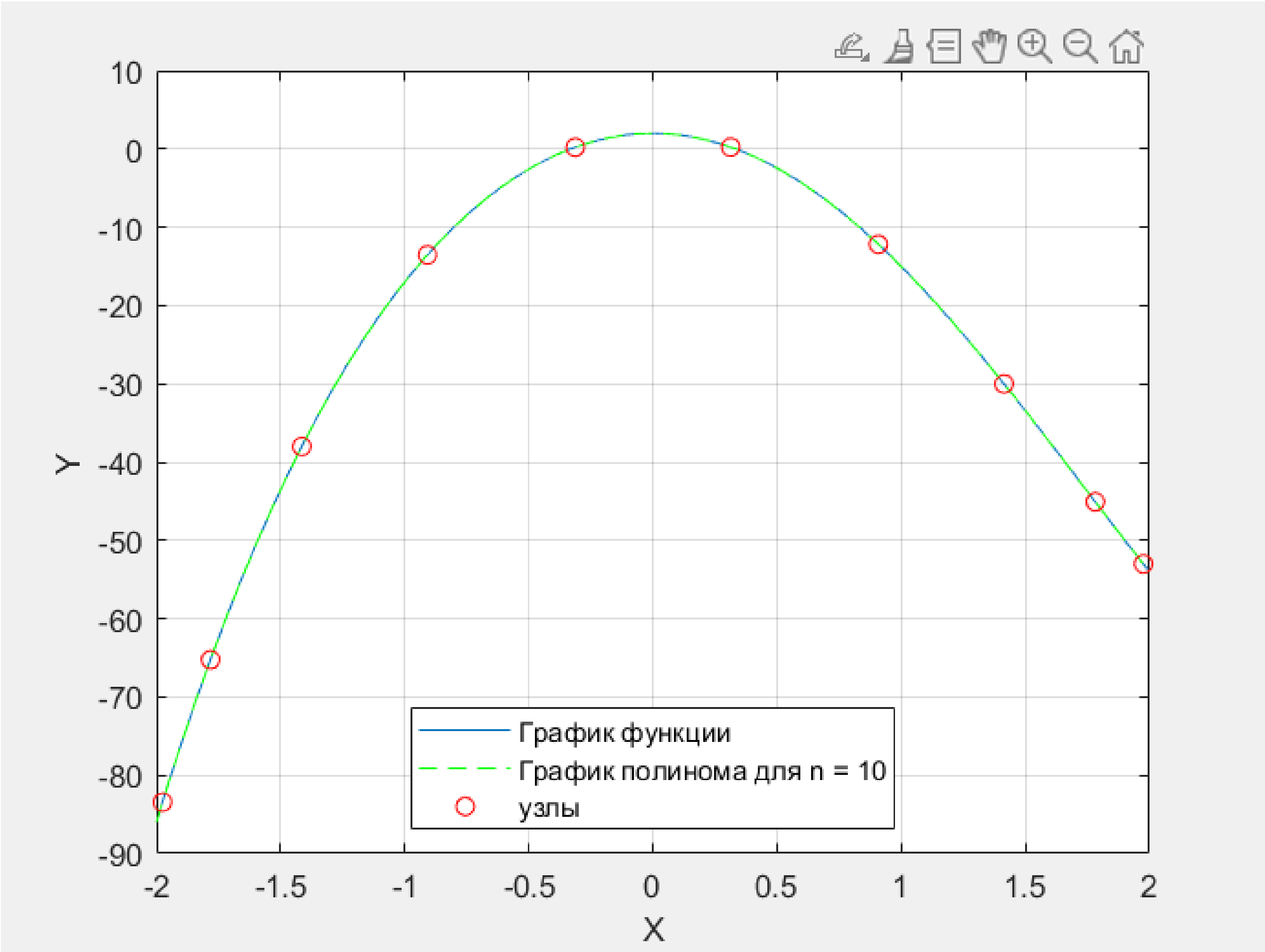

Рис. 23: График функции (2) и полинома Ньютона для n=10, Чебышевская сетка

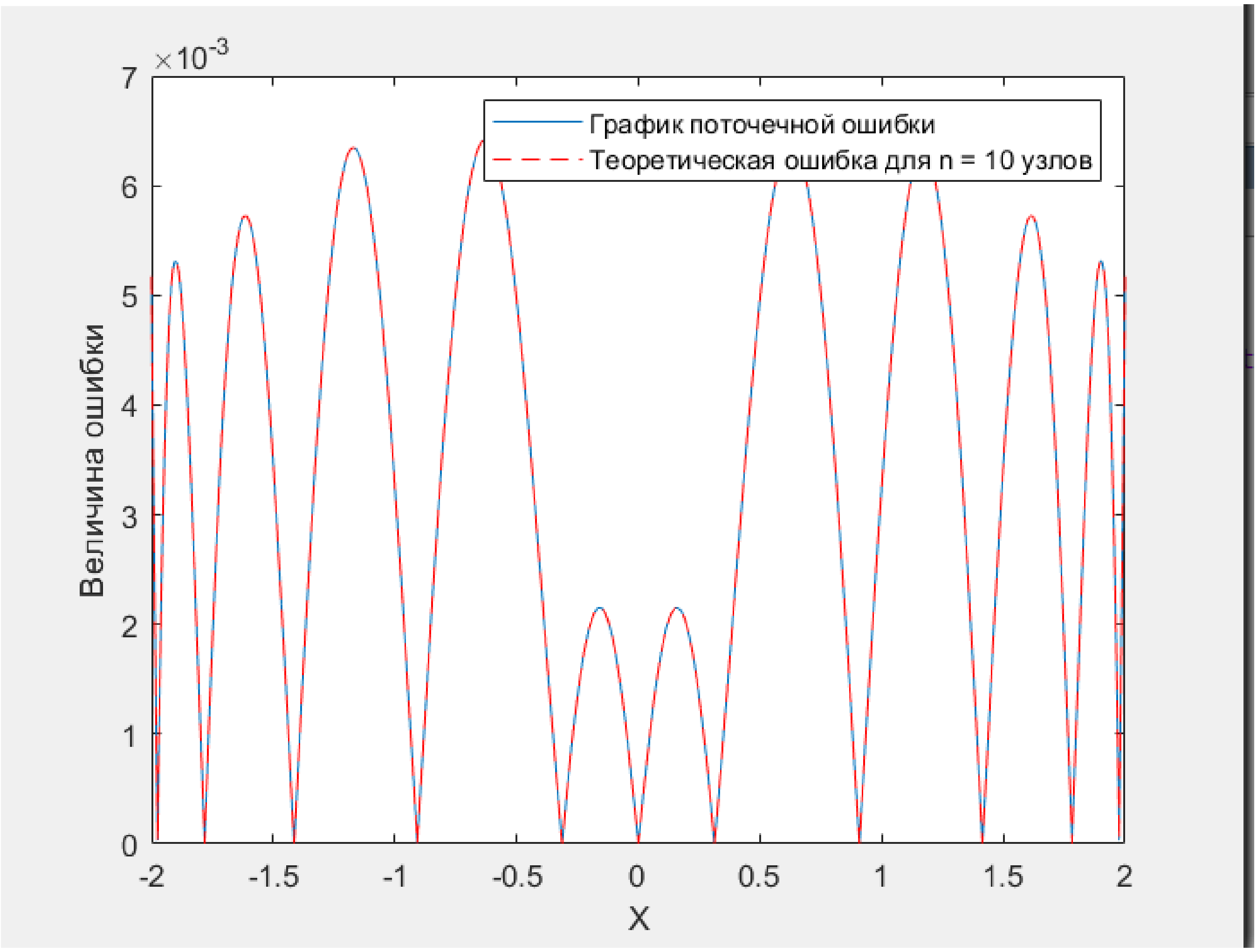

Рис. 24: График функции поточечной и теоретической ошибок для n=10, Чебышевская сетка, функция (2)

