Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 10 "Решение интегралов с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса" дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Жохов О. Д.
Преподаватель Козлов К.Н.

Сентябрь, 2024

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи:

Для вычисления интегралов с помощью квадратурных формул определяется точное значение интеграла. Затем выбирается формула, определяются узлы и веса. Вычисляется сумма, используя значения функции в узлах и веса. Полученное значение дает приближенный результат. В методе средних прямоугольников отрезок интегрирования делится на части, в каждой из которых выбирается точка, приближающая значение функции. Площади прямоугольников, построенных на средних точках, суммируются для приближенного результата.

1.2 Поставленные задачи:

Требуется найти значение интеграла римана $I = \int_a^b f(x)dx$ на отрезке [-2;0] функции $f(x) = x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x$ с помощью формулы средних прямоугольников. Исследовать зависимость фактической ошибки и количества итераций от заданной точности, фактической ошибки от длины отрезка разбиения.

2 Алгоритм метода и условия применимости

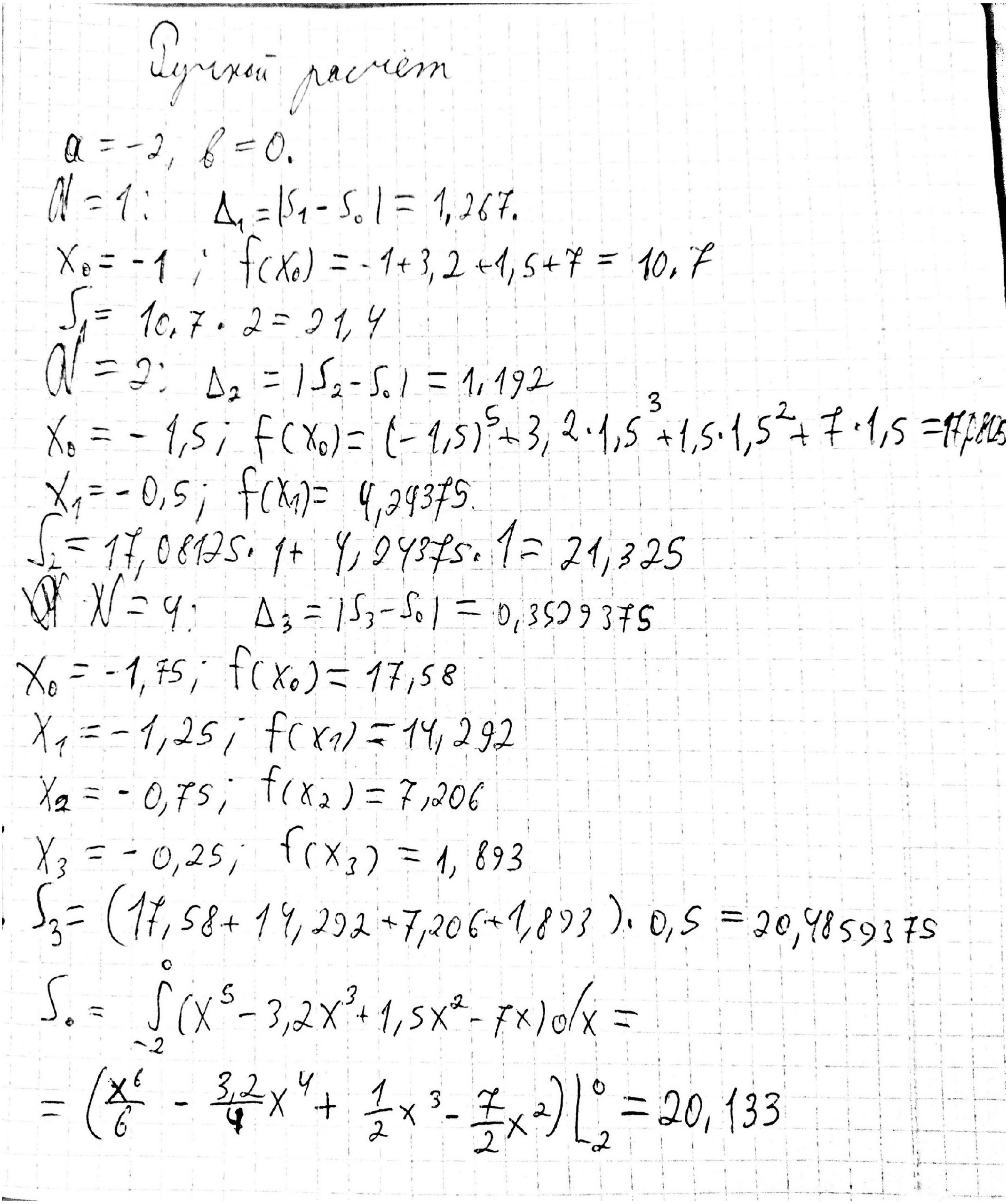
2.1 Условия применимости

$f \in C^2([a, b])$

2.2 Алгоритм метода

1. Разбить отрезок [a,b] на n равных частей длины h = (b-a)/n
2. Для каждого i прямоугольника найти значение x_i, соответсвующее середине его стороны по оси x
3. Вычислить значения функции найденных точках
4. Найти площадь каждого прямоугольника $S_i = h * f(x_i)$
5. Сложить значения площадей всех треугольников для приближённого значения интеграла.

3 Тестовый пример



Ручной расчёт

$a = -2,\ b = 0.$

