Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по курсовой работе
"Решение интегралов с помощью методов средних прямоугольников и Лобатто"
дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Жохов О. Д.
Преподаватель Козлов К.Н.

Октябрь, 2024

Содержание

1 Формулировка задачи и её формализация

1.1 Формализация задачи

Для вычисления интегралов с помощью квадратурных формул, включая метод средних прямоугольников, сначала определяется интеграл. Затем выбирается формула, определяются узлы и веса. Вычисляется сумма, используя значения функции в узлах и веса. Полученное значение дает приближенный результат.

1.2 Постановка задачи

Требуется найти значение интеграла Римана функции $f(x) = x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x$ на отрезке [-2;0] с помощью формулы средних прямоугольников и Лобатто и исследовать:

1. Зависимость фактической ошибки от заданной точности.
2. Зависимость количества вызовов подынтегральной функции от заданной точности.
3. Зависимость фактической погрешности от количества вызовов подынтегральной функции.

2 Алгоритмы методов и условия применимости

2.1 Условия применимости

$f \in C^2([a, b])$

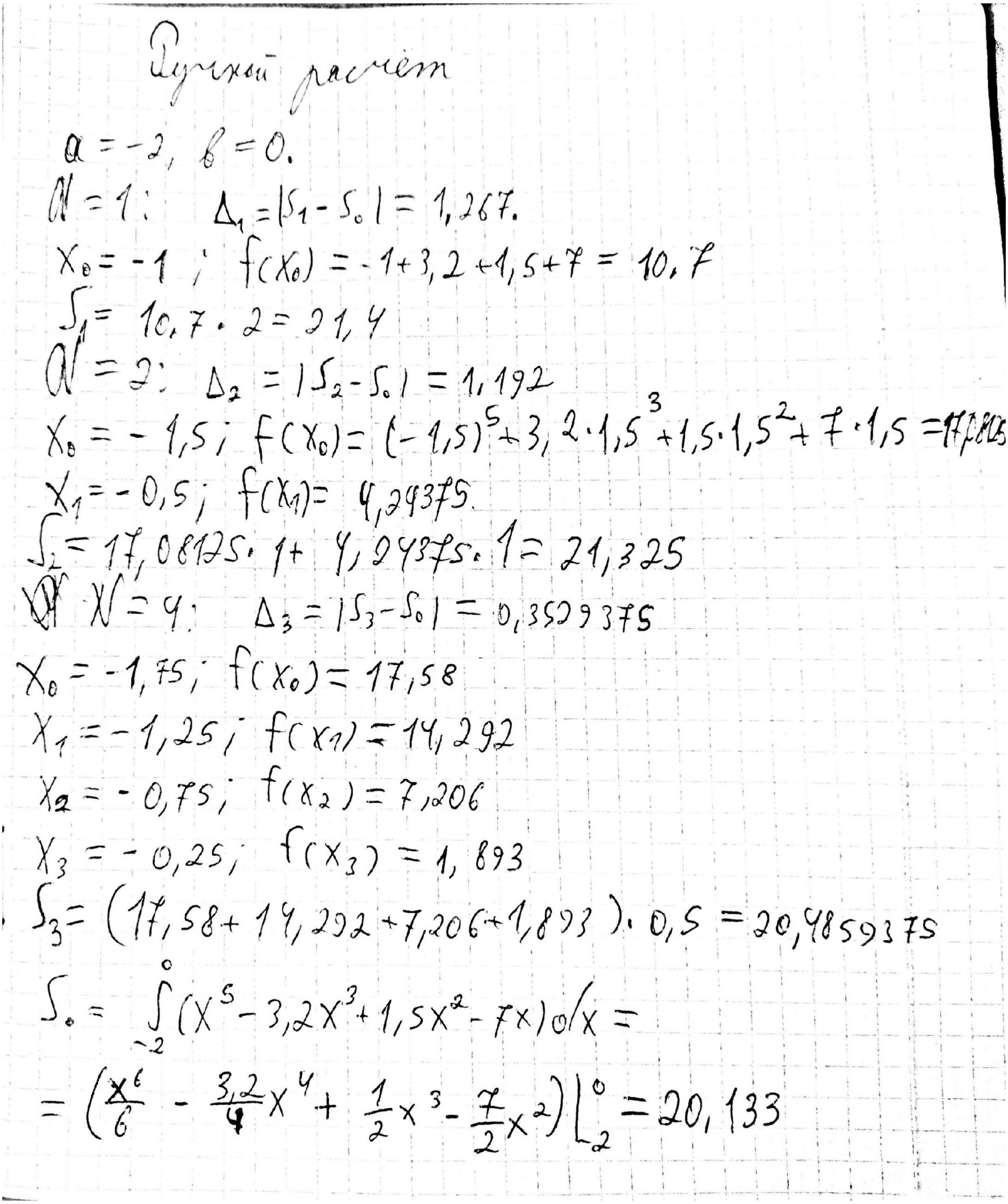
2.2 Алгоритм метода средних прямоугольников