Большинство рисунков продемонстрировали ожидаемую картину - график полинома Ньютона приближен к графику изначально заданных функций. Также, можно заметить различие равномерной сетки и сетки Чебышева, например, на рис. 21 и рис. 23. По ним и по рис. 22 и 24 видно, что в случае применения Чебышевской сетки полином получается более приближеным к данной функции.

Зависимость максимальной ошибки от числа узлов

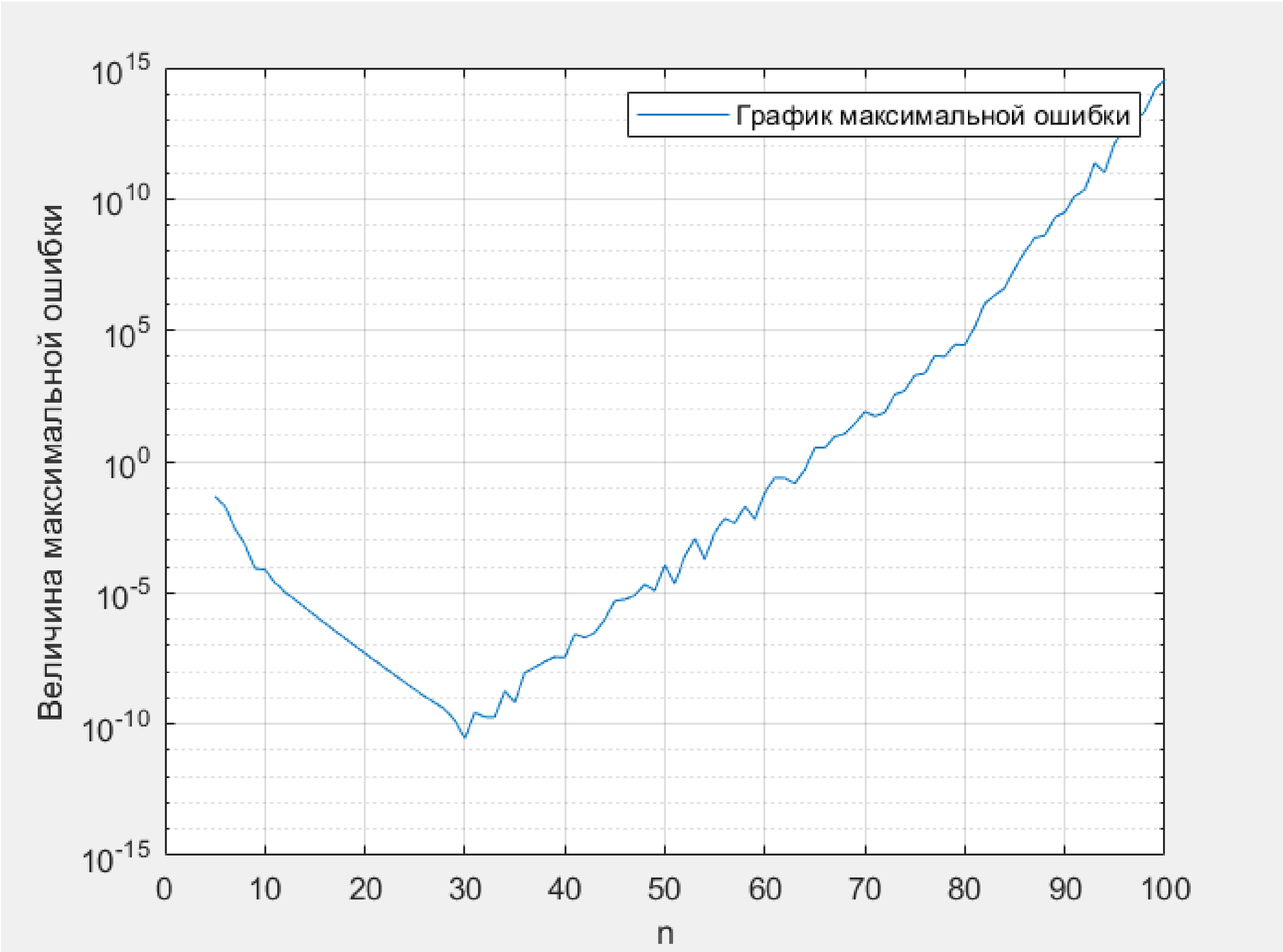

Рис. 25: Равномерная сетка, $5 \leq n \leq 100$, функция (1)