$N = 1: \quad \Delta_1 = |S_1 - S_0| = 1{,}267.$

$x_0 = -1;\ f(x_0) = -1 + 3{,}2 + 1{,}5 + 7 = 10{,}7$

$S_1 = 10{,}7 \cdot 2 = 21{,}4$

$N = 2: \quad \Delta_2 = |S_2 - S_0| = 1{,}192$

$x_0 = -1{,}5;\ f(x_0) = (-1{,}5)^5 + 3{,}2 \cdot 1{,}5^3 + 1{,}5 \cdot 1{,}5^2 + 7 \cdot 1{,}5 = 17{,}08125$

$x_1 = -0{,}5;\ f(x_1) = 4{,}24375$

$S_2 = 17{,}08125 \cdot 1 + 4{,}24375 \cdot 1 = 21{,}325$

$N = 4: \quad \Delta_3 = |S_3 - S_0| = 0{,}3529375$

$x_0 = -1{,}75;\ f(x_0) = 17{,}58$

$x_1 = -1{,}25;\ f(x_1) = 14{,}292$

$x_2 = -0{,}75;\ f(x_2) = 7{,}206$

$x_3 = -0{,}25;\ f(x_3) = 1{,}893$

$S_3 = (17{,}58 + 14{,}292 + 7{,}206 + 1{,}893) \cdot 0{,}5 = 20{,}4859375$

$S_0 = \int_{-2}^{0} (x^5 - 3{,}2x^3 + 1{,}5x^2 - 7x)\,dx =$

$= \left(\frac{x^6}{6} - \frac{3{,}2}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = 20{,}133$

Рис. 1: Ручной расчёт

4 Модульная структура программы и контрольные тесты

4.1 Контрольные тесты

Для исследования метода средних прямоугольников для функции $f(x) = x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x$ на отрезке $[-2; 0]$ будем рассматривать точность вычисления от 10^{-3} до 10^{-12} порядка

4.2 Модульная структур программы

```
typedef struct {
    double value;
    int degree;
} integral;
```

- структура, представляющая из себя интеграл со своим значенеим и степенью (количествмо итераций для получения приближённого значения)

```
    double f(double x)
```

- возвращает значение функции в точке x

```
   integral square(int n, double a, double b, double prev,
   double delta, int counter)
```

- функция, принимающая на вход степень интеграла, начало и конец отрезка, значение интеграла на предыдущей итерации и заданную точность. Возвращает значение интеграла на новой итерации