1. Разбить отрезок [a,b] на n равных частей длины h = (b-a)/n
2. Для каждого i прямоугольника найти значение x_i, соответсвующее середине его стороны по оси x
3. Вычислить значения функции найденных точках
4. Найти площадь каждого прямоугольника $S_i = h * f(x_i)$
5. Сложить значения площадей всех треугольников для приближённого значения интеграла.

2.3 Алгоритм метода Лобатто

1. Выбрать отрезок интегрирования $[a, b]$ и заданную точность δ.
2. Задать узлы и веса для квадратур Лобатто на 4 и 5 узлов. Фиксированные узлы - концы отрезка интегрирования.
3. Вычислить значения функции в узлах на отрезке $[a, b]$ для квадратур на 4 и 5 узлов: I_4 и I_5.
4. Найти разность $|I_5 - I_4|$. Если эта разность меньше заданной точности δ, взять I_5 как приближенное значение интеграла на данном отрезке.
5. Иначе разделить отрезок $[a, b]$ на две части $[a, \text{mid}]$ и $[\text{mid}, b]$, где $\text{mid} = \frac{a+b}{2}$. Рекурсивно применить функцию поиска приближенного значения интеграла на каждом отрезке, точность δ на каждом в 2 раза меньше, чем на текущем шаге.
6. Взять сумму значений интегралов на каждом подотрезке для получения приближенного значения на всём интервале.

3 Тестовые примеры


Ручной расчет

$a = -2,\ b = 0.$

$N = 1: \quad \Delta_1 = |S_1 - S_0| = 1,267.$

$x_0 = -1; \quad f(x_0) = -1 + 3,2 + 1,5 + 7 = 10,7$

$S_1 = 10,7 \cdot 2 = 21,4$

$N = 2: \quad \Delta_2 = |S_2 - S_0| = 1,192$

$x_0 = -1,5; \quad f(x_0) = (-1,5)^5 + 3,2 \cdot 1,5^3 + 1,5 \cdot 1,5^2 + 7 \cdot 1,5 = 17,08125$

$x_1 = -0,5; \quad f(x_1) = 4,24375$

$S_2 = 17,08125 \cdot 1 + 4,24375 \cdot 1 = 21,325$

$N = 4: \quad \Delta_3 = |S_3 - S_0| = 0,3529375$

$x_0 = -1,75; \quad f(x_0) = 17,58$

$x_1 = -1,25; \quad f(x_1) = 14,292$

$x_2 = -0,75; \quad f(x_2) = 7,206$

$x_3 = -0,25; \quad f(x_3) = 1,893$

$S_3 = (17,58 + 14,292 + 7,206 + 1,893) \cdot 0,5 = 20,4859375$

$S_0 = \int_{-2}^{0} (x^5 - 3,2x^3 + 1,5x^2 - 7x)\,dx =$

$= \left(\frac{x^6}{6} - \frac{3,2}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = 20,133$