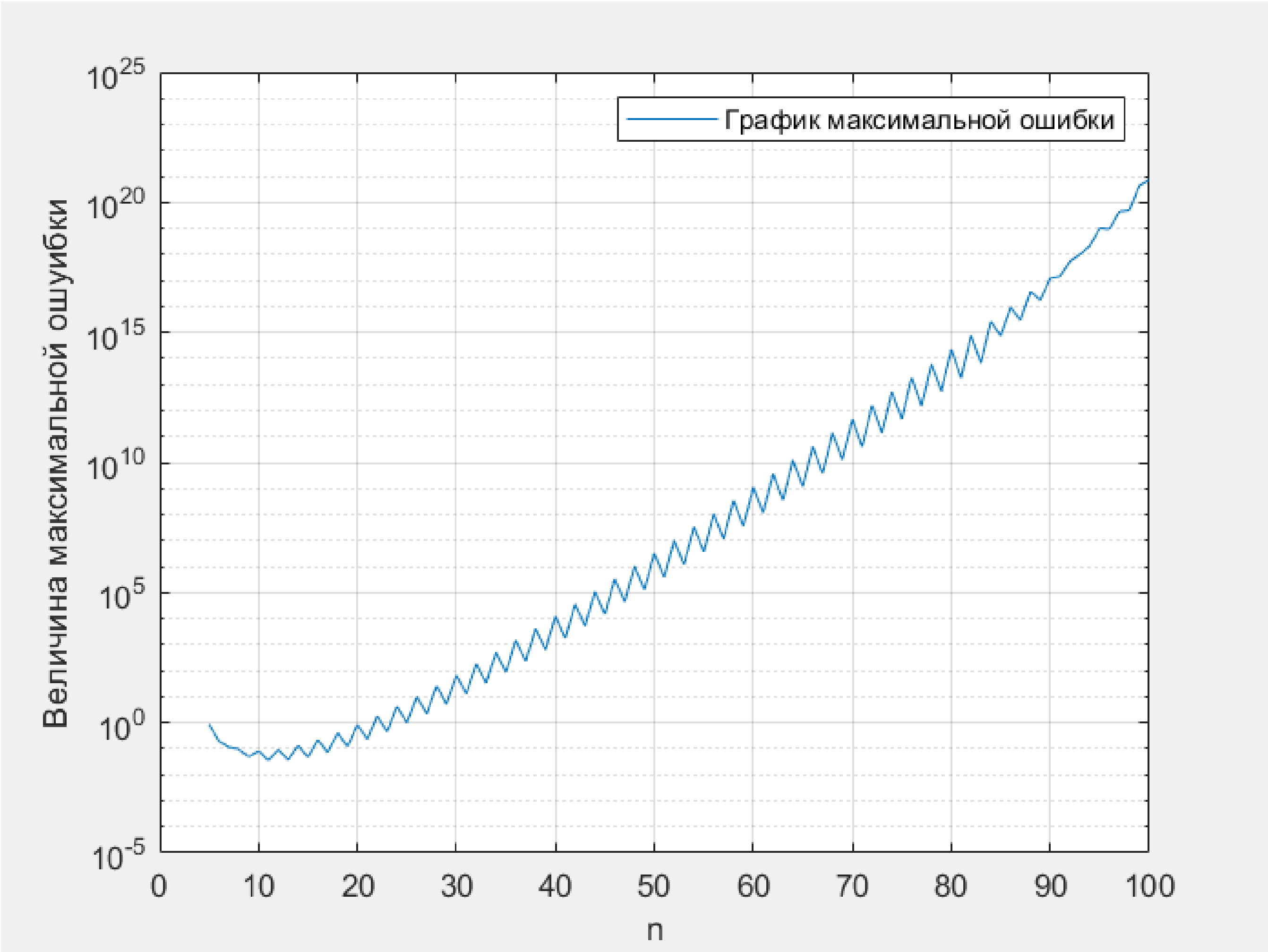

Рис. 26: Равномерная сетка, $5 \leq n \leq 100$, функция (2)

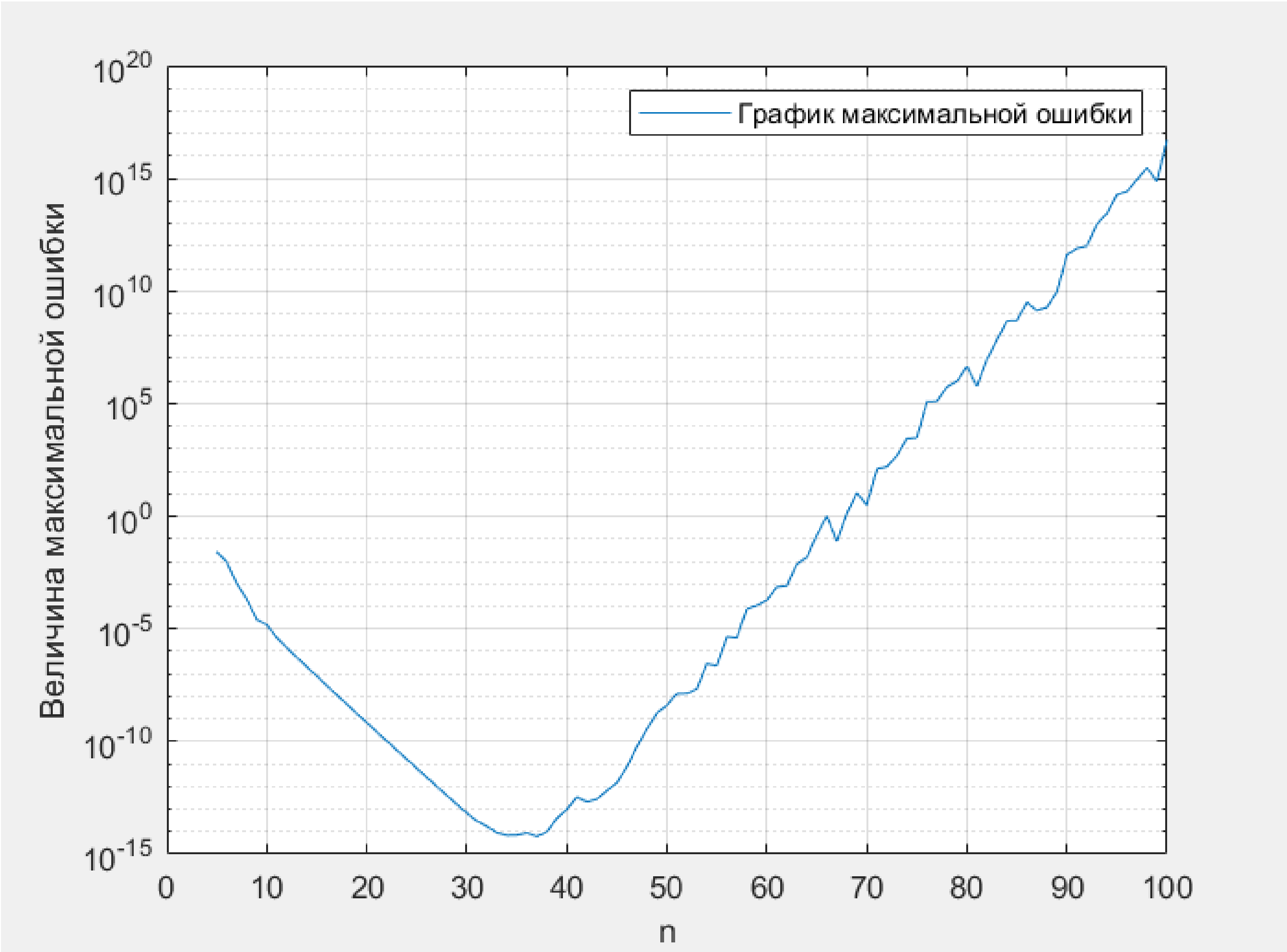

Рис. 27: Сетка Чебышева, $5 \leq n \leq 100$, функция (1)