5 Численный анализ решения

5.1 Графики функций

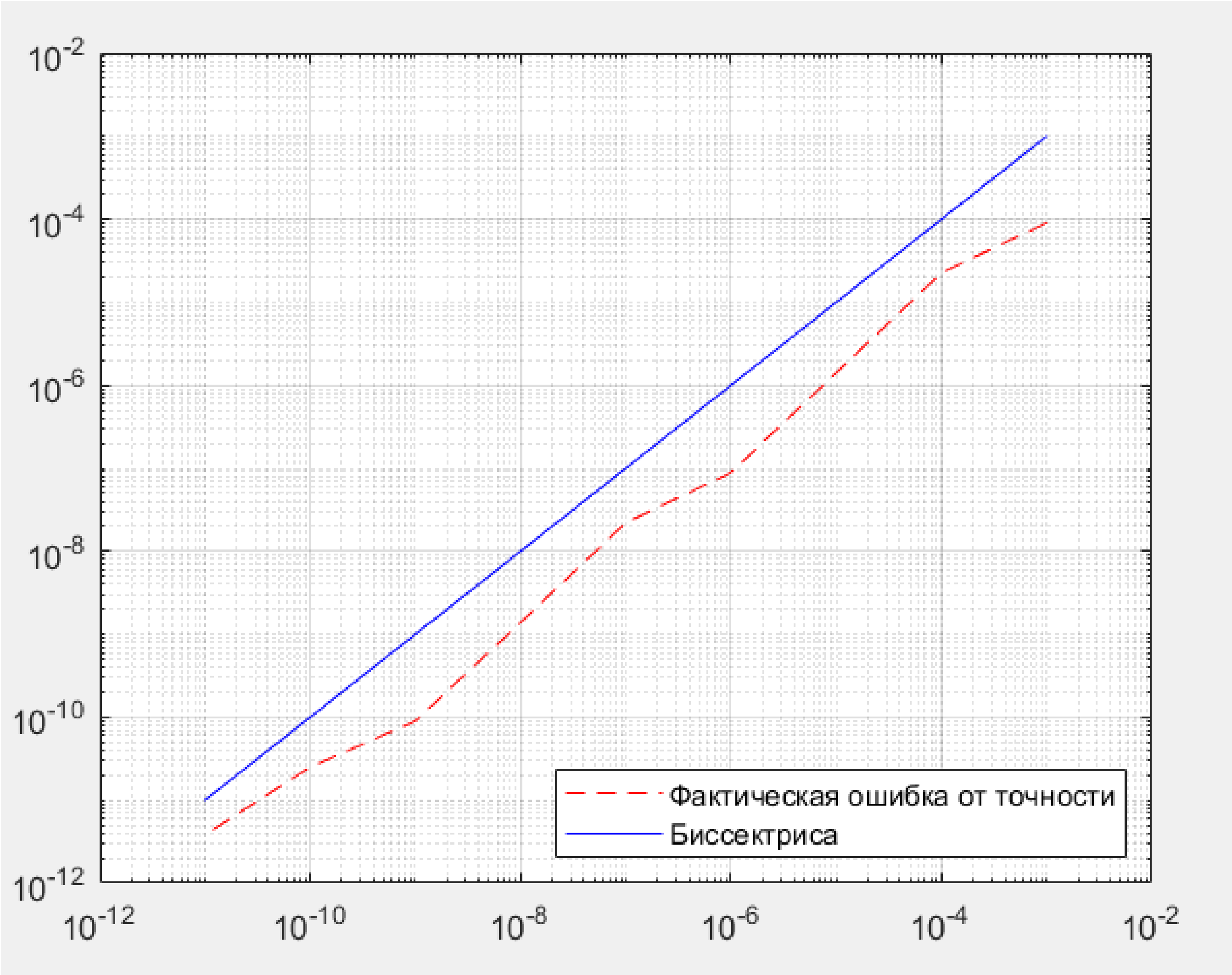


Рис. 2: График зависимости фактической ошибки от заданной точки и биссектрисы

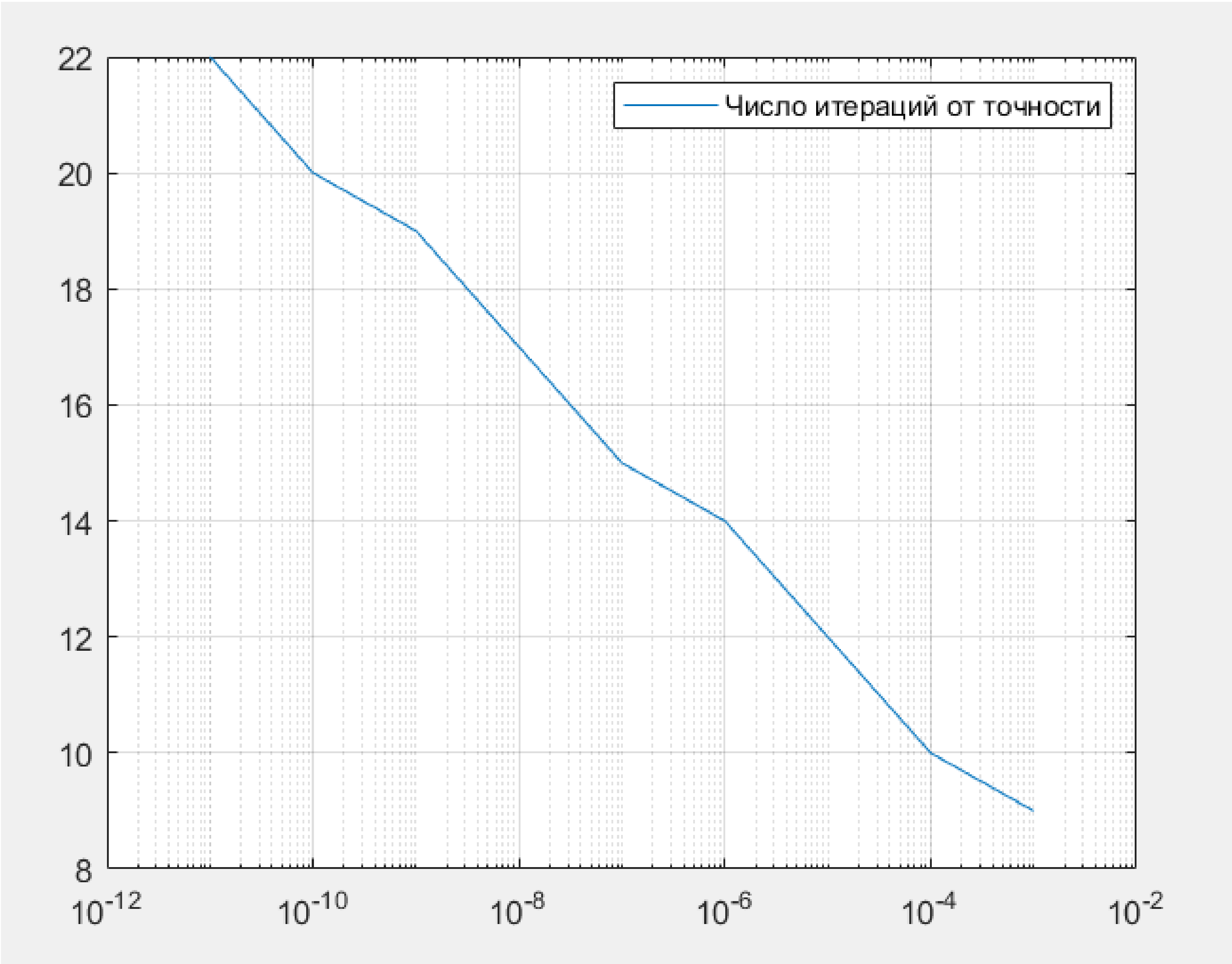


Рис. 3: График зависимости фактической ошибки от заданной точки и биссектрисы