Рис. 1: Тестовый пример для метода средних прямоугольников

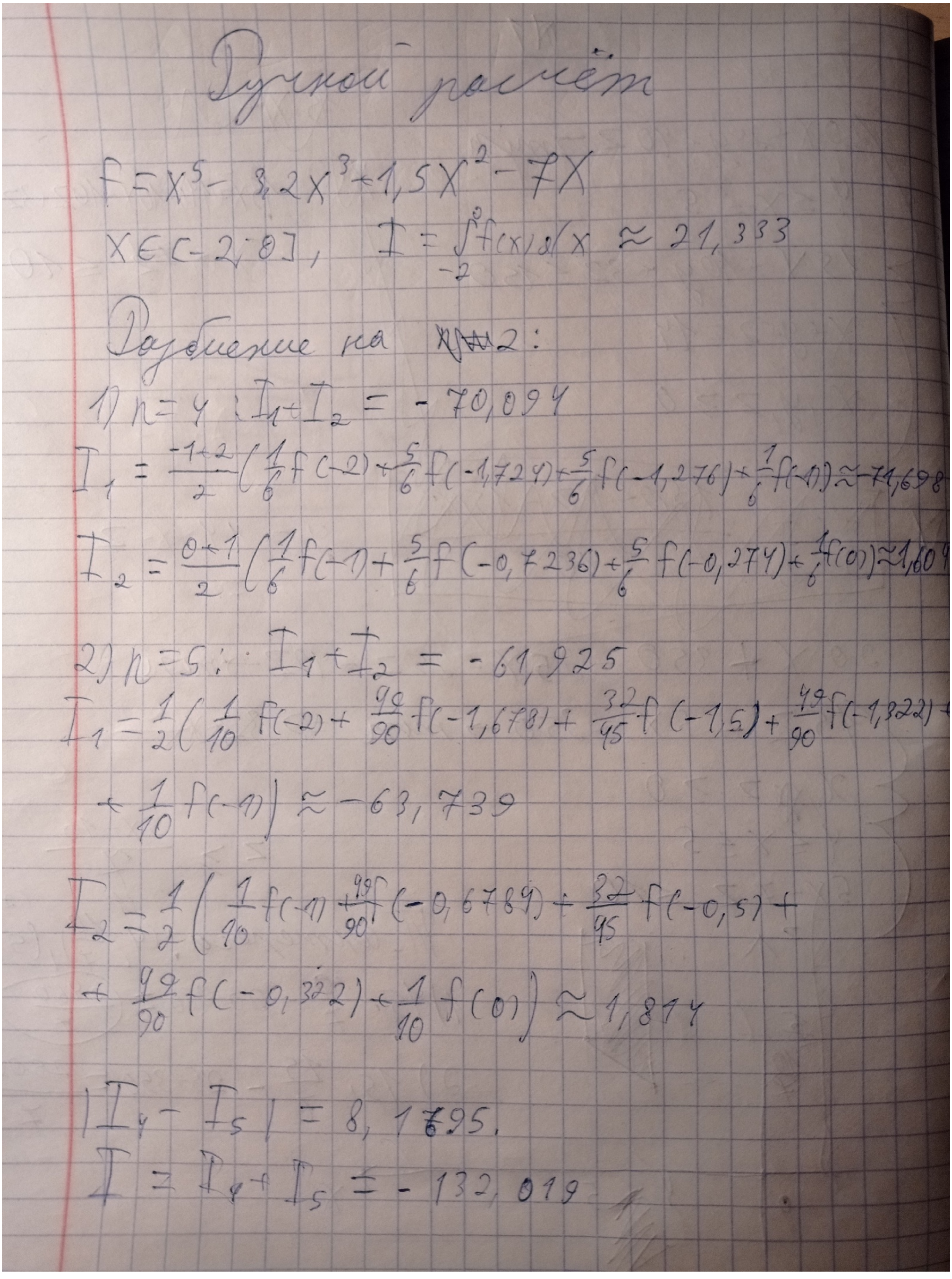


Рис. 2: Тестовый пример для метода Лобатто

4 Подготовка контрольных тестов и модульная структура программы

4.1 Контрольные тесты

Для исследования методов будем рассматривать точности вычисления от $\epsilon = 10^{-7}$ до $\epsilon = 10^{-7}$ функции $f(x) = x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x$ на отрезке [-2;0].

4.2 Модульная структура программы

```
typedef struct {
    double value;
    int degree;
} integral;
```

- структура, представляющая из себя интеграл со своим значенеим и степенью (количествмо итераций для получения приближённого значения)

```
    double f(double x)
```

- возвращает значение функции в точке x

```
   integral square(int n, double a, double b, double prev,
   double delta, int counter)
```

- функция, принимающая на вход степень интеграла, начало и конец отрезка, значение интеграла на предыдущей итерации и заданную точность. Возвращает значение интеграла на новой итерации

```
typedef struct {
    double x;
    double fx;
} Node;
```

- структура, хранящая вычисленные значения функции

```
typedef struct {
    Node* cache;
    int cache_size;
    int function_calls;
} lobatto_data;
```

- структура, хранящая данные о методе Лобатто

```
double get_from_cache(Node* cache, int cache_size, double x)
```

- функция, возвращающая ранее вычисленное значение подынтегральной функции в точке

```
void add_to_cache(Node** cache, int* cache_size, double x, double fx)
```