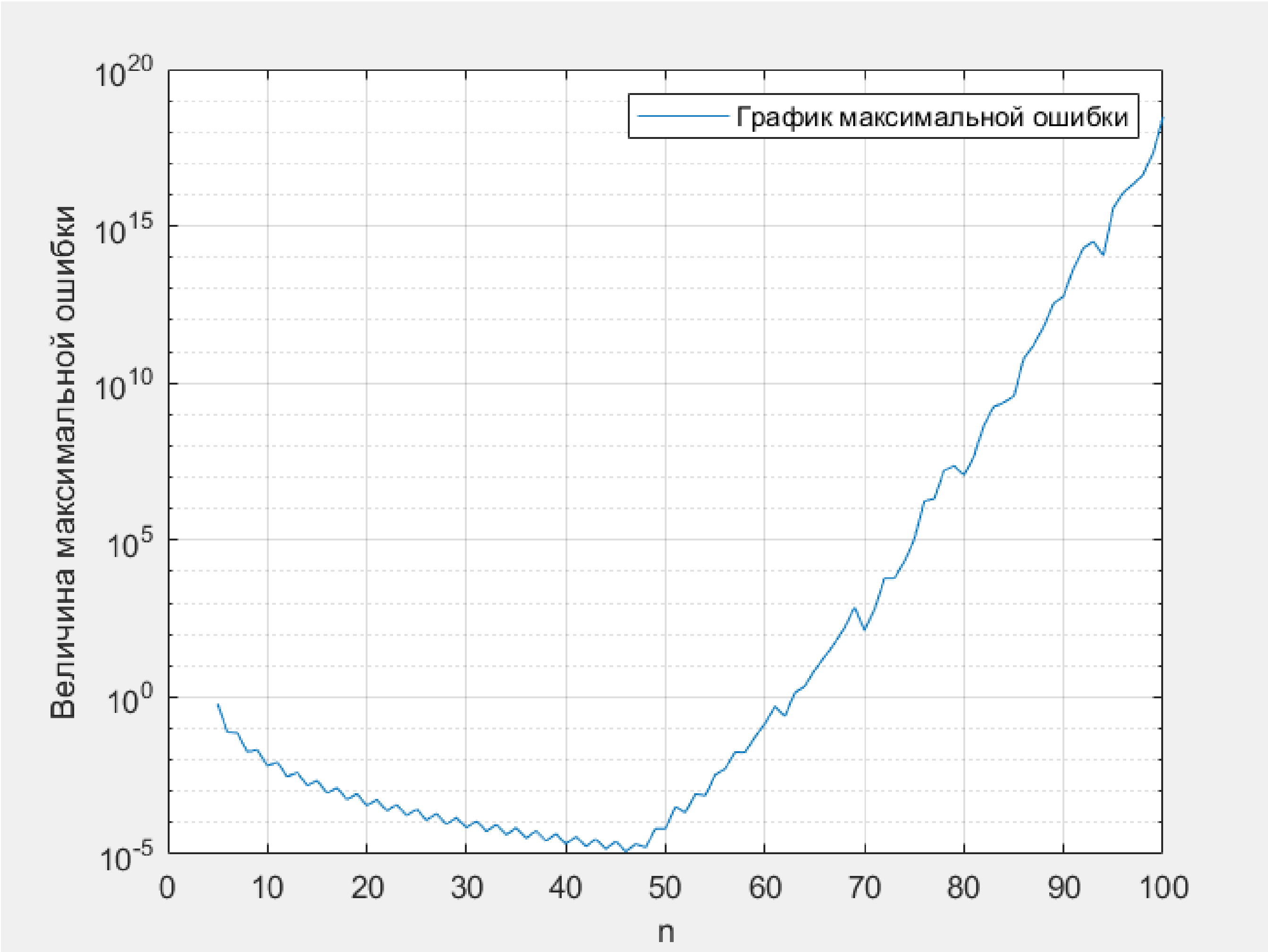

Рис. 28: Сетка Чебышева, $5 \leq n \leq 100$, функция (2)

Анализ Функции 1

Рисунки 25, 27 показывают, что итерационный процесс сходится при $n \leq 30$ на равномерной сетке и $n \leq 34$ на Чебышевской сетке

Анализ Функции 2

Рисунки 26, 28 показывают, что итерационный процесс на равномерной сетке рассходится при любых n. Расхождение начинает сильно увеличиваться при $n \geq 49$. Функция сходится при $n \leq 34$ на Чебышевской сетке.