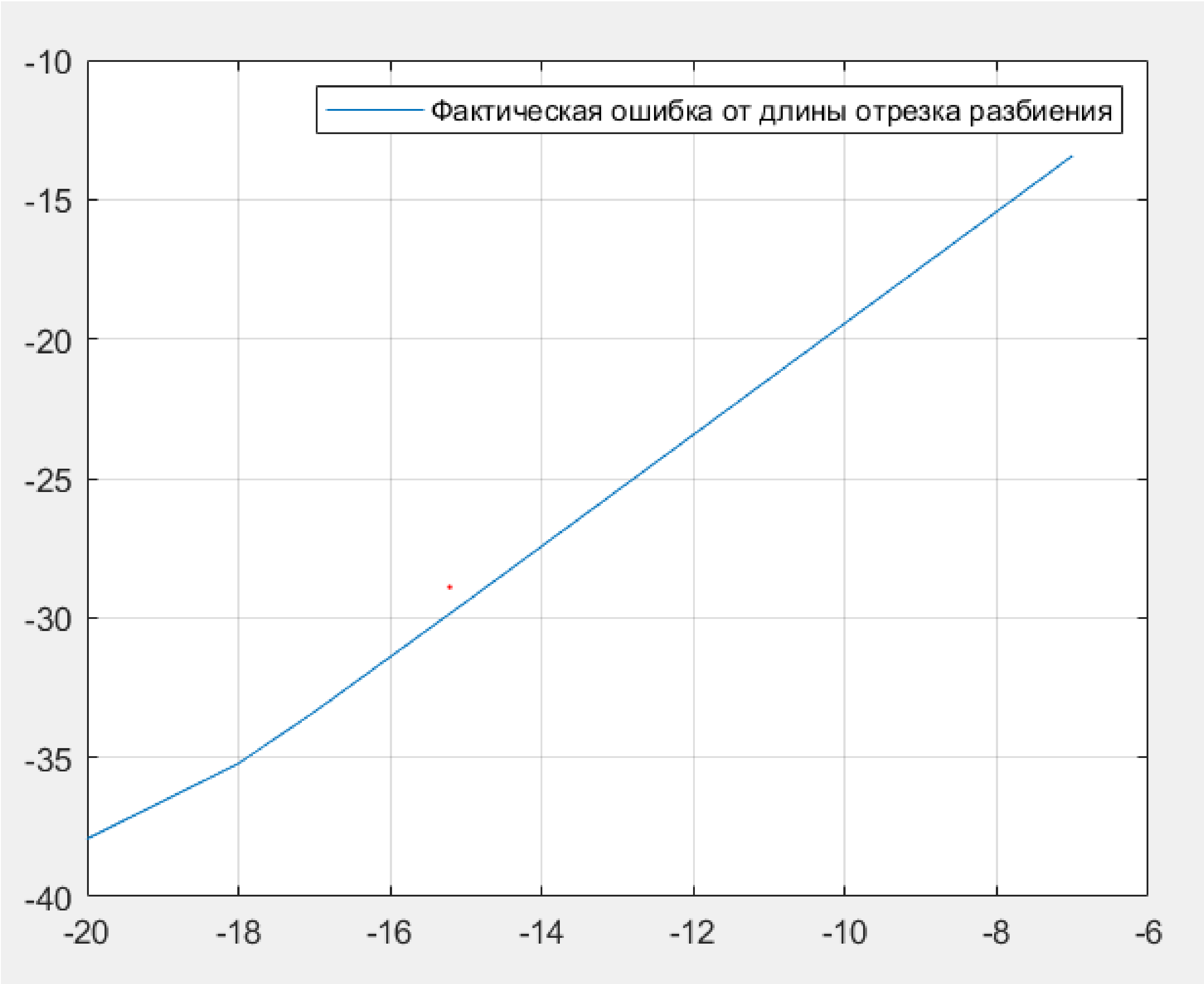


Рис. 4: График зависимости фактической ошибки от заданной точки

5.2 Анализ графиков

На Рис. 2 можно увидеть, что метод всегда вычисляет значение с заданной точностью (значение метода всегда лежит ниже значения на биссектрисе)

На Рис. 3 можно увидеть, что чем мельче точность вычисления, тем больше нужно итераций для завершения метода.

На Рис. 4 можно увидеть, что порядок точности равен 2.

6 Выводы

1. Метод прост в написании и имеет малую вычислительную мощность.
2. Метод позволяет найти приближенное значение интеграла для малых значений точности.