- функция, добавляющая вычисленное значение подынтегральной функции в точке

```
double cached_f(lobatto_data* data, double x)
```

- функция, соединяющая механизмы работы функций добавления в память и возвращения значения подынтегральной функции из памяти

```
double lobatto_4(lobatto_data* data, double a, double b)
```

- функция вычисления интеграла методом Лобатто для 4 слагаемых на отрезке

```
double lobatto_5(lobatto_data* data, double a, double b)
```

- функция вычисления интеграла методом Лобатто для 5 слагаемых на отрезке

```
double adaptive_lobatto(lobatto_data* data, double a, double b, double delt
```

- функция вычисления интеграла методом Лобатто для заданной точности с использованием адаптивной сетки

5 Численный анализ решения

5.1 Графики

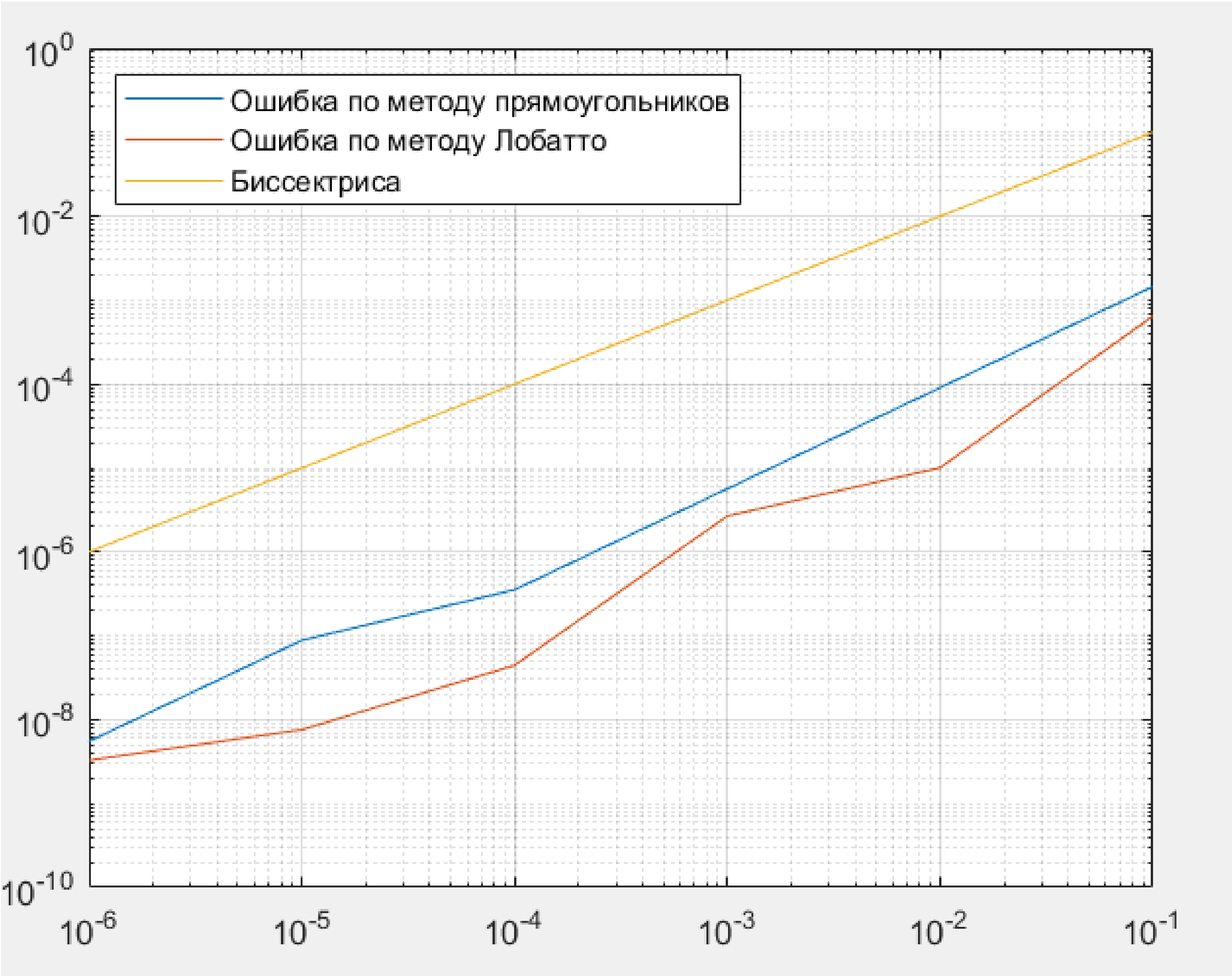


Рис. 3: Зависимость фактической ошибки от заданной точности

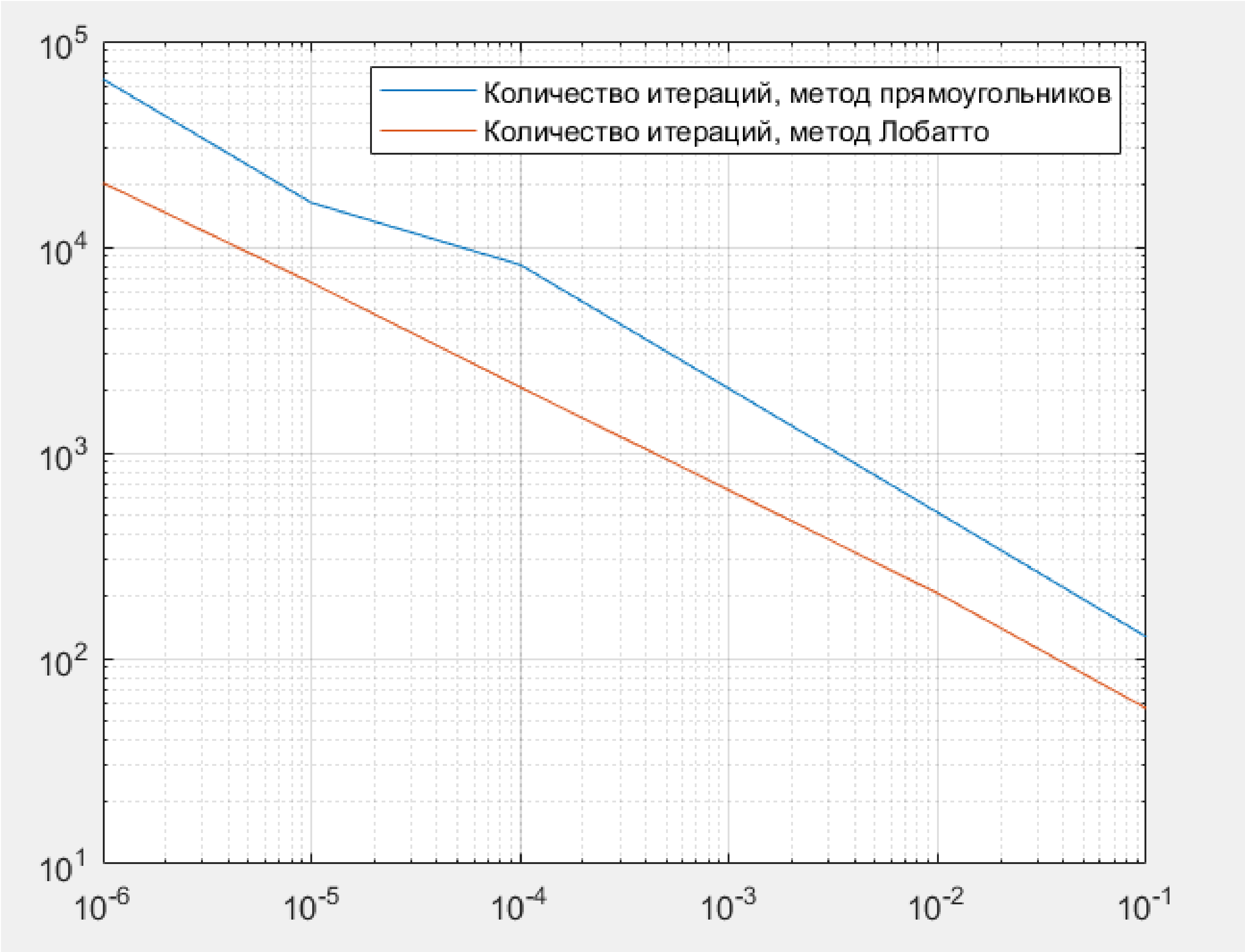


Рис. 4: Зависимость количества вызовов подынтегральной функции от заданной точности