Зависимость ошибки в выбранных точках от степени интерполяционного полинома

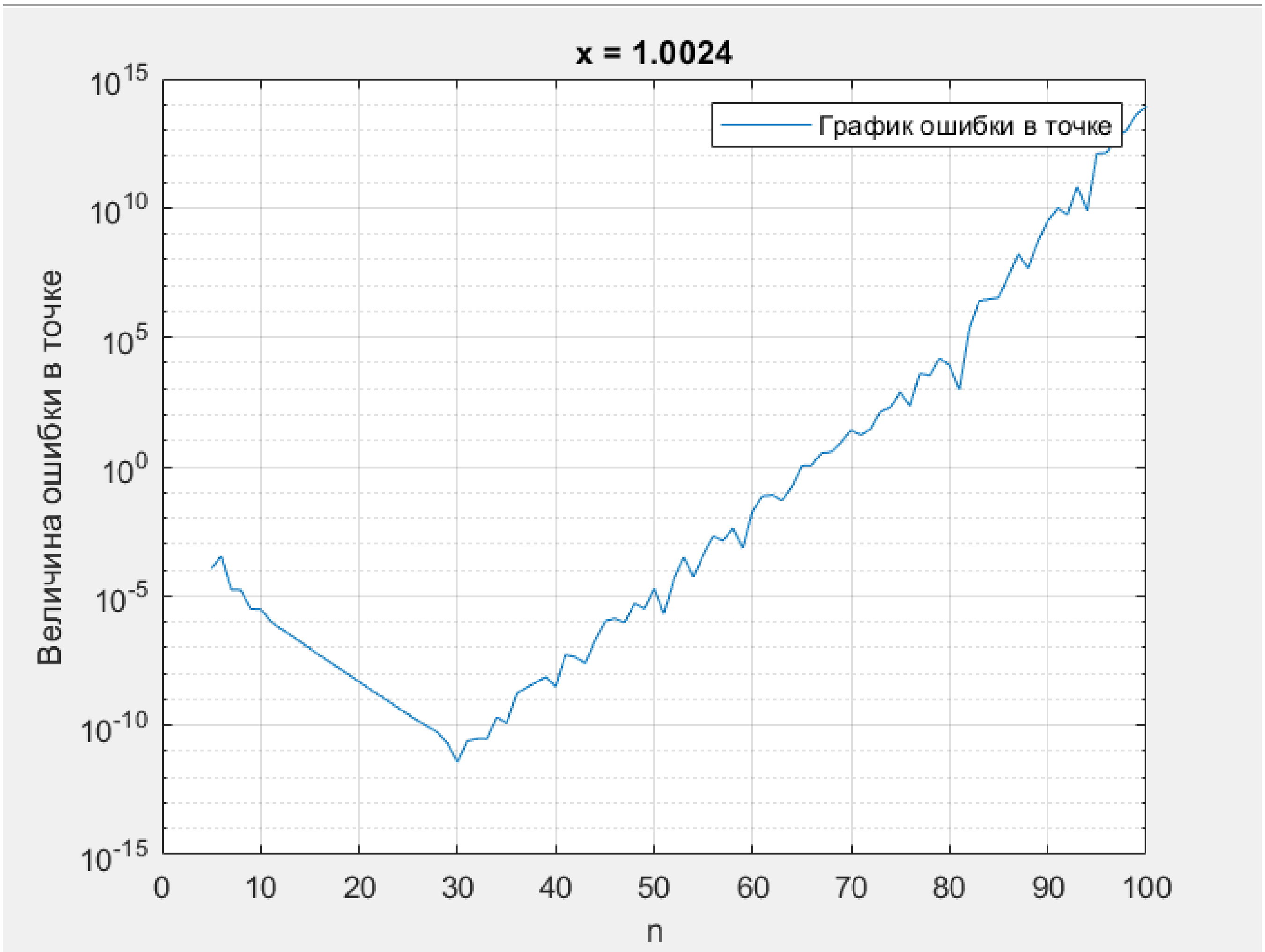

Рис. 29: График ошибки в точке $x = 1.0024$, равномерная сетка, Функция 1

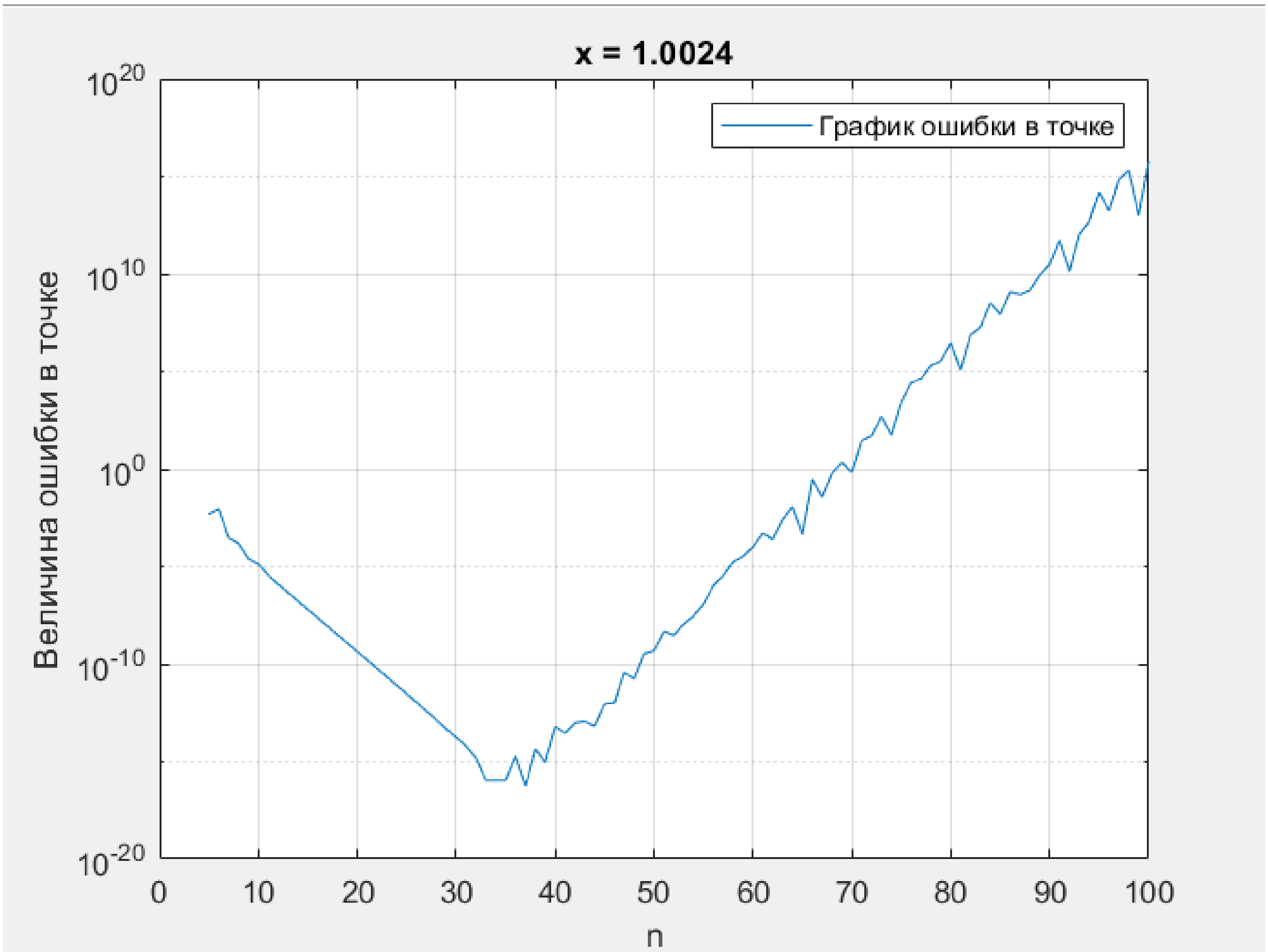

Рис. 30: График ошибки в точке $x = 1.0024$, Чебышевская сетка, Функция 1

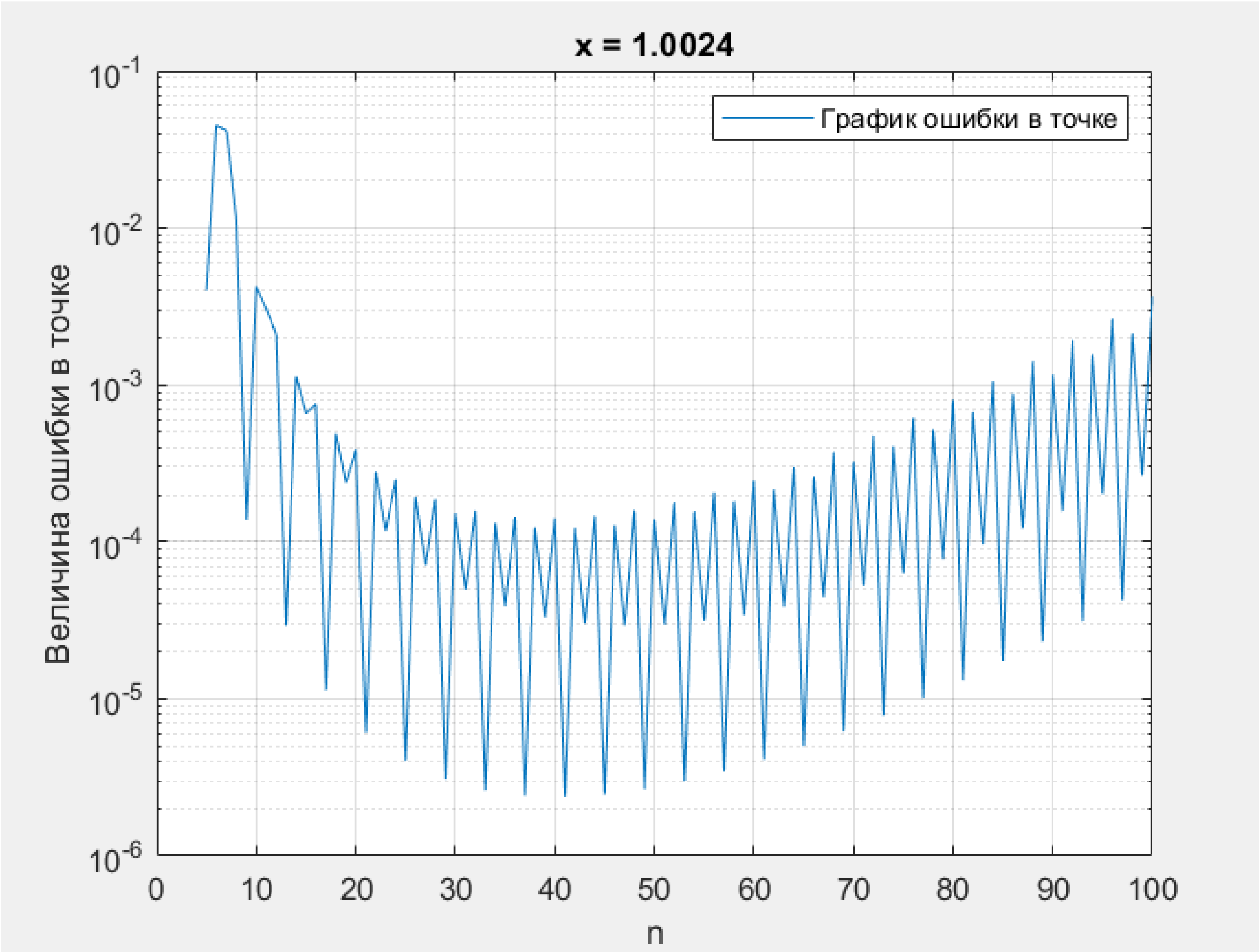

Рис. 31: График ошибки в точке $x = 1.0024$, равномерная сетка, Функция 2