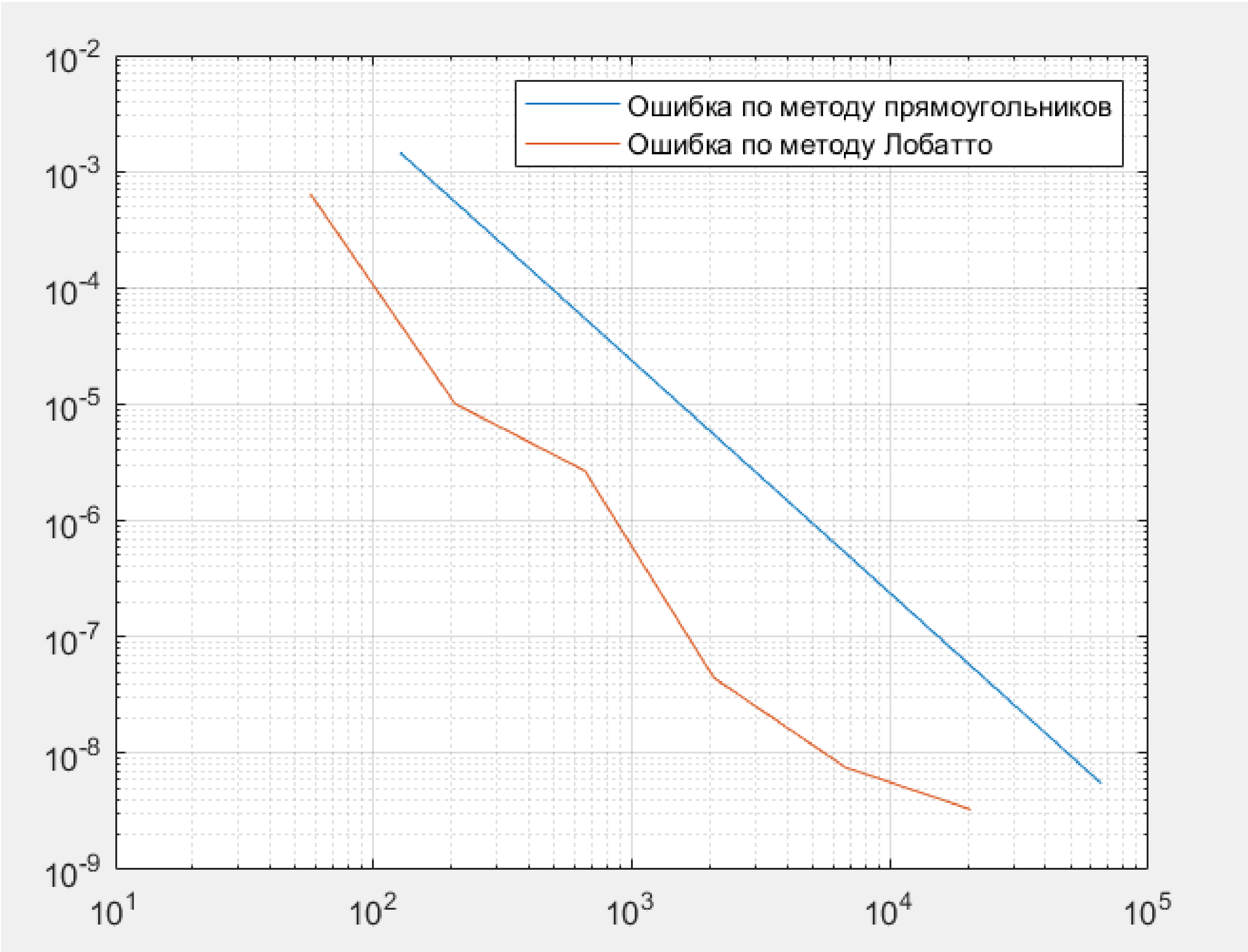


Рис. 5: Зависимость фактической ошибки от количества вызовов подынтегральной функции

5.2 Анализ графиков

1. По рисунку 3 видно, что оба метода достигают заданной точности.
2. По рисунку 4 видно, что метод лобатто справляется с достижением заданной точности за меньшее количество итераций, чем метод средних прямоугольников. Тенденция к повышению количества итераций при уменьшении заданной точности наблюдается у обоих методов.
3. По рисунку 5 видно, что при одинаковом количестве итераций метод Лобатто имеет меньшее отклонение от фактического значения интеграла, нежели метод средних прямоугольников.

6 Выводы

1. Метод средних прямоугольников проще в написании, чем метод Лобатто, однако имеет меньшую вычислительную мощность и точность решения.
2. Метод Лобатто лучше подходит для вычисления приближённых значений интегралов с высокой заданной точностью