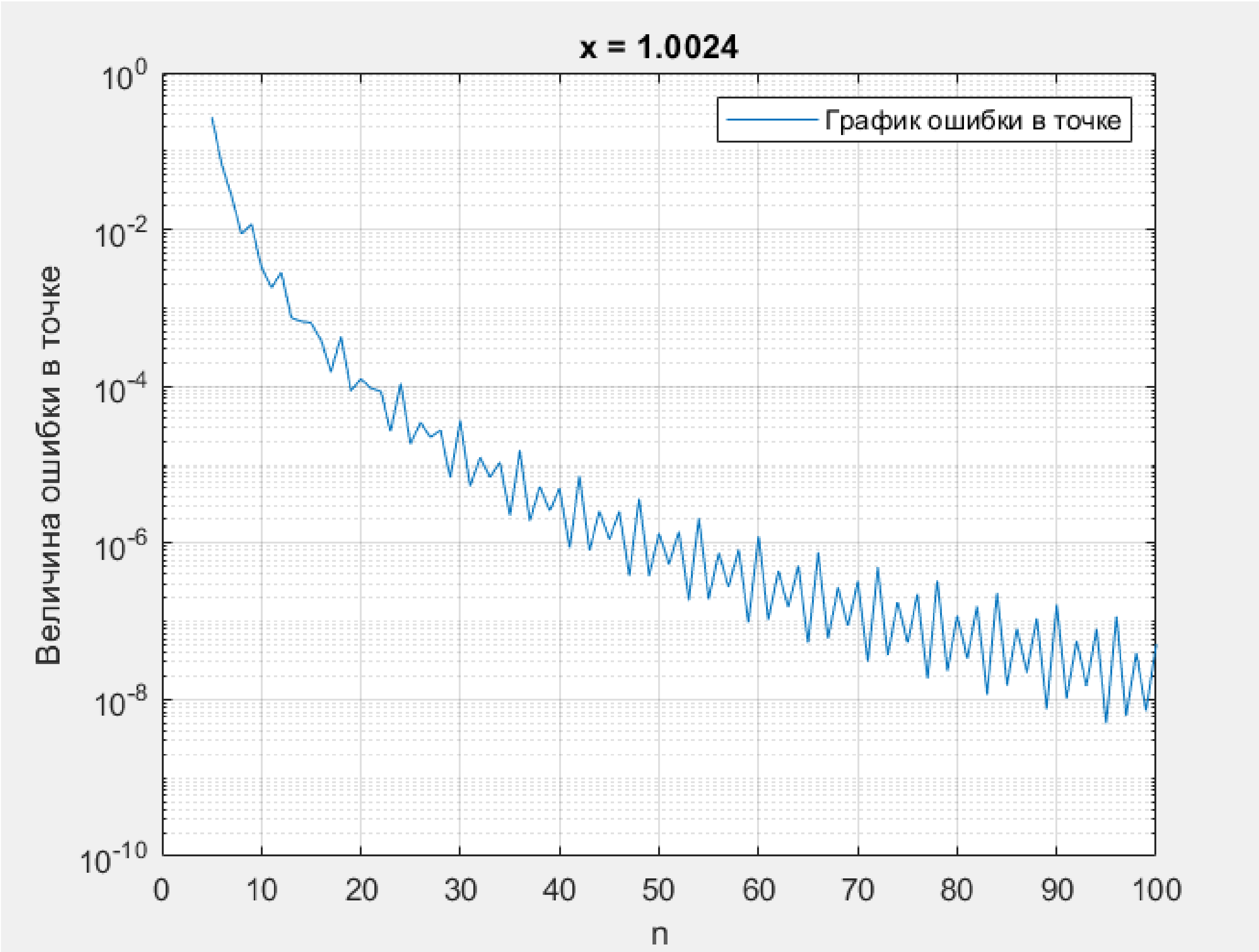

Рис. 32: График ошибки в точке $x = 1.0024$, Чебышевская сетка, Функция 2

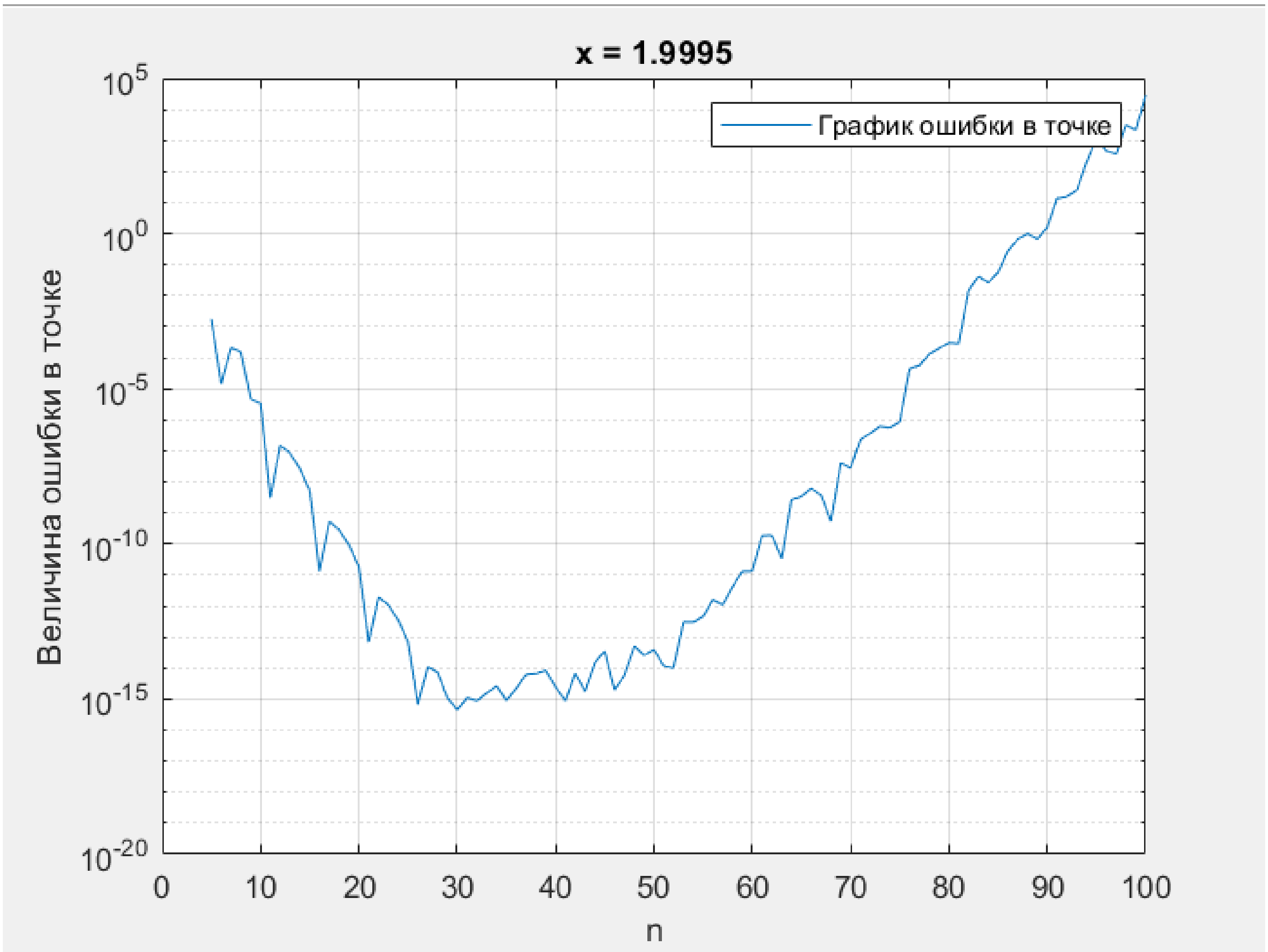

Рис. 33: График ошибки в точке $x = 1.9995$, равномерная сетка, Функция 1

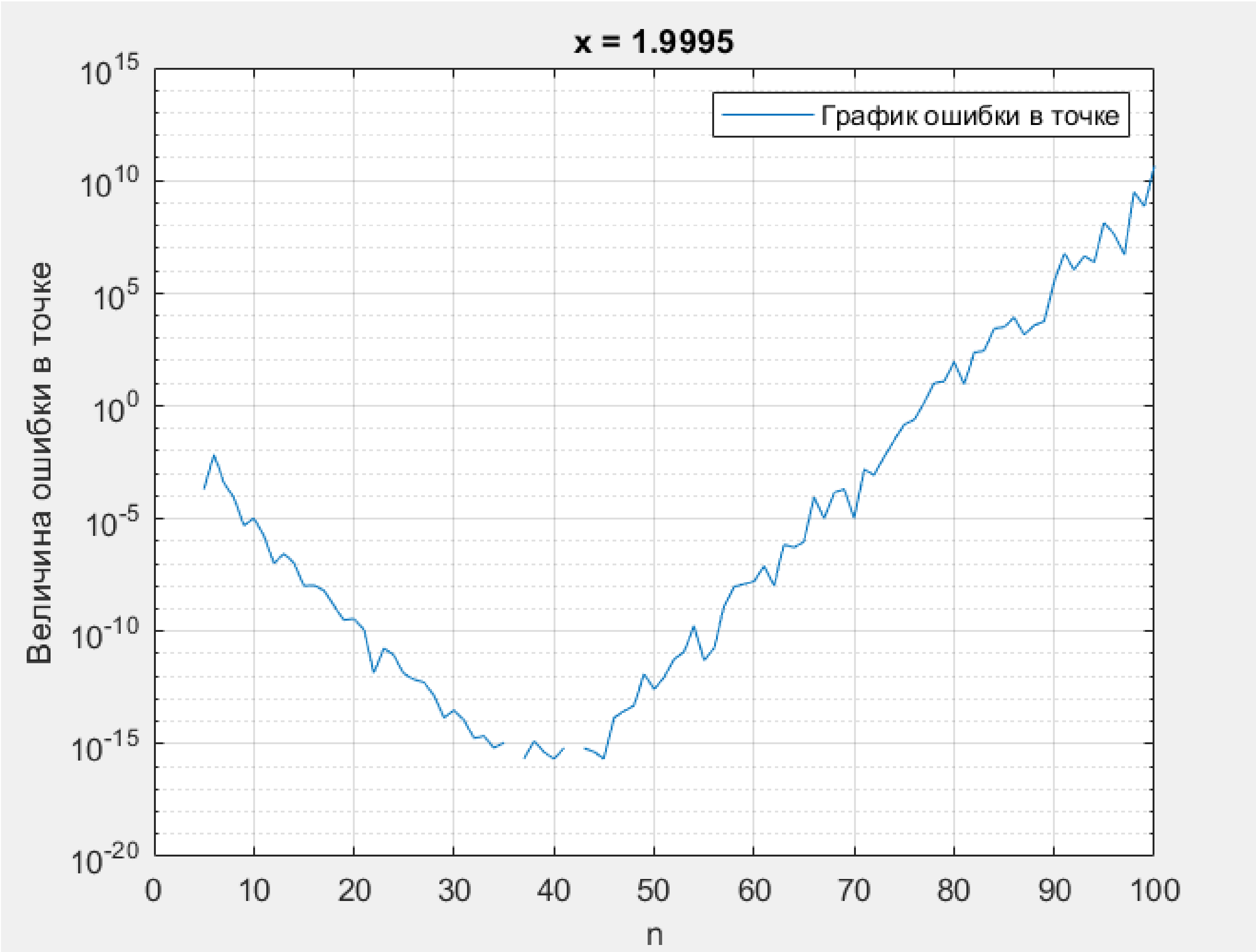

Рис. 34: График ошибки в точке $x = 1.9995$, Чебышевская сетка, Функция 1

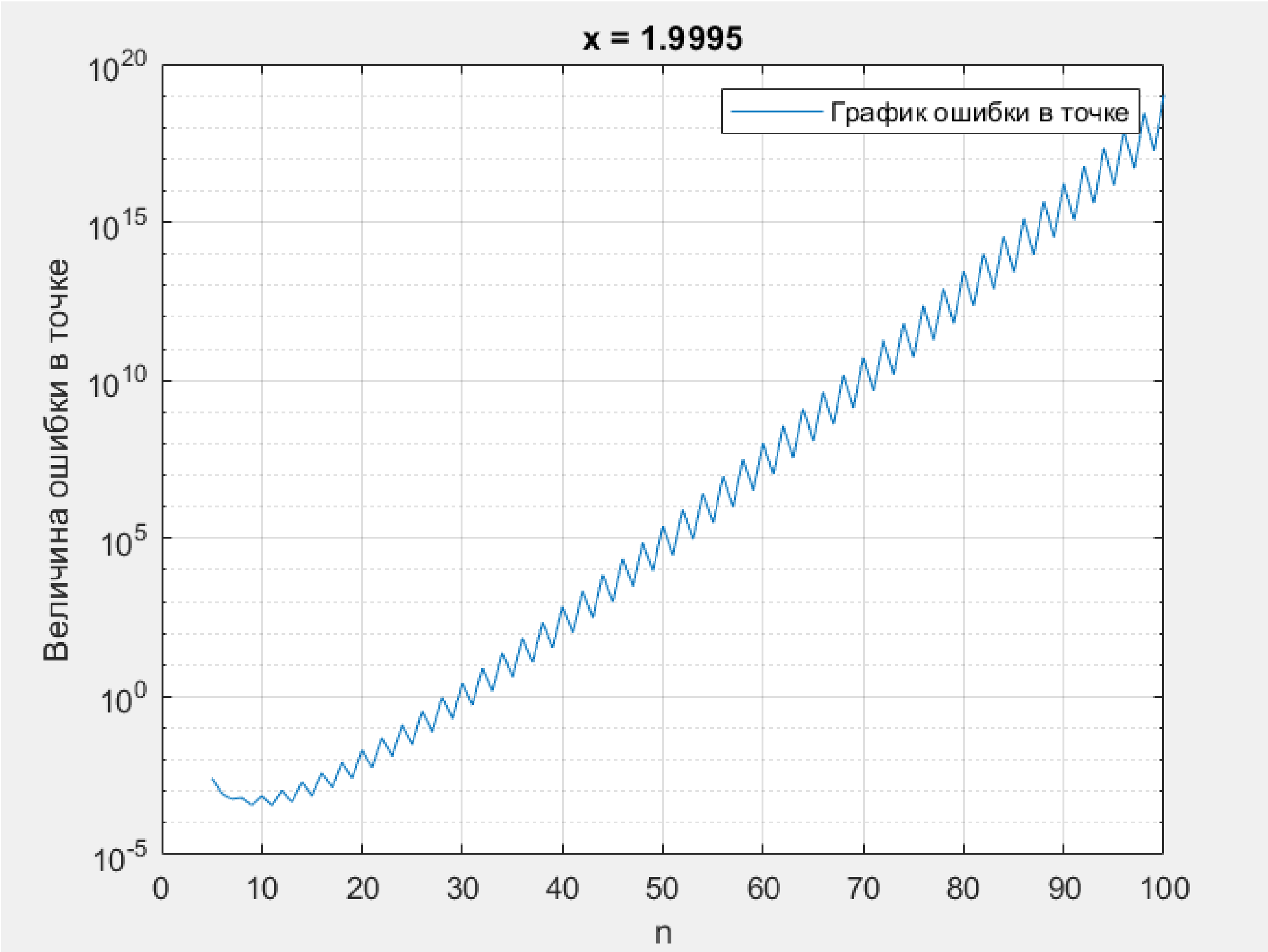

Рис. 35: График ошибки в точке $x = 1.9995$, равномерная сетка, Функция 2

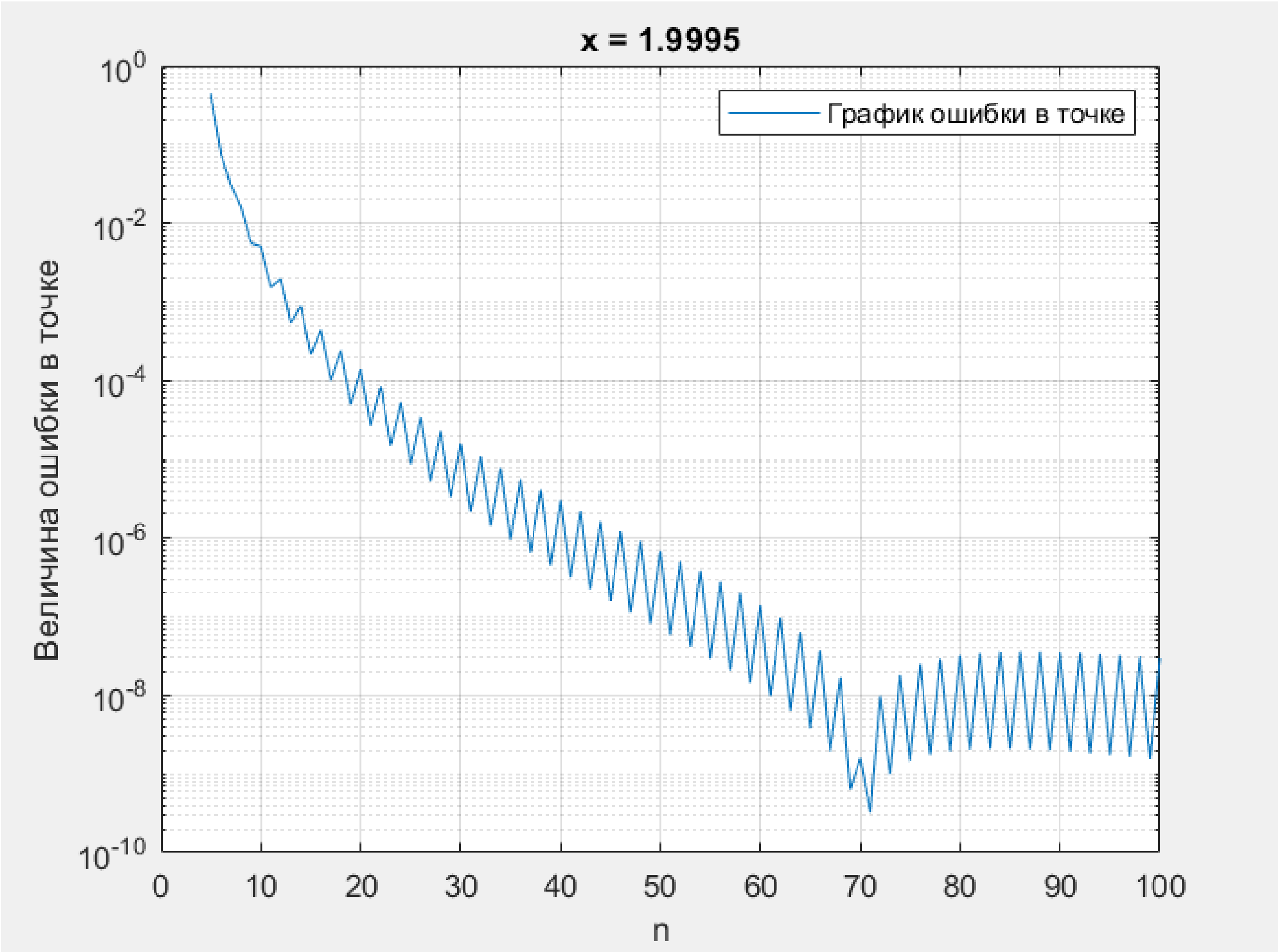

Рис. 36: График ошибки в точке $x = 1.9995$, Чебышевская сетка, Функция 2

7 Выводы

1. Как показали эксперименты, наиболее выгодным вариантом интерполяции полиномом Ньютона является интерполяция на сетке Чебышева для числа узлов в диапазоне от 10 до 55.

2. В разных точках полином сходится к интерполируемой функции по разному. В некоторых точках большая погрешность возникает в начале, для малых значений n количества узлов, уменьшаясь, а затем вновь увеличиваясь, в других - в конце, при чрезмерно большом количестве узлов, а иногда ошибка уменьшается даже при таком количестве узлов. Оптимальное количество узлов n для метода $15 \leq n \leq 40$.